부산교육 2015-148

2015
수리논술
나침반 Ⅶ

부산광역시교육청
BUSAN METROPOLITAN CITY OFFICE OF EDUCATION

일러두기

- 본 수리논술나침반 7은 수리논술나침반 시리즈의 7번째 책으로 전국에 있는 2015 학년도 대입 수리논술을 준비하는 학생들과 수학교사들을 위하여 부산수학나침반 수학교사 동아리에서 만들고 부산시교육청에서 발간하는 수리논술 관련 책자입니다.

- 본 교재는 2014년에 치러진 전국 각 대학의 모의 논술과 실제 입시에 출제된 수시 논술 기출문제 위주로 만들어진 책자입니다.

- 교재는 각 대학별 모의 수시 순으로 묶었으며, 각 대학별 모의 논술 및 수시 논술은 다음의 순서로 구성되어 있습니다.

  - 기출문제 : 2014년도 전국대학 모의 및 수시 논술 기출문제
  - 배경지식 쌓기: 해당 논술 문제와 관련되는 교과서 속의 개념을 정리하여 학생들이 논술 문제를 풀기 전에 기본 개념들을 익힐 수 있도록 준비한 공간입니다.
  - 풀어보기 : 해당 대학의 논술 기출문제와 유사한 문제로서 주로 전국 모의고사나 수능에 나왔던 문제 또는 EBS에 있는 문제 위주로 발췌하여 학생들이 어려운 논술의 답안을 작성하기 전에 워밍업을 할 수 있도록 준비한 공간입니다.
  - 읽기자료 : 해당 대학 논술문제의 제시문이나 논제에 관련된 수학적 지식과 내용들이 들어 있어 선생님과 학생들이 제시문과 논제 관련 지식을 깊이 있게 학습할 수 있도록 준비한 공간입니다.

- 학교에서 선생님들이 수업하실 때 편리하게 사용하시도록 대학의 해설 뿐 아니라 자체적으로 제작한 다른 풀이들을 가능한 많이 넣어 두었습니다.

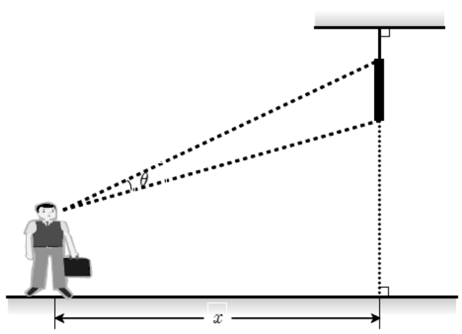
수리논술
나침반Ⅶ

1. 건국대학교 수시 1
2. 경희대학교 모의 14
3. 경희대학교 온라인 모의 27
4. 경희대학교 수시(의학계) 38
5. 경희대학교 수시(자연계A) 50
6. 경희대학교 수시(자연계B) 61
7. 고려대학교 모의 68
8. 고려대학교 수시(A형) 81
9. 고려대학교 수시(B형) 91
10. 광운대학교 모의 103
11. 동국대학교 모의 118
12. 동국대학교 수시 127
13. 부산대학교 모의(1차) 132
14. 부산대학교 모의(2차) 144
15. 부산대학교 수시(논술전형) 154
16. 부산대학교 수시 지역인재전형 I 164
17. 서강대 수시(자연과학부) 178
18. 서강대학교 수시(공대) 193
19. 서울시립대학교 수시 212
20. 성균관대학교 모의 224
21. 성균관대학교 수시(과학인재 공통) 233
22. 성균관대학교 수시(과학인재 선택) 243
23. 성균관대학교 논술우수전형(자연 1교시) 252
24. 성균관대학교 논술우수전형(자연 2교시) 260
25. 아주대학교 모의 268
26. 연세대학교 모의 282
27. 연세대학교 수시 293
28. 이화여자대학교 모의 311
29. 이화여자대학교 수시 일반전형 자연계열 I 331
30. 이화여자대학교 수시 일반전형 자연계열 II 343
31. 인하대학교 모의 349
32. 중앙대학교 모의 366
33. 중앙대학교 수시 374
34. 한양대학교 모의(1차) 381
35. 한양대학교 erica 모의(1차) 390
36. 한양대학교 erica 모의(2차) 400
37. 한양대학교 수시 1 410
38. 한양대학교 수시 2 421
39. 한양대학교 수시 3 431
40. 홍익대학교 수시 일반전형 444

1 건국대학교 수시

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

다음은 천장에 수직으로 매달려 있는 막대기를 건국이가 바라보고 있는 그림이다. 막대기로부터의 수평거리 x에 따라 이 막대기를 바라보았을 때 각 θ의 크기가 달라진다. 각 θ를 측정한 후 삼각비를 이용하여 막대기의 길이를 계산할 수 있다. 건국이가 수평거리 $2\,\mathrm{m}$인 지점에서 막대기를 바라보았을 때 각 θ의 크기가 A, 수평거리 $3\,\mathrm{m}$인 지점에서 막대기를 바라보았을 때 각 θ의 크기가 B일 때 $\tan A = \frac{2}{11}$, $\tan B = \frac{1}{7}$ 이다.



논제 1-1

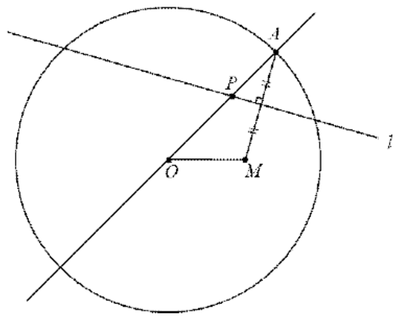
제시문의 막대기의 길이를 구하시오. (단답형)

논제 1-2

지면으로부터 눈까지의 높이를 재었을 때, 건국이의 조카가 건국이보다 $\frac{1}{2}\,\mathrm{m}$ 작다. 수평거리 $x\,\mathrm{m}$인 지점에서 건국이가 제시문의 막대기를 바라보았을 때 각 θ의 크기를 $f(x)$, 건국이의 조카가 막대기를 바라보았을 때 각 θ의 크기를 $g(x)$라 하자. 극한값 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 를 구하고 풀이과정도 함께 쓰시오. (서술형)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 4인 원 O의 내부에 점 M이 있다. 원 O위의 점 A에 대하여 선분 MA의 수직이등분선 l과 직선 OA는 점 P에서 만난다. 점 A가 원 O를 따라 움직일 때 점 P는 어떤 곡선을 따라 움직이게 된다.



(나) 반지름의 길이가 4인 원 O의 외부에 점 N이 있다. 원 O위의 점 A에 대하여 선분 NA의 수직이등분선과 직선 OA의 교점을 Q라고 하자. 점 A가 원 O를 따라 움직일 때 점 Q는 어떤 곡선을 따라 움직이게 된다.

논제 2-1

$\overline{\mathrm{OM}}=2$일 때, 제시문 (가)의 곡선과 선분 OM의 수직이등분선이 만나는 두 점 사이의 거리를 구하시오. (단답형)

논제 2-2

$\overline{\mathrm{OM}}=2$일 때, 점 M을 지나면서 선분 OM에 수직인 직선과 제시문 (가)의 곡선이 만나는 점을 B라 하자. 점 B에서의 곡선의 접선이 직선 OM과 이루는 예각을 θ라고 할 때 $\tan\theta$를 구하고 풀이과정도 함께 쓰시오. (서술형)

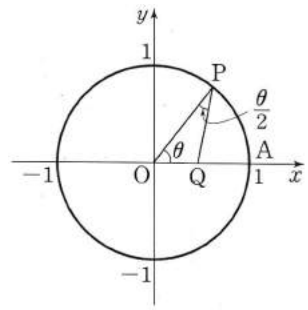
논제 2-3

제시문 (나)에서 $\overline{\mathrm{ON}}=8$이라 하자. 점 O를 지나는 직선 m이 선분 ON과 이루는 각의 크기가 45°라고 하자. 제시문 (나)의 곡선과 직선 m이 만나는 두 점 사이의 거리를 구하고 풀이과정도 함께 쓰시오. (서술형)

풀어보기

문제 1

그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P 와 점 A$(1,\ 0)$ 에 대하여 $\angle\mathrm{POA}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 라 하자. 선분 OA 위의 점 Q 가 $\angle\mathrm{OPA}=\dfrac{\theta}{2}$ 를 만족시킬 때, 삼각형 OPQ 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.) (수능특강 수학Ⅱ)



① $\dfrac{1}{6}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ 1　⑤ 2

문제 2

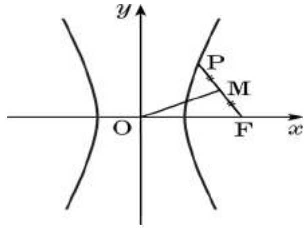
중심이 $(0,\ 3)$ 이고 반지름의 길이가 5 인 원이 x 축과 만나는 두 점을 각각 A, B 라 하자. 이 원과 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 이 만나는 점 중 한 점을 P 라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BP}}$ 의 값은? (2014년 10월 전국연합)

① $\dfrac{41}{4}$　② $\dfrac{21}{2}$　③ $\dfrac{43}{4}$　④ 11　⑤ $\dfrac{45}{4}$

문제 3

그림과 같이 한 초점이 F 이고 점근선의 방정식이 $y=2x$, $y=-2x$ 인 쌍곡선이 있다. 제 1 사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P 에 대하여 선분 PF 의 중점을 M 이라 하자. $\overline{\mathrm{OM}}=6$, $\overline{\mathrm{MF}}=3$ 일 때, 선분 OF 의 길이는? (단, O 는 원점이다.)

(2013년 10월 전국연합)



① $2\sqrt{10}$　② $3\sqrt{5}$　③ $5\sqrt{2}$　④ $\sqrt{55}$　⑤ $2\sqrt{15}$

읽기자료

이차곡선과 포락선

1. 포락선의 이론

포락선이란 하나의 매개변수에 따라 정의된 무한개의 곡선이 있을 때 이 곡선 모두에 접하는 곡선을 이르는 말이다. 즉, 각각의 $t\in(a,b)$ 에 대하여 곡선 C_t 가 있을 때, 이것의 포락선 σ 는 각각의 C_t 모두와 접하는 곡선이다. 이 각각의 C_t 를 방정식으로 나타내어 $F(x,y,t)=0$ 이라고 쓸 수 있다고 하자. 이 때 포락선 σ 의 방정식은 어떻게 구하는가? 계산법을 먼저 이야기하면 C_t 의 방정식을 매개변수 t 에 대하여 (편)미분하여 얻은 방정식 $\dfrac{\partial F}{\partial t}(x,y,t)=0$ 과 $F(x,y,t)=0$ 을 연립해서 t 를 소거하면 된다.

[증명][1)]

C_t 에 접하는 포락선의 점을 $\sigma(t)=(u(t),v(t))$ 라 놓자. 그러면

$$F(u(t),v(t),t)=0 \;\cdots\cdots (1)$$

이고,

$$\frac{\partial}{\partial x}F=F_x\,,\;\frac{\partial}{\partial y}F=F_y\,,\;\frac{\partial}{\partial t}F=F_t$$

등으로 나타내기로 하면 식(1)을 t에 대하여 미분하여

$$F_x(u(t),v(t),t)\times u'(t)+F_y(u(t),v(t),t)\times v'(t)+F_t(u(t),v(t),t)=0 \cdots (2)$$

를 얻는다.

한편 각점 $t=t_0$ 에 대하여, $\sigma(t_0)=(u(t_0),v(t_0))$ 에서 $C_t : F(x,y,t)=0$ 의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(u(t_0),v(t_0),t_0)}{F_y(u(t_0),v(t_0),t_0)} \;\cdots\cdots (3)$$

이다. 또한 σ 는 각 C_t 와 접할 수밖에 없으므로 (3) 으로부터 σ 의 각 점에서

$$-\frac{F_x}{F_y}=\frac{dy}{dx}=\frac{v'(t)}{u'(t)}$$

가 성립한다. 즉, 각 점 $(u(t),v(t),t)$ 에서

$$F_x(u(t),v(t),t)\times u'(t)+F_y(u(t),v(t),t)\times v'(t)=0 \cdots (4)$$

이 성립해야 한다. (2)와 (4)를 비교하여 보면

각 점에서

$$F_t(u(t),v(t),t)=0 \cdots (5)$$

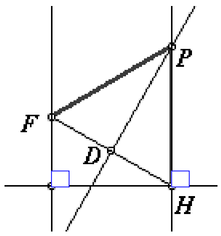
1) 수학과교육 통권 79호

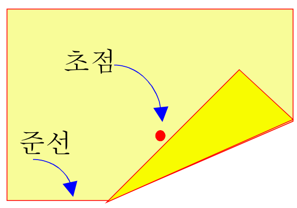
이 성립해야 한다. 다시 말하면 $\sigma(t)=(u(t),v(t))$ 는 방정식 (1), (5)를 모두 만족시키므로 이 두 방정식을 연립하여 t 를 소거하면 구할 수 있다.

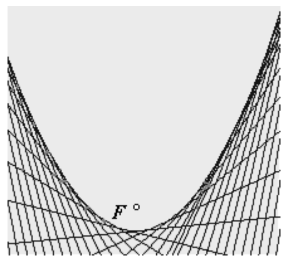
2. 이차곡선과 포락선

가. 포물선

아래그림에서 직선 PD 가 선분 FH 의 수직이등분선이면 점 P 의 자취는 포물선이다. 종이를 아래 그림과 같이 접으면 접힌 선이 직선 PD 가 된다. 이것은 포물선의 접선이며, 이러한 접선들의 외곽선으로 이루어지는 곡선을 포락선(envelope)이라고 한다.

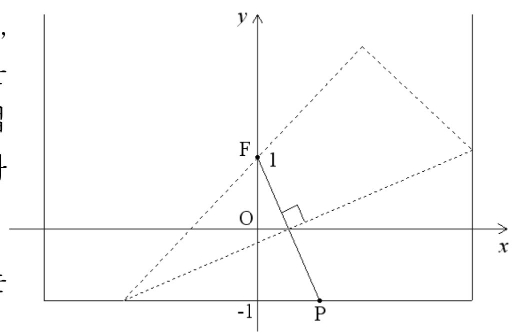






이제 이것을 포락선으로 설명해 보자.

좌표평면위에 종이를 놓아 초점을 F$(0\,,1)$, 준선을 $y=-1$ 이 되도록 하자. 종이를 접었을 때, F 와 만나는 점을 P$(t\,,-1)$ 이라 하면 접힌 선분 FP 의 수직이등분선이 포물선에 접하는 하나의 직선이 된다. 즉, F$(0,1)$, P$(t,-1)$ 에서 선분PF 의 중점은 M$\left(\frac{t}{2},0\right)$, 기울기는 $\frac{1-(-1)}{0-t}=-\frac{2}{t}$ 이므로 선분 PF 의 수직이등분선의 방정식은



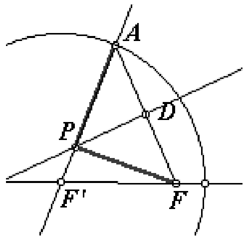
$$y-0=\frac{t}{2}\left(x-\frac{t}{2}\right) \text{ 즉, } \quad 2tx-4y-t^2=0$$

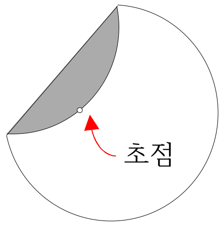
이다. 이 식을 t 로 미분하면 $2x-2t=0$ 이므로 $x=t$ 를 얻는다.

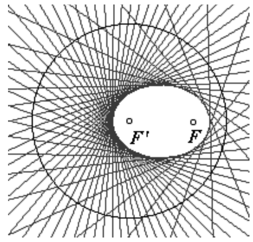
이 식을 $2tx-4y-t^2=0$ 과 연립하면 포물선 $y=\frac{1}{4}x^2$ 을 얻을 수 있다.

나. 타원

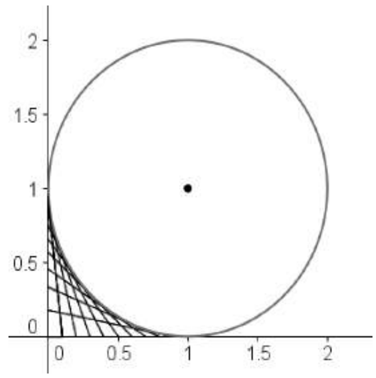
원 F′ 위의 점 A 에 대하여 직선 PD 가 선분 AF 의 수직이등분선이면 $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{F'A}}$=(원의 반지름의 길이)이다. 따라서 점 A 가 원 위를 움직일 때 점 P 의 자취는 타원이다. 종이를 그림과 같이 접으면 접힌 선이 직선 PD 이고 이때의 포락선은 타원이 된다.







여기서는 타원을 찾기 위해서 오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 접선들을 일차변환을 통해 이동시킨 다음 직선들에 접하는 곡선인 포락선을 찾을 것이다.



즉, 오른쪽 그림과 같이 원의 접선을

$$y=\frac{2ak}{(a+1)(a-1)}x+\frac{2ak}{a+1}$$

(이는 a 의 값에 따라 달라지는 무한개의 직선을 의미)

라 두고, 이 직선들을 일차변환

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 에 의해 이동된 곡선을 찾는 것이다.

$F(x,y,a)=y-\dfrac{2ak}{(a+1)(a-1)}x-\dfrac{2ak}{a+1}=0$ 이라고 하면 이 직선들 모두에 접하는 포락선의 방정식은 아래의 두 식을 연립하면 구할 수 있다.

$$\begin{cases} F(x,y,a)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial a}F(x,y,a)=0 \end{cases}$$

이 때 $F(x,y,a)$ 를 a 에 대해 편미분한 식은 $\dfrac{\partial}{\partial a}F(x,y,a)=\dfrac{2k(a^2+2)}{(a^2-1)^2}x-\dfrac{2k}{(a+1)^2}$

이므로 $F(x,y,a)=y-\dfrac{2ak}{(a+1)(a-1)}x-\dfrac{2ak}{a+1}=0$ 과 연립하여 풀면

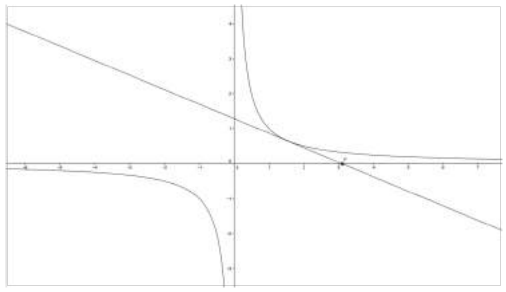
$$\begin{cases} x=1-\dfrac{2a}{a^2+1} \\ y=\dfrac{2a^2k}{a^2+1} \end{cases}$$ 이다.

여기서 a 를 소거하여 x ,y 의 관계식으로 나타내면 포락선의 방정식은

$(x-1)^2+\dfrac{(y-k)^2}{k^2}=1$ 이라는 것을 알 수 있다.

다. 쌍곡선

타원의 경우에서 점 F가 원 밖에 있게 되면 $|\overline{PF'}-\overline{PF}|=|\overline{F'A}|=$(원의 반지름의 길이)이므로 타원과 같은 방법으로 쌍곡선을 접을 수 있다.



x축 위의 한 점 $P(t,0)$에서 해당 곡선과 접하는 직선 l을 긋는다. 이때 x축, y축, 직선 l에 의해 만들어지는 삼각형의 넓이가 항상 2로 일정하다고 하자. 따라서 접선의 방정식은 다음과 같다.

점 P를 지나는 접선의 방정식 : $y=-\dfrac{4}{t^2}x+\dfrac{4}{t}$

t에 관해 미분하기 쉽도록 식을 아래와 같이 고친다.

$$t^2y+4x-4t=0\ ,\ \ F(x,y,t)=t^2y+4x-4t$$

위 식을 t에 관해 편미분하면 $\dfrac{\sigma}{\sigma t}F(x,y,t)=2ty-4$ 이다.

$$\begin{cases} 2ty-4=0 \\ t^2y+4x-4t=0 \end{cases}$$

두 식을 연립하면 $x=\dfrac{t}{2}$, $y=\dfrac{t}{2}$ 이고 t를 소거하면 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 쌍곡선의 방정식을 얻을 수 있다.

예시답안

풀어보기

문제 1

삼각형 OPQ 에서 $\angle POA=\theta$, $\angle OPQ=\dfrac{\theta}{2}$ 이므로 $\angle OQP=\pi-\left(\theta+\dfrac{\theta}{2}\right)=\pi-\dfrac{3}{2}\theta$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{OQ}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{\overline{OP}}{\sin\left(\pi-\dfrac{3}{2}\theta\right)}$

그런데 $\overline{OP}=1$ 이므로 $\overline{OQ}=\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\left(\pi-\dfrac{3}{2}\theta\right)}$

$$=\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{3}{2}\theta}$$

따라서 삼각형 OPQ 의 넓이 $S(\theta)$ 는 $S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{OQ}\times\sin\theta=\dfrac{\sin\theta\sin\dfrac{\theta}{2}}{2\sin\dfrac{3}{2}\theta}$.

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta\sin\dfrac{\theta}{2}}{2\theta\sin\dfrac{3}{2}\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}}\cdot\frac{\dfrac{3}{2}\theta}{\sin\dfrac{3}{2}\theta}\cdot\frac{1}{6}\right)$$

이때 $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$, $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}}=1$, $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\dfrac{3}{2}\theta}{\dfrac{3}{2}\theta}=1$ 이므로

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}=\frac{1}{6}\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}}\cdot\lim_{\theta\to+0}\frac{\dfrac{3}{2}\theta}{\sin\dfrac{3}{2}\theta}$$

$$=\frac{1}{6}\times1\times1\times1$$

$$=\frac{1}{6}$$

문제 2

$x^2+(y-3)^2=5^2$ 에서 $y=0$ 일 때, $x=4$ 또는 $x=-4$

따라서 원이 x축과 만나는 두 점의 좌표는 각각 $A(-4,0)$, $B(4,0)$ 으로 놓을 수 있다.

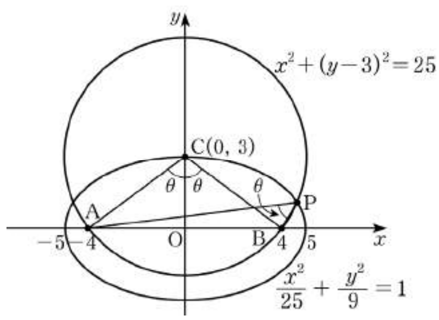
그런데 이 두 점은 타원의 초점이고 점 P는 타원 위의 점이므로 $\overline{AP}+\overline{BP}=10$ … ㉠

삼각형 APB 에서 $\angle APB=\theta$ 라 하면 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2-2\times\overline{AP}\times\overline{BP}\times\cos\theta=8^2$ … ㉡

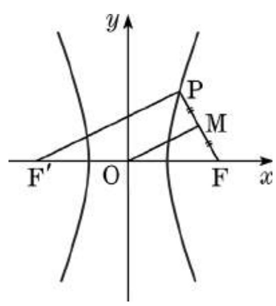
각 $\angle APB$ 는 호 AB 의 원주각이고, 원의 중심을 $C(0,3)$ 이라 하면 각 $\angle ACB$ 는 호 AB 의 중심각이다. 따라서 $\angle ACB=2\theta$ 에서 $\angle OCA=\angle APB=\theta$

이때, $\overline{AC}=5$, $\overline{OC}=3$ 이므로 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ … ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\overline{AP}\times\overline{BP}=\dfrac{45}{4}$



문제 3



쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ \ b>0)$ 이라 하면 점근선의 방정식이 $y=2x$, $y=-2x$ 이므로 $\dfrac{b}{a}=2$, $b=2a$

쌍곡선의 또 다른 초점을 점 F′ 이라 하면 삼각형 PF′F 에서 점 O 는 변 F′F 의 중점이고 점 M 은 변 PF 의 중점이므로 $\overline{PF'}=2\overline{OM}=12$

$\overline{PF}=2\overline{MF}=6$

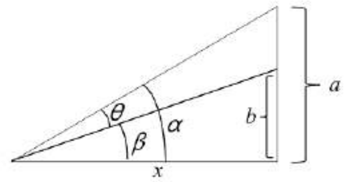
$\left|\overline{PF'}-\overline{PF}\right|=12-6=6=2a$

$\therefore\ a=3,\ b=2a=6$

$\therefore\ \overline{OF}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$

논제 1-1

그림에서 $\tan\alpha=\dfrac{a}{x}, \tan\beta=\dfrac{b}{x}$ 이므로



$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x}}{1+\dfrac{a}{x}\dfrac{b}{x}}=\dfrac{(a-b)x}{x^2+ab}$ 이 성립한다.

$x=2, x=3$ 을 각각 대입해 보면,

$$\tan A=\frac{2}{11}=\frac{2(a-b)}{4+ab}, \tan B=\frac{1}{7}=\frac{3(a-b)}{9+ab}$$

위 식을 정리하면, $\begin{matrix} 11(a-b)=4+ab \\ 21(a-b)=9+ab \end{matrix}$ 이고, 이를 연립하여 $a-b=\dfrac{1}{2}$ 을 얻는다.

즉, 막대기의 길이는 $\dfrac{1}{2}$ m이다.

논제 1-2

논제 1-1에서 $\begin{matrix} 11(a-b)=4+ab \\ 21(a-b)=9+ab \end{matrix}$ 을 연립하여 풀면, $a=\dfrac{3}{2}, b=1$ 을 얻는다. (건국이의 경우)

조카의 경우에 건국이의 a, b 에 대응되는 값을 a', b' 라 하면, $a'=a+\dfrac{1}{2}, b'=b+\dfrac{1}{2}$,

즉, $a'=2, b'=\dfrac{3}{2}$ 임을 알 수 있다.

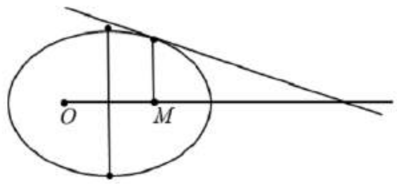
그러므로, $\tan f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2}x}{x^2+\dfrac{3}{2}}=\dfrac{x}{2x^2+3}$, $\tan g(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2}x}{x^2+2\times\dfrac{3}{2}}=\dfrac{x}{2x^2+6}$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0, \lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ 이고, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan f(x)}{\tan g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+6}{2x^2+3}=2$ 임을 이용하여 극한값을 구하면,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\tan f(x)}\times\dfrac{\tan g(x)}{g(x)}\times\dfrac{\tan f(x)}{\tan g(x)}=1\times1\times2=2$ 이다.

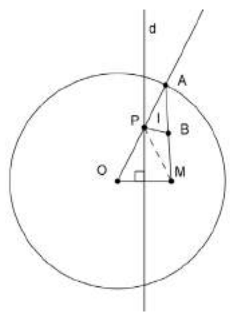
논제 2-1

점 P 가 선분 MA 의 수직이등분선 위의 점이므로 $\overline{PM}=\overline{PA}$ 이고, $\overline{OP}+\overline{PM}=\overline{OP}+\overline{PA}=4$ 로 거리의 합이 일정하다.
따라서 점 P 는 두 점 O, M 을 초점으로 하고 장축의 길이가 4 인 타원 위의 점이다.
장축의 길이가 4 이고, 초점 사이의 거리가 2 이므로, 단축의 길이는 $2\sqrt{3}$ 이다.
OM 의 수직이등분선과 타원의 두 교점 사이의 거리는 단축의 길이와 같으므로 답은 $2\sqrt{3}$ 이다.



(다른 풀이)

$\overline{OM}$ 의 수직이등분선과 곡선과 만나는 점을 P 라 하자. 이 점은 제시문(가)에 의한 점이므로, 반직선 OP 를 그어 원 O 와 만나는 점을 A, $\overline{MA}$ 의 중점을 B, PB 를 연결한 선을 l 이라 하면, $\angle PBA=90^\circ$ 가 된다. 그러므로 $\triangle POM$, $\triangle PMA$ 는 이등변 삼각형이 되고, $\angle POM=\alpha$ 라 두면, $\angle PMB=(90-\alpha)^\circ$ 가 되어 $\triangle OMA$ 는 직각삼각형이 된다. 그러므로 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{AM}=2\sqrt{3}$ 이 되고, P 에서 $\overline{OM}$ 까지 거리는 $\sqrt{3}$ 이 된다.



$\overline{OM}$ 의 수직이등분선과 곡선과 만나는 또 다른 점을 P′ 라 하면 이 점은 $\overline{OM}$ 을 기준으로 P 의 대칭점이므로 두 점 사이의 거리는 $2\sqrt{3}$ 이 된다.

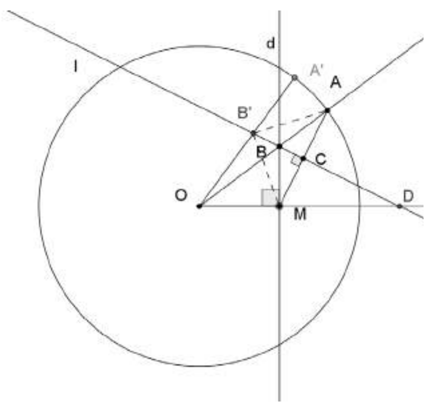
논제 2-2

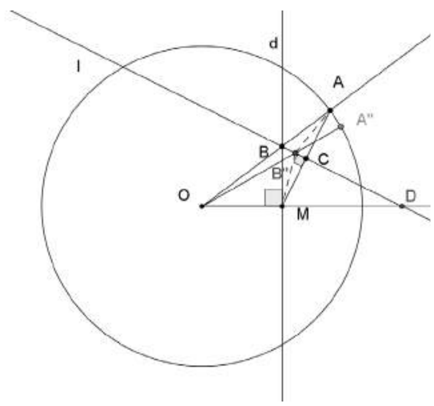
두 점 $O(-1,0)$ 와 $M(1,0)$ 을 초점으로 하고 장축의 길이가 4 인 타원의 방정식을 구하면, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 이다. 직선 $x=1$ 과 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 의 교점이 $\left(1, \pm\frac{3}{2}\right)$ 이고, x 축과 이루는 예각을 θ 라고 했으므로, 타원 위의 점 $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ 에서 그은 접선의 기울기를 구하면 된다. 점 $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ 에서 그은 접선의 방정식은 $\frac{x}{4}-\frac{y}{2}=1$, 즉 $x-2y=4$. 그러므로 $\tan\theta=\frac{1}{2}$ 이다.

(다른 풀이)

논제 2-2와 같이 그림을 그린 후 점 B는 제시문 (가)에서 언급한 곡선 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{OB}}$의 연장선과 원과 만나는 점을 A, $\overline{\mathrm{MA}}$의 수직이등분선을 l이라 하면 이것은 점 B를 지난다. 점 A는 연속적으로 지나므로 직선 l이 이 곡선의 접선이 된다.

이것에 대한 부연 설명을 하면 점 A′를 점 A보다 조금 위에 두도록 하자. 그러면 $\overline{\mathrm{OA'}}$ 위에 제시문(가)를 만족하는 점 B′가 존재한다. 이것을 직선 l과의 교점이라 가정하자. 그러면 $\overline{\mathrm{OA'}}$는 원의 반지름이고 중심이 점 B′이고 반지름이 $\overline{\mathrm{B'A'}}$인 원은 원 O에 들어가므로, $\overline{\mathrm{B'A'}} < \overline{\mathrm{B'A}}$가 된다. $\overline{\mathrm{B'M}} = \overline{\mathrm{B'A}}$이므로 모순이 되고 제시문(가)를 만족하는 점 B′는 직선 l보다 밑에 있음을 알 수 있다. 이번에는 점 A″를 점 A보다 조금 아래에 두도록 하자. 그러면 $\overline{\mathrm{OA''}}$ 위에 제시문(가)를 만족하는 점 B″가 존재한다. 이것을 직선 l과의 교점이라 가정하자. 앞에서와 마찬가지 이유로 $\overline{\mathrm{B''A''}} < \overline{\mathrm{B''A}} = \overline{\mathrm{B''M}}$이 되어 $\overline{\mathrm{B''M}} = \overline{\mathrm{B''A}}$이므로 모순이 되고 제시문(가)를 만족하는 점 B″는 직선 l보다 밑에 있음을 알 수 있다. 그러므로 직선 l은 접선이 된다.





$\overline{\mathrm{BM}} = x$, $\overline{\mathrm{OB}} = 4 - x$, $\overline{\mathrm{OM}} = 2$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해

$(4-x)^2 = x^2 + 2^2$

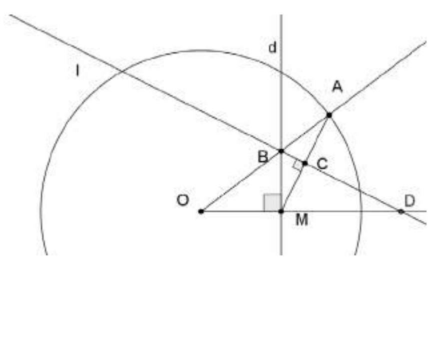
$x = \dfrac{3}{2}$ 이다.

$\triangle$BMA는 이등변삼각형이고,

$\beta = \angle\mathrm{BAM} = \angle\mathrm{BMA} = \angle\mathrm{BDM}$

$\angle\mathrm{OBM} = 2\beta$ 이므로 $\dfrac{4}{3} = \tan 2\beta = \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$

$\tan\beta = \dfrac{1}{2}$ 또는 -2 인데 예각이므로 $\tan\beta = \dfrac{1}{2}$

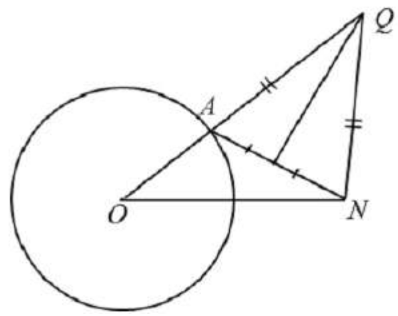


논제 2-3

점 Q 가 선분 AN 의 수직이등분선 위의 점이므로,

$\overline{AQ} = \overline{QN}$.

$\overline{OQ} - \overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OQ} - \overline{QN} = 4$ 이므로, 점 Q 는 두 점 O 와 N 을 두 초점으로 하고 주축의 길이가 4 인 쌍곡선 위의 점이다. $O(-4,0), N(4,0)$ 이라 두고 이 쌍곡선의 방정식을 구하면, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.



점 O 를 지나고 기울기가 1 인(선분 ON 과 이루는 각이 45° 이므로) 직선의 방정식은 $y = x + 4$ 이다. 이 직선과 쌍곡선의 방정식을 연립하여 교점을 구해 보자.

$2x^2 - 8x - 28 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면, $\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = -14$ 이고,

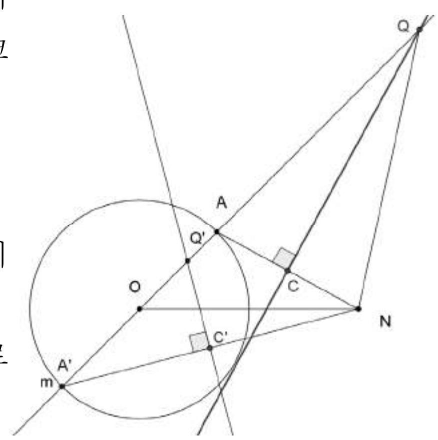
두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{2(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{2\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}} = 12$ 이다.

(다른 풀이)

$\overline{ON}$ 과 45° 가 되도록 직선 m 을 그어 주면, m 위에 제시문 (나)를 만족하는 점 Q 이 존재한다. A 점이 원 O 와 직선 m 과의 교점이 아니면 원의 중심 O 가 점 Q 가 되어 모순이 된다. 원 O 와 직선 m 과의 교점이 점 A 가 됨을 알 수 있다.

m 은 원의 중심을 지나는 직선이기 때문에 두 개의 교점 A , A′ 가 존재하는데 이에 따라 곡선과의 교점 Q 와 Q′ 가 존재 한다.

제시문 (나)에 맞게 그림을 그려 주면 다음과 같이 되는데 $\overline{OQ} = x$ 라 두면 $x - 4 = \overline{AQ} = \overline{NQ}$ 이므로 코사인 법칙에 의해



$(x-4)^2 = x^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cos 45^\circ$

$x = 6\sqrt{2} + 6$

점 N 이 원 밖에 있으므로 점 Q′ 의 경우 $\overline{OQ}$ 위에 존재 하게 된다.

그러므로 $\overline{OQ'} = y$ 라 두면 $4 + y = \overline{A'Q'} = \overline{NQ'}$ 이므로 코사인 법칙에 의해

$(4+y)^2 = y^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot y \cos 45^\circ$

$y = 6\sqrt{2} - 6$ 이 된다.

그러므로 $\overline{QQ'} = (6\sqrt{2} + 6) - (6\sqrt{2} - 6) = 12$ 이 된다.

2 경희대학교 모의

※ 제시문 [가], [나], [다]를 읽고 논제에 답하시오.

[가] 자연계에서 눈이나 광물의 결정, 일상생활에서 길거리의 보도블록이나 욕실의 타일, 상품의 포장지 문양에서 회전이동이나 대칭이동을 이용한 예를 많이 찾아볼 수 있다. 또 우리가 어릴 때 한 번쯤 가지고 놀았던 만화경은 19세기 초 유럽에서 만들어진 것인데, 만화경을 이리저리 돌리면 아주 재미있고 예쁜 모양이 대칭적으로 나타난다. 이때 나타나는 여러 가지 모양도 회전이동과 대칭이동의 원리로 설명할 수 있다. 이와 같은 도형의 이동을 변환이라고 하는데 회전이동, 대칭이동, 닮음이동과 같은 것을 특히 일차변환이라고 한다. 일차변환을 나타내는 식은 행렬을 이용하여 표현할 수 있다.

[나] 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2, z_2)$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 크기 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$는 다음과 같이 정의된다.

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

특히, 원점 $\mathrm{O}(0,0,0)$와 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 크기 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$는 다음과 같이 정의된다.

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

좌표공간에서 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적 $\vec{a} \circ \vec{b}$은 두 벡터가 이루는 각의 크기 θ를 사용하여 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

[다] 주기적으로 변하는 해수면의 높이는 높아지는 시간과 낮아지는 시간이 반복된다. 바닷물이 들어와 해수면이 가장 높아졌을 때를 만조, 바닷물이 빠져나가 해수면이 가장 낮아졌을 때를 간조라고 한다. 어느 지역의 시간의 흐름에 따른 해수면의 높이를 나타내는 함수가 주어졌을 때, 해수면이 높아지는 구간에서의 순간변화율은 양수이고, 낮아지는 구간에서의 순간변화율은 음수이다. 이와 같이 도함수의 부호를 이용하여 함수의 증가와 감소를 조사할 수 있다.

논제 1-1

점 $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ 와 r , θ 가 주어졌을 때, 다음과 같이 점 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1, z_1)$ 가 정의된다.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},\ z_1 = r z_0$$

이를 일반화하여 점 $P_k(x_k, y_k, z_k)$ 가 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix},\ z_k = r z_{k-1}\ (k \ge 1)$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_0}\right| = a$ 라고 가정하고, $l_k = \left|\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k-1}}\right|$ 를 a 와 r 에 대한 식으로 표현하고, 그 방법을 서술하시오.

논제 1-2

원점을 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$ 라고 할 때, 점 P_k , P_{k-1} , O 가 세 꼭짓점인 삼각형을 $\mathrm{T}_k = \triangle \mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{O}$ 라고 하자. 이러한 삼각형 T_k $(k \ge 1)$ 들이 모두 닮음임을 논술하시오.

논제 1-3

논제 1-2에서 실수 r 이 $\frac{1}{2} \le r \le \frac{4}{5}$ 이고, $\theta = 90^\circ$, $\mathrm{P}_0(1,0,1)$ 라 하자. 이것으로부터 생성되는 P_k 로 만들어지는 삼각형 $\mathrm{T_k}$ 의 넓이를 $|\mathrm{T}_k|$ 라 하고, 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} |\mathrm{T}_k|,\ b_n = \sum_{k=1}^{n} \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_k}\right|\ (n \ge 1)$$

이때, $\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)^2}$ 의 최댓값을 구하고, 그 방법을 서술하시오.

논제 1-4

논제 1-3에서 $r = \frac{1}{2}$ 인 경우, 삼각형 $\mathrm{T}_1 = \triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_0\mathrm{O}$ 을 이 삼각형의 한 변 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_0}$ 를 회전축으로 하여 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하고,그 방법을 서술하시오.

배경지식 쌓기

1. 일차변환의 정의

벡터공간[2] V 에서 벡터공간 W 로의 함수 T 가 모든 벡터 $u, v \in V$ 와 스칼라 α 에 대하여 다음을 만족할 때 T 를 선형변환 (또는 일차변환, linear transformation) 이라 한다.

① $T(u+v) = T(u) + T(v)$

② $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

위와 같이 정의하면 일차변환은 역행렬이 존재할 경우 직선은 직선으로, 선분은 선분으로, 분점은 분점으로 이동시킨다. 또한 이동했을 때의 나누는 비도 변하지 않게 되며 평행을 유지시켜준다.

2. 여러 가지 일차변환

가. 항등변환

좌표평면 위의 임의의 점 $P(x,y)$ 에 그 자신을 대응시키는 일차변환 $f:(x,y) \rightarrow (x,y)$ 를 항등변환이라 한다. 이 때 변환식은

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

나. 닮음변환

k 가 0 이 아닌 실수일 때, 좌표평면 위의 임의의 점 $P(x,y)$ 에 점 $P'(kx,ky)$ 를 대응시키는 일차변환 $f:(x,y) \rightarrow (kx,ky)$ 을 원점을 중심으로 하는 $|\boldsymbol{k}|$ 배의 닮음변환이라 한다. 이 때 변환식은

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ (k \neq 0)$$

다. 대칭변환

좌표평면 위의 점 $P(x,y)$ 의 직선(또는 점)에 관한 대칭이동은 일차변환이고, 변환식과 대칭변환을 나타내는 행렬은 다음과 같다.

2) 여기서 말하는 벡터공간은 어떤 정하여진 조건을 맞는 집합을 의미한다. 이때 벡터는 크기와 방향을 갖는 물리적인 대상만이 아니라 이 공간의 원소를 의미한다.

대칭변환	x 축	y 축	원점	$y=x$	$y=-x$
변환식	$\begin{cases}x'=x\\y'=-y\end{cases}$	$\begin{cases}x'=-x\\y'=y\end{cases}$	$\begin{cases}x'=-x\\y'=-y\end{cases}$	$\begin{cases}x'=y\\y'=x\end{cases}$	$\begin{cases}x'=-y\\y'=-x\end{cases}$
행렬	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$

라. 회전변환

점 $P(x,y)$ 를 원점을 중심으로 각의 크기 θ 만큼 시계반대방향으로 회전하여 점 $P'(x',y')$ 에 대응시키는 회전이동은 일차변환이고, 이 때 변환식은

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

로 주어지므로 도형의 회전변환의 행렬은 $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ 이다.

마. 여러 가지 일차변환

행렬	$\begin{pmatrix}k&0\\0&1\end{pmatrix}$	$k>1$ 인 경우: x 축의 방향으로 확대 $0<k<1$ 인 경우: x 축의 방향으로 축소
	$\begin{pmatrix}1&0\\0&k\end{pmatrix}$	$k>1$ 인 경우: y 축의 방향으로 확대 $0<k<1$ 인 경우: y 축의 방향으로 축소
	$\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}$	x 축의 방향으로 층 밀림
	$\begin{pmatrix}1&0\\k&1\end{pmatrix}$	y 축의 방향으로 층 밀림

☞ 층 밀림 변환은 면적의 변화가 없다.[3]

4. 벡터의 외적

좌표공간에서 두 벡터 (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3) 에 모두 수직인 벡터를 구하여 보자. 구하고자 하는 벡터를 (x,y,z) 라 하면, 수직인 관계로부터 연립방정식

$$\begin{cases}a_1x+a_2y+a_3z=0\\b_1x+b_2y+b_3z=0\end{cases}$$

을 얻게 된다. 위의 식의 양변에 b_3 을 곱하여 아래 식의 양변에 a_3 을 곱한 것을 빼면, $(a_1b_3-a_3b_1)x+(a_2b_3-a_3b_2)y=0$ 을 얻는다. 이 방정식의 한 해는

$$\begin{cases}x=a_2b_3-a_3b_2\\y=a_3b_1-a_1b_3\end{cases}$$

이다. x, y 를 연립방정식에 대입하면, $z=a_1b_2-a_2b_1$ 이 방정식의 해임을 알 수 있다.

3) 일차변환 중에서 각의 크기와 길이를 유지시키지 않는 예이다.

따라서 벡터 $(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$ 는 두 벡터 (a_1,a_2,a_3) 와 (b_1,b_2,b_3) 에 모두 수직이다.

일반적으로, 두 3차원 벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 에 대하여, 다음 벡터를 두 벡터의 외적이라 하고 기호 '×'를 사용하여 나타낸다.

$$(a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3)=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

따라서 두 벡터의 외적 $\vec{a}\times\vec{b}$ 는 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 에 모두 수직이다. 즉,

$$(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{a}=0,\ (\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{b}=0$$

또한, 두 3차원 벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 의 외적의 크기는 3차 정사각행렬의 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\left|\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}\right|=|(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)|$$

가. 외적의 성질

1) $\vec{b}\times\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{b})$

2) $\vec{a}\times(k\vec{b}\times l\vec{c})=k(\vec{a}\times\vec{b})+l(\vec{a}\times\vec{c})$

3) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

4) $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{a}=0,\ (\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{b}=0$

나. 외적의 활용

1) 평면의 법선벡터를 구할 때

2) 세 점으로 이루어진 삼각형의 넓이를 구할 때

$$\triangle\text{OAB 의 넓이}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\text{OA}}||\overrightarrow{\text{OB}}||\sin\theta|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\text{OA}}\times\overrightarrow{\text{OB}}|=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}\right|$$

($a_3=b_3=0$ 이면 좌표평면에서 삼각형의 넓이)

3) 사면체의 부피를 구할 때

사면체 OABC 의 부피(V)

$$V=\frac{1}{3}(\triangle\text{OAB 넓이})\times(\text{점 C에서 }\triangle\text{OAB까지의 거리})$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}|\overrightarrow{\text{OA}}\times\overrightarrow{\text{OB}}|\right)\cdot|\overrightarrow{\text{OC}}|\cos\alpha$$

$$=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{\text{OA}}\times\overrightarrow{\text{OB}})\circ\overrightarrow{\text{OC}}|=\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\right|$$

풀어보기

문제 1

음이 아닌 모든 정수 n 에 대하여 좌표평면 위의 점 (x_n, y_n) 이 다음조건을 만족시킨다.

(가) $x_0 = 1,\ y_0 = 0$

(나) $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{8} & -\sin\frac{\pi}{8} \\ \sin\frac{\pi}{8} & \cos\frac{\pi}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

$x_{98} + y_{102} = k\left(\frac{1}{2}\right)^{103}$ 일 때, 상수 k 의 값은? (2012년 4월 학력평가)

① $15\sqrt{2}$ ② $17\sqrt{2}$ ③ $19\sqrt{2}$ ④ $21\sqrt{2}$ ⑤ $23\sqrt{2}$

문제 2

열린구간 $(0, 2\pi)$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \dfrac{\sin x}{e^{2x}}$ 가 $x = a$ 에서 극솟값을 가질 때, $\cos a$ 의 값은? (2013년 3월 학력평가)

① $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0 ④ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

문제 3

함수 $f(x) = \sqrt{[x]+1-(x-[x])^2}\ (x \geq 0)$ 과 직선 $x = n-1,\ x = n$ 및 x 축으로 둘러싸인 도형을 x 축 둘레로 회전시킨 도형의 부피를 V_n 이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} V_k}{n^2}$ 의 값은?

(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수) (2009년 7월 학력평가)

① $\dfrac{\pi}{2}$ ② π ③ $\dfrac{3}{2}\pi$ ④ 2π ⑤ $\dfrac{5}{2}\pi$

예시답안

풀어보기

문제 1

$A=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{8} & -\sin\frac{\pi}{8} \\ \sin\frac{\pi}{8} & \cos\frac{\pi}{8} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 이라 하자.

행렬 A는 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{8}$ 만큼 회전시키는 회전변환을 나타내는 행렬이고, 행렬 B는 원점을 닮음의 중심으로 하고 닮음비가 $\frac{1}{2}$ 인 닮음변환을 나타내는 행렬이다.

(나)에서 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=AB\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 이고 (가)에서 $x_0=1$, $y_0=0$ 이므로

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^nB^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{8} & -\sin\frac{\pi}{8} \\ \sin\frac{\pi}{8} & \cos\frac{\pi}{8} \end{pmatrix}^n \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_{98}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{98}$, $y_{102}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{102}$, $x_{98}+y_{102}=17\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{103}$

따라서 $k=17\sqrt{2}$

문제 2

[풀이1] $f(x)=\frac{\sin x}{e^{2x}}=e^{-2x}\sin x$ 이므로

$$f'(x)=-2e^{-2x}\sin x+e^{-2x}\cos x \ =e^{-2x}(-2\sin x+\cos x)$$

이고

$f''(x)=-2e^{-2x}(-2\sin x+\cos x)+e^{-2x}(-2\cos x-\sin x)=e^{-2x}(3\sin x-4\cos x)$ 이다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가지므로 $f'(a)=0$, $f''(a)>0$ 이어야 한다.

이때 $e^{-2a}>0$ 이므로

$$-2\sin a+\cos a=0 \ \cdots \ ㉠$$
$$3\sin a-4\cos a>0 \ \cdots \ ㉡$$

이 성립해야 한다.

㉠에서 $\cos a=2\sin a$ 이므로 $\tan a=\frac{1}{2}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$-5\sin a>0$$

따라서 $\tan a > 0$ 고, $\sin a < 0$ 이므로

$$\pi < a < \frac{3}{2}\pi$$

$$\sec^2 a = 1 + \tan^2 a = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\cos a = \frac{1}{\sec a} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore\ \cos a = -\frac{2\sqrt{5}}{5}\ \left(\because\ \pi < a < \frac{3}{2}\pi\right)$$

[풀이2] 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극값을 가지므로 $f'(a) = 0$ 이어야 한다.

$f(x) = \dfrac{\sin x}{e^{2x}} = e^{-2x}\sin x$ 이므로

$$f'(x) = -2e^{-2x}\sin x + e^{-2x}\cos x = -e^{-2x}(2\sin x - \cos x)$$

이때 $-e^{-2a}(2\sin a - \cos a) = 0$ 에서 $\tan a = \dfrac{1}{2}$

ⅰ) $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ 일 때

$0 < x < a$ 이면 $\sin x < \sin a$ 이고 $\cos x > \cos a$ 이므로 $2\sin x - \cos x < 2\sin a - \cos a = 0$

$\therefore\ f'(x) > 0$

$a < x < \dfrac{\pi}{2}$ 이면 $\sin x > \sin a$ 이고 $\cos x < \cos a$ 이므로 $2\sin x - \cos x > 2\sin a - \cos a = 0$

$\therefore\ f'(x) < 0$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극댓값을 갖는다.

ⅱ) $\pi < a < \dfrac{3}{2}\pi$ 일 때

$\pi < x < a$ 이면 $\sin x > \sin a$ 이고 $\cos x < \cos a$ 이므로 $2\sin x - \cos x > 2\sin a - \cos a = 0$

$\therefore\ f'(x) < 0$

$a < x < \dfrac{3\pi}{2}$ 이면 $\sin x < \sin a$ 이고 $\cos x > \cos a$ 이므로 $2\sin x - \cos x < 2\sin a - \cos a = 0$

$\therefore\ f'(x) > 0$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극솟값을 갖는다.

$\sec^2 a = 1 + \tan^2 a = \dfrac{5}{4}$ 에서 $\sec a = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\left(\because\ \pi < a < \dfrac{3}{2}\pi\right)$

$\therefore\ \cos a = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

[풀이3]

$f(x)=\dfrac{\sin x}{e^{2x}}$ 는 미분가능한 함수이므로 몫의 미분법을 사용하면

$$f'(x)=\frac{e^{2x}\cos x-2e^{2x}\sin x}{(e^{2x})^2}=-\frac{2\sin x-\cos x}{e^{2x}}$$

이 때 삼각함수의 합성에 의해서

$$2\sin x-\cos x=\sqrt{5}\sin(x-\alpha)\ (단,\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}})$$

이므로

$$f'(x)=-\frac{\sqrt{5}\sin(x-\alpha)}{e^{2x}}$$

이 때 $f'(x)=0$ 에서 $\sin(x-\alpha)=0$ 이므로

$$x-\alpha=0 \ \text{ 또는 } \ x-\alpha=\pi$$

$$\therefore\ x=\alpha \ \text{ 또는 } \ x=\pi+\alpha$$

이 때 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

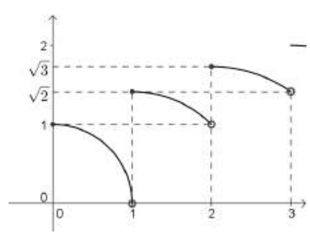
x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\pi+\alpha$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\pi+\alpha)$	$\nearrow$	

그러므로 함수 $f(x)$ 는 $x=\pi+\alpha$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\therefore\ a=\pi+\alpha$$

$$\therefore\ \cos a=\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

문제 3



$y=\sqrt{[x]+1-(x-[x])^2}$ 는 $(x-[x])^2+y^2=[x]+1$ 로 바꿀 수 있고

$0\le x<1$ 이면 $x^2+y^2=1$

$1\le x<2$ 이면 $(x-1)^2+y^2=2$

$2\le x<3$ 이면 $(x-2)^2+y^2=3$

$\cdots$

$n-1\le x<n$ 이면 $(x-n+1)^2+y^2=n$

$$V_n=\pi\int_{n-1}^{n}f(x)^2dx=\pi\int_{n-1}^{n}\{n-(x-n+1)^2\}dx=\left(n-\frac{1}{3}\right)\pi$$

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{3}\right)\pi = \left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right)\pi$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} V_k}{n^2} = \frac{\pi}{2}$$

논제 1-1

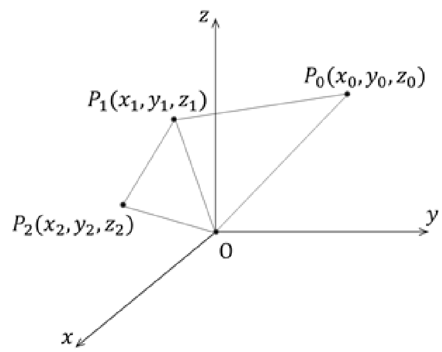
(대학발표 예시답안)

$\mathrm{P}_k(x_k, y_k, z_k)$ 가 주어졌을 때, $\mathrm{P}_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1})$ 은 다음 식을 만족하므로,

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix},\ z_{k+1} = rz_k \ \left(\mathrm{A} = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right)$$

다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}-x_k \\ y_{k+1}-y_k \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} x_k-x_{k-1} \\ y_k-y_{k-1} \end{pmatrix},\ z_k-z_{k-1} = r(z_{k-1}-z_{k-2}),\ k\ge 2$$



따라서

$\overrightarrow{\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_k} = (r\cos\theta(x_k-x_{k-1}) - r\sin\theta(y_k-y_{k-1}),\ r\sin\theta(x_k-x_{k-1}) + r\cos\theta(y_k-y_{k-1}),\ r(z_k-z_{k-1}))$

이고 계산하여서 정리하면,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_k}\right| = r\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k-1}}\right| \ \cdots\cdots ①$$

이므로, l_k 는 초항이 a 이고 등비가 r 인 등비급수이다. 따라서 일반항은

$$l_k = ar^{k-1}$$

이다.

논제 1-2

(대학발표 예시답안)

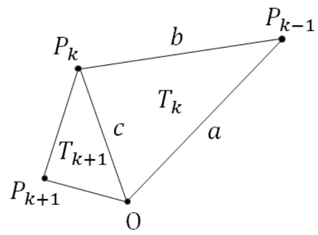
변환의 관계식으로부터,

$$(x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}) = (r\cos\theta x_k - r\sin\theta y_k,\ r\sin\theta x_k + r\cos\theta y_k,\ rz_k)$$

이므로

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}_{k+1}}| = r|\overrightarrow{\mathrm{OP}_k}| \cdots\cdots ②$$

이다.



삼각형 T_k 의 세 변을 a, b, c 라고 할 때,

$$|\overline{\mathrm{OP}_{k-1}}| = a,\ |\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}| = b,\ |\overline{\mathrm{OP}_k}| = c$$

위의 식 ②와 논제 I−1에서의 식 ①에 의해 삼각형 T_{k+1} 의 세 변은 다음의 식을 만족한다.

$$|\overline{\mathrm{OP}_k}| = ra,\ |\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}}| = rb,\ |\overline{\mathrm{OP}_{k+1}}| = rc$$

세 변의 닮음비가 같으므로 삼각형 T_{k+1} 와 T_k 는 닮음이다.

이것은 모든 $k \geq 1$ 에 대하여 성립하므로 $\mathrm{T}_k(k \geq 2)$ 는 T_1 과 닮음이고, 따라서 모든 삼각형 $\mathrm{T}_k(k \geq 1)$ 들은 닮음이다.

(다른 풀이)−SAS닮음을 이용

변환의 관계식으로부터,

$(x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}) = (r\cos\theta x_k - r\sin\theta y_k,\ r\sin\theta x_k + r\cos\theta y_k,\ rz_k)$이므로

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}_{k+1}}| = r|\overrightarrow{\mathrm{OP}_k}|$$

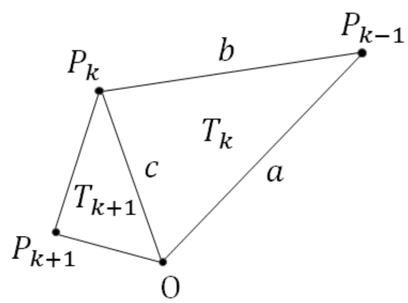
이다. $\overrightarrow{\mathrm{OP}_k}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}_{k+1}}$ 를 통해 두 각이 일정함을 보이자.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_k} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_{k+1}} = (x_k, y_k, z_k) \cdot (x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1})$

$= (x_k, y_k, z_k) \cdot (r\cos\theta x_k - r\sin\theta y_k,\ r\sin\theta x_k + r\cos\theta y_k,\ rz_k)$

$= r(\cos\theta(x_k^2 + y_k^2) + z_k^2)$

$= |\overrightarrow{\mathrm{OP}_{k+1}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}_k}|\cos\alpha = r(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)\cos\alpha$



즉, $\cos\alpha = \dfrac{\cos\theta(x_k^2 + y_k^2) + z_k^2}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}$ 이 된다.

$x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 = r^2(x_k^2 + y_k^2)$ 이므로 등비수열로

$$x_k^2 + y_k^2 = (r^2)^k(x_0^2 + y_0^2)$$

$z_{k+1}^2 = r^2 z_k^2$ 이므로 역시 등비수열로

$$z_k^2 = (r^2)^k z_0^2$$

$\cos\alpha = \dfrac{\cos\theta(x_0^2 + y_0^2) + z_0^2}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ 이 된다.

삼각형 T_k 의 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}_k}| = r|\overrightarrow{\mathrm{OP}_{k-1}}|$ 이고 $\angle\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{OP}_k$ 가 $\cos\alpha$ 이다.

삼각형 T_{k+1} 는 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}_{k+1}}| = r|\overrightarrow{\mathrm{OP}_k}| = r^2|\overrightarrow{\mathrm{OP}_{k-1}}|$ 이고 $\angle\mathrm{P}_k\mathrm{OP}_{k+1}$가 $\cos\alpha$ 이다.

두 변의 닮음비가 같고 끼인 각이 같으므로 삼각형 T_{k+1}, T_k 는 닮음이다.
이것은 모든 $k \ge 1$ 에 대하여 성립하므로 $\mathrm{T}_k(k \ge 2)$ 는 T_1 과 닮음이고, 따라서 모든 삼각형 $\mathrm{T}_k(k \ge 1)$ 들은 닮음이다.

논제 1-3

(대학발표 예시답안)

논제 I-2의 결과로서 $|\mathrm{T}_k|$ 는 공비가 r^2 인 등비급수이고, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}_k}|$ 는 공비가 r 인 등비급수이다. 각 수열의 첫째항은 다음과 같으며,

$|\mathrm{T}_1| = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}|\sin\alpha$ (이 때 α 는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$ 과 $\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$ 가 이루는 각), $|\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}|$, $\mathrm{P}_0 = (1,0,1)$ 이고 $\mathrm{P}_1 = (0,r,r)$ 이므로 $\cos\alpha$ 는

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \cos\alpha|\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}|$$

을 만족하므로 $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ 이다.

따라서 $|\mathrm{T}_1| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r$, $|\mathrm{OP}_1| = \sqrt{2}\,r$ 이고, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{r}{1-r^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2}\dfrac{r}{1-r}$ 이다.

함수 $f(r) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\dfrac{1-r}{r(1+r)}$ 에 관하여 구간 $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{5}\right]$ 에서 최댓값을 찾기 위해서 미분을 이용하면 $f'(r) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\dfrac{(r-(1+\sqrt{2}))(r-(1-\sqrt{2}))}{(r(r+1))^2}$ 이고 주어진 구간에서 $f(x)$ 의 미분계수는 음수의 값을 가지므로 감소함수이다.

따라서 $r = \dfrac{1}{2}$ 일 때 최댓값 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 이다.

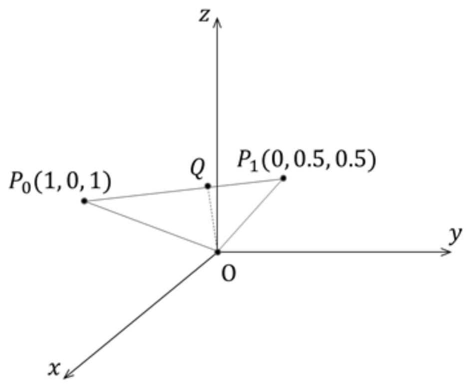
논제 1-4

(대학발표 예시답안)

선분 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ 상의 점들은 다음 식을 만족한다.

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-r}{0-r} = \frac{z-r}{1-r}, \quad (r \le z \le 1)$$

$r = \dfrac{1}{2}$ 일 때, 점 O 에서 선분 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ 으로의 수선의 발을 내렸을 때 끝점을 Q 라고 하자. 회전체의 부피는 $\triangle\mathrm{QP}_0\mathrm{O}$ 를 $\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}}$ 를 회전축으로 회전하여 얻는 원뿔 V_1 의 부피와 $\triangle\mathrm{QP}_1\mathrm{O}$ 를 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}}$ 를 회전축으로 회전하여 얻는 원뿔 V_2 의 부피의 합이 된다.



수선의 발의 끝점 Q 를 $(x,y,z)=(2z-1,\ -z+1,\ z)$ 라 두고, 직선 $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_0}}$ 와 수직임을 이용하면 $z=\dfrac{1}{2}$ 이고, 따라서 Q 는 $\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\dfrac{\sqrt{2}}{2},$ $|\overrightarrow{\mathrm{QP_0}}|=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $|\overrightarrow{\mathrm{QP_1}}|=0$ 이므로, $V_1=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}\pi$, $V_2=0$ 이다.

따라서 회전체의 부피 $V(=V_1+V_2)$ 는 $\dfrac{\sqrt{6}}{12}\pi$ 이다.

3 경희대학교 온라인 모의

※ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

[가]

함수 $f(x)$ 가 구간 $[a,b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형을 x 축 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피를 구하는 방법은 다음과 같다.

구간 $[a,b]$ 의 임의의 점 x 를 지나 x 축과 수직인 평면으로 회전체를 자른 단면은 반지름의 길이가 $|f(x)|$ 인 원이 된다. 이때 이 단면의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면

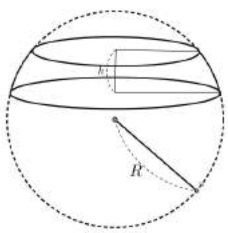
$$S(x) = \pi\{f(x)\}^2$$

이고 따라서 구하는 회전체의 부피 V 는

$$V = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx \text{ 이다.}$$

[나]

아르키메데스가 쓴 '구와 원기둥에 대하여(On the Sphere and Cylinder)'에는 구면띠의 넓이에 대한 공식이 최초로 등장한다. 여기서 구면띠는 구를 평행한 두 평면으로 잘랐을 때, 그 사이에 낀 구면의 일부분을 말한다. 구면띠의 넓이는 구의 대원을 밑면으로 갖고 구면띠와 같은 높이를 갖는 원기둥의 옆넓이와 같다. 따라서 아래 그림의 구면띠의 넓이는 $2\pi Rh$ 이다.



[다]

어떤 물체의 시각 t 에서의 넓이가 S, 부피가 V 일 때, 시간이 Δt 만큼 경과한 후 넓이, 부피가 각각 ΔS, ΔV 만큼 변했다고 하면 시각 t 에서의 넓이, 부피의 변화율은 각각 다음과 같다.

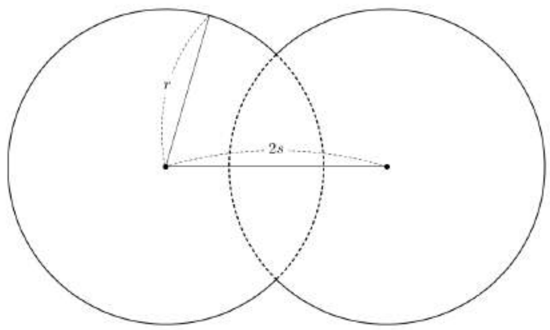
$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$$

논제

제시문 [가], [나], [다]를 읽고 다음 질문에 답하시오. [60점]

(1) 아래 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 두 개의 구가 겹쳐져서 만들어진 입체도형이 있다. 두 구의 중심거리가 $2s\ (0 \le s \le r)$일 때, 이 입체도형의 부피 $V(s)$와 겉넓이 $A(s)$를 구하고 그 방법을 서술하시오. (12점)



(2) (1)에서 구한 $V(s)$와 $A(s)$에 대하여 $\dfrac{V(s)}{A(s)}$가 최대가 되는 중심거리를 구하고 그 방법을 논술하시오. (12점)

(3) (1)에서 입체도형을 만드는 두 구의 중심거리가 일정한 속도로 증가한다고 가정하자. 이때 부피가 가장 빠르게 증가하는 순간의 중심거리와 겉넓이가 가장 느리게 증가하는 순간의 중심거리를 구하고 그 근거를 서술하시오. (12점)

(4) 3차원 공간에 점 $O_k = \left(\dfrac{1}{2^{k-2}}, 0, 0\right)\ (1 \le k \le n,\ k$는 자연수$)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 n개의 구가 있다고 가정하자. 이러한 n개의 구로 이루어진 입체도형을 S_n이라 하고, S_n의 겉넓이를 A_n이라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$을 구하고 그 근거를 논술하시오. (24점)

배경지식 쌓기

1. 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 위치를 $x=f(t)$ 라고 할 때, 시각 t 에서의 점 P 의 속도 v 와 가속도 a 는 다음과 같다.

가. 속도: $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$

나. 가속도: $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{d}{dt}\{f'(t)\}=f''(t)$

2. 정적분의 정의

함수 $f(x)$ 가 구간 $[a,b]$ 에서 연속일 때,

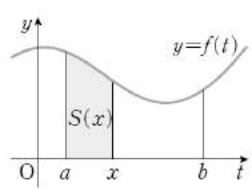
$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x \text{ (단, } \Delta x=\frac{b-a}{b}\text{ , } x_k=a+k\Delta x\text{)}$$

3. 적분과 미분의 관계

함수 $f(t)$ 가 구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 $a\le x\le b$ 일 때, $S(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 이면

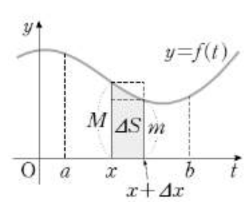
$$S'(x)=f(x)$$

(증명)



함수 $y=f(t)$ 가 구간$[a,b]$ 에서 연속이고 $f(t)\ge 0$ 이라 하자.
구간$[a,b]$ 에 속하는 임의의 x 에 대하여 a 에서 x 까지의 곡선 $y=f(t)$ 와 t 축 사이의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$



이다. 이때, x 의 증분 Δx ($\Delta x>0$)에 대하여 $S(x)$ 의 증분을 ΔS 라 하면

$$\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)$$

이다. 한편, 구간 $[x,x+\Delta x]$ 에서 함수 $f(t)$ 는 연속이므로 최댓값과 최솟값을 가진다. 그 최댓값과 최솟값을 각각 M,m 이라고 하면

$$m\Delta x\le\Delta S\le M\Delta x \qquad \therefore\ m\le\frac{\Delta S}{\Delta x}\le M$$

이다. 여기서 $\Delta x\to 0$ 이면

$$\lim_{\Delta x\to 0}m\le\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}\le\lim_{\Delta x\to 0}M$$

함수 $f(t)$ 는 $[a,b]$ 에서 연속함수이므로 $\Delta x \to 0$ 이면 $m \to f(x)$, $M \to f(x)$ 이다.

그러므로 $\dfrac{d}{dx}S(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$ 이다.

4. 정적분의 기본정리

구간 $[a,b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$ 라고 하면

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(증명)

앞의 적분과 미분의 관계에서 $S'(x) = f(x)$ 이므로 $S(x)$ 는 $f(x)$ 의 부정적분이다.
여기서 $f(x)$ 의 또 다른 부정적분의 하나를 $F(x)$ 라고 하면 다음이 성립한다.

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C \text{ （ } C\text{는 적분상수） } \cdots\cdots ㉠$$

$S(x)$ 의 정의에 의하여 $x = a$ 이면 $S(a) = 0$ 이므로 ㉠에서

$$S(a) = F(a) + C = 0 \qquad \therefore C = -F(a)$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

이 식에 $x = b$ ($a < b$)를 대입하고 적분변수 t 를 x 로 바꾸면 다음 식이 된다.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

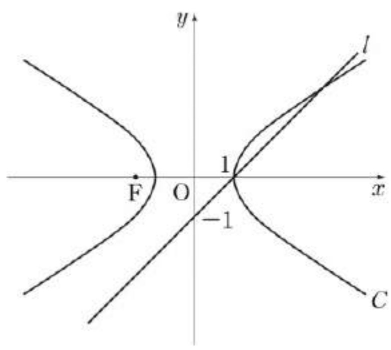
풀어보기

문제 1

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\int_0^x (a-t)e^t dt$의 최댓값이 32이다. 곡선 $y=3e^x$과 두 직선 $x=a$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. (2015년 대수능)

문제 2

그림과 같이 직선 l : $x-y-1=0$과 한 초점이 점 $\mathrm{F}(c, 0)$ (단, $c<0$)인 쌍곡선 C : $x^2-2y^2=1$이 있다. 다음 물음에 답하시오.

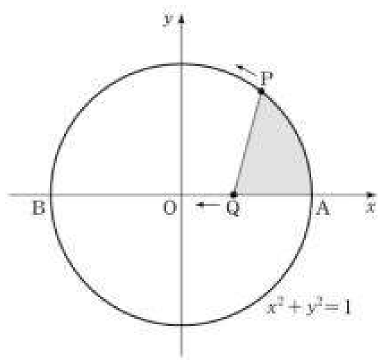


직선 l과 쌍곡선 C로 둘러싸인 부분을 y축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? (2014년 대수능)

① $\frac{5}{3}\pi$　② $\frac{3}{2}\pi$　③ $\frac{4}{3}\pi$　④ $\frac{7}{6}\pi$　⑤ π

문제 3

그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P 는 점 A$(1, 0)$ 에서 출발하여 원 둘레를 따라 시계 반대 방향으로 매초 $\dfrac{\pi}{2}$ 의 일정한 속력으로 움직이고 있다. 점 Q 는 점 A 에서 출발하여 점 B$(-1, 0)$ 을 향하여 매초 1 의 일정한 속력으로 x 축 위를 움직이고 있다. 점 P 와 점 Q 가 동시에 점 A 에서 출발하여 t 초가 되는 순간, 선분 PQ , 선분 QA , 호 AP 로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 하자. 출발한 지 1 초가 되는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은? (2007년 대수능)



① $\dfrac{\pi}{4}-1$ ② $\dfrac{\pi}{4}$ ③ $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{\pi}{4}+1$

읽기자료

미적분이 비행기를 날게 한다[4)]

'미적분은 우리에게 어떤 도움이 될까?'라는 질문을 받는다면, 즉시 나는 비행기를 설계하는데 도움이 된다고 대답한다. 세계 최대급의 여객기인 A380은 이륙 중량이 약 560톤, 날개의 넓이가 845m^2이다. 즉, 날개의 넓이 1m^2 당 660kg이나 되는 중량을 지탱하는 셈이다.

마치 마법의 양탄자 같은 이 거대한 힘은 어디서부터 나오는 것일까? 이 힘은 눈에는 보이지 않는 공기의 흐름에 의해 생긴다.

(1) 공기의 흐름은 미분으로 알 수 있다.

모든 사람이 알고 있다시피 공기는 질소나 산소 등의 분자로 이루어져 있다. 1cm^3 부피의 공기에는 2.7×10^{19}개(0℃, 1기압)라는 엄청난 수의 기체 분자가 들어 있다. 그러나 이들 분자 하나하나의 운동을 추적한다고 해서 공기 전체의 흐름을 알 수 있는 것은 아니다. 그래서 공기를 입자의 모임이 아니라 틈새가 없이 이어진 물체, 즉 유체(流體)라는 모델을 사용해서 생각한다.

이 유체의 운동을 생각하는 데 미적분이 도움이 된다. 유체 가운데 아주 작은 영역을 잘라 내어 뉴턴의 법칙을 적용시켜 본다. 이 영역에 들어 있는 유체의 밀도 변화는 경계에서 영역의 내부에 들어오는 질량과 나가는 질량의 차이에 의해 결정된다. 마찬가지로 유체가 받을 수 있는 힘은 경계를 통해 나가고 들어가는 운동량(질량과 속도의 곱)의 차이에 의해 결정된다.

여기에서 중요한 것은 밀도나 압력 등 직감적으로 알기 쉬운 물리량이 아니라 그 변화율이다. 즉, 여기에 미분이 등장하는 것이다.

(2) 슈퍼컴퓨터로 공기의 힘을 계산할 수 있다.

상당히 복잡하지만 아래의 표에서 유체의 운동을 지배하는 방정식을 소개한다.

유체의 지배 방정식(줄어들지 않는 유체의 경우)

- x, y, z는 잘라낸 영역의 세로, 가로, 높이의 좌표
- u, v, w는 x, y, z 방향의 속도 성분
- $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}$는 x, y, z만 미분하는 편미분
- t는 시간
- ρ는 유체의 밀도
- ν는 유체의 동점성 계수
- F는 유체의 물리량(밀도, 속도 등)

4) 뉴턴의 대발명: 미분과 적분-뉴턴하이라이트

질량 보존의 법칙(연속의 식)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

운동량 보존의 법칙(나비에-스토크스의 방정식)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

이 식은 19세기에 프랑스의 수학자 나비에(Navier)와 영국의 과학자 스토크스(Stokes)가 이끌어낸 것이다. 미분 기호를 포함하는 이런 방정식을 일반적으로 미분 방정식이라고 한다.

놀랄지도 모르겠지만 나비에와 스토크스가 이끌어낸 이 방정식은 (극히 일부의 간단한 예를 제외하고는) 아직 풀지 못하고 있다. 이처럼 옛날에 만들어진 방정식의 풀이가 아직 발견되지 않았다는 점은 놀랍지만, 지금도 수학자들이 이 문제의 해결에 도전하고 있다.

그러면 실제로 비행기의 설계에서는 어떻게 공기의 힘을 계산할까? 그것을 가능하게 해주는 것이 컴퓨터이다.

구체적으로는 유체가 흐르는 공간을 몇 십만, 몇 백만이라는 작은 영역으로 나누고, 그 각각의 영역에서의 압력이나 속도를 미지수로 한 연립방정식을 세운다. 엄청난 수의 방정식이 늘어서 있지만, 차세대 슈퍼컴퓨터를 사용하면 이것을 몇 분 내지 몇 시간 만에 풀 수 있다.

작은 변화량을 알면, 그것을 적분함으로써 압력이나 속도를 계산할 수 있다. 그리고 다시 적분함으로써 공기가 발생시키는 힘을 계산할 수 있다.

(3) 미적분 덕분에 날고 있다?!

이처럼 컴퓨터를 사용함으로써 대기 속을 비행하는 여러 가지 비행기 주위의 흐름을 계산할 수 있다. 그 밖에도 헬리콥터, 새, 곤충 등이 만드는 흐름을 같은 방법으로 계산할 수 있다.

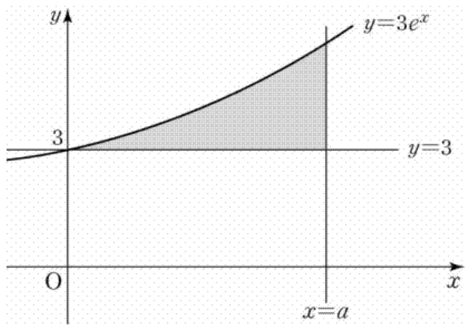
전 세계에서는 지금 자가용 소형 제트기를 비롯한 다양한 비행기가 개발되고 있다. 나아가 충격파가 나오지 않는 초음속 비행기나, 대기가 거의 없는 화성에서 날아다니는 비행기 'Mars Airplane'의 개발이 검토되고 있다. 이들 모든 비행기의 설계에 미분과 적분이 도움을 준다. 이렇게 생각하면 비행기를 공중에 떠 있게 하는 것은 공기가 아니라 미적분이라고 할 수도 있을 것이다.

-집필: 아시이 게이스케

예시답안

풀어보기

문제 1



$f'(x)=(a-x)e^x$ 이고 $f'(x)=0$ 이 되게 하는 x 를 찾으면 $x=a$ 이다.

$f''(a)=-e^a<0$ 이므로 $x=a$ 에서 $f(x)$ 는 최댓값을 가진다.

$$f(a)=e^a-(a+1)=32$$

곡선과 두 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하면,

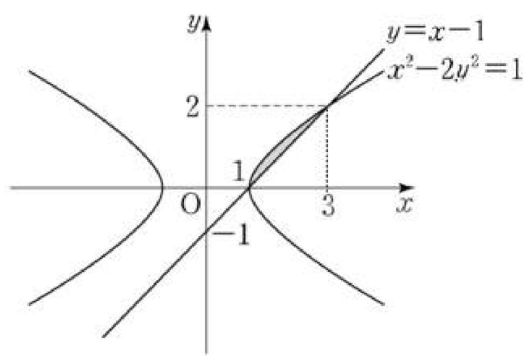
$$S=\int_0^a 3e^x dx-3a=3f(a)=96$$

문제 2

직선과 쌍곡선이 만나는 교점을 구하기 위해 두 식을 연립하면

$$x^2-2(x-1)^2=1\ ,\ \ x^2-2(x^2-2x+1)=1$$

$$x^2-4x+3=0 \qquad \therefore\ x=1,\ 3$$



만나는 교점은 $(1,0)$, $(3,2)$ 이다. 직선 l 과 쌍곡선 C 로 둘러싸인 부분을 y 축 둘레로 회전한 부피를 구하면

$$V_y=\pi\int_0^2\{(y+1)^2-(2y^2+1)\}dy=\pi\int_0^2(-y^2+2y)dy=\pi\left[-\frac{1}{3}y^3+y^2\right]_0^2=\frac{4}{3}\pi$$

문제 3

t 초 후 $\angle\mathrm{POA}=\dfrac{\pi}{2}t$, $\overline{\mathrm{OQ}}=1-t$ 이므로

넓이 S를 구하면

$$\begin{aligned} S &= (\text{부채꼴OAP 의 넓이}) - (\text{삼각형OQP 의 넓이}) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}t-\frac{1}{2}\cdot(1-t)\cdot\sin\frac{\pi}{2}t \\ &= \frac{\pi}{4}t-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}t+\frac{t}{2}\sin\frac{\pi}{2}t \end{aligned}$$

이다. 이 때, S를 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2}(t-1)\cos\frac{\pi}{2}t\right\}$$

$t=1$ 일 때, 넓이 S의 시간 t에 대한 변화율을 구하면

$$\frac{dS}{dt}_{t=1}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

논제 1

(대학발표 예시답안)

이 입체도형의 부피 $V(s)$는 $x^2+y^2=r^2$ 인 원의 일부 $(-r\le x\le s)$를 회전시킨 회전체의 부피의 두 배이다. 제시문 [가]를 이용하여 계산하면

$$V(s)=2\int_{-r}^{s}\pi(r^2-x^2)dx=2\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{s}=2\pi\left(r^2s-\frac{s^3}{3}+r^3-\frac{r^3}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}(2r^3+3r^2s-s^3)$$

이다. 또한 겉넓이 $A(s)$는 반구 2 개의 겉넓이에 높이가 s인 구면띠 2 개의 넓이를 더한 것이다. 제시문 [나]를 이용하여 계산하면

$$A(s)=4\pi r^2+2(2\pi rs)=4\pi r(r+s)$$

논제 2

(대학발표 예시답안)

$$\frac{V(s)}{A(s)}=\frac{\frac{2\pi}{3}(2r^3+3r^2s-s^3)}{4\pi r(r+s)}=\frac{(r+s)^2(2r-s)}{6r(r+s)}=-\frac{(s+r)(s-2r)}{6r}=-\frac{s^2-rs-2r^2}{6r}$$

r은 상수이고, s는 변수이다.

따라서 $\dfrac{V(s)}{A(s)}$는 s에 대한 이차함수이고, 이 이차함수는 $s=\dfrac{r}{2}$ 일 때 최대가 된다.

그러므로 중심거리가 반지름의 길이 r과 같을 때, 최대가 된다.

논제 3

(대학발표 예시답안)

두 구의 중심거리가 일정한 속도로 증가하므로 $\frac{ds}{dt}$ 가 일정하다.

연쇄법칙에 의하여

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{2\pi}{3}(2r^2-3s^2)\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{dA}{ds}\frac{ds}{dt}=4\pi r\frac{ds}{dt}$$

(2)에서와 마찬가지로 r 은 상수, s 는 변수, $\frac{ds}{dt}$ 은 일정하므로 $\frac{dA}{dt}$ 는 일정하다.

$0 \le s \le r$ 이므로 $\frac{dV}{dt}$ 는 s 가 0 일 때 최대가 된다.

따라서 부피는 중심거리가 0 일 때 가장 빠르게 증가하고, 겉넓이는 중심거리와 상관없이 일정한 속도로 증가한다.

논제 4

(대학발표 예시답안)

A_1 은 반지름의 길이가 1 인 구의 겉넓이이므로 $A_1=4\pi$ 이다.

O_k 와 O_{k+1} 의 거리 $s_k=\overline{O_kO_{k+1}}=\frac{1}{2^{k-2}}-\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{1}{2^{k-1}}$ 이다.

A_{k+1} 는 A_k 에서 높이 $1-\frac{s_k}{2}$ 인 구면띠의 넓이를 빼고, 높이 $1+\frac{s_k}{2}$ 인 구면띠의 넓이를 더하면 된다. 따라서

$$A_{k+1}=A_k-2\pi\left(1-\frac{s_k}{2}\right)+2\pi\left(1+\frac{s_k}{2}\right)=A_k+2\pi s_k=A_k+2\pi\frac{1}{2^{k-1}}$$

이므로

$$A_n=4\pi+2\pi\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ \cdots\ +\frac{1}{2^{n-2}}\right)=4\pi+2\pi\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}\right)=4\pi+4\pi\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}A_n=4\pi+4\pi=8\pi$ 이다.

4 경희대학교 수시(의학계)

※ 다음 제시문과 그림을 참조하여 논제에 답하시오. (60점)

[가] 한 도형을 일정한 비율로 확대하거나 축소하여 얻은 도형과 합동인 도형을 처음 도형과 서로 닮음인 관계에 있다고 하며, 닮음인 관계에 있는 두 도형을 닮은 도형이라고 한다. 서로 닮은 다각형에서는 대응하는 변의 길이의 비와 대응하는 각의 크기가 각각 같다. 역으로 대응하는 변의 길이의 비가 모두 같고, 대응하는 각의 크기도 각각 같은 두 다각형은 서로 닮은 도형이다. 서로 닮은 다각형에서 대응하는 변의 길이의 비를 닮음비라고 한다. 예를 들면, 변의 길이가 1 인 정삼각형과 닮음비가 $1:\frac{1}{2}$ 인 도형은 변의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 정삼각형이다.

[나] 무한수열 $\{a_n\}$ 의 각 항을 차례대로 덧셈 기호 + 를 사용하여 연결한 식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

을 무한급수라 하고, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 으로 나타낸다. 그리고 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 에서 첫째항부터 제n 항까지의 합인

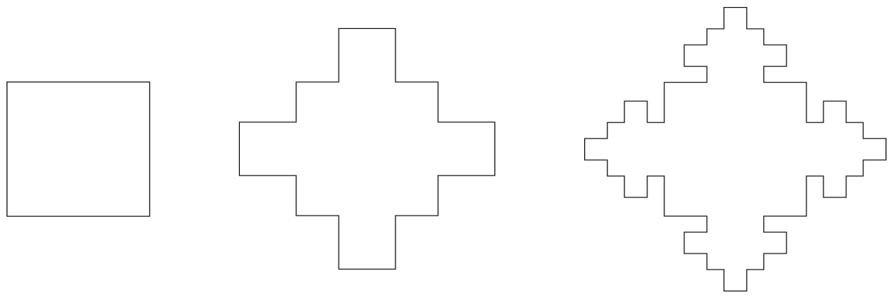
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 이 무한급수의 제n 항까지의 부분합이라고 한다. 이 부분합으로 이루어진 수열 $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots$ 이 일정한 값 S에 수렴할 때, 즉

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S$$

이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 S에 수렴한다고 한다. 이때 S를 무한급수의 합이라 한다. 한편 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$ 이 발산할 때, 이 무한급수는 발산한다고 한다.

[다] 해안선, 나뭇가지, 번개, 구름 등 자연 속에서 찾을 수 있는 프랙털(fractal) 도형은 일부분의 구조가 전체의 구조와 서로 닮은 도형이다. 프랙털은 영어의 'fractured(부서진)'에서 파생된 말로, 잘게 쪼개진 그림을 말한다. 코흐(von Koch, H. : 1870~1924)가 발견한 '눈송이 곡선'은 영역의 넓이는 유한하지만 둘레의 길이는 무한대인 프랙털의 전형적인 예이다.



P_1 P_2 P_3

[그림] 도형 P_1, P_2, P_3

논제 1

실수 r을 $0<r<1$인 상수라고 할 때, 좌표평면 상의 도형 P를 다음과 같이 정의한다.

(1) 변의 길이가 2인 정사각형을 S_1이라고 하고, S_1과 합동이면서 중심이 원점, 한 변이 x축과 평행한 도형을 P_1이라고 하자.

(2) 정사각형 S_1과 닮음비가 $1:r$인 정사각형을 S_2라고 하고, 도형 P_1에 S_2와 합동인 네 개의 정사각형을 위의 그림과 같이 변의 중점들이 일치하도록 외부에 붙이고, 붙인 변이 겹치는 부분을 지워서 도형 P_2를 만든다.

(3) 정사각형 S_2와 닮음비가 $1:r$인 정사각형을 S_3이라고 하고, 도형 P_2를 만들 때 (2)에서 붙인 각 정사각형의 남은 세 변에 S_3과 합동인 정사각형을 한 개씩 (2)와 같은 방법으로 붙여서 도형 P_3을 만든다.

(4) $n \geq 3$일 때, (3)의 과정을 도형 P_n에 적용하여 도형 P_{n+1}을 만든다.

이 과정을 한없이 반복하여 만든 도형을 P라고 하자.

논제 1-1

도형 P를 만들기 위하여 사용된 모든 정사각형들(S_1도 포함됨)의 넓이의 합이 수렴하도록 r의 값의 범위를 정하고, 그 합을 구하시오. 그리고 그 근거를 논술하시오. (12점)

논제 1-2

도형 P를 만들기 위하여 사용된 모든 정사각형들(S_1도 포함됨)의 각 변에서 지워지지 않은 부분의 길이의 합이 수렴하도록 r의 값의 범위를 정하고, 그 합을 구하시오. 그리고 그 근거를 논술하시오. (12점)

논제 1-3

$r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 인 경우, P_3을 만들 때 추가되는 정사각형들의 일부가 서로 겹쳐짐을 논술하시오. 한편, $r=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 인 경우, 어떤 단계에서 추가되는 정사각형들의 일부가 앞 단계 도형의 일부와 겹쳐짐을 논술하시오. (단, 두 다각형이 면의 일부가 겹치지 않으면서 점 또는 변의 일부에서만 만나면 겹쳐지지 않는다고 생각한다.) (12점)

논제 1-4

도형 P를 만들 때 사용되는 모든 정사각형 중 어떤 두 정사각형도 겹치지 않도록 r의 값의 범위를 정하고, 그 근거를 논술하시오. (단, 두 다각형이 면의 일부가 겹치지 않으면서 점 또는 변의 일부에서만 만나면 겹쳐지지 않는다고 생각한다.) (24점)

배경지식 쌓기

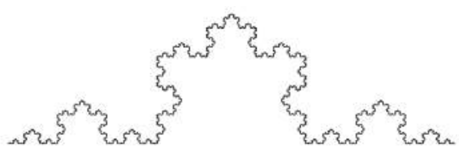
1. 코흐곡선

'코흐곡선'은 1904년에 스웨덴의 수학자인 코흐(koch, 1870~1924)가 1904년에 고안한 가장 대표적인 프랙탈 곡선 중의 하나이다.

코흐곡선을 그리는 방법은 아래 그림과 같이 한 개의 선분을 삼등분하여 가운데 부분은 삭제한 다음 삭제한 부분에 두 변을 정삼각형의 두 변처럼 되도록 바깥쪽으로 연결하여 그린다.

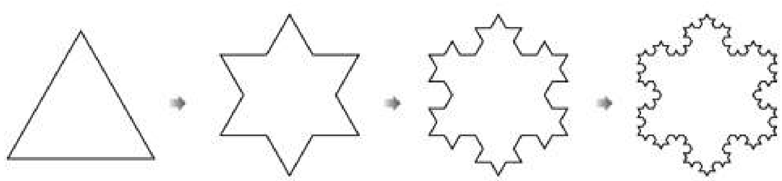
1단계	2단계	3단계
		

그리고 각 변에 이와 같은 과정을 계속하여 무한히 반복하면 다음과 같은 코흐곡선을 얻을 수 있다.



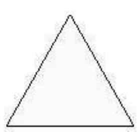
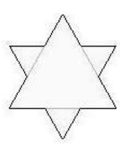
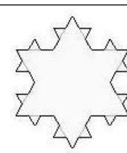
2. 코흐눈송이

아래 그림과 같이 정삼각형의 각 변에 코흐곡선을 얻는 과정을 무한히 반복하면 코흐눈송이를 얻을 수 있다.



3. 코흐눈송이의 길이

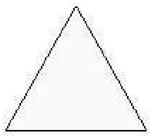
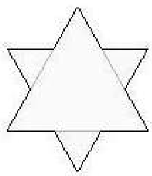
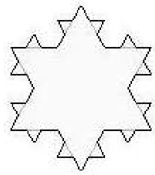
한 변의 길이가 1인 정삼각형의 각 변에 코흐곡선을 얻는 과정을 반복하는 과정에서 단계별로 도형의 길이를 구해 보면 아래 표와 같다.

	한 변의 길이가 1인 정삼각형	1단계	2단계
도형			
길이	$1\times3=3$	$\frac{1}{3}\times4\times3=4$	$\frac{1}{9}\times4^2\times3=\frac{16}{3}$

코흐 눈송이의 길이는 첫째항이 3이고 공비가 $\frac{4}{3}$인 등비수열이다. 그러므로 $n-1$단계를 거친 도형의 둘레의 길이는 $\left(\frac{1}{3}\right)^n \times 4^n \times 3 = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$ 이다. 따라서 코흐눈송이의 길이는 양의 무한대(∞)로 발산한다.

4. 코흐눈송이의 넓이

한 변의 길이가 1인 정삼각형의 각 변에 코흐곡선을 얻는 과정을 반복하는 과정에서 단계별로 도형의 넓이를 구해 보면 아래 표와 같다.

	한 변의 길이가 1인 정삼각형	1단계	2단계
도형			
넓이	$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\left\{\frac{\sqrt{3}}{4} \times (1)^2\right\}$ $+\left\{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3\right\}$	$\left\{\frac{\sqrt{3}}{4} \times (1)^2\right\}$ $+\left\{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3\right\}$ $+\left\{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 \times 12\right\}$

따라서 $n-1$단계를 거친 도형의 넓이는

$$\left\{\frac{\sqrt{3}}{4} \times (1)^2\right\} + \left\{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3\right\} + \left\{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 \times 12\right\} + \cdots + \left\{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 \times 3(4)^{n-1}\right\}$$

이다.

코흐눈송이의 넓이는 두 번째 항부터 공비가 $\frac{4}{9}$인 무한등비급수의 합이고,

그 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3}{1-\frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ 이다.

그러므로 코흐눈송이의 길이는 $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ 으로 수렴한다.

풀어보기

문제 1

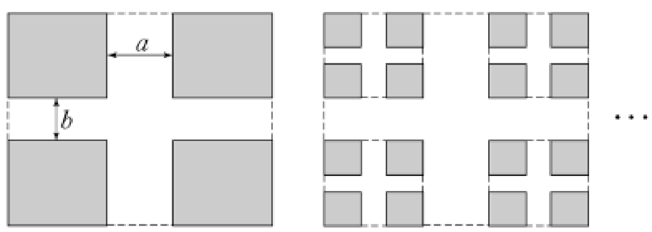
무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3^a+1)^n}{6^{3n}}$ 이 수렴하도록 하는 자연수 a 의 개수는?

(2012년 4월 전국연합)

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

문제 2

가로의 길이가 5 이고 세로의 길이가 4 인 직사각형에서 그림과 같이 가로의 폭 a 가 직사각형의 가로의 길이의 $\frac{1}{4}$, 세로의 폭 b 가 직사각형의 세로의 길이의 $\frac{1}{5}$ 인 ✚ 모양의 도형을 잘라내어 얻은 4 개의 직사각형을 R_1 이라 하고, 그 4 개의 직사각형의 넓이의 합을 S_1 이라 하자. R_1 의 각 직사각형에서 가로의 폭이 각 직사각형의 가로의 길이의 $\frac{1}{4}$, 세로의 폭이 각 직사각형의 세로의 길이의 $\frac{1}{5}$ 인 ✚ 모양의 도형을 잘라내어 얻은 16 개의 직사각형을 R_2 라 하고, 그 16 개의 직사각형의 넓이의 합을 S_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 R_n 의 4^n 개의 직사각형의 넓이의 합을 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? (2010년 6월 평가원)



R_1　　　R_2

① 26　　② 30　　③ 34　　④ 38　　⑤ 42

읽기자료

프랙탈에 대하여

프랙탈은 자기닮음과 소수차원을 그 특성으로 갖는 1975년 만델브로트(Benoit Mandelbrot, 1924~)가 소개한 기하학이다. 고전적 기하학은 점, 선, 삼각형, 평면, 원, 구 등의 도형을 사용한다. 그는 유클리드 기하학이 규칙적, 불규칙적인 자연현상을 설명하는데 한계가 있다는 것을 인식하고 자연을 모델링하는 새로운 도구로서 프랙탈을 소개하며 “구름은 구가 아니고, 산은 원뿔이 아니며, 해안선은 원이 아니다. 여러 가지 자연의 패턴은 불규칙적이다. 자연은 고도로 복잡하고, 복잡한 정도는 모두 다르다.”라고 했다.

유클리드 기하학은 직선과 단순한 곡선으로 구성된 인간이 건설한 구축물들을 설명하는 데는 유용하게 이용되지만 무수히 많은 자연의 정경들(해안선의 길이, 산과 숲의 모습, 구름의 모양)은 2300년 전에 발견된 유클리드 기하학의 어떤 모습과도 일치하지 않는다. 그러나 자연의 형태들을 좀 더 미시적으로 가까이서 보면 이들의 불규칙한 모습에서 새로운 기하학의 문을 여는 특징들이 숨겨져 있다.

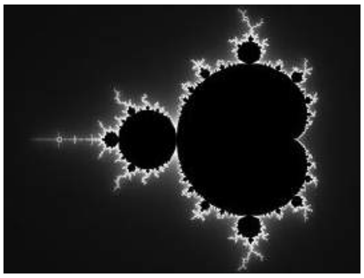
예를 들어 쪼개진 바위 조각은 자신이 떨어져 나온 산의 모양과 닮아있다. 나뭇가지들은 큰 줄기에서 작은 가지로 갈라질 때 원래 줄기의 모습과 유사한 모양을 가진다. 고사리와 같은 양치식물의 잎이나 브로콜리같은 식물들도 전체에서 한 조각을 때어내어도 원래의 모양과 유사한 형태를 유지한다. 이러한 특징들은 강의 줄기나 지류에서도 발견되며 신체의 동맥과 정맥의 세부구조도 자기반복적인 특징을 가진다.

만델브로트는 1975년 자연속의 이러한 불규칙하고 단계별 조각조각들이 서로 닮은 구조를 갖는 특징을 라틴어 ‘Fractus(부서진)’에서 따온 'Fractal'이란 용어를 창조하였다. 그는 “전체를 부분으로 나누었을 때 그 부분들 각각이 전체를 축소해 놓은 것 같은 불규칙하거나 파편화된 기하학적 현상”으로 정의하고 있다.

프랙탈의 발견은 자연계의 구조적 불규칙성을 기술하고 분석할 수 있는 새로운 수학적 언어를 발견한 것이며 혼돈과 무질서속의 질서를 표현할 수 있게 된 것이다.

① 프랙탈

프랙탈이란 전체를 부분 부분으로 나누었을 때 부분 안에 전체의 모습을 갖는 무한 단계에서의 기하학적 도형이다. 오른쪽 그림은 프랙탈의 대표적인 도형인 만델브로트 집합이며 어떤 조그만 조각도 전체와 닮아있다. (전체 그림 출처 ; Wikipedia)



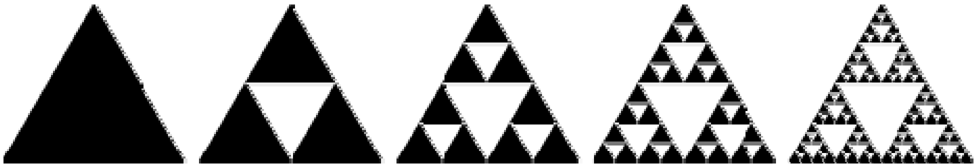
② 프랙탈 도형의 예

㉠ 칸토어 집합

처음 구간 $[0,1]$을 3등분하여 가운데 부분을 버린다. 그리고 남아있는 두 구간을 각각 3등분하여 가운데 부분을 버린다. 이와 같은 과정을 계속해서 얻어지는 아래 그림과 같은 도형을 칸토어 집합이라고 한다.

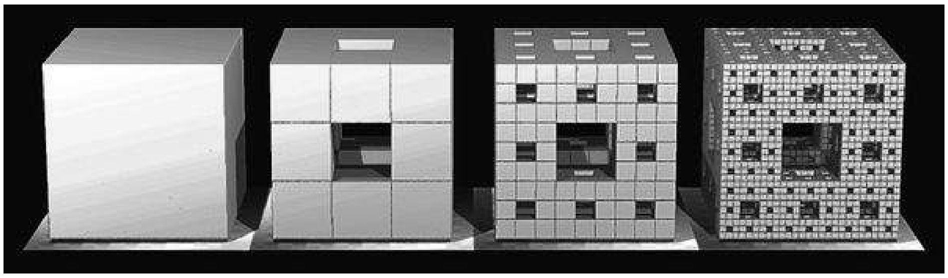
㉡ 시어핀스키 삼각형

정삼각형의 각 변의 중점을 연결하여 작은 정삼각형을 만들고 가운데 있는 정삼각형을 버린다. 남아있는 정삼각형의 중점을 연결하여 새로운 정삼각형을 만들고 또다시 가운데 있는 삼각형을 버린다. 이와 같은 과정을 계속하면 아래와 같은 도형을 얻고 이를 시어핀스키 삼각형이라 한다.



㉢ 멩거 스폰지

정육면체의 각 변을 3등분하여 27개의 정육면체로 나누고 중앙의 정육면체와 함께 처음 정육면체의 각 면의 중앙에 있는 정육면체를 빼낸다. 이 과정을 계속하면 아래와 같은 도형을 얻는다.



예시답안

풀어보기

문제 1

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3^a+1)^n}{6^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^a+1}{216}\right)^n$ 이 수렴하므로 $-1 < \frac{3^a+1}{216} < 1$, $-217 < 3^a < 215$

$\therefore$ 자연수 a 는 1 , 2 , 3 , 4 이고, a 의 개수는 4 이다.

문제 2

4 개로 분할된 직사각형의 가로의 길이는 원래의 $\frac{3}{8}$, 세로의 길이는 원래의 $\frac{2}{5}$ 이다. 따라서, 한 개의 면적은 원래의 $\frac{3}{20}$ 이고, 같은 것이 4 개가 있으므로, 원래 면적의 $\frac{3}{5}$ 이 된다.

즉, 공비는 $\frac{3}{5}$, 첫항은 직사각형의 면적의 $\frac{3}{5}$ 이므로 $S_1 = 5 \times 4 \times \frac{3}{5} = 12$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{12}{1-\frac{3}{5}} = 30$$

논제 I-1

(대학발표 예시답안)

도형 P_{n+1} 을 만들 때, 도형 P_n 에 붙인 S_{n+1} 과 합동인 정사각형의 총 개수를 N_{n+1} 이라고 하면, $N_2 = 4$, $N_{n+1} = 3N_n$ 이고 일반항은 $N_n = 4 \cdot 3^{n-2}$ $(n \geq 2)$ 이다. 정사각형 S_n 의 넓이를 a_n 이라고 하면, $a_1 = 4$, $a_{n+1} = r^2 a_n$ 을 만족하는 등비수열로서 일반항이 $a_n = 4r^{2n-2}$ $(n \geq 1)$ 이다.

도형 P_n 을 만들기 위하여 사용된 모든 정사각형들의 넓이의 합을 A_n 이라고 하면, $A_1 = 4$, $n \geq 1$ 일 때,

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1}N_{n+1} = A_n + 4r^{2n}(4 \cdot 3^{n-1}) = A_n + \frac{16}{3}(3r^2)^n \text{ 을 만족하여,}$$

$$A_n = 4 + \frac{16}{3}\sum_{i=1}^{n-1}(3r^2)^i \quad (n \geq 2)$$

이다.

그래서 수열 $\{A_n\}$ 은 $r \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ 일 때, 발산하고, $0<r<\frac{1}{\sqrt{3}}$ 일 때, $4+\frac{16r^2}{1-3r^2}$ 으로 수렴한다.

논제 I-2

(대학발표 예시답안)

도형 P_n 을 만들 때, 사용된 모든 정사각형의 각 변에서 지워지지 않은 부분의 길이의 합을 L_n 이라고 하자.

정사각형 S_n 의 한 변의 길이를 b_n 이라고 하면, $b_1=2$, $b_{n+1}=rb_n$ 을 만족하므로 $b_n=2r^{n-1}$ 이다.

P_{n+1} 을 만드는 단계에서 추가되는 S_{n+1} 과 합동인 각 정사각형은 두 변의 길이만큼 총 길이의 합을 증가시킨다.

이로부터 $L_1=8$, $n \geq 1$ 일 때,

$$L_{n+1}=L_n+2b_{n+1}N_{n+1}=L_n+2 \cdot 2r^n(4 \cdot 3^{n-1})=L_n+\frac{16}{3}(3r)^n \text{ 을 만족하여,}$$

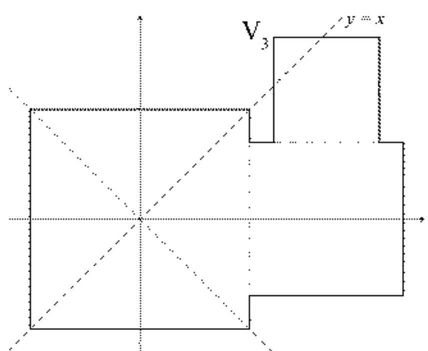
$$L_n=8+\frac{16}{3}\sum_{i=1}^{n-1}(3r)^i \quad (n \geq 2) \text{ 이다.}$$

그래서 수열$\{L_n\}$ 은 $r \geq \frac{1}{3}$ 일 때, 발산하고, $0<r<\frac{1}{3}$ 일 때,$8+\frac{16r}{1-3r}$ 로 수렴한다.

논제 I-3

(대학발표 예시답안)

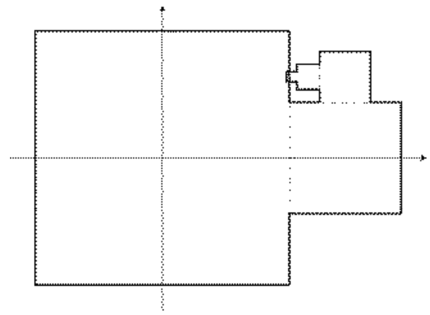
(i) $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 인 경우



오른쪽 그림에서처럼 P_3 을 만들 때 추가되는 정사각형의 왼쪽 위 꼭짓점 V_3 은 $(1+r-r^2, r+2r^2)$ 의 좌표를 가지므로, 이 경우 V_3 의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 이다. 따라서 V_3 은 직선 $y=x$ 의 위 쪽에 위치한다. P_3 이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이기 때문에 V_3 을 꼭짓점으로 가지는 정사각형은 이 정사각형과 $y=x$ 에 대하여 대칭인 정사각형과 겹친다.

(ii) $r=\frac{1}{\sqrt{5}}$ 인 경우

오른쪽 그림에서처럼 P_3 을 만들 때 추가되는 정사각형의 왼쪽 변의 x 좌표를 x_3, P_4 와 P_5 를 만들 때 추가되는 정사각형의 왼쪽 변의 x 좌표를 각각 x_4 와 x_5 라 하면,



$x_3=1+r-r^2$ 이고 $x_4=1+r-r^2-2r^3$,

$x_5=1+r-r^2-2r^3-2r^4$ 이므로,

이 경우 $x_3=1+\dfrac{\sqrt{5}-1}{5}$, $x_4=1+\dfrac{3-\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}$,

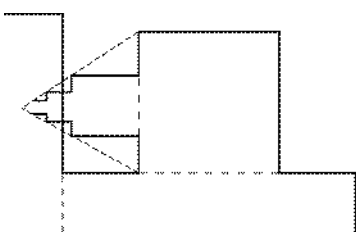
$x_5=1+\dfrac{3\sqrt{5}-7}{25}$ 이다.

그런데 $x_3>1$ 이고 $x_4>1$ 이지만, $x_5<1$ 이기 때문에, P_5 를 만들 때 추가된 정사각형이 P_1 과 겹치게 된다.

논제 I-4

(대학발표 예시답안)

아래 그림과 같이 P_3 을 만들 때 오른쪽 위에 추가된 사각형의 왼쪽에 정사각형이 계속 추가되는 상황을 생각하자.



이 중에서 $P_n\,(n\geq 4)$ 을 만들 때 추가되는 정사각형의 왼쪽 변의 x좌표를 x_n이라고 하면, 일반항은

$$x_n=1+r-r^2-2r^3-2r^4-\cdots-2r^{n-1}$$

이다.

$0<r<1$ 이므로 수열 $\{x_n\}$ 은 수렴하고 그 극한값은 $1+r-r^2-\dfrac{2r^3}{1-r}$ 이다.

만약 이 값이 1 보다 작으면 어떤 적당한 n 에 대하여 P_n 을 만들 때 추가되는 정사각형이 P_1 과 겹친다. 그래서 정사각형들이 겹치지 않는 P_n 을 만들려면

$1\leq 1+r-r^2-\dfrac{2r^3}{1-r}$ 이어야 한다.

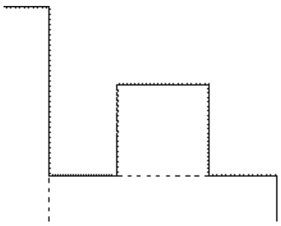
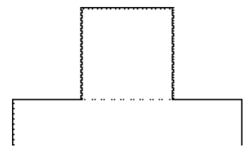
이 부등식을 만족하는 r의 범위는 $r \le \sqrt{2}-1$이고, 정사각형들이 겹치지 않을 필요조건이다.

역으로, $r \le \sqrt{2}-1$ 이라고 가정하자.

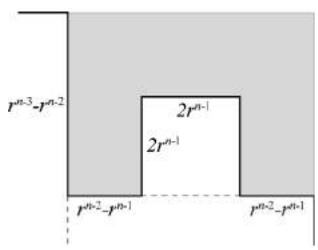
도형 P를 만들 때 사용되는 모든 정사각형이 겹치지 않음을 보여야 한다.

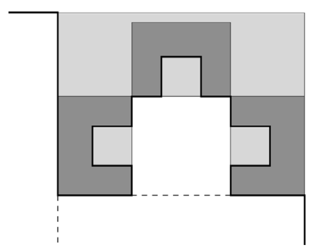
P_1과 P_2는 정사각형들이 서로 겹치지 않는 도형이다.

$n \ge 3$인 경우, P_n을 만들 때 추가되는 정사각형은 P_n의 대칭성에 의하여 다음 두 가지 형태로 붙는다고 말할 수 있다.

다음 단계 P_{n+1}을 만들기 위하여 S_{n+1}과 합동인 정사각형을 붙일 때, 추가되는 정사각형이 아래 왼쪽 그림의 색칠된 영역 안에 모두 들어갈 충분조건은, S_{n+1}의 변의 길이가 $2r^n$ 이므로, $r^{n-2}-r^{n-1} \ge 2r^n$ 과 $r^{n-3}-r^{n-2}-2r^{n-1} \ge 2r^n$ 이다.





그런데, $r \le \sqrt{2}-1$ 이기 때문에,

$$(r^{n-2}-r^{n-1})-2r^n = r^{n-2}(1-r-2r^2) = r^{n-2}(1-2r)(1+r) \ge 0$$

이고

$$(r^{n-3}-r^{n-2}-2r^{n-1})-(r^{n-2}-r^{n-1}) = r^{n-3}(1-2r^2-r^2) \ge 0$$

이므로,

$$r^{n-3}-r^{n-2}-2r^{n-1} \ge r^{n-2}-r^{n-1} \ge 2r^n$$

이다.

따라서 단계 P_{n+1}에 변의 길이가 $2r^n$인 정사각형을 붙일 때, 추가되는 정사각형이 위 왼쪽 그림의 색칠된 영역 안에 모두 들어간다. 그런데 P_{n+1}에 추가되는 다른 정사각형들은 바로 위 오른쪽 그림처럼 짙게 표시된 영역에 들어가며, 이 영역들이 서로 만나지 않으므로, 추가되는 사각형들이 서로 겹치지도 않고 앞 단계의 도형들과도 겹치지 않음을 알 수 있다.

5 경희대학교 수시(자연계A)

※ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오. (60점)

[가]
두 삼각형에서 대응하는 세 변의 길이와 대응하는 세 각의 크기가 모두 같으면 두 삼각형은 서로 합동이다. 일반적으로 아래 세 가지 조건 중 한 가지가 성립하면 두 삼각형은 서로 합동이다.
1) 대응하는 세 변의 길이가 각각 같을 때
2) 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때
3) 대응하는 한 변의 길이가 같고, 그 양 끝각의 크기가 각각 같을 때

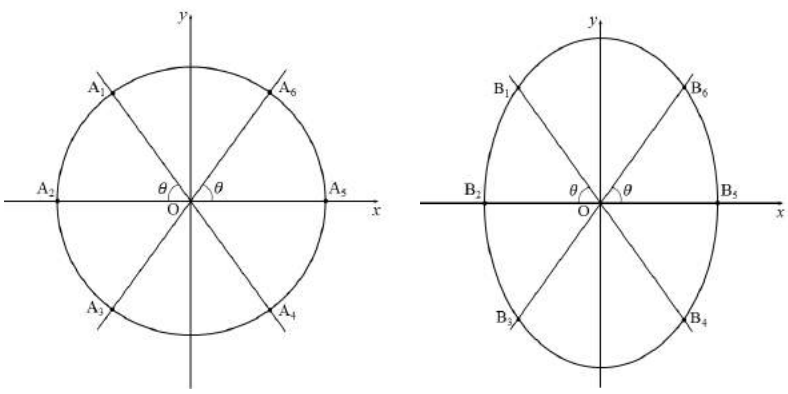
[나]
어떤 시행의 표본공간 S에서 실수 전체의 집합 R로 가는 함수 $X: S \to R$가 주어지면 함수 X에 대하여 동일한 함숫값 x를 가지는 표본공간의 원소들로 이루어진 사건 A가 결정되고, 이 사건이 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를 계산할 수 있다. 이와 같이 표본공간에서 정의된 함수 X를 확률변수라 하고, X의 함숫값이 x가 되는 사건 A에 대한 확률 $\mathrm{P}(A)$를 $\mathrm{P}(X=x)$와 같이 나타낸다.
확률변수가 취하는 값들의 평균은 확률변수가 취하는 값과 그에 대응하는 확률을 곱하여 모두 더한 것으로 이해할 수 있다.

[다]
미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이라고 하자. x의 값이 증가하면서 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 변하면 함수 $f(x)$는 증가상태에서 감소상태로 변하므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다. 또한 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 변하면 함수 $f(x)$는 감소상태에서 증가상태로 변하므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.
이계도함수를 이용하여 함수의 극대와 극소를 판정하는 방법도 있다. $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$가 존재하고 $f'(a)=0$이라고 하자. $f''(a)<0$이면 $x=a$에서 $f'(x)$는 감소상태에 있고 $f'(a)=0$이므로 $f'(x)$의 부호는 $x=a$의 좌우에서 양에서 음으로 바뀐다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다. 또한 $f''(a)>0$이면 $x=a$에서 $f'(x)$는 증가상태에 있고 $f'(a)=0$이므로 $f'(x)$의 부호는 $x=a$의 좌우에서 음에서 양으로 바뀐다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

논제 I

아래 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 과 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+a^2y^2=1$ $(0<a<1)$ 이 세 직선 $y=0$, $y=(\tan\theta)x$, $y=-(\tan\theta)x$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 와 만나는 교점들을 각각 점 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 와 점 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 라 하자.

- 원 위의 6개의 점 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 중에서 임의로 3개의 점을 선택하여 이 세 점이 꼭짓점이 되는 삼각형을 만들 수 있다. 여기서 세 점이 모두 이웃하는, 즉 세 점이 나란히 선택되는 경우(예를 들어 삼각형 $A_1A_2A_3$, 삼각형 $A_1A_2A_6$)는 제외한다. 이때 만들어지는 삼각형의 넓이를 확률변수 X 라 하자.
- 타원 위의 6개의 점 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 중에서 임의로 선택한 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 확률변수 Y 라 하자. 여기서는 임의로 세 점을 선택할 때 제외되는 경우가 없다.



논제 I-1

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 일 때, 확률변수 X의 확률분포를 나타내는 표와 X의 평균을 구하고 그 방법을 서술하시오. (9점)

논제 I-2

임의의 각 θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 에 대하여, 확률변수 X의 평균을 θ 의 식으로 나타내고 그 과정을 서술하시오. (15점)

논제 I-1

[논제 I-2]에서 구한 X의 평균이 최대가 되는 각 θ를 구하고 그 근거를 논술하시오. (15점)

논제 I-4

점 B_6의 좌표를 $(p,\ q)$라 할 때, 확률변수 Y의 평균을 a, p, q의 식으로 나타내고, 이 평균이 최대가 되는 점 B_6의 좌표를 a의 식으로 표현하시오. 그리고 그 근거를 논술하시오. (21점)

배경지식 쌓기

1. 이산확률변수의 기댓값 (평균)

이산확률변수 X의 기댓값 (평균) $\mathrm{E}(X)$는 $\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$

2. 이산확률변수의 분산과 표준편차

이산확률변수 X의 평균을 m이라고 할 때, X의 분산과 표준편차는

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\{(X-m)^2\}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

3. 확률변수 $aX+b$ (a, b는 상수)의 평균, 분산, 표준편차

가. $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

나. $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

다. $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

4. 이항분포의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때

가. $\mathrm{E}(X)=np$

나. $\mathrm{V}(X)=npq$

다. $\sigma(X)=\sqrt{npq}$ (단, $p+q=1$)

5. 큰 수의 법칙

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라 하면, 임의의 양수 h에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<h\right)=1$$

6. 연속확률변수의 평균, 분산, 표준편차

가. $\mathrm{E}(X)=\int_{\alpha}^{\beta}xf(x)\,dx$

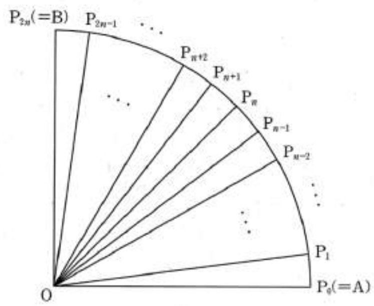
나. $\mathrm{V}(X)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-m)^2f(x)\,dx$ (단, $m=\mathrm{E}(X)$)

다. $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

풀어보기

문제 1

그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 자연수 n에 대하여 호 AB를 $2n$등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $P_0(=A)$, P_1, P_2, $\cdots$, P_{2n-1}, $P_{2n}(=B)$라 하자.

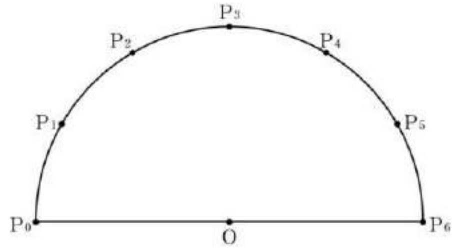


$n=3$일 때, 점 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 중에서 임의로 선택한 한 개의 점을 P라 하자. 부채꼴 OPA의 넓이와 부채꼴 OPB의 넓이의 차를 확률변수 X라 할 때, $E(X)$의 값은? (2014년 9월 평가원 B형)

① $\frac{\pi}{11}$ ② $\frac{\pi}{10}$ ③ $\frac{\pi}{9}$ ④ $\frac{\pi}{8}$ ⑤ $\frac{\pi}{7}$

문제 2

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 반원의 호를 6등분하여 양 끝점과 각 분점을 왼쪽부터 차례로 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6이라 하자. 이 7개의 점 중에서 임의로 선택한 서로 다른 두 점을 각각 P_i, P_j $(0 \le i < j \le 6)$이라 하고, 선분 P_0P_6의 중점을 O라 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{OP_i}$, $\overrightarrow{OP_j}$의 내적 $\overrightarrow{OP_i} \cdot \overrightarrow{OP_j}$의 값을 확률변수 X라 할 때, $E(X)=\frac{q\sqrt{3}}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.). (2014년 10월 전국연합 B형)



읽기자료

확률의 역사

기원전 3500 년경 주사위 놀이에 사용되었던 것으로 보이는 양의 뒤꿈치 뼈, 기원전 300 년경 바빌로니아의 유물인 정육면체 모양의 담황색 도자기 등 고대 문명의 유적지에서 주사위가 자주 출토되는데, 이것은 확률이 일찍이 역사에 등장했다는 것을 말해 준다. 우리나라에서도 경주 안압지에서 신라 시대의 '목제 주령구(木製酒令具)가 출토되었는데, 이는 십사면체 주사위로 궁중 놀이에 사용된 것으로 보인다.

확률은 중세 유럽 귀족 사회의 놀이였던 주사위, 카드 등의 도박에서 유래되었다. 확률의 개념은 15 세기 이탈리아의 수학자 파촐리(Pacioli, L., 1445~1517)가 '점수 문제(problem of points)'라 불리는 도박 문제를 다루면서 시작되었다. '점수 문제'란 주사위 게임을 하다가 중단한 경우에 상금을 공평하게 분배하는 문제이다. 17 세기 프랑스의 파스칼(Pascal, B., 1623~1662)과 페르마(Fermat, P., 1601~1665)의 '점수 문제'와 '주사위 문제'에 관한 서신 왕래에 의하여 확률 연구가 본격적으로 고찰되었다.

그 후 베르누이(Bernoulli, J., 1654~1705)는 큰 수의 법칙을 발표하여 확률론을 수학의 한 분야로 자리 잡게 하였고, 프랑스의 수학자 라플라스(Laplace, P. S., 1749~1827)는 1812 년 그의 저서 "확률의 해석적 이론"에서 확률론을 정리하고 체계화하였으며 확률을 처음으로 정의하였다.

라플라스의 정의는 20 세기에 들어서면서 힐베르트(Hilbert, D., 1862~1943)의 공리론에 영향을 받아 1933 년 콜모고로프(Kolmogorov, A. N., 1903~1987)에 의하여 공리적 확률의 정의가 확립되었다.

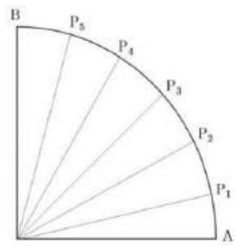
확률이 공리적으로 정의됨으로써 확률은 순수 수학의 한 분야로 정착되었고, 확률론의 응용 범위는 급속히 확대되기 시작하였다.

예시답안

풀어보기

문제 1

정답: ②



부채꼴 OPA 의 넓이와 부채꼴 OPB 의 넓이의 차가 확률변수 X이므로 P_3 를 선택할 때 넓이의 차는 0 , P_1 또는 P_5 를 선택할 때 넓이의 차는 $\frac{\pi}{12}$, P_2 또는 P_4 를 선택할 때 넓이의 차는 $\frac{\pi}{6}$ 이다. 그러므로 확률분포표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	합계
$P(X)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

따라서 $E(X)=0\times\frac{1}{5}+\frac{\pi}{12}\times\frac{2}{5}+\frac{\pi}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{\pi}{10}$ 이다.

문제 2

정답: 23

7 개의 점 중 서로 다른 2 개의 점을 선택하는 경우의 수는 ${}_7C_2=21$ 이다. 서로 다른 두 벡터 $\overrightarrow{OP_i}$, $\overrightarrow{OP_j}$ 가 이루는 각의 크기를 θ_k 라 하면 $\theta_k=\frac{k}{6}\pi$ $(k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$이다.

$|\overrightarrow{OP_i}|=|\overrightarrow{OP_j}|=1$ 이므로 $X=\overrightarrow{OP_i}\cdot\overrightarrow{OP_j}=|\overrightarrow{OP_i}||\overrightarrow{OP_j}|\cos\theta_k=\cos\theta_k$ 가 되는 두 점의 순서쌍은

(P_0, P_k) , (P_1, P_{k+1}) , …, (P_{6-k}, P_6) 으로 $7-k$ 가지이고, $\cos\theta_k$ 의 값은 차례로

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 0\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ -1$$

이다. 그러므로 확률변수 X의 확률분포를 나타내는 표는 다음과 같다.

X	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$	1

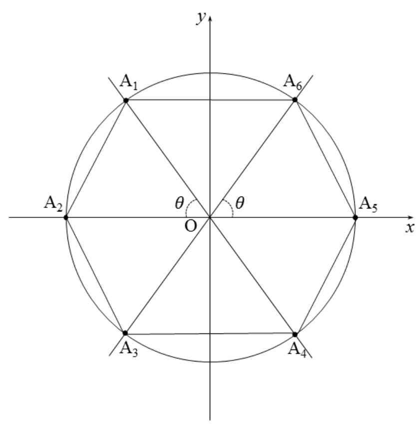
$$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{21}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{2}{21}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{21}+0\times\frac{4}{21}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{21}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{6}{21}=\frac{2\sqrt{3}}{21}$$

따라서 $p+q=21+2=23$ 이다.

논제 I-1

(대학발표 예시답안)

$\theta=\frac{\pi}{3}$ 이면 원의 중심에 대하여 대칭이므로 A_1 을 포함하는 경우만 생각하면 된다.



표기의 편의를 위하여 삼각형 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j\mathrm{A}_k$ 는 (i,j,k) 로 표시하기로 한다.

주어진 조건을 만족하는 삼각형은 $(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(1,3,4)$, $(1,3,5)$, $(1,3,6)$, $(1,4,5)$, $(1,4,6)$ 의 7 가지 종류가 있다.

이 중에서 $(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(1,3,4)$, $(1,3,6)$, $(1,4,5)$, $(1,4,6)$ 은 합동인 직각삼각형이고, $(1,3,5)$ 는 정삼각형이다.

각각의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{3})^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 이다.

따라서 확률분포표는 아래와 같다.

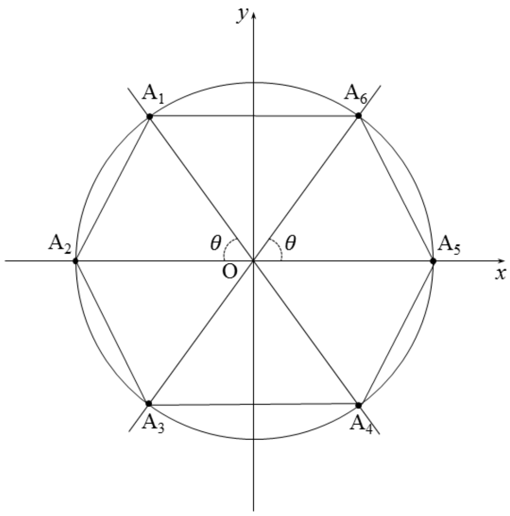
X	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

그러므로 확률변수 X의 평균은 $\frac{6}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{15\sqrt{3}}{28}$ 이다.

논제 I-2

(대학발표 예시답안)

θ가 임의의 각일 때, 주어진 점들이 x축, y축에 대하여 대칭임을 감안하여 주어진 조건을 만족하는 삼각형을 분류하자.



삼각형은 $(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(1,3,4)$, $(1,3,5)$, $(1,3,6)$, $(2,3,5)$, $(2,3,6)$의 7가지 종류가 있다.

이 중에서 $(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(2,3,5)$, $(2,3,6)$는 합동인 직각삼각형이고, $(1,3,4)$, $(1,3,6)$도 서로 합동인 직각삼각형이며, $(1,3,5)$는 이등변삼각형이다.

중심각을 이용하여 각각의 넓이와 그 확률을 구하면 아래와 같다.

$(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(2,3,5)$, $(2,3,6)$: 넓이 $\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot \sin\theta \cdot 2=\sin\theta$, 확률 $\frac{4}{7}$

$(1,3,4)$, $(1,3,6)$: 넓이 $\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot \sin 2\theta \cdot 2=\sin 2\theta$, 확률 $\frac{2}{7}$

$(1,3,5)$: 넓이 $2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin 2\theta=\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta$, 확률 $\frac{1}{7}$

따라서 확률변수 X의 평균은

$$\frac{4}{7}\sin\theta+\frac{2}{7}\sin 2\theta+\frac{1}{7}\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)=\frac{5}{14}(2\sin\theta+\sin 2\theta) \text{ 이다.}$$

논제 I-3

(대학발표 예시답안)

확률변수 X의 평균은 $f(\theta)=\frac{5}{14}(2\sin\theta+\sin 2\theta)\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$이다.

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{5}{14}(2\cos\theta+2\cos 2\theta) \\ &= \frac{5}{7}(\cos\theta+\cos 2\theta) \\ &= \frac{5}{7}\left(\cos\theta+2\cos^2\theta-1\right) \\ &= \frac{5}{7}(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1) \end{aligned}$$

따라서 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 의 범위에서 $f'(\theta)=0$ 이 되는 경우는 $\cos\theta=\frac{1}{2}$, 즉 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 이다.

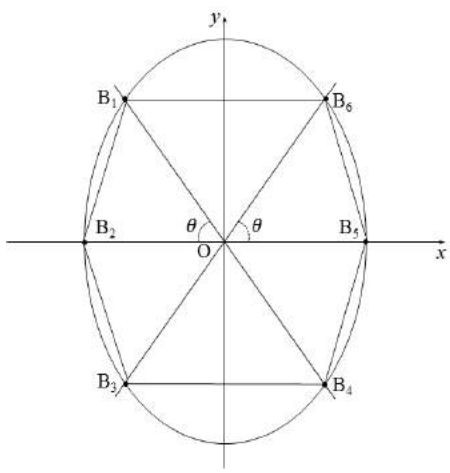
$f''(\theta)=\frac{5}{7}(-\sin\theta-2\sin 2\theta)<0$ 이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 에서 극대이다.

$f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5}{7}=\frac{20}{28}$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{15\sqrt{3}}{28}$ 이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 일 때, 확률변수 X의 평균이 최대가 된다.

논제 I-4

(대학발표 예시답안)

B_6 의 좌표가 (p, q) 이므로 $0<p<a$, $0<q<\frac{1}{a}$ 이다.



또한 $(p,\ q)$ 는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+a^2y^2=1$ 위의 점이므로 $q=\frac{1}{a}\sqrt{1-\frac{p^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-p^2}}{a^2}$ 이다.

앞의 논제와 마찬가지로 주어진 점들이 x축, y축에 대하여 대칭임을 감안하여 주어진 조건을 만족하는 삼각형을 분류하면

$$(1,2,3),\ (1,2,4),\ (1,2,5),\ (1,2,6),\ (1,3,4),$$
$$(1,3,5),\ (1,3,6),\ (2,3,4),\ (2,3,5),\ (2,3,6)$$

의 10가지 종류가 있다.

이 삼각형들을 합동인 것으로 분류하여 a, p, q로 표현한 넓이와 이에 대응하는 확률은 아래와 같다.

$(1,2,3)$: 넓이 $\frac{1}{2}\cdot 2q\cdot(a-p)=q(a-p)$, 확률 $\frac{1}{10}$

$(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(2,3,5)$, $(2,3,6)$: 넓이 $2\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot q=aq$, 확률 $\frac{4}{10}$

$(1,2,6)$, $(2,3,4)$: 넓이 $\frac{1}{2}\cdot 2p\cdot q=pq$, 확률 $\frac{2}{10}$

$(1,3,4)$, $(1,3,6)$: 넓이 $\frac{1}{2}\cdot 2q\cdot 2p=2pq$, 확률 $\frac{2}{10}$

$(1,3,5)$: 넓이 $\frac{1}{2}\cdot 2q\cdot(a+p)=q(a+p)$, 확률 $\frac{1}{10}$

따라서 확률변수 Y의 평균은

$$\begin{aligned}&\frac{1}{10}(q(a-p)+4aq+2pq+2(2pq)+q(a+p))\\&=\frac{1}{10}(6aq+6pq)=\frac{3}{5}(a+p)q\\&=\frac{3}{5}(a+p)\frac{\sqrt{a^2-p^2}}{a^2}\end{aligned}$$

이다.

$g(p)=(a+p)\sqrt{a^2-p^2}$ 이라고 정의하자.

$$g'(p)=\sqrt{a^2-p^2}+(a+p)\frac{-2p}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-p^2}}=\frac{-(2p-a)(p+a)}{\sqrt{a^2-p^2}}$$

$0<p<a$ 이고 $0<a<1$ 이므로, $g'\left(\frac{a}{2}\right)=0$ 이다.

또한 $0<p<\frac{a}{2}$ 일 때 $g'(p)>0$ 이고, $\frac{a}{2}<p<a$ 일 때 $g'(p)<0$ 이므로 $p=\frac{a}{2}$ 에서 $g(p)$가 최대가 된다.

따라서 $\mathrm{B}_6=\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2a}\right)$ 일 때, 확률변수 Y의 평균이 최대가 된다.

6 경희대학교 수시(자연계B)

※ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오. (60점)

[가]

일정한 간격으로 막대를 나열한 다음, 처음에 있는 막대를 넘어뜨리면 다음의 막대가 넘어지고, 차례로 그 다음의 막대가 넘어져서 결국은 모든 막대가 넘어지는 게임을 도미노 게임이라고 한다. 도미노 게임과 같은 원리를 가지고 있는 수학적 귀납법은 모든 자연수 n에 대하여 명제 $p(n)$이 성립함을 보이기 위하여 아래 두 명제 (i)과 (ii)가 참임을 증명하는 방법이다.

(i) $n=1$ 일 때, 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$ 일 때에도 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

[나]

첫째항 a_1 의 값과 이웃하는 두 항 a_n , a_{n+1} 사이의 관계식으로 수열 $\{a_n\}$ 을 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라 하고, 그 관계식을 점화식이라고 한다. 수열의 귀납적 정의를 이용하면 수열의 형태를 다양하게 변화시킬 수 있다. 예를 들면, a_n 이 모두 양수이고 $a_{n+1}=2{a_n}^2$ 인 경우 양변에 로그를 취하여 변형할 수 있다.

수열 $\{a_n\}$ 에서 n 이 커짐에 따라 a_n 의 값이 일정한 실수 A 에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$ 은 A 에 수렴한다고 하며, 이것을 기호로 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ 와 같이 나타낸다. 이때 A 를 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값 또는 극한이라고 한다.

[다]

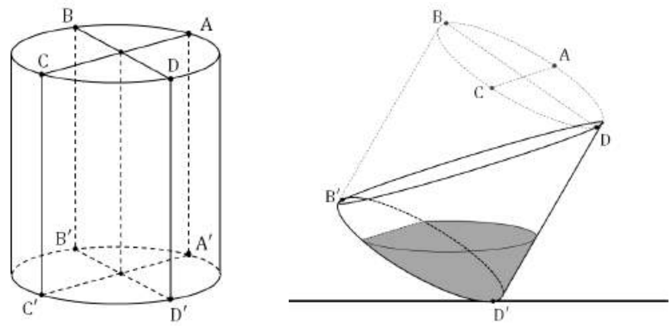
예쁘게 디자인되고 깔끔하게 진열된 상품을 보면 구매 욕구가 생긴다. 어느 상품이나 제품을 생산하여 판매할 때에는 비용 함수, 수입 함수, 수익 함수가 활용된다. 이러한 함수들을 미분하여 비용과 수익의 변화율을 구하고 최적의 제품을 설계할 수 있다. 또한, 경제학에서는 최소의 비용으로 최대의 수익을 얻기 위한 조건을 구할 때 미분을 이용한다.

[라]

평면 α 밖의 한 점 P 에서 평면 α 에 내린 수선의 발 P′ 을 점 P 의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다. 도형 F 에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영 전체의 집합을 F′ 이라고 하자. 이때 F′ 을 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.

논제 I

아래 그림에서 점 A, B, C, D는 원기둥의 밑면의 둘레를 4등분하고, 점 A′, B′, C′, D′은 각각 점 A, B, C, D의 맞은편 원기둥 밑면으로의 정사영이다. 사각형 ACC′A′을 포함하는 평면이 평평한 지면과 이루는 각이 θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$가 되도록 원기둥을 점 D′이 지면에 접하게 기울인다. 기울어진 원기둥을 점 A, C를 지나는 직선과 평행이면서 점 D, B′을 포함하는 평면으로 잘라서 아래 오른쪽 그림과 같은 용기를 만들어 물을 채우려한다. 첫 번째 단계에서 비어있는 용기에 1만큼의 물을 채운다. 그리고 다음 단계에서 현재 용기에 담겨있는 물의 양의 반의 제곱을 덜어내고 다시 1만큼의 물을 용기에 추가한다. 이와 같은 과정을 반복하여 n번째 단계에서 용기에 담겨있는 물의 양을 V_n이라 하자.



논제 I-1

모든 단계에서 $0<V_n<2$임을 수학적 귀납법을 이용하여 논술하시오. (12점)

논제 I-2

n이 커짐에 따라 물의 양 V_n이 증가함을 논술하시오. (12점)

논제 I-3

수열 $\{V_n\}$의 일반항과 극한값을 구하고 그 근거를 서술하시오. (15점)

논제 I-4

위에서 정의된 각 θ와 용기의 크기는 모든 단계에서 물이 넘치지 않으면서 용기의 겉넓이가 최소가 되도록 설계되었다. 이 용기에 물을 가득 채웠을 때, 수면의 넓이를 S라고 하자. 원기둥 밑면의 넓이를 S_0라고 할 때, 두 넓이의 비 $\frac{S}{S_0}$에 가장 가까운 자연수를 구하고 그 근거를 서술하시오. (단, 용기의 두께는 무시한다.)(21점)

배경지식 쌓기

1. 수학적 귀납법

명제 $P(n)$ 이 다음 두 조건을 만족시킬 때

i) $n=1$ 일 때, $P(n)$ 이 성립한다.
ii) $n=k$ 일 때, $P(n)$ 이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$ 일 때도 $P(n)$ 이 성립한다.

명제 $P(n)$ 은 모든 자연수에 대해서도 성립한다.

2. 수열의 귀납적 정의 (점화식)

처음 몇 개의 항과 이들을 이용하여 차례로 그 다음 항을 정할 수 있는 관계식을 주어 수열을 정의하는 방법을 수열의 귀납적 정의(점화식)라 한다.

3. 점화식의 유형별 정리

가. $a_{n+1}-a_n=d$ (일정) $\Rightarrow$ 공차가 d인 등차수열

나. $a_{n+1}\div a_n=r$ (일정) $\Rightarrow$ 공비가 r인 등비수열

다. $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ $\Rightarrow$ $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ $\Rightarrow$ 등차수열

다. $(a_{n+1})^2=a_n\cdot a_{n+2}$ $\Rightarrow$ $a_{n+2}\div a_{n+1}=a_{n+1}\div a_n$ $\Rightarrow$ 등비수열

라. $\dfrac{2}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+2}}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{a_{n+2}}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$ $\Rightarrow$ 조화수열

마. $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 의 꼴

$\Rightarrow$ n 에 1, 2, 3, ⋯ , $n-1$ 을 대입하여 얻은 식을 변변 더한다.

$\Rightarrow$ $a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ $(n\geq 2)$ $\Rightarrow$ 계차수열

바. $a_{n+1}=f(n)\cdot a_n$ 의 꼴

$\Rightarrow$ n에 1, 2, 3, ⋯ , $n-1$ 을 대입하여 얻은 식을 변변 곱한다.

$\Rightarrow$ $a_n=a_1\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\cdots\cdot f(n-1)$

사. $a_{n+1}=pa_{n+1}+q$ 의 꼴 (단, p, q, α 는 상수)

$\Rightarrow$ $a_{n+1}-\alpha=p(a_{n+}-\alpha)$ 의 꼴로 변형

아. $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ 의 꼴 (단, $p+q+r=0$, p, q, r, k 는 상수)

$\Rightarrow$ $a_{n+2}-a_{n+1}=k(a_{n+1}-a_n)$ 의 꼴로 변형

자. $a_{n+1}=\dfrac{ra_n}{pa_n+q}$ 의 꼴 $\Rightarrow$ 양변에 역수를 취한다.

차. $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 의 꼴 $\Rightarrow$ 양변을 p^{n+1} 으로 나눈다.

카. $(a_{n+1})^p=k(a_n)^q$ (단, p, q, k 는 상수)의 꼴 $\Rightarrow$ 양변에 상용로그를 취한다

풀어보기

문제 1

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 10$ 이고 $(a_{n+1})^n = 10(a_n)^{n+1}$ $(n \geq 1)$ 을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

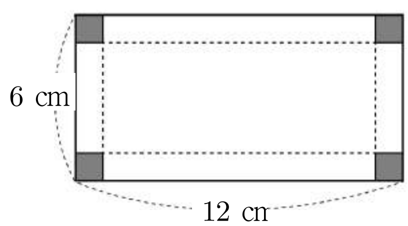
> 주어진 식의 양변에 상용로그를 취하면 $n\log a_{n+1} = (n+1)\log a_n + 1$ 이다.
> 양변을 $n(n+1)$ 로 나누면 $\dfrac{\log a_{n+1}}{n+1} = \dfrac{\log a_n}{n} + \boxed{(가)}$ 이다. $b_n = \dfrac{\log a_n}{n}$ 이라 하면 $b_1 = 1$ 이고 $b_{n+1} = b_n + \boxed{(가)}$ 이다. 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 구하면
> $b_n = \boxed{(나)}$ 이므로 $\log a_n = n \times \boxed{(나)}$ 이다. 그러므로 $a_n = 10^{n \times \boxed{(나)}}$ 이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$ 과 $g(n)$ 이라 할 때, $\dfrac{g(10)}{f(4)}$ 의 값은?
(2013년 대수능 A형)

① 38 ② 40 ③ 42 ④ 44 ⑤ 46

문제 2

[그림 1]과 같이 가로의 길이가 12 cm, 세로의 길이가 6 cm 인 직사각형 모양의 종이가 있다. 네 모퉁이에서 크기가 같은 정사각형 모양의 종이를 잘라 낸 후 남는 부분을 접어서 [그림 2]와 같이 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 상자의 부피의 최댓값을 $M\text{ cm}^3$ 이라 할 때, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}M$ 의 값을 구하시오.
(단, 종이의 두께는 무시한다.) (2011년 4월 전국연합)



[그림 1]


[그림 2]

예시답안

풀어보기

문제 1

정답: ④

$\dfrac{\log a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{\log a_n}{n}+\dfrac{1}{n(n+1)}$ 이므로 (가) $=\dfrac{1}{n(n+1)}=f(n)$

$b_1=1, b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{n(n+1)}$ 이므로 $b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k(k+1)}=1+1-\dfrac{1}{n}=\dfrac{2n-1}{n}$ 에서

$$(나)=\frac{2n-1}{n}=g(n)$$

따라서 $f(4)=\dfrac{1}{20}$, $g(10)=\dfrac{19}{10}$ 이므로 $\dfrac{g(10)}{f(4)}=\dfrac{\frac{19}{10}}{\frac{1}{20}}=38$

문제 2

정답: 24

잘라낸 정사각형의 한 변의 길이를 x 라 하고 상자의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x)=x(6-2x)(12-2x)\ (단, 0<x<3)$$

$$V'(x)=12(x^2-6x+6)=0$$

이므로 $x=3-\sqrt{3}$ 에서 최댓값을 갖는다. 따라서 $M=24\sqrt{3}$ 이므로 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}M=24$

논제 I-1

(대학발표 예시답안)

n 번째 단계에서 물의 양은 다음 점화식으로 표현될 수 있다.

$$V_1=1\ ,\ \ V_{n+1}=V_n-\frac{1}{4}V_n^{\,2}+1\ (n\geq 1)$$

명제 $0<V_n<2$ 가 모든 n 에 대하여 성립함을 보이자.

$n=1$ 일 때, $V_1=1$ 이므로 만족한다.

$n=k$ 일 때, $0<V_k<2$ 가 성립한다고 가정하면,

$V_{k+1} = V_k - \frac{1}{4}V_k^2 + 1$ 에서

$$V_{k+1} = -\frac{1}{4}(V_k - 2)^2 + 2$$

이고 $0 < V_k < 2$ 이므로 $1 < -\frac{1}{4}(V_k - 2)^2 + 2 < 2$ 이다.

그러므로 $0 < V_{k+1} < 2$ 이고 $n = k+1$ 일 때 명제가 성립한다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $0 < V_n < 2$ 이 성립한다.

논제 I−2

(대학발표 예시답안)

임의의 자연수 n에 대하여 $V_{n+1} > V_n$ 임을 보이자.

$V_{n+1} - V_n = -\frac{1}{4}V_n^2 + 1$ 이고 [논제 I−1]의 결과로부터 모든 자연수 n 에 대하여 $0 < V_n < 2$ 이다.

이를 이용하면 모든 n 에 대하여 $-\frac{1}{4}V_n^2 + 1 > 0$ 이므로 $V_{n+1} - V_n > 0$ 이다.

따라서 용기에 담긴 물의 양 V_n 은 n 이 커짐에 따라 증가한다.

논제 I−3

(대학발표 예시답안)

점화식 $V_{n+1} = V_n - \frac{1}{4}V_n^2 + 1$ 을 $2 - V_{n+1} = \frac{1}{4}(2 - V_n)^2$ 로 변형한다.

여기서 $a_n = 2 - V_n$ 이라고 두면 $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2$ 이다.

[논제I−1]의 결과로부터 모든 $n \geq 1$ 에 관하여 $a_n > 0$ 이다.

따라서 등식 $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2$ 의 양변에 $\log_2$ 를 취하면, $\log_2 a_{n+1} = -2 + 2\log_2 a_n$ 이다.

이때, $b_n = \log_2 a_n$ 으로 두면 $b_{n+1} - 2 = 2(b_n - 2)$ 이므로 수열 $\{b_n - 2\}$ 는 공비가 2 이고 초항이 $b_1 - 2 = -2$ 인 등비수열이다.

즉, $b_n - 2 = (-2) \cdot 2^{n-1} = -2^n$ 이고 $a_n = 2^{b_n} = 2^{2-2^n}$ 이다.

따라서 $V_n = 2 - a_n = 2 - 2^{2-2^n}$ 이고 $\lim_{n\to\infty} V_n = 2$ 이다.

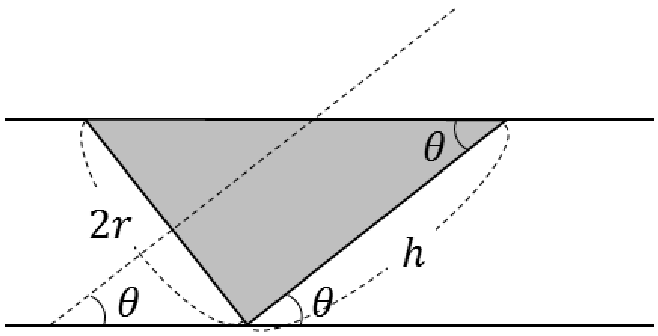
논제 I-4

(대학발표 예시답안)

원기둥의 밑면의 반지름을 r, 원기둥의 높이를 h라 하자. 물이 넘치지 않게 최소의 겉넓이를 가지도록 용기를 만들려면, 아래 두 조건을 만족하는 θ, h, r중 용기의 겉넓이가 최소가 되는 값을 찾으면 된다.

조건 1. $\tan\theta = \dfrac{2r}{h}$

조건 2. $\dfrac{1}{2} \times$ 원기둥의 부피 $= 2$



$\dfrac{1}{2}\pi r^2 h = 2$, $\tan\theta = \dfrac{2r}{h}$, 그리고 용기의 겉넓이는 $f = \pi r^2 + \pi r h$ 이다.

$\dfrac{1}{2}\pi r^2 h = 2$ 를 이용하면, $h = \dfrac{4}{\pi r^2}$ 이므로 $f = \pi r^2 + \dfrac{4}{r}$ 이다.

f는 r에 관한 함수이고 $r > 0$에서 미분가능하므로, $f'(r) = \dfrac{2\pi}{r^2}\left(r^3 - \dfrac{2}{\pi}\right)$ 이다.

미분의 결과로서 $r > 0$ 인 구간에서 $f(r)$ 은 $r = \sqrt[3]{\dfrac{2}{\pi}}$ 에서 최댓값을 가진다.

이때, $h = \dfrac{4}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\dfrac{2}{\pi}}$ 이고, $\tan\theta = \dfrac{2r}{h} = 1$ 이다.

용기를 물로 가득 채웠을 때 용기의 밑면은 물의 표면의 정사영이 되므로, 두 넓이는 $S_0 = S\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = S\sin\theta$ 를 만족한다.

따라서 $\dfrac{S}{S_0} = \dfrac{1}{\sin\theta} = \sqrt{2}$ 이고 두 넓이의 비와 가장 가까운 자연수는 1 이다.

7 고려대학교 모의

※ 다음 물음에 답하시오.

(가)

그림1과 같이 2 이상인 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^n$ 위에 $0 \le a < b$인 두 실수 a, b를 x좌표로 하는 두 점 $\mathrm{A}(a, a^n)$과 $\mathrm{B}(b, b^n)$에서의 접선들의 교점을 $\mathrm{C}(c, d)$라 하자. 점 A, B, C의 수선의 발을 각각 점 $\mathrm{A}'(a, 0)$, $\mathrm{B}'(b, 0)$, $\mathrm{C}'(c, 0)$이라 하자.

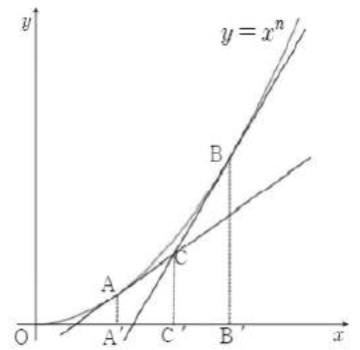


그림 1

(나)

그림2와 같이 x축 위의 점 $\mathrm{P}(p, 0)$에서 곡선 $y=x^4+1$에 그은 두 접선의 접점을 $\mathrm{Q}(s, t)$와 $\mathrm{R}(u, v)$라 하자.

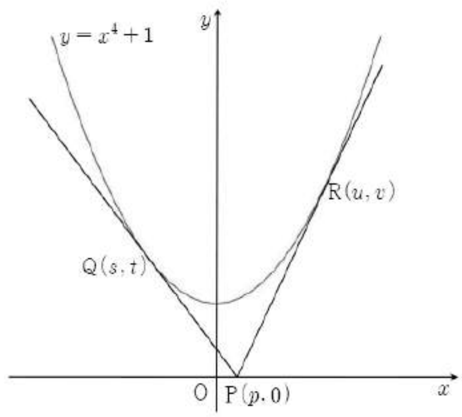


그림 2

(a) 제시문 (가)에서 x축 위의 점 $(n+1, 0)$을 지나고 곡선 $y=x^n$과 수직으로 만나는 직선의 방정식을 구하시오.

(b) 제시문 (가)에서 $0 \le a < b$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여 $\overline{\mathrm{A'C'}} = \overline{\mathrm{C'B'}}$이 되기 위한 n의 값을 구하고, 이때 곡선 $y=x^n$과 두 접선에 의해 둘러싸인 영역의 면적을 구하시오.

(c) 제시문 (나)에서 p를 s의 함수로 나타내시오.

(d) 제시문 (나)에서 극한 $\lim_{s \to 0} s^4 \frac{du}{ds}$를 구하시오.

배경지식 쌓기

1. 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

2. 항등식의 미정계수

항등식이란 그 문자에 어떤 수를 대입하여도 항상 성립하는 등식이며, 미정계수를 구하는 방법은 계수비교법과 수치대입법이 있다.

(참고) 항등식의 성질

다음 식이 x, y 에 대한 항등식일 때,

(1) $ax+b=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0$

(2) $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0,\ c=0$

(3) $ax+by+c=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0,\ c=0$

3. 정적분과 넓이

닫힌구간 $[a, b]$ 에서 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a,\ x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이 S 는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

4. 음함수의 미분법

x 의 함수 y 가 음함수 $f(x,\ y)=0$ 의 꼴로 주어졌을 때, y 를 x 의 함수로 보고 각 항을 x 에 대하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$ 를 구한다.

5. 함수의 극한

함수 $f(x)$ 에서 x 가 a 에 한없이 가까이 갈 때, 함수 $f(x)$ 의 값이 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$ 는 α 에 수렴한다고 하고, α 를 함수 $f(x)$ 의 극한값 또는 극한이라 한다.

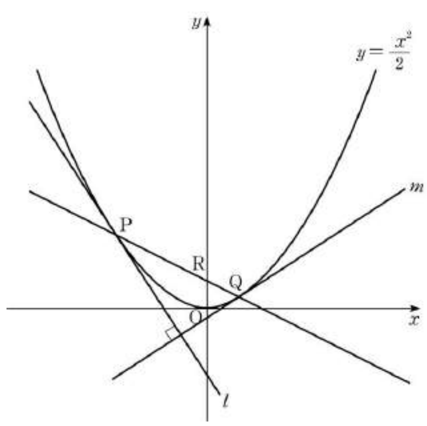
(참고) $x \to a$ 일 때, 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)g(x)$, $f(x)-g(x)$ 가 $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty\times 0$, $\infty-\infty$ 꼴일 때에는 주어진 식을 변형한 후 극한값을 구한다.

풀어보기

문제 1

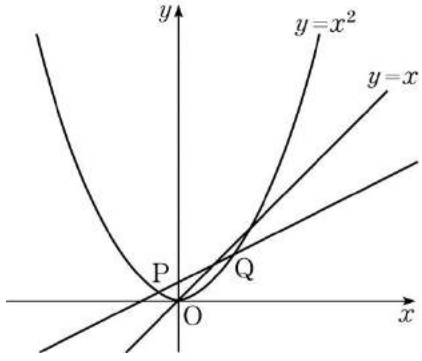
곡선 $y=\dfrac{x^2}{2}$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$에서 접하는 직선을 l이라 하자. 직선 l과 수직인 직선 중 곡선 $y=\dfrac{x^2}{2}$에 접하는 직선을 m이라 하고, 직선 m과 곡선 $y=\dfrac{x^2}{2}$의 접점을 Q라 하자. y축과 직선 PQ가 점 R에서 만날 때, 점 R의 y좌표는? (단, $a\neq 0$이다.) (2014년 10월 전국연합 A형)

① $\dfrac{3}{8}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{5}{8}$　④ $\dfrac{3}{4}$　⑤ $\dfrac{7}{8}$



문제 2

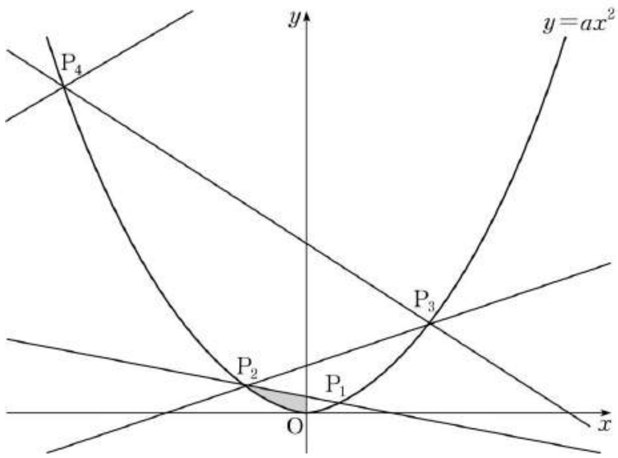
곡선 $y=x^2$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$, $\mathrm{Q}(a+1,\ a^2+2a+1)$이 있다. 직선 PQ와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 $f(a)$라 할 때, $100\lim\limits_{a\to 0}f(a)$의 값을 구하시오. (2014년 10월 전국연합 A형)



문제 3

자연수 n 에 대하여 곡선 $y=ax^2$ ($a>0$) 위의 점 P_n 을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 점 P_1 의 좌표는 $(x_1,\ ax_1^2)$ 이다.
> (나) 점 P_{n+1} 은 점 $\mathrm{P}_n(x_n,\ ax_n^2)$ 을 지나는 직선 $y=-ax_nx+2ax_n^2$ 과 곡선 $y=ax^2$ 이 만나는 점 중에서 점 P_n 이 아닌 점이다.



점 P_1 의 좌표가 $\left(1,\ \frac{1}{3}\right)$ 일 때, 곡선 $y=ax^2$ 과 직선 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ 로 둘러싸인 부분 중에서 제2 사분면에 있는 부분의 넓이는? (2014년 10월 전국연합 A형)

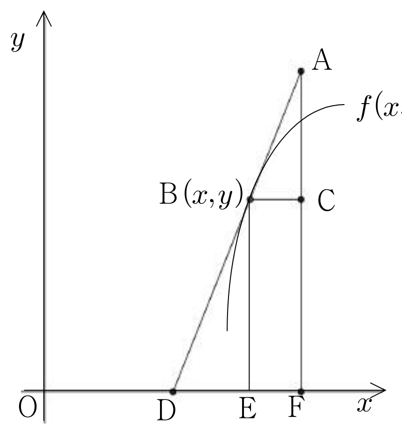
① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{8}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

읽기자료

접선의 기울기의 다양한 접근[5)]

(1) 페르마의 아이디어를 이용한 접선의 기울기

페르마는 데카르트와는 달리 기하학적 성질을 유도하기 위해 대수적인 방정식을 먼저 연구하였다. 그는 주어진 곡선의 한 점에서의 접선을 구하는 일반적인 방법을 위해 방정식으로부터 그 점에 대한 접선영(subtangent), 즉 x축 상의 접점에서 내린 수선의 발과 접선이 x축과 만나는 점 사이의 선분을 찾는 문제로 생각했다. 이 방법은 접선을 곡선과의 교점이 일치하려 할 때, 할선의 극한으로 생각하는 개념이 내포되어 있다.



이 페르마의 아이디어를 살펴보면 곡선 $f(x, y)=0$이 주어져 있고 점 $\mathrm{B}(x, y)$를 곡선위의 점이라 하자. 그리고 이 점을 지나는 접선과 x축과의 교점을 D라고 하자. 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 E라고 하고 선분 DE의 길이를 a라 두자. 구하고자 하는 값을 얻기 위해 x의 증가량을 e라 두면 닮음삼각형($\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{BDE}$)에 의하여, 접점과 가까운 접선 위의 점 A의 좌표는 다음과 같다.

$$\left(x+e,\ y\left(1+\frac{e}{a}\right)\right)$$

이 점을 곡선 위의 점으로 간주하면

$$f\left(x+e,\ y\left(1+\frac{e}{a}\right)\right)=0$$

이 된다. 그러면 등호는 e가 0이 되도록 함으로써 참이 된다. 그리고 접점의 x, y의 항으로 접선영 a를 구할 수 있다.

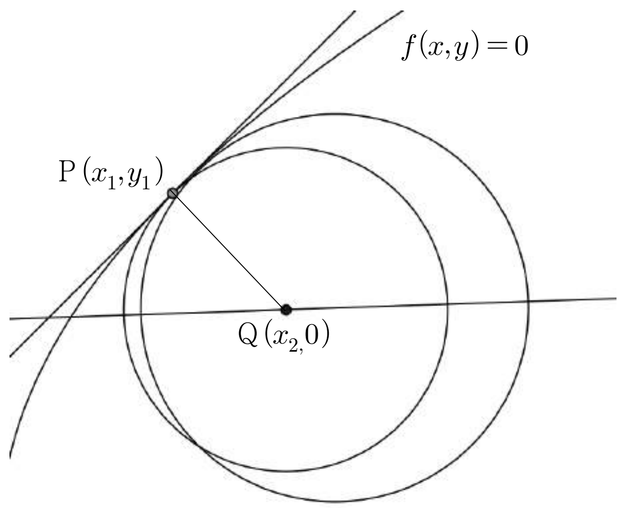
5) 참고문헌: 서은정, 수학사를 활용한 미분 개념의 교수학습자료 개발 연구, 순천대학교, 석사학위논문 (2008)

(2) 데카르트의 아이디어를 활용한 접선의 기울기

데카르트는 방정식의 성질을 유도하기 위해 먼저 기하학적 도형의 성질을 이용하였는데, 특히, 성격상으로 보면 그 당시에 유명했던 무한소 개념보다는 오히려 대수적인 방법을 통해 접선을 긋는 방법을 생각했다. 그의 대수적인 접근 방법은 미적분학의 발전에 가장 직접적인 영향을 끼쳤다. 그는 그의 저서 ‘Geometry’에서 접선을 긋는 문제의 중요성을 다음과 같이 표현했다.

> “ 내가 알고 있는 가장 유용하고 일반적인 방법일 뿐만 아니라 내가 기하학에서 알기를 희망하여 왔던 부분이다. ”

그는 곡선의 접선을 찾는 문제를 그 접선에 수직인 법선의 이중근을 찾는 문제로 환원하여 생각했다.



이제 데카르트의 아이디어를 이용하여 접선의 방정식을 구해보자.

주어진 곡선의 방정식이 $f(x, y)=0$ 이라 하자. (x_1, y_1) 이 접선을 그으려는 곡선 위의 점 P 의 좌표라 하고 $\mathrm{Q}(x_2, 0)$ 은 x 축 위의 점이라 하자. 그러면 Q 를 중심으로 하고 P 를 지나는 원의 방정식은

$$(x-x_2)^2+y^2=(x_1-x_2)^2+{y_1}^2$$

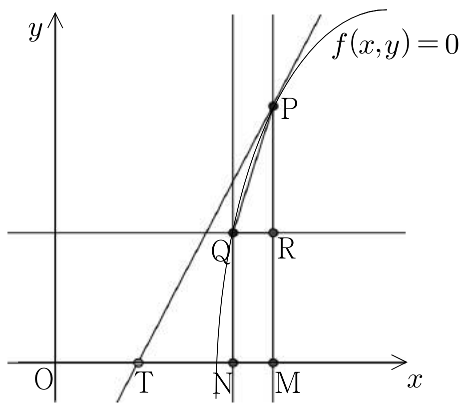
이 된다. 이 방정식과 $f(x, y)=0$ 에서 y 를 소거하면 원이 주어진 곡선과 만나는 x 좌표를 나타내는 방정식을 얻는다.

이제 이 방정식이 x_1 과 같은 중근을 갖도록 x_2 를 결정하자.

한편, 원이 점 P 에서 주어진 곡선과 접하기 때문에, 점 Q 는 점 P 에서의 곡선의 법선과 x 축과의 교점이 된다. 이 원이 그려지면 구하려는 접선을 쉽게 그을 수 있다.

(3) 베로의 아이디어를 활용한 접선의 기울기

미분법을 예견하는데 중요한 역할을 했던 또 다른 사람은 영국의 수학자 베로였다. 베로의 가장 중요한 수학적 업적은 그의 저서 「광학과 기하학강의」이다. 이 책은 그가 케임브리지대학교의 교수직을 사임했던 해에 출판되었다. 이 책의 머리말에는 그 책 내용의 일부는 뉴턴에게 의존했다는 말이 있는데 이것은 아마도 광학을 다룬 부분으로 짐작된다. 현대적인 미분과정과 매우 근접한 내용이 바로 이 책에 실려 있다. 그것은 오늘날 미적분학 교과서에서 찾아볼 수 있는 소위 '미분삼각형(differential triangle)'이라고 부르는 것을 사용했다.



그의 미분의 아이디어는 곡선 상의 무한히 작은 호는 곡선이 아니라 직선이 된다는 무한소개념을 통해 접선을 긋는 방법을 생각했다.

이제 베로의 아이디어를 활용하여 접선의 방정식을 구해보자.

위의 그림과 같이 주어진 곡선 위의 한 점 P 에서의 접선을 구하고자 한다.
점 Q 를 곡선 위의 근접점이라 할 때, $\triangle$PTM 과 $\triangle$PQR 은 서로 닮았고, 베로는 작은 삼각형이 무한히 작아짐에 따라 다음과 같은 등식을 얻게 된다고 주장하였다.

$$\frac{\overline{\mathrm{RP}}}{\overline{\mathrm{QR}}}=\frac{\overline{\mathrm{MP}}}{\overline{\mathrm{TM}}}$$

이때, $\overline{\mathrm{QR}}=e,\ \overline{\mathrm{RP}}=a$ 라 놓으면 점 $\mathrm{P}(x,y)$ 에 대하여 점 Q 의 좌표는 $(x-e,\ y-a)$ 가 된다. 이 값들을 곡선의 방정식에 대입하고 e 와 a 의 2 차 이상인 항을 무시한다면 비율 $\frac{a}{e}$ 을 얻는다. 따라서 다음과 같은 식이 성립하고 접선이 결정된다.

$$\overline{\mathrm{OT}}=\overline{\mathrm{OM}}-\overline{\mathrm{TM}}=\overline{\mathrm{OM}}-\overline{\mathrm{MP}}\left(\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{RP}}}\right)=x-y\left(\frac{e}{a}\right)$$

예시답안

풀어보기

문제 1

$f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ 라 하면, $f'(x)=x$ 이다.

한편, $f'(a)=a$ 이므로 접선 l 의 방정식은

$$y=ax-\frac{a^2}{2}$$

이다. 직선 l 와 직선 m 은 서로 수직이므로 직선 m 의 기울기는 $-\dfrac{1}{a}$ 이다.

이 때, 미분계수가 $-\dfrac{1}{a}$ 인 점 Q 의 x 좌표는

$$f'(x)=-\frac{1}{a} \text{ 에서 } x=-\frac{1}{a} \text{ 이다.}$$

직선 m 과 곡선 $y=\dfrac{x^2}{2}$ 의 접점은 $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{2a^2}\right)$ 이고 직선 PQ 의 방정식은

$$y=\frac{\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{1}{2a^2}}{a+\dfrac{1}{a}}(x-a)+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2-1}{2a}x+\frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

이 직선이 y 축과 만나는 점 R 를 구하면 $\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ 이다.

따라서 점 R 의 y 좌표는 $\dfrac{1}{2}$ 이다.

문제 2

직선 PQ 의 방정식은

$$y=(2a+1)(x-a)+a^2=(2a+1)x-(a^2+a)$$

이다. 직선 PQ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x=(2a+1)x-(a^2+a)$$

이고, $a\neq 0$ 이면 $x=\dfrac{a^2+a}{2a}$ 이다. 한편, $f(a)=\dfrac{a^2+a}{2a}$ 이므로,

$$\lim_{a\to 0}f(a)=\lim_{a\to 0}\frac{a^2+a}{2a}=\frac{1}{2}$$

따라서 $100\lim\limits_{a\to 0}f(a)=50$ 이다.

문제 3

점 $P_1\left(1, \frac{1}{3}\right)$ 이 곡선 $y=ax^2$ 위의 점이므로 $a=\frac{1}{3}$ 이다.

직선 P_1P_2 의 방정식은 조건 (나)에 의해서

$$y=-\frac{1}{3}\times 1\times x+2\times\frac{1}{3}\times 1^2$$

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$

한편, 점 P_2 의 x 좌표는 직선 P_1P_2 와 곡선 $y=\frac{1}{3}x^2$ 의 교점이므로

$$\frac{1}{3}x^2=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$

양변에 3 을 곱하여 정리하면

$$x^2+x-2=0$$

이고 이차방정식의 해는

$$x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

이다. 점 P_2 의 x 좌표는 음수이므로 -2 이다.

따라서 구하는 부분의 넓이는 $x=-2$ 와 $x=0$ 사이의 직선과 곡선 사이의 넓이이므로

$$\int_{-2}^{0}\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x^2\right)dx=\left[-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}x^3\right]_{-2}^{0}=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}-\frac{8}{9}=\frac{10}{9} \text{ 이다.}$$

논제 a

(대학발표 예시답안)

점 $(n+1, 0)$ 을 지나고, 곡선 $y=x^n$ 과 수직으로 만나는 직선을 l 이라 하자. 교점은 곡선 위에 있으므로, 점 (k, k^n) 이라 하자.

곡선 $y=x^n$ 의 도함수는 $y'=n\cdot x^{n-1}$ 이므로, 점 (k, k^n) 에서의 곡선 $y=x^n$ 의 접선의 기울기는 $n\cdot k^{n-1}$ 이다. 직선 l 은 이 교점에서 곡선 $y=x^n$ 에 접하는 접선과 수직으로 만나므로 직선 l 의 기울기 m 은

$$(n\cdot k^{n-1})\times m=-1$$

$$m=-\frac{k^{1-n}}{n} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

이다. 한편, 두 점 $(n+1, 0)$ 과 점 (k, k^n) 을 지나는 직선 l 의 기울기 m 은

$$m=\frac{k^n}{k-n-1} \quad \cdots\cdots \text{②}$$

(예시답안1)

①과 ②에 의해서

$$-\frac{k^{1-n}}{n}=\frac{k^n}{k-n-1}$$

$$n \cdot k^{2n-1}+k-n-1=0 \ \cdots\cdots \ ③$$

이다. 함수 $f(x)=n \cdot x^{2n-1}+x-n-1$ 이라 할 때, 자연수 n 에 대하여 도함수 $y'=n(2n-1)x^{2n-2}+1>0$ 이므로, 함수 $f(x)$ 는 단조증가이다.

그러므로 ③을 만족하는 실수 k 는 유일하다. 한편, $k=1$ 일 때, ③을 만족하므로 직선 l 은 점 $(n+1, 0)$ 과 점 $(1, 1)$ 을 지난다.

구하고자 하는 직선 l 의 방정식은

$$y-1=-\frac{1}{n}(x-1)$$

즉, $y=-\frac{1}{n}x+\frac{1}{n}+1$ 이다.

(예시답안2)

①과 ②에 의해서

$$-\frac{k^{1-n}}{n}=\frac{k^n}{k-n-1}$$

$$n \cdot k^{2n-1}+k-n-1=0$$

$$n(k^{2n-1}-1)+(k-1)=0$$

$$n(k-1)(k^{2n-2}+k^{2n-3}+\cdots+k+1)+(k-1)=0$$

$$(k-1)(nk^{2n-2}+nk^{2n-3}+\cdots+nk+n+1)=0$$

한편, $k>0$, $n\geq 2$ 일 때, $nk^{2n-2}+nk^{2n-3}+\cdots+nk+n+1>0$ 이므로 $k-1=0$ 이어야 한다. 즉, $k=1$ 이다. 따라서 구하고자 하는 직선 l 은 점 $(n+1, 0)$ 과 점 $(1, 1)$ 을 지난다. 직선 l 의 방정식은

$$y-1=-\frac{1}{n}(x-1)$$

즉, $y=-\frac{1}{n}x+\frac{1}{n}+1$ 이다.

(예시답안3)

①과 ②에 의해서

$$-\frac{k^{1-n}}{n}=\frac{k^n}{k-n-1}$$

$$n \cdot k^{2n-1}+k-n-1=0$$

이다. $1-k\neq 0$ (즉, $k\neq 1$)라 가정할 때, 자연수 n 에 대해서

$$\frac{1}{n}=\frac{k^{2n-1}-1}{1-k}>0$$

이므로, 만약, $1-k>0$ (즉, $k<1$) 이면 $k^{2n-1}-1>0$ (즉, $k>1$)이 되어 모순이다. 한편, $1-k<0$ (즉, $k>1$) 이면 $k^{2n-1}-1<0$ (즉, $k<1$)이 되어 모순이다.
따라서 $1-k=0$ 이어야 한다. 즉, $k=1$ 이다. 그러므로 구하고자 하는 직선 l 은 점 $(n+1, 0)$ 과 점 $(1, 1)$ 을 지난다. 직선 l 의 방정식은

$$y-1=-\frac{1}{n}(x-1)$$

즉, $y=-\frac{1}{n}x+\frac{1}{n}+1$ 이다.

논제 b

(대학발표 예시답안)

$\overline{A'C'}=\overline{C'B'}$ 이므로

$$c-a=b-c \quad \text{즉, } c=\frac{a+b}{2} \quad \cdots\cdots \text{④}$$

을 만족해야 한다. 한편, 점 A 에서의 접선 l_1 의 방정식은

$$y-a^n=na^{n-1}(x-a)$$

이고, 점 B 에서의 접선 l_2 의 방정식은

$$y-b^n=nb^{n-1}(x-b)$$

이다. 두 접선의 교점 C 의 x 좌표 c 를 구하면,

$$c=\frac{n-1}{n}\times\frac{a^n-b^n}{a^{n-1}-b^{n-1}} \quad \cdots\cdots \text{⑤}$$

이다. ④과 ⑤에 의하여

$$\frac{a+b}{2}=\frac{n-1}{n}\times\frac{a^n-b^n}{a^{n-1}-b^{n-1}}$$

이므로, 식을 정리하면

$$(2-n)a^n+(2-n)b^n+nab(a^{n-2}-b^{n-2})=0 \quad \cdots\cdots \text{⑥}$$

⑥은 $0\le a<b$ 인 임의의 두 실수 a, b 에 대한 항등식이므로

$$2-n=0 \ , \ a^{n-2}-b^{n-2}=0$$

을 만족해야 한다. 따라서 $n=2$ 이다.

결국 접선 l_1 의 방정식은 $y=2ax-a^2$ 이며, 접선 l_2 의 방정식은 $y=2bx-b^2$ 이다. 따라서 구하고자 하는 둘러싸인 영역의 면적은 다음과 같다.

$$S=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x^2-2ax+a^2)dx-\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x^2-2bx+b^2)dx$$

$$=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2\,dx-\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_a^{\frac{a+b}{2}}-\left[\frac{1}{3}(x-b)^3\right]_{\frac{a+b}{2}}^{b}=\frac{1}{12}(b-a)^3$$

논제 c

(대학발표 예시답안)

점 $Q(s,\ s^4+1)$ 에서의 접선은 점 $(p,0)$ 을 지나므로, 접선의 방정식은

$$y=\frac{s^4+1-p}{s-p}(x-p)$$

이다. 한편, 점 Q 에서 곡선 $y=x^4+1$ 에 접한다.

곡선의 도함수는 $y'=4x^3$ 이므로, 점 Q 에서 접선의 기울기는 $4s^3$ 이다. 접선의 기울기가 같으므로

$$4s^3=\frac{s^4+1-p}{s-p}$$

$$p=\frac{3s^4-1}{4s^3}\ (s\neq 0)$$

이 된다.

논제 d

(대학발표 예시답안)

앞의 논제 c 에 의하여 $p=\dfrac{3s^4-1}{4s^3}$ 이다. 또한, 같은 방법으로 $p=\dfrac{3u^4-1}{4u^3}$ 이므로

$$\frac{3s^4-1}{4s^3}=\frac{3u^4-1}{4u^3}\ \cdots\cdots ⑦$$

이다. ⑦의 양변을 s 에 대해 미분하면

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s^4}=\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{u^4}\right)\frac{du}{ds}$$

이고 양변을 정리하면

$$\frac{du}{ds}=\frac{\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{s^4}}{\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{u^4}}=\frac{\dfrac{s^4+1}{s^4}}{\dfrac{u^4+1}{u^4}}$$

이다. 구하고자 하는 극한은

$$\lim_{s\to 0}s^4\frac{du}{ds}=\lim_{s\to 0}\frac{u^4(s^4+1)}{u^4+1}=\lim_{s\to 0}\frac{u^4}{u^4+1}$$

인데, $s\to 0$ 이면 $|u|\to\infty$ 이고, $u^4\to\infty$ 이므로

$$\lim_{s\to 0}\frac{u^4}{u^4+1}=\lim_{u^4\to\infty}\frac{u^4}{u^4+1}=\lim_{u^4\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{u^4}}=1 \text{ 이다.}$$

8 고려대학교 수시(A형)

※ 제시문

(가) $s<t$ 인 두 실수에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(s, s^2)$ 과 $\mathrm{B}(t, t^2)$ 은 곡선 $y=x^2$ 위를 움직인다.

(나) 다음 성질을 만족하는 함수는 무수히 많다.

함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 다음 식을 만족한다. $f(x)+f(x+1)=x^2$

(다) 함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, 3)$에서 정의되고 양의 함숫값을 갖는 미분가능한 함수이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 C 와 원점을 연결하는 직선을 점 C 를 중심으로 -45° 만큼 회전하여 얻은 직선은 점 C 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 접한다.

문제 a

제시문 (가)에서 두 점 A 와 B 가 $\overline{\mathrm{AB}}=1$을 만족하며 움직일 때, 선분 AB와 곡선 $y=x^2$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $F(s)$ 라 하자. 극한값 $\lim_{s\to\infty} s^3F(s)$ 를 구하시오.

문제 b

제시문 (가)에서 두 점 A 와 B 가 $t=s+1$ 을 만족하며 움직일 때, 선분 AB 가 지나가는 영역을 $x^2 \le y \le g(x)$ 로 나타낼 수 있다. 이 때, 함수 $g(x)$ 를 구하시오.

문제 c

제시문 (나)의 성질을 만족하는 다항함수 $P(x)$를 구하시오. 제시문 (나)의 성질을 만족하는 다항함수가 아닌 연속함수 $Q(x)$ 를 하나를 찾고 적분값 $\int_{-3}^{3} Q(x)dx$ 를 구하시오.

문제 d

제시문 (다)의 성질을 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 적분값 $\int_1^2 f(x)dx$ 를 $f(1)$ 과 $f(2)$ 를 이용하여 나타내시오.

배경지식 쌓기

1. 이차방정식 $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ 의 두 근 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ 를 이용한 정적분

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$\begin{aligned}(\because)\ \int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)dx &= a\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx \\ &= a\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= a\left\{\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)\right\} \\ &= \frac{a}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\beta^2+2\beta\alpha+\alpha^2)+6\alpha\beta\} \\ &= -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)(\beta^2-2\beta\alpha+\alpha^2) \\ &= -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

2. 주기함수

함수 $f(x)$ 의 정의역에 속하는 실수 x 에 대하여,

$$f(x+p)=f(x)$$

를 만족시키는 0 이 아닌 상수 p 가 존재할 때 함수 $f(x)$ 를 **주기함수**라 하고, 이런 상수 p 중에서 최소인 양수를 그 함수의 **주기**라고 한다.

예를 들어 $\sin x=\sin(x+2\pi)$, $\cos x=\cos(x+2\pi)$ 이므로 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 는 주기가 2π 인 주기함수이다.

3. 치환 적분법

$I=\int_a^b f(x)f'(x)dx$ 를 계산하기 위하여 다음과 같이 치환적분을 할 수 있다.

$f(x)=t$ 로 두면 $x=a$ 일 때, $t=f(a)$ 이고, $x=b$ 일 때, $t=f(b)$ 이고,

$dx=\dfrac{1}{f'(x)}dt$ 이므로

$$I=\int_a^b f(x)f'(x)dx=\int_{f(a)}^{f(b)} t\,dt=\frac{1}{2}\{(f(a))^2-(f(b))^2\}$$

4. 부분적분법

$$\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$$

풀어보기

문제 1

$\int_{e}^{e^3} \frac{\ln x}{x} dx$ 의 값은? (2015년 6월 모의수능 B형)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

문제 2

양수 a 에 대하여 함수 $f(x)=\int_{0}^{x}(a-t)e^t dt$ 의 최댓값이 32 이다. 곡선 $y=3e^x$ 과 두 직선 $x=a$, $y=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. (2015년 대수능)

읽기자료

라이프니츠와 미적분학6)

라이프니츠는 아이작 뉴턴과 같이 무한소를 사용한 계산법(미분과 적분)을 발명한 것으로 알려져 있다. 라이프니츠의 공책을 보면 그가 처음으로 $y=f(x)$의 그래프 밑의 면적을 계산하는데 적분계산법을 도입한 날이 1675년 11월 11일이라는 것을 알 수 있다. 라이프니츠는 이 날 지금도 쓰는 표기법 몇 개를 만들었는데, 그 예로 라틴어 summa의 S를 길게 늘인 적분기호, 라틴어 differentia에서 유래한 미분기호 d가 있다. 이 제안이 그의 가장 큰 수학적 업적일 것이다. 미적분학에서 곱셈 법칙은 현재 "라이프니츠의 법칙"으로 불리고, 적분 기호 안에 있는 함수를 어떻게 미분해야 되는지 설명한 이론은 라이프니츠의 적분 규칙이라고 불린다.

라이프니츠의 증명은 대부분 기하학적 직감에 의한 사실이었다. 라이프니츠는 무한소라고 불리는 수학적 존재를 밝혀냈고, 역설적이게도 이것을 대수적 성질에 적용하자고 제안했다.

1711년부터 그가 죽을 때까지 라이프니츠는 존 케일, 뉴턴 등 다른 사람들과 미적분학을 뉴턴과 독립적으로 발견했는지, 원래 뉴턴의 아이디어를 다른 표기법으로 썼는지 긴 논쟁을 하였다.

19세기에 극한에 대한 정의와 실수에 대한 정밀한 분석이 오귀스탱 루이 코시, 베른하르트 리만, 카를 바이어슈트라스와 그외 다른 사람들에 의해 이루어졌고, 보다 엄격한 미적분학이 나왔다. 코시는 계속 미적분학의 기본으로 무한소를 사용했지만, 바이어슈트라스에 의해 무한소는 천천히 미적분학에서 사라져갔다. 그럼에도 불구하고 해석학 밖, 특히 과학과 공학에서는 무한소가 계속 사용되었고 오늘날까지 전해졌다. 1960년 에이브러햄 로빈슨은 모형 이론을 이용하여 라이프니츠의 무한소의 엄밀한 정의를 설립하기 위해 노력했다.

6) 자료출처 : 위키피디아

예시답안

풀어보기

문제 1

정답 ④

$\ln x = t$ 라 두면 $dx = x dt$ 이고 $x = e$ 일 때, $t = 1$, $x = e^3$ 일 때, $t = 3$

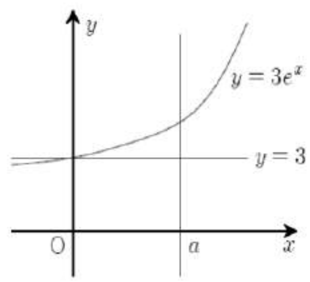
따라서 $\int_e^{e^3} \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^3 t\, dt = 4$

문제 2

$f(x) = \int_0^x (a-t)e^t dt$ 에서 양변을 x 에 관하여 미분하면 $f'(x) = (a-x)e^x$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대이고 최대이다.

$f(a) = \int_0^a (a-t)e^t dt = \left[(a-t)e^t\right]_0^a + \int_0^a e^t dt$

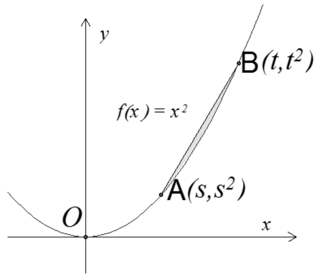
$= -a + e^a - 1 = 32 \qquad \therefore\ e^a - a = 33$



곡선 $y = 3e^x$ 과 두 직선 $x = a,\ y = 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^a (3e^x - 3)dx = 3\left[e^x - x\right]_0^a = 3(e^a - a - 1) = 3 \times 32 = 96 \quad \therefore 96$$

문제 a



$1 = \overline{\mathrm{AB}}^2 = (t-s)^2 + (t^2 - s^2)^2 = (t-s)^2\{1 + (t+s)^2\}$ 이므로 $t - s = \dfrac{1}{\sqrt{1+(t+s)^2}}$ 이다.

또한, x에 관한 이차방정식 $\frac{t^2-s^2}{t-s}(x-s)+s^2-x^2=0$의 두 근은 두 점 A, B의 x 좌표인 s, t이므로

$$F(s)=\int_s^t\left\{\frac{t^2-s^2}{t-s}(x-s)+s^2-x^2\right\}dx=-\int_s^t(x-s)(x-t)dx=\frac{1}{6}(t-s)^3$$

(배경지식에서 이차방정식의 두 근을 이용한 정적분 참고)

$\overline{\mathrm{AB}}=1$ 에서 $t=s+\alpha$ $(0<\alpha<1)$로 둘 수 있으므로

$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty}s^3F(s)&=\lim_{s\to\infty}s^3\frac{1}{6}(t-s)^3\\&=\lim_{s\to\infty}s^3\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(t+s)^2}}\right)^3\\&=\lim_{s\to\infty}s^3\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(s+\alpha+s)^2}}\right)^3\\&=\lim_{s\to\infty}s^3\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(2s+\alpha)^2}}\right)^3=\frac{1}{6}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{48}\end{aligned}$$

(다른 풀이)

$\overline{\mathrm{AB}}=1$이므로

$$\sqrt{(t-s)^2+(t^2-s^2)^2}=1,\ (t-s)^2\{1+(t+s)^2\}=1,\ (t-s)^2=\frac{1}{\{1+(t+s)^2\}}$$

또한, $F(s)=\frac{1}{6}(t-s)^3$ 이므로

$$\lim_{s\to\infty}s^3F(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s^3(t-s)^3}{6}=\lim_{s\to\infty}\frac{s^3}{6\{1+(t+s)^2\}\sqrt{1+(t+s)^2}}$$

$s<t\le s+1$ 이므로 $2s<s+t\le 2s+1$ 이다. 따라서

$$\frac{s^3}{6\{1+(2s+1)^2\}\sqrt{1+(2s+1)^2}}\le\frac{s^3}{6\{1+(t+s)^2\}\sqrt{1+(t+s)^2}}<\frac{s^3}{6\{1+(2s)^2\}\sqrt{1+(2s)^2}}$$

여기서, $\lim_{s\to\infty}\frac{s^3}{6\{1+(2s+1)^2\}\sqrt{1+(2s+1)^2}}=\lim_{s\to\infty}\frac{s^3}{6\{1+(2s)^2\}\sqrt{1+(2s)^2}}=\frac{1}{48}$ 이므로

$\lim_{s\to\infty}\frac{s^3}{6\{1+(t+s)^2\}\sqrt{1+(t+s)^2}}=\frac{1}{48}$, 즉, $\lim_{s\to\infty}s^3F(s)=\frac{1}{48}$ 이다.

문제 b

두 점 A(s, s^2), B$(s+1, (s+1)^2)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(s+1)^2=(2s+1)\{x-(s+1)\},\ y=(2s+1)x-s^2-s$$

이제 $f(x)=x^2$ 과 $h(x)=(2s+1)x-s^2-s$ 에서 $h(x)-f(x)=\{(2s+1)x-s^2-s\}-x^2$ 의 최댓값을 구해보자.

$$-x^2+(2s+1)x-s^2-s= -(x-\frac{2s+1}{2})^2+\frac{1}{4}$$

이므로 최댓값은 $x=s+\frac{1}{2}$ 일 때, $\frac{1}{4}$ 이다. 따라서 선분 AB가 지나가는 영역을

$x^2 \le y \le g(x)=x^2+\frac{1}{4}$ 로 나타낼 수 있다.

(다른 풀이)

선분 AB 위의 점의 좌표는 $\left((1-k)s+k(s+1),\ (1-k)s^2+k(s+1)^2\right)(0 \le k \le 1)$라고 둘 수 있다. $x=(1-k)s+k(s+1)$, $y=(1-k)s^2+k(s+1)^2$에서 $s=x-k$이고 이것을 $y=(1-k)s^2+k(s+1)^2=s^2+2ks+k$ 에 대입하여 정리하면

$$y=(x-k)^2+2k(x-k)+k=x^2-k^2+k$$

여기서, $0 \le k \le 1$이므로 $0 \le -k^2+k \le \frac{1}{4}$ 이다.

그러므로 선분 AB가 지나가는 영역은 $x^2 \le y \le x^2+\frac{1}{4}$ 로 나타낼 수 있다.

따라서 $g(x)=x^2+\frac{1}{4}$ 이다.

<참고>

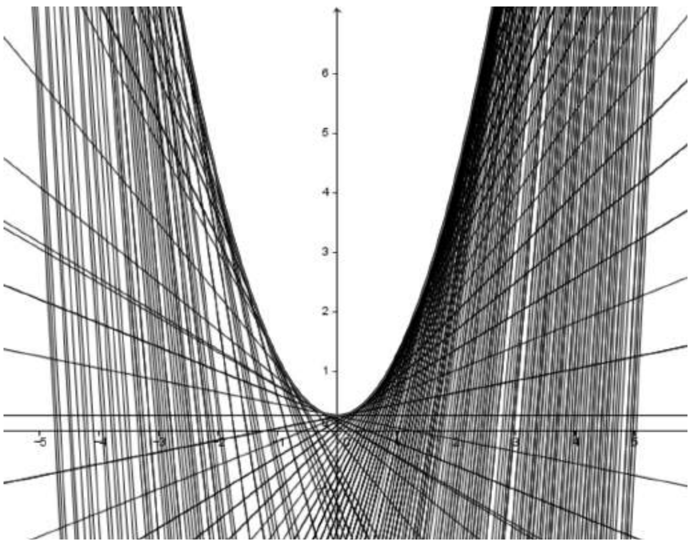
두 점 A(s, s^2), B$(s+1, (s+1)^2)$ 을 지나는 직선의 방정식

$y-(s+1)^2=(2s+1)\{x-(s+1)\}$ 에 임의의 실수 s 를 대입하면 무수히 많은 직선이 그려진다. 각각의 직선에 접하는 곡선이 바로 구하고자 하는 $g(x)$ 가 된다. 이와 같은 곡선을 포락선(envelope)이라 한다. 좀 더 설명하자면, 포락선이란 하나의 매개변수에 따라 정의된 무한개의 곡선이 있을 때 이 곡선 모두에 접하는 곡선을 이르는 말이다. 즉, 각각의 $t\in(a,b)$ 에 대하여 곡선 C_t 가 있을 때, 이것의 포락선 σ 는 각각의 C_t 모두와 접하는 곡선이다. 이 각각의 C_t 를 방정식으로 나타내어 $F(x, y, t)=0$ 이라고 쓸 수 있다고 하자. 이 때 C_t 의 방정식을 매개변수 t 에 대하여 편미분하여 얻은 방정식 $\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t)=0$ 과 $F(x, y, t)=0$ 을 연립해서 t 를 소거하면 된다.

위의 문제의 경우, 두 점 A, B 를 지나는 직선과 그 직선을 s 에 관하여 편미분한 식을 연립하여 풀면 각각의 직선에 접하는 곡선의 방정식을 얻을 수 있다. 즉,

$$y-(s+1)^2=(2s+1)\{x-(s+1)\}$$
$$2x-2s-1=0$$

위의 두 식에서 변수 s 를 소거하면 $y=x^2+\frac{1}{4}$ 를 얻을 수 있다. 아래 그림은 매개변수 s 를 변화시켰을 때 나타나는 직선들과 각각의 직선에 접하는 곡선인 $y=x^2+\frac{1}{4}$ 을 나타낸 것이다.



[직선군(群)과 그 포락선]

문제 c

i) $f(x)$ 가 다항함수인 경우.

$f(x)+f(x+1)=x^2$ 에서 $f(x)$ 는 이차함수임을 알 수 있고, $f(x)=ax^2+bx+c$로 두면

$$f(x)+f(x+1)=ax^2+bx+c+a(x+1)^2+b(x+1)+c=2ax^2+2(a+b)x+a+b+2c=x^2$$

에서 항등식의 성질을 이용하면 $2a=1, a+b=0, a+b+2c=0$ 에서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$ 를 구할 수 있다.

ii) $f(x)$ 가 다항함수가 아닌 경우

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\sin\pi x$ 로 두면

$$f(x)+f(x+1)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\sin\pi x+\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{2}(x+1)+\sin(\pi(x+1))$$

$$=x^2+\sin\pi x+\sin(\pi+\pi x)=x^2+\sin\pi x-\sin\pi x=x^2$$

$\therefore\ Q(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\sin\pi x$

$$\int_{-3}^{3}Q(x)dx=\int_{-3}^{3}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\sin\pi x\right)dx=2\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{3}x^2dx=9$$

(다른 풀이)

$Q(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\cos\pi x$, $Q(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{1}{2}$ 도 가능하다.

이 외의 주기함수를 이용한 답을 얼마든지 많이 찾을 수 있다.

문제 d

곡선 위의 임의의 한 점을 $C(x_1,f(x_1))$이라고 하면 직선 OC의 방정식은 $y=\frac{f(x_1)}{x_1}x$이다. 이 때, 이 직선의 기울기를 $\tan\theta$라 하면 $\tan\theta=\frac{f(x_1)}{x_1}$이고, 직선 OC를 원점을 중심으로 $-45°$ 회전하고, 이것을 x축으로 x_1만큼 평행이동한 후, y축으로 $f(x_1)$만큼 평행이동한 직선을 l'이라 하자.

이 때, l'의 기울기는 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}$ 이다. 따라서,

$$l' : y-f(x_1)=\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)(x-x_1)=\frac{f(x_1)-x_1}{f(x_1)+x_1}(x-x_1)\cdots①$$

또 l'은 $C(x_1,f(x_1))$을 지나는 접선이므로 $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$이다. 즉

$f'(x_1)=\frac{f(x_1)-x_1}{f(x_1)+x_1}$ 가 성립한다. 또 점 C는 곡선 위의 임의의 점이므로

$f'(x)=\frac{f(x)-x}{f(x)+x}\cdots②$가 성립한다. 이제 ②를 $f(x)$에 관하여 풀면

$$f(x)=\frac{1+f'(x)}{1-f'(x)}x=\frac{x\{1-f'(x)\}+2xf'(x)}{1-f'(x)}=x+\frac{2xf'(x)}{1-f'(x)}$$

이다. 그런데 $1-f'(x)=1+\frac{-f(x)+x}{f(x)+x}=\frac{2x}{\{f(x)+x\}}$이므로

$$f(x)=x+\frac{2xf'(x)}{1-f'(x)}=x+f'(x)(f(x)+x)$$

가 성립한다.

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \{x + f(x)f'(x) + f'(x)x\}dx$$
$$= \int_1^2 xdx + \int_1^2 f(x)f'(x)dx + \int_1^2 f'(x)xdx$$

위의 적분에 치환적분과 부분적분법을 적용하면

$$I = \int_1^2 f(x)dx = \frac{3}{2} + \int_{f(1)}^{f(2)} tdt + [f(x)x]_1^2 - \int_1^2 f(x)dx$$

$$\therefore 2I = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\{f(2)^{2=}f(1)^2\} + \{2f(2) - f(1)\}$$

즉, $I = \int_1^2 f(x)dx = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\{(f(2))^2 - (f(1))^2\} + \frac{1}{2}\{(2f(2)) - (f(1))\}$ 이다.

(다른 풀이)

곡선 $y = f(x)$ 위의 임의의 점 $\mathrm{C}(x, f(x))$에 대하여, 직선 OC의 기울기는 $\frac{f(x)}{x}$이다. 또한, $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\theta - 1}{1 + \tan\theta}$이므로 직선 OC를 -45° 회전하여 얻은 직선의 기울기는 $\dfrac{\frac{f(x)}{x} - 1}{1 + \frac{f(x)}{x}}$이다. 이 직선이 점 C에서 곡선 $y = f(x)$에 접한다고 했으므로

$$\frac{\frac{f(x)}{x} - 1}{1 + \frac{f(x)}{x}} = f'(x), \quad xf'(x) + f(x)f'(x) - f(x) + x = 0$$

그러므로

$$\int_1^2 \{xf'(x) + f(x)f'(x) - f(x) + x\}dx = 0,$$

$$[xf(x)]_1^2 - \int_1^2 f(x)dx + \left[\frac{1}{2}\{f(x)\}^2\right]_1^2 - \int_1^2 f(x)dx + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = 0,$$

$$2\int_1^2 f(x)dx = [xf(x)]_1^2 + \left[\frac{1}{2}\{f(x)\}^2\right]_1^2 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2,$$

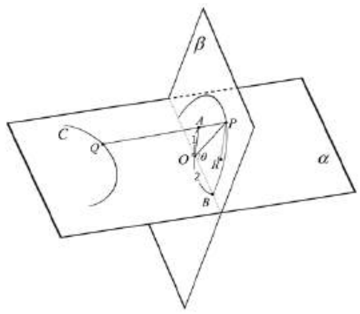
$$2\int_1^2 f(x)dx = 2f(2) - f(1) + \frac{1}{2}\{f(2)\}^2 - \frac{1}{2}\{f(1)\}^2 + \frac{3}{2},$$

$$\int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{4}\{f(2)\}^2 - \frac{1}{4}\{f(1)\}^2 + f(2) - \frac{1}{2}f(1) + \frac{3}{4}$$

이다.

9 고려대학교 수시(B형)

※ 제시문



점 O는 평면 α와의 거리가 1인 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발이다. 평면 β는 점 O를 포함하고 평면 α와 $\frac{\pi}{3}$의 각을 이루고 있다. 평면 β 위에 중심이 O이고 반지름이 2인 원이 있다. 이 원이 평면 α와 만나는 점들 중 하나를 점 B라 한다. 점 P는 $\angle$AOP가 예각이 되는 원 위의 임의의 점이고 점 R은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발이다. $\angle$BOP를 θ라 하고 점 P와 A를 지나는 직선이 평면 α와 만날 때, 교점을 Q라 한다. 점 P가 평면 α와의 거리가 1이 되도록 하는 예각 θ를 θ_0이라 하고 이때의 R을 R_0이라 한다.

문제 a $\theta=\frac{\pi}{2}$일 때, $\angle$AOP와 선분의 길이 $\overline{OQ}$를 구하시오.

문제 b $\sin\theta_0$을 구하시오.

문제 c $\theta_0<\theta<\pi-\theta_0$일 때, 선분의 길이 $\overline{OQ}$를 $f(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to\theta_0+0}(\theta-\theta_0)f(\theta)$를 구하시오.

문제 d $\theta_0<\theta<\pi-\theta_0$일 때, $\triangle R_0OR$의 넓이를 θ의 함수로 나타내시오.

문제 e $\theta_0<\theta<\pi-\theta_0$을 만족하는 θ에 대하여 점 Q의 자취를 C라 하자. 두 점 O와 R_0을 지나는 직선이 곡선 C의 점근선이 되는지 답하고 이유를 설명하시오.

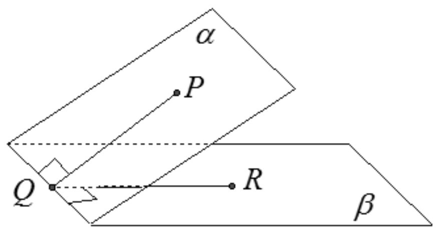
배경지식 쌓기

1. 삼각함수의 극한

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1,\ \lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}=0$$

2. 이면각



두 평면 α 와 β 사이의 각을 두 평면의 이면각이라고 한다. 두 평면 사이의 각은 교선에 수직인 두 직선이 만나서 이루는 각 $\angle\mathrm{PQR}$ 을 의미한다.

3. 평면에서 점과 직선 사이의 거리 공식

직선 $ax+by+c=0$ 와 점 $(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리 d 는 다음과 같다.

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

4. 공간에서 직선의 방정식

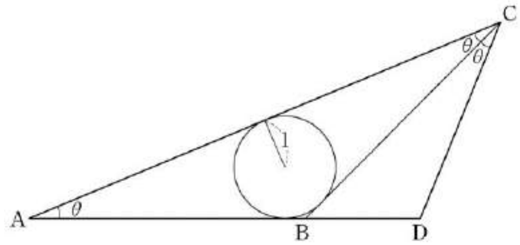
공간상의 두 점 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

풀어보기

문제 1

그림과 같이 반지름의 길이가 1 인 원에 외접하고 $\angle CAB = \angle BCA = \theta$ 인 이등변삼각형 ABC 가 있다. 선분 AB 의 연장선 위에 점 A 가 아닌 점 D 를 $\angle DCB = \theta$ 가 되도록 잡는다. 삼각형 BCD 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \{\theta \times S(\theta)\}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) (2015년 대수능)

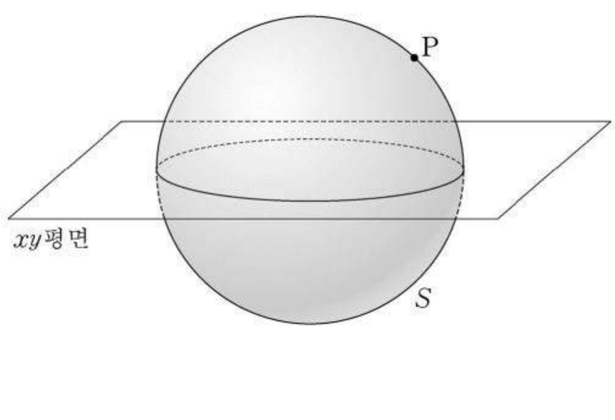


① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ $\frac{10}{9}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{14}{9}$

문제 2

좌표공간에 구 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 50$ 과 점 P$(0, 5, 5)$ 가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$ 라 하자. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) (2015년 대수능)

(가) 원 C는 점 P 를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다. (나) 원 C 의 반지름의 길이는 1 이다.

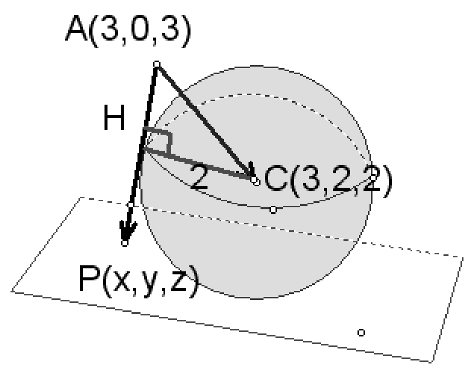


읽기자료

구의 그림자가 쌍곡선이 되는 이유

좌표공간에서 중심이 $C(3, 2, 2)$ 이고 반지름의 길이가 2 인 구가 있다. 점 $A(3, 0, 3)$ 의 위치에 광원이 있을 때, xy 평면에 생기는 그림자의 모양을 벡터의 내적을 이용하여 서술하시오.

풀이) 그림자의 모양은 아래 <그림 1>과 같이 점 $A(3, 0, 3)$ 에서 구에 접선을 그어, 그 접선과 xy 평면의 교점의 자취가 될 것이다.



<그림 1 >

이제 구의 접점을 H , 접선과 xy 평면과의 교점을 $P(x, y, 0)$ 라고 하자. 그러면

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|\cos(\angle HAC) = |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AH}|$$

그런데, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = (x-3,\ y,\ -3) \cdot (0,\ 2,\ -1) = 2y+3$

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x-3)^2+y^2+9} \quad , \ |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{\overline{AC}^{\,2} - r^2} = \sqrt{5-4} = 1$$

이므로 다음과 같은 관계식을 구할 수 있다.

$2y+3 = \sqrt{(x-3)^2+y^2+9}$ 에서 $4y^2+12y+9 = (x-3)^2+y^2+9$

이것을 정리하면,

$$3(y+2)^2 - (x-3)^2 = 12\ , \ \frac{(x-3)^2}{12} - \frac{(y-2)^2}{4} = -1$$

이것은 쌍곡선의 방정식을 의미한다.

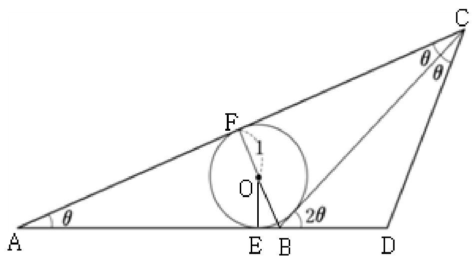
즉, 구 주위에 점광원을 두고 그 그림자의 모양을 관찰하면 이차곡선을 얻을 수 있음을 알 수 있다. 이것은 원뿔의 한 단면이 이차곡선이 될 수 있음을 의미한다.

예시답안

풀어보기

문제 1

정답 ④



내접원의 중심을 O, 점 O에서 선분 AB와 선분 AC에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자. $\angle BOE = \theta$ 이므로 $\overline{OB} = \dfrac{1}{\cos\theta}$ 이다.

따라서 $\overline{BF} = 1 + \dfrac{1}{\cos\theta}$ 이고, $\overline{BC} = \dfrac{1}{\sin\theta}\left(1 + \dfrac{1}{\cos\theta}\right)$ 이다.

한편 $\angle CBD = 2\theta$, $\angle BDC = \pi - 3\theta$, 삼각형 BDC에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin(\pi - 3\theta)} = \dfrac{\overline{BD}}{\sin\theta}$ 이므로 $\overline{BD} = \dfrac{1}{\sin 3\theta}\left(1 + \dfrac{1}{\cos\theta}\right)$,

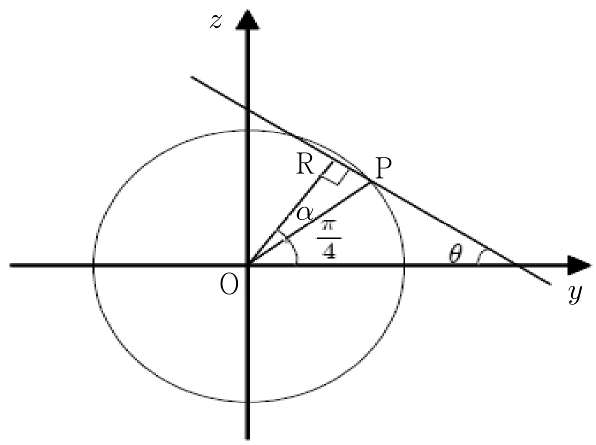
$$S(\theta) = \frac{1}{2}\overline{BC} \times \overline{BD} \times \sin\theta = \frac{\sin 2\theta}{2\sin\theta\sin 2\theta}\left(1 + \frac{1}{\cos\theta}\right)^2,$$

$$\lim_{\theta \to +0}\{\theta \times S(\theta)\} = \lim_{\theta \to +0} \frac{\theta \sin 2\theta}{2\sin\theta\sin 3\theta}\left(1 + \frac{1}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

문제 2

원 C를 포함하는 평면과 xy 평면이 이루는 각을 θ라 하자. 원 C의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이는 $\pi\cos\theta$ 이므로 원 C의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이가 최대가 되기 위해서는 θ가 최소가 되어야 한다.

따라서 원 C를 포함하는 평면은 yz 평면과 수직이고 원 C 위의 임의의 점의 z 좌표는 점 P의 z 좌표보다 크거나 같다. 이때 yz 평면으로 자른 단면은 다음 그림과 같다.



원 C의 중심을 점 R , $\angle \mathrm{POR}=\alpha$ 라 하면 $\overline{\mathrm{OP}}=5\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{RP}}=1$ 이므로 $\overline{\mathrm{OR}}=7$ 이다.

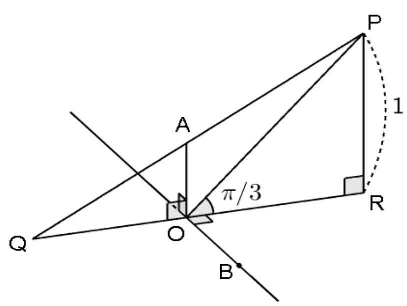
따라서 $\sin\alpha=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$ 이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\\ &=\frac{1}{5\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{7}{5\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

원 C의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{4}{5}\pi$ 이므로 $p+q=9$ 이다.

정답 9

대학출제 문제 a

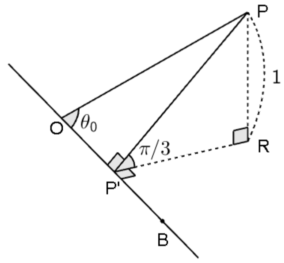


위의 그림에서 $\angle \mathrm{AOB}=\theta=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle \mathrm{ROB}=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle \mathrm{POR}=\dfrac{\pi}{3}$ (이면각)이다. 따라서 $\angle \mathrm{AOP}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$ 이다. 또한 $\overline{\mathrm{PR}}=2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{OR}}=2\cos\dfrac{\pi}{3}=1$, $\overline{\mathrm{AO}}=1$ 이므로

$\overline{\mathrm{OQ}}:\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{QR}}:\overline{\mathrm{PR}}$ 이 성립한다. $\overline{\mathrm{OQ}}=x$ 라고 하면, $x:1=x+1:\sqrt{3}$

따라서 $\overline{\mathrm{OQ}}=x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ 이다.

대학출제 문제 b



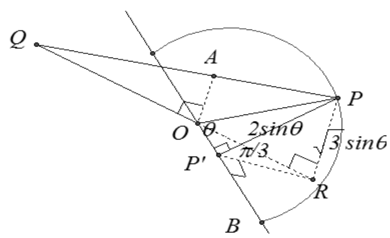
위의 그림에서 P$'$ 은 점 P 에서 직선 OB 에 내린 수선의 발이다.

$\sin\theta_0 = \dfrac{\overline{PP'}}{\overline{OP}}$ 이고 , $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{\overline{PP'}}$ 이므로 $\overline{PP'} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 이고, $\overline{OP} = 2$ (원의 반지름)

$$\sin\theta_0 = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

대학출제 문제 c

아래 그림에서 점 P$'$ 은 점 P 에서 직선 OB 에 내린 수선의 발이다.



$$\overline{PP'} = \overline{OP}\,\sin\theta = 2\sin\theta\,, \quad \overline{PR} = 2\sin\theta \times \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\,\sin\theta,\ \ \overline{OR} = \sqrt{4 - 3\sin^2\theta}$$

한편, $\overline{OQ} = f(\theta)$ 라고 하면 $\overline{AO} = 1$ 이므로 다음이 성립한다.

$$f(\theta) : 1 = f(\theta) + \sqrt{4-3\sin^2\theta}\ :\ \sqrt{3}\,\sin\theta\,, \quad \therefore f(\theta) = \frac{\sqrt{4-3\sin^2\theta}}{\sqrt{3}\,\sin\theta - 1}$$

이제 $\displaystyle\lim_{\theta\to\theta_0+0} (\theta-\theta_0) f(\theta)$ 를 계산하기 위해 다음을 생각하자.

$\theta - \theta_0 = t$ 로 두면 $\theta = t + \theta_0$ 이므로 $\theta \to (\theta_0 + 0)$ 일 때 $t \to 0+$ 이다. 또 $\sin\theta_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

이므로 $\cos\theta_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 이다. 한편

$$\lim_{\theta\to\theta_0+0} (\theta-\theta_0) f(\theta) = \lim_{t\to+0} \left(\frac{\sqrt{4-3\sin^2(t+\theta_0)}}{\sqrt{3}\,\sin(t+\theta_0) - 1} \right) \times t$$

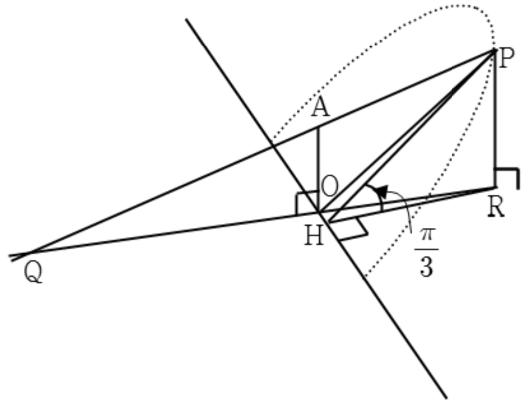
$$= \lim_{t\to 0+}\sqrt{4-3\sin^2(t+\theta_0)} \times \lim_{t\to+0}\frac{t}{\sqrt{3}(\sin t\cos\theta_0+\sin\theta_0\cos t)-1}$$

$$= \sqrt{3}\times\lim_{t\to+0}\frac{t}{\sqrt{2}\sin t+\cos t-1}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\frac{\sin t}{t}+\left(\frac{-\sin t}{t}\right)\frac{\sin t}{\cos t+1}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to\theta_0+0}(\theta-\theta_0)f(\theta) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(다른 풀이)



$\overline{PH} = 2\sin\theta$, $\overline{PR} = \overline{PH}\sin\frac{\pi}{3}$, $\overline{PR} = \sqrt{3}\sin\theta$,

$\overline{OR} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{PR}^2} = \sqrt{4-3\sin^2\theta} = \sqrt{1+3\cos^2\theta}$

$\overline{OQ} : (\overline{OQ}+\overline{OR}) = \overline{OA} : \overline{PR}$, $\overline{OQ} = \dfrac{\overline{OA}\cdot\overline{OR}}{\overline{PR}-\overline{OA}} = \dfrac{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}{\sqrt{3}\sin\theta-1} = f(\theta)$

(b)에서 $\sin\theta_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 $\cos\theta_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$g(\theta)=\sin\theta$ 라고 두면 $\displaystyle\lim_{\theta\to\theta_0+0}\frac{\theta-\theta_0}{\sin\theta-\sin\theta_0} = \lim_{\theta\to\theta_0+0}\frac{\theta-\theta_0}{g(\theta)-g(\theta_0)} = \frac{1}{g'(\theta_0)} = \frac{1}{\cos\theta_0}$

$$\lim_{\theta\to\theta_0+0}(\theta-\theta_0)f(\theta) = \lim_{\theta\to\theta_0+0}(\theta-\theta_0)\frac{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}{\sqrt{3}\sin\theta-1}$$

$$= \lim_{\theta\to\theta_0+0}(\theta-\theta_0)\frac{\sqrt{\frac{1}{3}+\cos^2\theta}}{\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

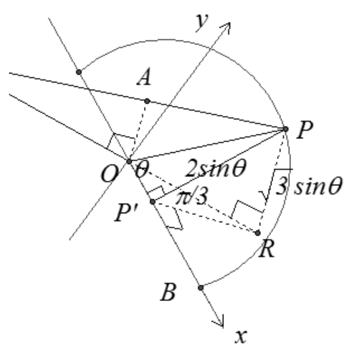
$$= \lim_{\theta\to\theta_0+0}\frac{\theta-\theta_0}{\sin\theta-\sin\theta_0}\sqrt{\frac{1}{3}+\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{3}+\cos^2\theta_0}}{\cos\theta_0} = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}$$

대학출제 문제 d

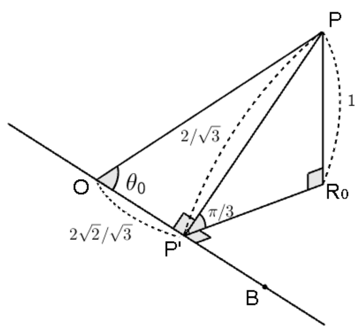
오른쪽 그림에서 직선 OB를 x축으로, 점 O를 원점으로 잡고, 직선 OB에 수직이고 원점을 지나는 직선 중에서 평면 α 위의 직선을 y축으로 잡자. (이때, 직선 OA는 z축이다.)



이제 $\mathrm{R}(x, y)$라고 하면 $x=\overline{\mathrm{OP}'}=2\cos\theta$, $y=\overline{\mathrm{P}'\mathrm{R}}=2\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}=\sin\theta$

$\therefore \mathrm{R}\,(2\cos\theta, \sin\theta)$

또 아래 그림에서(문제b 풀이 참조) $\mathrm{R}_0\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$이다.

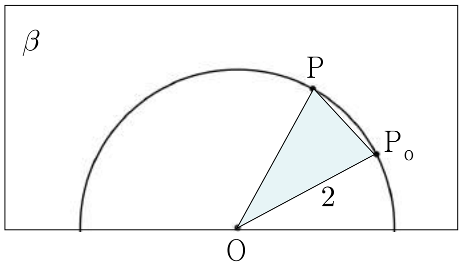


또 평면에서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$라고 하면 $\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

에서 $\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$ 이다.

$$\therefore \triangle\mathrm{R}_0\mathrm{OR}=\frac{1}{2}\left|\frac{2\cos\theta-2\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{3}}\right|$$

(다른 풀이)



평면 β 위의 반원에서 R_0로 수선을 내린 점을 P_0라 하면 $\angle POP_0 = \theta - \theta_0$ 이므로

$$\triangle P_0OP = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin(\theta - \theta_0) = 2\sin(\theta - \theta_0)$$

$\triangle R_0OR$는 $\triangle P_0OP$의 정사영이므로

$$\triangle R_0OR = 2\sin(\theta - \theta_0) \times \cos\frac{\pi}{3} = \sin(\theta - \theta_0) = \frac{\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{3}}$$

대학출제 문제 e

위의 문제(d)의 풀이에서 $A(0, 0, 1)$, $P(2\cos\theta, \sin\theta, \sqrt{3}\sin\theta)$ 임을 알 수 있다.
따라서 직선 AP 의 방정식은

$$\frac{x}{2\cos\theta} = \frac{y}{\sin\theta} = \frac{z-1}{\sqrt{3}\sin\theta - 1}$$

이다.

점 Q $(x_1, y_1, 0)$ 이라 하면 $z=0$ 일 때, $x_1 = \dfrac{-2\cos\theta}{\sqrt{3}\sin\theta - 1}$, $y_1 = \dfrac{-\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta - 1}$ 이다.

또, 평면 α 에서 점 O 와 $R_0\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$를 지나는 직선의 방정식은

$$x - 2\sqrt{2}y = 0 \cdots ①$$

이다.

직선 ①과 점 Q 의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{\left|\dfrac{-2\cos\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta - 1}\right|}{\sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{3}\left|\frac{-2\cos\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta - 1}\right|$$

이다.

$\theta \to (\theta_0 + 0)$ 일 때, $d \to 0$ 이면 직선 ①은 도형 C의 점근선이라 할 수 있다.

$\theta \to (\theta_0 + 0)$ 일 때, $d \to \alpha$ (α 는 상수 혹은 ∞)이면 직선 ①은 C 의 점근선이라 할 수 없다.

$\lim_{\theta \to \theta_0+0} d = \lim_{\theta \to \theta_0+0} \frac{1}{3}\left|\frac{-2\cos\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta - 1}\right|$ 를 계산하기 위해 $\theta - \theta_0 = t$ 로 두면

$\theta = t + \theta_0$, $\theta \to (\theta_0 + 0) \Rightarrow t \to +0$, 또, $\sin\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로 $\cos\theta_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$$\sqrt{3}\sin\theta = \sqrt{3}(\sin t\cos\theta_0 + \sin\theta_0\cos t) = \sqrt{2}\sin t + \cos t$$

$$-2\cos\theta = -2(\cos t\cos\theta_0 - \sin\theta_0\sin t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2\sqrt{2}\cos t + 2\sin t)$$

$$2\sqrt{2}\sin\theta = 2\sqrt{2}(\sin t\cos\theta_0 + \sin\theta_0\cos t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(4\sin t + 2\sqrt{2}\cos t)$$

이므로

$$\lim_{\theta \to \theta_0+0} d = \lim_{t \to +0} \frac{1}{3}\left|\frac{(2\sqrt{3}\sin t) \times \frac{1}{t}}{(\sqrt{2}\sin t + \cos t - 1) \times \frac{1}{t}}\right| = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 직선 OR_0 는 곡선 C의 점근선이 아니다.

(다른 풀이)

[문제 d] 풀이에서의 xy평면에서 직선 OQ_0의 방정식을 구해보면

$$y = \frac{\sin\theta_0}{2\cos\theta_0}x,\ (\sin\theta_0)x - 2(\cos\theta_0)y = 0$$

여기에서 $\sin\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고 $\cos\theta_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이다.

점 Q의 좌표는

$$\left(-\frac{2\cos\theta}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}f(\theta),\ -\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}f(\theta)\right) = \left(-\frac{2\cos\theta}{\sqrt{3}\sin\theta - 1},\ -\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta - 1}\right)$$

점 R과 직선 OQ_0 사이의 거리 d와 그 극한값을 구해보면

$$d = \frac{\left|-\frac{2\sin\theta_0\cos\theta}{\sqrt{3}\sin\theta - 1} + \frac{2\cos\theta_0\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta - 1}\right|}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\cos\theta_0\cos\theta(\tan\theta - \tan\theta_0)}{3(\sin\theta - \sin\theta_0)},$$

$$\lim_{\theta \to \theta_0+0} d = \lim_{\theta \to \theta_0+0} \frac{2\cos\theta_0\cos\theta(\tan\theta - \tan\theta_0)}{3(\sin\theta - \sin\theta_0)}$$

$$= \lim_{\theta \to \theta_0 + 0} \left(\frac{2\cos\theta_0 \cos\theta}{3} \times \frac{\dfrac{\tan\theta - \tan\theta_0}{\theta - \theta_0}}{\dfrac{\sin\theta - \sin\theta_0}{\theta - \theta_0}} \right)$$

$$= \frac{2\cos^2\theta_0}{3} \times \frac{\sec^2\theta_0}{\cos\theta_0}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 직선 $\mathrm{OQ_0}$는 곡선 C의 점근선이 아니다.

<참고>

곡선 C의 방정식을 구해보자. 평면 α 위에서 점 Q의 좌표가

$$\mathrm{Q}\left(-\frac{2\cos\theta}{\sqrt{3}\sin\theta - 1},\ -\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta - 1} \right)$$

이므로

$$\begin{aligned} x^2 - 8\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= \left(-\frac{2\cos\theta}{\sqrt{3}\sin\theta - 1} \right)^2 - 8\left(-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta - 1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{4\cos^2\theta - 8\sin^2\theta}{(\sqrt{3}\sin\theta - 1)^2} + \frac{8\sqrt{3}\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta - 1} - 6 \\ &= \frac{-4(3\sin^2\theta - 1)}{(\sqrt{3}\sin\theta - 1)^2} + \frac{8\sqrt{3}\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta - 1} - 6 \\ &= \frac{-4(\sqrt{3}\sin\theta + 1)}{\sqrt{3}\sin\theta - 1} + \frac{8\sqrt{3}\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta - 1} - 6 \\ &= \frac{4\sqrt{3}\sin\theta - 4 - 6\sqrt{3}\sin\theta + 6}{\sqrt{3}\sin\theta - 1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

따라서 곡선 C는 쌍곡선 $x^2 - 8\left(y + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -2$ 의 일부인데, 문제(a)에 의해서 $y \le -\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ 인 영역에 있는 부분이다.

*10 광운대학교 모의

문제 1 실수의 부분집합 N_1, N_2, N_3, N_4 에 대하여 성분이 N_i 에 속하고 크기가 2×2 인 행렬들로 이루어진 집합을 $M_2(N_i)$ 라 하자. 또한 행렬들의 집합 A_i , 함수들의 집합 G_X 와 $F_{X,Y}$ 를 다음과 같이 정의할 때 물음에 답하시오.[50점]

$N_1=\{t \mid t \text{ 는 실수}\}$

$N_2=\{t \mid t \text{ 는 무리수}\}$

$N_3=\{t \mid t \text{ 는 } 2<t<10 \text{ 인 자연수이고 양수인 약수가 1과 } t \text{뿐이다}\}$

$N_4=\{t \mid t \text{ 는 자연수를 2로 나누었을 때 나머지이다}\}$

$M_2(N_i)=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \;\middle|\; a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}\in N_i\right\},\ i=1, 2, 3, 4$

$A_i=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in M_2(N_i) \;\middle|\; a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0\right\},\ i=1, 2, 3, 4$

$G_X=\left\{f: X\to N_1 \mid f(x)=f(x)^2,\ x\in X\right\}$ (단, X는 임의의 집합이다.)

$F_{X,\,Y}=\{f: X\to Y \mid f\text{는 일대일함수}\}$ (단, X는 임의의 집합이다.)

[1] 집합 G_{N_4} 를 구하고 이유를 설명하시오.[10점]

[2] 집합 $F_{N_1,\,N_3}$ 을 구하고 이유를 설명하시오.[5점]

[3] 교집합 $G_{A_2}\cap F_{A_2,\,N_1}$ 을 구하고 이유를 설명하시오.[5점]

[4] 집합 $F_{N_1,\,N_1}$ 가 함수의 합성연산 $\circ$ 과 덧셈연산 $+$ 에 대하여 다음 등식이 성립하는지 판단하고 이유를 설명하시오.[15점]

$$f\circ(g+h)=f\circ g+f\circ h \quad (f, g, h\in F_{N_1,\,N_1})$$

[5] 집합 A_3 에 속하는 원소의 개수를 n 이라 하고

집합 $T=\left\{r\in A_3 \mid r^2-r=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$ 에 속하는 원소의 개수를 m 이라 할 때 $n+m$ 를 구하시오.[15점]

문제 2 다음 제시문을 이용하여 문항별로 풀이와 함께 답하시오.[50점]

[매개 변수로 나타내어진 함수] 두 변수 x, y 사이의 관계가 변수 t 를 매개로 하여

$$x=f(t),\ y=g(t) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (1)$$

의 꼴로 표현될 때 변수 t 를 매개변수, 식 (1)을 매개변수로 나타내어진 함수라고 한다.

[매개 변수로 나타내어진 함수의 도함수] 매개 변수 t 로 나타내어진 $x=f(t), y=g(t)$ 가 t 에 대하여 미분가능하고 $\dfrac{dx}{dt}=f'(t)\neq 0$ 이면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{dg}{dt}}{\dfrac{df}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2)$$

[곡선의 길이] 평면에서 곡선 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 가 매개 변수 u 의 함수 $x=f(u), y=g(u)$ 로 나타내어질 때 $u=a$ 에서 $u=t$ 까지 점 P 가 그리는 곡선의 길이 s 는 다음과 같다.

$$s(t)=\int_a^t \sqrt{\{f'(u)\}^2+\{g'(u)\}^2}\,du \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\ (3)$$

[합성함수의 미분법] 두 함수 $y=f(u), u=g(x)$ 가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$ 의 변수 x 에 관한 도함수 $\dfrac{du}{dx}$ 는 다음과 같다.

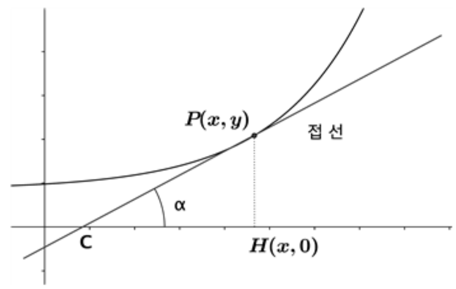
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=f'(g(x))g'(x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (4)$$

[음함수의 미분법] 변수 x 의 함수 y 가 $f(x, y)=0$ 의 꼴로 주어졌을 때, y 를 x 의 함수로 보고 각 항을 x 에 대하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$ 를 구한다.

평면 위의 주어진 곡선에 놓인 점이 곡선 위를 움직임에 따라 그 점에서의 접선이 x 축과 이루는 각(角)도 변화할 것이다. 여기서는 곡선 위의 한 점이 곡선 위를 따라 이동함에 따른 각의 변화율을 구하는 문제에 대해 생각해 본다.

※ ([1]~[3]) 평면에서 주어진 곡선 위의 점 P 의 좌표 (x, y) 가 매개 변수 t 의 함수 $x=f(t), y=g(t)$ 로 나타내어진다고 할 때 다음 물음에 답하시오. 단, $f(t)$ 와 $g(t)$ 는 모두 두 번 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$ 이다.

[1] 곡선 위의 점 P 에서의 접선이 x 축과 이루는 각 α 를 양의 x 축으로부터 잰다고 할 때 α 는 매개 변수 t 의 함수가 된다. <그림 1>에서 삼각형 $\triangle CHP$ 를 참조하여 $f'(t), g'(t)$ 와 각 α 가 만족시키는 방정식(관계식)을 구하시오.[10점]



<그림 1>

[2] 문항 [1]에서 구한 방정식으로부터 각 α 의 도함수 $\dfrac{d\alpha}{dt}$ 를 $f'(t), g'(t), f''(t), g''(t)$ 를 사용하여 나타내시오.[12점]

[3] 제시문의 식 (3)에 의하면 $t=a$ 에서 $t=t \geq a$ 까지 점 P 가 그리는 곡선의 길이 s 는 변수 t 의 함수이다. 그리고 문항 [1]의 점 P 에서의 접선이 x 축과 이루는 각 α 도 변수 t 로 나타내어지는 함수이므로 두 변수 s, α 는 모두 매개 변수 t 로 나타내어지는 함수이다. 이때 도함수 $\dfrac{d\alpha}{ds}$ 를 $f'(t), g'(t), f''(t), g''(t)$ 를 사용하여 나타내시오.[10점]

※ ([4]~[5]) 평면에 놓인 직선과 원에 대한 다음 물음에 답하시오.

[4] 직선 $y=ax+b$ 에 대한 다음 물음에 답하시오.

(a) 직선 $y=ax+b$ 의 두 변수 x, y 를 매개 변수 t 의 함수로 나타내시오.[4점]

(b) 직선 $y=ax+b$ 위의 점 (x, y) 에서 $K=\left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|$ 를 구하시오.[4점]

[5] 중심 C 의 좌표가 (p, q) 이고 반지름이 $r>0$ 인 원 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 에 대한 다음 물음에 답하시오.

(a) 원의 방정식의 두 변수 x, y 를 매개 변수 t 의 함수로 나타내시오.(단, $0 \leq t \leq 2\pi$)[5점]

(b) 원 위의 점 (x, y) 에서 $K=\left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|$ 를 구하시오.(단, $x'(t) \neq 0$ 인 t 에 해당하는 점만 고려한다.)[5점]

배경지식 쌓기

1. 합성함수의 미분법

합성함수 $y=f(g(x))$ 에서 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 가 미분가능하다고 하자. x 가 Δx 만큼 변할 때, u 가 Δu 만큼 변하고 이에 대하여 y 가 Δy 만큼 변한다고 하면 $\Delta x \to 0$ 일 때 $\Delta u \to 0$ 이므로 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ 로부터

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

여기서 $\dfrac{dy}{du}=f'(u)=f'(g(x))$이고 $\dfrac{du}{dx}=g'(x)$이므로

$$\{f(g(x))\}'=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(g(x))g'(x)$$

이다. 즉, 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$ 의 도함수는

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad y'=f'(g(x))g'(x)$$

와 같이 나타낼 수 있다.

2. 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법

변수 t 의 함수 x , y 가

$$x=f(t)\cdots\cdots ㉠ \qquad y=g(t)\cdots\cdots ㉡$$

의 꼴로 나타내어질 때, 변수 t 를 매개변수라 하고 이때, 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 를 매개변수로 나타내어진 함수라 한다.

이제 두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 가 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$ 일 때, $\dfrac{dy}{dx}$ 를 다음과 같이 구할 수 있다. t 는 x 의 함수로 생각할 수 있으므로 $\Delta x\to 0$ 일 때 $\Delta t\to 0$ 이 된다.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

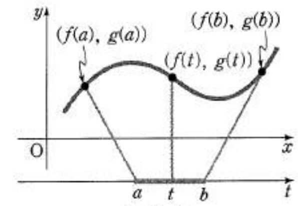
3. 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$ $(a\le t\le b)$ 의 길이

곡선 $x=f(t), y=g(t)$ $(a\le t\le b)$ 의 길이 l 은 [그림1]과 같이 시각 t 에 대하여 x 좌표가 $x=f(t)$이고, y 좌표가 $x=g(t)$ 인 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 가 좌표평면 위에서 시각 $t=a$ 부터 $t=b$ 까지 움직인 거리와 같다.

이때 [그림2]와 같이 매개변수가 t 부터 $t+\Delta t$ 까지 변할 때, 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 는 점 $\mathrm{Q}(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 로 움직인다고 하면, t 의 증분 Δt 가 충분히 작을 때 l 의 증분 Δl 은 선분 PQ의 길이와 거의 같다.

$$\therefore\ \Delta l \fallingdotseq \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

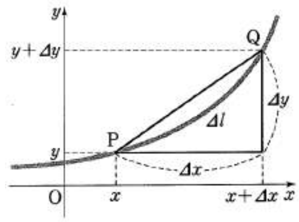
$$\therefore \frac{dl}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta l}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$



[그림 1]

따라서 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$ $(a \le t \le b)$ 의 길이 l 은

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\, dt \quad (㉠)$$



[그림 2]

함수 $y=f(x)$ $(a \le t \le b)$ 는 매개변수 t 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x=t,\ y=f(t)\ (a \le t \le b)$$

㉠에 의하여 곡선 $y=f(x)$ $(a \le t \le b) \Leftrightarrow x=t, y=f(t)$ $(a \le t \le b)$ 의 길이 l 은

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$x=t$, $y=f(t)$ 에서 $\dfrac{dx}{dt}=1$, $\dfrac{dy}{dt}=f'(t)$ 이므로 $l = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\, dx$ 이다.

풀어보기

문제 1

함수 $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ 에 대하여

$F(x) = \displaystyle\int_0^x t f(x-t)\, dt \quad (x \ge 0)$

일 때, $F'(a) = \ln 10$ 을 만족시키는 상수 a 의 값을 구하시오. (2013년 6월 모의수능)

문제 2

$0 \le t \le 1$ 일 때, 다음 곡선의 길이는? (2014년 EBS수능특강 적분과 통계)

$$x = \frac{2}{3}t^3,\ y = t^2$$

① $\dfrac{3}{2}(2\sqrt{2}+1)$　② $2\sqrt{2}+1$　③ $\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}+1)$

④ $\dfrac{3}{2}(2\sqrt{2}-1)$　⑤ $\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

문제 3

함수 $f(x)$ 가 $f(\cos x) = \sin 2x + \tan x$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ 를 만족시킬 때, $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 의 값은? (2013년 7월 전국연합)

① $-2\sqrt{3}$　② $-\sqrt{3}$　③ 0

④ $\sqrt{3}$　⑤ $2\sqrt{3}$

읽기자료

세계지도와 곡률[7)]

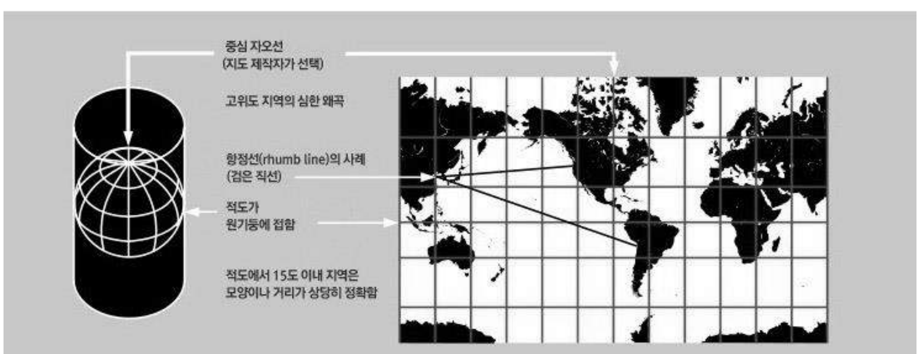
(1) 나침반으로 항해할 때 편리하게 만든 지도

주변에서 쉽게 볼 수 있는 지도는, 대개 '메르카토르(Mercator) 도법'에 따라 그린 것이다. 이 도법은 위선과 경선이 나란하게 그려져 있고, 적도에서 멀어질수록 지형의 왜곡이 심하다. 지도책을 보면, 메르카토르 도법 말고도 여러 지도가 등장하지만 그 어떤 지도도 완벽한 것은 없다. 모두가 길이나 형태, 각 따위에서 조금씩 왜곡이 일어난다. 왜 완벽한 지도는 존재하지 않는 것일까?

대항해 시대가 시작되면서, 탐험가들에게는 정확한 지도가 그 어느 때보다도 중요해졌다. 지금의 각종 첨단장비가 발명되기 전이어서, 항해에 쓰인 가장 중요한 장비는 나침반이었다. 특정한 지점까지 가기 위해 정북 방향에 대해 어떤 각도를 유지하면 되는지를 쉽게 알 수 있다면, 나침반에 의지하는 항해에 있어서는 이보다 더 좋은 지도는 없는 셈이었다. 이 조건에 부합하는 지도를 처음으로 만든 사람이 메르카토르(Mercator)였다.

지구본을 보면 알겠지만, 지도에서 정북 방향에 대해 일정한 각도를 유지한 채로 움직이는 선은 북극점을 향해 나선형을 그리게 된다. 이런 곡선을 '비스듬히(loxos) 달려간다(dromos)'라는 뜻에서 '록소드롬(loxodrome)'이라 한다. 우리말로는 항정선(航程線)이다. 바꿔 말하면, 메르카토르 도법이란 록소드롬이 직선으로 나타나는 지도라 할 수 있다.

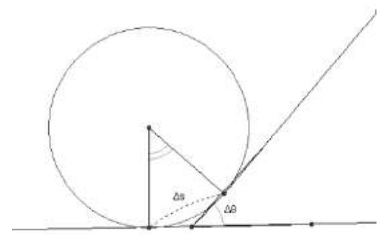
이 도법을 수학적으로 이해하기 위해서는 삼각함수는 물론이고, 로그와 미적분학이 필요한데, 놀랍게도 메르카토르 도법이 창안된 1569년에는 로그의 개념도 미적분의 개념도 전혀 없었다. 로그가 발명된 것이 1614년, 미적분학이 정립된 것이 17세기 후반이었으니, 메르카토르 도법의 원리를 수학적으로 설명할 수 있게 되기까지는 거의 100년이 걸린 셈이었다. 이런 이유로, 메르카토르는 오로지 실험을 통해서 각 지점의 비율을 일일이 결정할 수밖에 없었다.



7) 네이버캐스트 수학산책-완벽한 세계지도? / http://mathworld.wolfram.com/Curvature.html

(2) 곡선의 곡률

곡선 $y=f(x)$ 의 곡률은 곡선 또는 곡면의 휨 정도를 나타내는 변화율이다. 곡선 위의 점이 곡선을 따라 일정한 속도로 움직일 때, 그 진행 방향은 이동한 거리(곡선의 호의 길이) s 에 따라 변화하는데, 이때의 변화율을 곡선의 곡률이라고 한다.



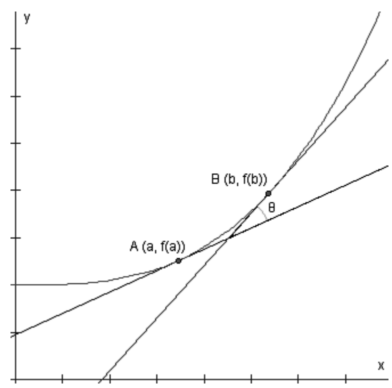
즉, $\kappa=\lim\limits_{s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|=\left|\dfrac{d\theta}{ds}\right|$ 로 정의된다. 그리고

$$\kappa=\frac{|y''|}{\{1+(y')^2\}^{3/2}}$$

로 나타낼 수 있다.

[증명]

곡선 위의 점 $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$ 를 잡고 곡률 $\kappa=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|=\left|\dfrac{d\theta}{ds}\right|$ 를 구해본다.



$$s=\sqrt{(b-a)^2+\{f(b)-f(a)\}^2}$$

$$\theta\approx\tan\theta=\frac{f'(b)-f'(a)}{1+f'(a)f'(b)}\ (\tan\text{덧셈정리})$$

$$\therefore \text{곡률 } \kappa=\lim_{b\to a}\left|\frac{\dfrac{f'(b)-f'(a)}{1+f'(a)f'(b)}}{\sqrt{(b-a)^2+\{f(b)-f(a)\}^2}}\right|$$

$$=\lim_{b\to a}\left|\frac{f'(b)-f'(a)}{\{1+f'(a)f'(b)\}\sqrt{(b-a)^2+\{f(b)-f(a)\}^2}}\right|$$

$$=\lim_{b\to a}\left|\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}\times\frac{1}{\{1+f'(a)f'(b)\}\sqrt{1+\left\{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right\}^2}}\right|$$

$$=\frac{|f''(a)|}{\{1+f'(a)^2\}^{3/2}}$$

이제, 곡선이 매개변수 방정식 $x=x(t),\ y=y(t)$로 표현되어 있다고 하자.

$$\kappa=\left|\frac{d\theta}{ds}\right|=\left|\frac{\dfrac{d\theta}{dt}}{\dfrac{ds}{dt}}\right|=\frac{\left|\dfrac{d\theta}{dt}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}}=\frac{\left|\dfrac{d\theta}{dt}\right|}{\sqrt{x'^{\,2}+y'^{\,2}}}\qquad\cdots ①$$

여기서 $\tan\theta = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{y'}{x'}$ 이고 따라서 $\dfrac{d}{dt}(\tan\theta) = \sec^2\theta \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{x'y''-y'x''}{x'^2}$ 이다.

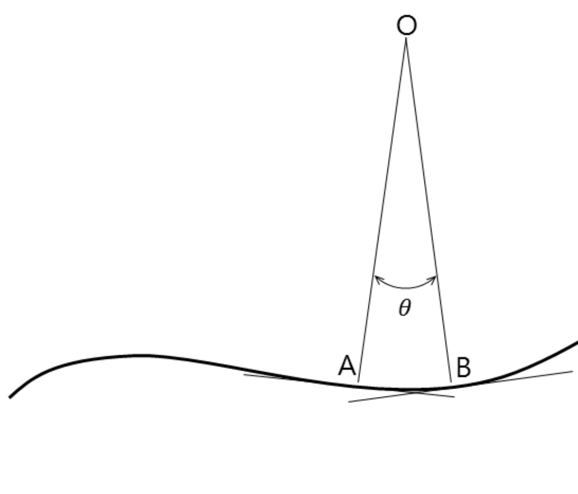
그러므로

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{\sec^2\theta}\frac{d}{dt}(\tan\theta)\\ &= \frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{x'y''-y'x''}{x'^2}\\ &= \frac{1}{1+\frac{y'^2}{x'^2}}\frac{x'y''-y'x''}{x'^2}\\ &= \frac{x'y''-y'x''}{x'^2+y'^2}\end{aligned}$$

이다. 이를 ①에 대입하면 $\kappa = \dfrac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$ 가 된다.

(3) **곡선의 곡률은 곡선에 접하는 원의 반지름의 길이의 역수**

곡선의 극히 짧은 구간을 원호로 환산할 때 그 원호의 반지름을 곡률반지름이라고 하고 그 원은 곡선에 접하게 된다. 원의 곡률반지름은 원의 반지름이 되며 원 위의 모든 점에서 곡률 반지름은 일정한 값을 갖게 된다.



위 그림에서 곡선 위의 점을 A 라 하고 인접한 점을 B 라 하자. 두 점 A 와 B 에서의 접선이 서로 만나는 점을 O 라 하면 점 B 가 점 A 에 대한 곡률반지름은 $\overline{\mathrm{OA}}$ 가 된다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$r = \lim_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} \frac{\Delta\widehat{\mathrm{AB}}}{\Delta\theta} = \frac{ds}{d\theta}$$

따라서 $\frac{1}{\kappa} = r$, 즉, 곡률은 곡률반지름의 역수이고 곡선의 곡률은 곡선에 접하는 원의 반지름의 길이의 역수라고 할 수 있다. 많이 굽은 곡선이라면, 접하는 원의 크기는 작아지고, 곡선이 평평할수록 접하는 원의 크기는 커진다. 직선의 경우, 접하는 원의 반지름이 무한히 커질 수 있으므로 곡률은 어느 점에서나 0 으로 정의된다.

(4) 포물선 $y=x^2$ 에서의 곡률

포물선 $y=x^2$ 의 방정식을 다음과 같이 매개변수 방정식의 형태로 바꾸어서 포물선의 $y=x^2$ 의 곡률을 구해보도록 하자.

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad (t \text{ 는 실수이다.})$$

$x'=1$, $x''=0$, $y'=2t$, $y''=2$ 이므로

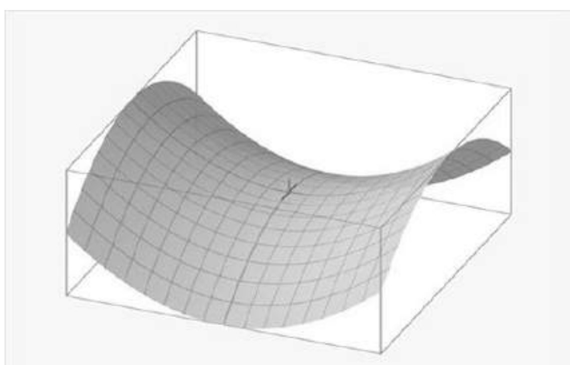
$$\kappa = \frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\cdot 1 - 2t\cdot 0}{(1^2+(2t)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(4t^2+1)\sqrt{4t^2+1}}$$

이고 $x=t$ 이므로

$$\kappa = \frac{2}{(4x^2+1)\sqrt{4x^2+1}}$$

이다.

(5) 곡면에서의 곡률



곡면의 경우 곡면에 접하는 구를 생각하여 구의 반지름의 길이의 역수를 곡률로 정의한다. 그러나 말안장처럼 생긴 오른쪽 그림과 같이 오르막의 꼭대기이면서 동시에 내리막의 바닥인 점(안장점, Saddle Point)이 존재하는 곡면에서는 접하는 구를 생각하기가 곤란하기 때문에, 그 곡면 위에 놓인 곡선의 곡률을 이용한다.

곡면 위의 한 점 P와 그 점에 접하는 평면을 생각하면, 그 평면에 수직이면서 점 P를 지나는 평면들이 존재한다. 이 평면들은 원래의 곡면과 만나 각각 하나의 평면곡선을 이루므로, 이렇게 만든 평면곡선의 곡률을 생각한다. 그런데 이렇게 구한 평면곡선은 무한히 많기 때문에 곡률들도 무한히 많다. 이 때문에 이 모든 곡률을 아우를 수 있는 방법이 필요한데, 특별히 가장 작은 곡률과 가장 큰 곡률을 곱한 것을 '가우스 곡률'이라고 한다.

가우스는 1827년에 쓴 논문에서 테오레마 에그레기움(Theorema Egregium, '놀라운 정리'라는 뜻의 라틴어)으로 불리는 다음 정리를 증명하였다.

한 곡면을 다른 곡면 위에 펼칠 수 있다면, 대응하는 각 점마다 가우스 곡률이 일치한다.

마법의 주문 같기도 한 이 테오레마 에그레기움을 이용하여 구를 평면에 펼칠 수 없음을 알 수 있다. 구면 위의 임의의 점에서, 앞서 설명한 평면곡선을 찾아보면 모두 대원이라 부르는 원이 된다. 이것은 구면에 그릴 수 있는 원 가운데 가장 큰 것으로, 구의 반지름의 길이가 r 이라면, 대원의 반지름의 길이 또한 r 이다. 따라서 구면 위의 임의의 점에 대한 가우스 곡률은 $\frac{1}{r^2}$ 이 된다. 반면, 평면 위의 점에서는, 앞서 설명한 평면곡선이 그냥 그 점을 지나는 직선이 되므로 가우스 곡률은 0 이다. 이 두 값이 같지 않으므로, 구면을 평면에 펼칠 수는 없다. 완벽한 지도가 존재할 수 없다면, 필요에 따라 몇 가지 요소를 변형하지 않을 수 없게 된다.

예시답안

풀어보기

문제 1

$x-t=p$ 로 놓으면 $t=0$ 일 때 $p=x$, $t=x$ 일 때 $p=0$ 이고, $\dfrac{dp}{dt}=-1$ 이므로

$$F(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt=\int_x^0 (x-p)f(p)\cdot(-1)\,dp=\int_0^x (x-p)f(p)\,dp$$
$$=\int_0^x xf(p)\,dp-\int_0^x pf(p)\,dp=x\int_0^x f(p)\,dp-\int_0^x pf(p)\,dp$$
$$F'(x)=\int_0^x f(p)\,dp+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(p)\,dp=\int_0^x \frac{1}{1+p}\,dp$$
$$=[\ln(1+x)]_0^x=\ln(1+x)\quad(x\ge 0)$$

따라서 $F'(a)=\ln(1+a)=\ln 10$ 에서 $a=9$ 이다.

문제 2

$\dfrac{dx}{dt}=2t^2$, $\dfrac{dy}{dt}=2t$ 이므로 구하는 길이는

$$\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^1 \sqrt{4t^4+4t^2}\,dt\ =\int_0^1 2t\sqrt{t^2+1}\,dt$$

$t^2+1=u$ 로 놓으면 $2t=\dfrac{du}{dt}$ 이고 $t=0$ 일 때 $u=1$, $t=1$ 일 때 $u=2$ 이므로

$$\int_0^1 2t\sqrt{t^2+1}\,dt\ =\int_1^2 \sqrt{u}\,du=\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^2\ =\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

문제 3

함수 $f(\cos x)=\sin 2x+\tan x$ 를 미분하면

$$f'(\cos x)\cdot(-\sin x)=2\cos 2x+\sec^2 x=2\cos 2x+\frac{1}{\cos^2 x}$$

이고 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 를 대입하면

$$f'(\cos\frac{\pi}{3})\cdot(-\sin\frac{\pi}{3})=2\cos\frac{2\pi}{3}+\sec^2\frac{\pi}{3}=2\cos\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3}}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=3$$

이고 따라서

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{3} \quad \text{이다.}$$

(대학발표 예시답안)

대학출제 문제 1

[1] $f\in G_{N_4} \Rightarrow f(x)=f(x)^2$, $(x\in N_4) \Rightarrow f(x)=0$ 또는 $f(x)=1$, $(x\in N_4)$ 이다. 그런데 $N_4=\{0, 1\}$ 이므로 $f\in G_{N_4}$ 는 다음과 같이 4 가지 경우뿐이다.

① $f(0)=0, f(1)=0$ ② $f(0)=0, f(1)=0$

③ $f(0)=0, f(1)=0$ ④ $f(0)=0, f(1)=0$

따라서 ①, ②, ③, ④와 같이 정의된 함수를 각각 f_1, f_2, f_3, f_4 라 놓으면 $G_{N_4}=\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ 이다.

[2] 집합 N_1 에서 집합 N_3 로의 일대일함수가 존재하려면 N_3 에 속하는 원소의 개수가 N_1 에 속하는 원소의 개수 이상이어야 한다. 그런데 집합 N_1 에 속하는 원소의 개수는 무수히 많고 집합 N_3 에 속하는 원소의 개수는 3 이므로 N_1 에서 N_3 로의 일대일함수는 존재하지 않는다. 따라서 $F_{N_1, N_3}=\varnothing$ 이다.

[3] $f\in G_{A_2} \Rightarrow f(x)=f(x)^2 \Rightarrow f(x)=0$ 또는 $f(x)=1$ 이다. 그런데 집합 A_2 에 속하는 원소의 개수는 3 이상이므로 f 는 일대일함수가 아니다. 따라서 $f\not\in F_{A_2, N_1}$ 이므로 $G_{A_2}\cap F_{A_2, N_1}=\varnothing$ 이다.

[4] 등식이 성립하지 않는다.
(반례) $f(x)=x^3, g(x)=x, h(x)=x+1$ $(x\in N_1)$ 으로 정의하면 f, g, h 는 모두 일대일함수이므로 $f, g, h\in F_{N_1, N_1}$ 이다.

$$\begin{aligned}(f\circ(g+h))(x) &= f((g+h)(x))\\ &= f(g(x)+h(x))\\ &= f(2x+1)\\ &= (2x+1)^3\end{aligned}$$

이고

$$
\begin{aligned}
((f\circ g)+(f\circ h))(x) &= (f\circ g)(x)+(f\circ h)(x)\\
&= f(g(x))+f(h(x))\\
&= f(x)+f(x+1)\\
&= x^3+(x+1)^3
\end{aligned}
$$

이다.

[5] $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in A_3$ 이라면 $a_{11}a_{22}=a_{12}a_{21}$ 이고 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 가 N_3 에 속하므로 $a_{12}=a_{11}$ 또는 $a_{12}=a_{22}$ 이다. 만일 $a_{12}=a_{11}$ 이라면 $a_{21}=a_{22}$ 이고 만일 $a_{12}=a_{22}$ 이라면 $a_{21}=a_{11}$ 이다. 따라서 A_3 에 속하는 원소는 다음과 같다.

$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

그러므로 $n=15$ 이다.

한편 $r\in T$ 이면 $r^2-r=O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이므로 $r^2=r$ 이다. 그런데 모든 원소 $r\in A_3$ 에 대하여 $r^2\neq r$ 이므로 집합 T 는 공집합이고 $m=0$ 이다. 즉, $n+m=15$ 이다.

대학출제 문제 2

[1] 주어진 <그림 1>의 $\triangle CHP$ 에서 $\tan\alpha$ 는 접선의 기울기와 같고 도함수 $\frac{dy}{dx}$ 는 접선의 기울기이다. 그런데 매개 변수 t 로 나타내어진 두 변수 x, y 가 나타내는 곡선 위의 접선의 기울기는 제시문의 식 (2)에 의하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$ 이므로 다음을 얻는다.

$$\tan\alpha=\frac{g'(t)}{f'(t)},\quad f'(t)\neq 0$$

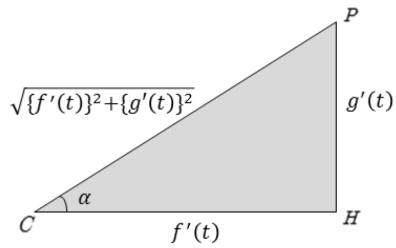
[2] 문항 [1]에서 구한 방정식의 양변을 제시문의 음함수의 미분법과 합성함수의 미분법을 이용하여 매개 변수 t 에 관해 미분하면 다음을 얻는다.

$$\sec^2\alpha\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)$$

이를 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)\cos^2\alpha \quad \cdots\cdots①$$

한편 문항 [1]에서 $\tan\alpha=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$ 이므로 오른쪽 그림의 삼각형을 참조하여 다음을 얻는다.



$$\cos\alpha=\frac{f'(t)}{\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}} \qquad \cdots\cdots②$$

또한 몫의 미분법으로부터 다음을 얻는다.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)=\frac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{\{f'(t)\}^2}\cdots\cdots③$$

이제 식 ①에 식 ②와 ③을 대입하여 다음을 얻는다.

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2} \qquad \cdots\cdots④$$

[3] 제시문의 식 (3)에서 $s(t)=\displaystyle\int_a^t \sqrt{\{f'(u)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,du$ 이므로 다음을 얻는다.

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2} \qquad \cdots\cdots⑤$$

이때 $f'(t)\neq 0$ 이므로 $\dfrac{ds}{dt}\neq 0$ 이며, 제시문의 식 (2)에 의해 매개 변수 t 로 나타내어진 두 함수 α, s 에 대하여 다음을 얻는다.

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\dfrac{d\alpha}{dt}}{\dfrac{ds}{dt}} \qquad \cdots\cdots⑥$$

따라서 $\dfrac{d\alpha}{dt}$ 에 대한 문항 (2)의 결과인 식 ④와 $\dfrac{ds}{dt}$ 에 관한 식 ⑤를 ⑥에 대입하여 다음을 얻는다.

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{\left\{\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\right\}^3} \qquad \cdots\cdots⑦$$

[4] (a) 자명하게 $s(t)=f(t)=t,\ y(t)=g(t)=at+b,\ -\infty<t<\infty$ 는 직선의 매개 변수 함수이다.

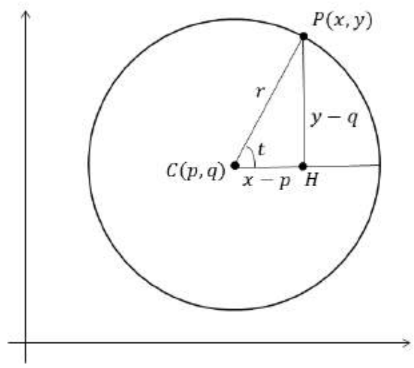
(b) $f'(t)=1\neq 0$ 이고 $f''(t)=g''(t)=0$ 이므로 식 ⑦로부터 다음을 얻는다.

$$K=0$$

(※ 매개변수로 나타내어진 함수를 위의 것과 다르게 표현할 수도 있다. 그러나 K 는 변하지 않는다.)

[5] (a) 오른쪽 그림을 참조하면

$$x-p=r\cos t,\ y-q=r\sin t$$



이므로 원은 다음의 매개 변수 t로 나타내어진 함수이다.

$$x(t)=p+r\cos t,\ y(t)=q+r\sin t,\ 0\le t<2\pi$$

(b) 이제 $f(t)=x(t)$, $g(t)=y(t)$ 라고 하면

$$f'(t)=-r\sin t\ ,\ g'(t)=r\cos t\ ,$$

$$f''(t)=-r\cos t\ ,\ g''(t)=-r\sin t$$

이다.

이들을 문항 [3]에서 얻은 $\dfrac{d\alpha}{ds}$ 의 식 ⑦에 대입하고 항등식 $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ 을 이용하여 다음을 얻는다.

$$K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=\frac{|g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)|}{\left\{\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\right\}^3}=\frac{|r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t|}{\left\{\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\right\}^3}=\frac{r^2}{r^3}=\frac{1}{r}\ ,\quad r>0$$

따라서 구하는 답은 다음과 같다.

$$K=\frac{1}{r},\ r>0$$

(※ 매개변수로 나타내어진 함수를 위의 것과 다르게 표현할 수도 있다. 그러나 K는 변하지 않는다.)

11 동국대학교 모의

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.[8)]

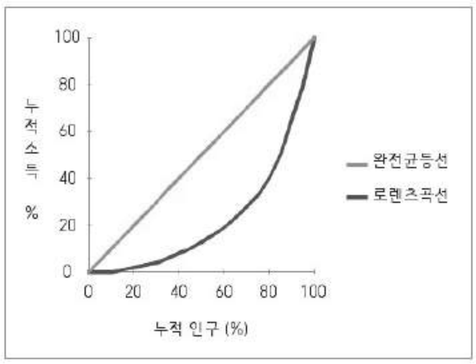
[가] 한국의 소득 계층별 소득분배자료를 보면, 2000년의 경우 하위 40%의 소득 계층은 전체 소득의 18.21%만 차지하고 있는 반면 상위 20%의 소득 계층은 전체 소득의 42.55%를 차지하고 있다. 10분위 분배율은 일반적으로 많이 사용하는 다음 공식으로 계산한 것이다. 이 값이 높을수록 소득분배는 평등하며, 낮을수록 불평등하다.

$$10\text{분위 분배율} = \frac{\text{하위 } 40\% \text{ 소득분배분}}{\text{상위 } 20\% \text{ 소득분배분}}$$

2000년 한국의 소득분배자료에서의 10분위 분배율은 0.428이다.

– 이정우, 『불평등의 경제학』

[나] 미국의 통계학자 로렌츠(Lorentz, M, O.)는 한 나라 국민의 소득 분배 정도를 파악하기 위하여 로렌츠 곡선을 고안하였다. 로렌츠 곡선은 오른쪽 그림과 같이 가로축에 소득액 순으로 누적 인구(%)를, 세로축에 누적 소득(%)을 나타냄으로써 얻어지는 곡선이다. 소득분배가 완전히 균등하면 곡선은 대각선(균등분포선)과 일치한다. 그러나 소득 분배가 균등하지 않을 때 대각선과 곡선 사이의 넓이로 소득 분배의 불균등 정도를 알 수 있다.



– 『고등학교 수학 교과서』

문제 1

제시문 [나]에서 인구가 충분히 많다고 가정하고, 로렌츠 곡선을 2번 미분가능하다고 하자. 또 로렌츠 곡선이 직선인 구간이 없다고 가정한다면, 로렌츠 곡선은 그림처럼 언제나 아래로 볼록이다. 그 이유를 수학적으로 설명하시오.

<8~15줄> [20점]

8) 동국대학교 입학처

배경지식 쌓기

1. 미분계수의 정의

함수 $y=f(x)$ 에 대하여 x 의 값이 a 에서 $a+\Delta x$ 까지 변할 때의 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

에서 Δx 가 0 에 한없이 가까워질 때의 극한값

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다고 하며, 이 극한값을 함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 순간변화율 또는 미분계수라고 하고, 기호로

$$f'(a)$$

와 같이 나타낸다.

2. 도함수를 이용한 함수의 증가•감소 판정

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a,b) 에서 미분가능할 때,

가. $f'(x)>0$ $(x\in(a,b))$이면 $f(x)$는 증가함수이다.
(즉, $x_1<x_2$ 이면 $f(x_1)<f(x_2)$ 이다).

나. $f'(x)<0$ $(x\in(a,b))$이면 $f(x)$는 감소함수이다.
(즉, $x_1<x_2$ 이면 $f(x_1)>f(x_2)$ 이다).

3. 극대·극소 판정

가. 미분가능한 함수 $f(x)$ 에서 $f'(a)=0$ 이고 $x=a$ 의 좌우에서

(1) $f'(x)$ 의 부호가 양(+) 에서 음(−) 으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대이고, $f(a)$ 는 극댓값이다.

(2) $f'(x)$ 의 부호가 음(−) 에서 양(+) 으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이고, $f(a)$ 는 극솟값이다.

나. 함수 $f(x)$ 가 이계도함수를 갖고 $f'(a)=0$ 일 때,

(1) $f''(a)<0$ 이면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극댓값 $f(a)$ 를 가진다.

(2) $f''(a)>0$ 이면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극솟값 $f(a)$ 를 가진다.

4. 함수의 볼록성

가. 함수의 볼록성의 정의

구간 I에서 정의된 함수 f 가 이 구간의 임의의 세 점 $a<c<b$ 에 대하여

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

를 만족할 때, f 는 아래로 볼록하다고 한다.

나. $f(x)$ 가 (a,b) 에서 두 번 미분가능하고, $f''(x)>0$ $(x\in(a,b))$이면 $f(x)$ 는 아래로 볼록이다.

다. 이계도함수와 볼록성의 관계

실수전체에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $a<b<c$ 인 모든 a,b,c 에 대하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

일 필요충분조건은 $f'(x)$ 가 증가함수다. (즉, '아래로 볼록'과 '$f'(x)$ 가 증가함수'는 동치다.)

(증명)

($\Rightarrow$) $f(x)$ 가 볼록함수 이므로 세 수 $a<x<b$ 에 대해

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

여기서 부등식 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 에 $x\to a$ 로 보내면 $f'(a) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$,

같은 방법으로 부등식 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ 에서 $x\to b$ 로 보내면 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(b)$ 이다.

따라서 $a<b$ 에 대해 $f'(a)<f'(b)$ 가 되므로 $f'(x)$ 는 증가함수다.

($\Leftarrow$) 평균값정리에 의해 $a<b<c$ 에 대해 다음과 같은 α 와 β 가 존재한다.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\alpha) \quad (a<\alpha<b)$$

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b} = f'(\beta) \quad (b<\beta<c)$$

그런데 $f'(x)$ 는 증가함수이므로 $\alpha<\beta$ 에 대해 $f'(\alpha)<f'(\beta)$ 이고, 따라서

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

즉, 함수 f 는 아래로 볼록이다.

풀어보기

문제 1

실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x , y 에 대하여
> $$f(x+y)=f(x)f(y)+4f(x)+4f(y)+12$$
> (나) $f(\ln 2)=0$, $f'(0)=2$

이때, $f'(\ln 2)$의 값을 구하시오. (2011년 3월 전국연합)

문제 2

열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^{2x}}$가 $x=a$에서 극솟값을 가질 때, $\cos a$의 값은? (2013년 3월 전국연합)

① $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　② $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　③ 0　④ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

문제 3

함수 $f(x)$가 구간 $[0,1]$에서 연속이고 구간 $(0,1)$의 모든 x에 대하여 $f''(x)$가 존재하고 $f''(x)\ge 0$이 성립하며 $f(0)=0, f(1)=0$이면, $f(x)\le 0$이 구간 $[0,1]$에서 성립한다.
다음으로부터 시작하고 평균값의 정리를 사용하여 위의 명제의 증명을 완성하시오.
(2013년 한양대 수시1차 사고력평가)

> 만약 구간 $(0,1)$의 어떤 실수 a에 대해 $f(a)>0$이 성립했다고 하자. 구간 $[0,a]$와 $[a,1]$에서 함수 $f(x)$에 대해 평균값의 정리를 적용하면
> $f'(c_1)=\dfrac{f(a)}{a}$ 인 c_1이 구간 $(0,a)$에 존재하고, $f'(c_2)=-\dfrac{f(a)}{1-a}$ 인 c_2가 구간 $(a,1)$에 존재한다.

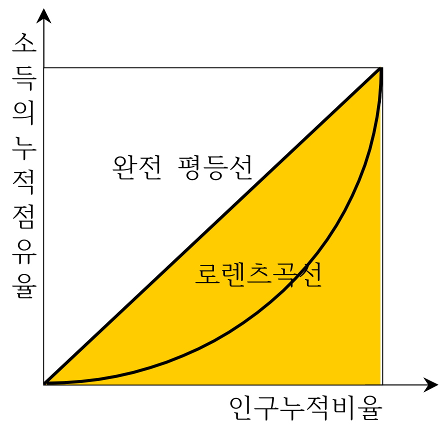
읽기자료

지니계수와 로렌츠곡선[9)]

철학자 플라톤은 이상적인 사회에서는 가장 부자인 사람의 소득이 가장 가난한 사람의 소득보다 4배 이상 많아서는 안 된다고 했다. 소득분배 자료가 존재하지 않거나 측정방법(개인소득이냐 가구소득이냐)이 달라 비교하기 쉽지 않지만, 소득분배가 상대적으로 가장 균등하다는 독일은 상위 20% 계층의 소득이 하위 20% 계층의 4배 정도이고, 가장 불균등한 브라질은 25배 정도에 이른다.

이러한 소득의 불평등도를 측정하는 방법으로 이탈리아 통계학자 지니가 소득분포에 관해 제시한 지표인 지니 계수가 있다. 지니 계수는 빈부격차와 계층 간 소득 분포의 불균형 정도를 나타내는 수치로, 소득이 어느 정도 균등하게 분배되어 있는지를 평가하는데 주로 이용되는데, 근로소득·사업소득은 물론, 부동산·금융자산 등의 자산 분배 정도까지도 파악할 수 있다.

우리나라의 소득 불평등도는 다른 나라와 비교해 볼 때 그리 높은 편이 아니다. 그러나 자산 분배 불평등도는 매우 높은 것으로 나타났다. 자산 분배 불평등도란 토지, 건물, 금융 자산 등의 소유 불평등도로서 역시 지니 계수로 나타낸다. 1995년 우리 나라 자산 지니 계수는 토지가 0.90, 토지와 건물을 합한 것이 0.836, 금융 자산은 0.656이었다.



지니 계수는 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다. 오른쪽 그림에서 가로축은 인구의 누적 비율이며 세로축은 소득의 누적비율을 나타낸다. 소득분배곡선인 로렌츠 곡선은 소득 수준이 낮은 인구로부터 높은 순으로 누적한 비율을 가로축에, 그에 대응하는 누적소득 비율을 표시한 곡선이다. 이제, 완전 평등선(45°선)을 그은 후, 완전 평등선과 로렌츠 곡선 사이의 면적인 불평등 면적을 구한다. 지니 계수는 불평등 면적을 완전 평등선 아래의 삼각형의 면적으로 나눈 비율이다. 지니계수는 0과 1 사이의 값을 가지는데, 로렌츠 곡선이 가상 완전 평등선에 가까워지면, 지니 계수는 0에 가까워지고, 이것은 소득분배의 불평등 정도가 낮다는 것을 뜻한다. 일반적으로 지니계수가 0.4를 넘으면 소득분배가 상당히 불평등하다고 본다.

9) 고등학교 경제 교과서(두산, 천재교육)

예시답안

풀어보기

문제 1

$y=0$ 을 대입하면 $f(x)=f(x)f(0)+4f(x)+4f(0)+12$ 이고, 정리하면
$\{f(x)+4\}\{f(0)+3\}=0$ 에서
$f(0)=-3$ 이다.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)+4f(x)+4f(h)+12-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)+3f(x)+4f(h)+12}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x)+4\}\{f(h)+3\}}{h}$$
$$=\{f(x)+4\}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+3}{h}=\{f(x)+4\}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=\{f(x)+4\}f'(0)=2\{f(x)+4\}$$
$$\therefore f'(\ln 2)=2\{f(\ln 2)+4\}=8$$

(다른 풀이)

(가)에서 양변에 4 를 더하여 인수분해하면
$f(x+y)+4=\{f(x)+4\}\{f(y)+4\}$
$f(x)+4=g(x)$ 라 하면 $g(x+y)=g(x)g(y)$ …㉠
㉠에서 $y=0$ 이라 하면
$g(x)=g(x)g(0)$
$g(x)\{1-g(0)\}=0$
$g(0)=1$

$$f'(x)=g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)g(h)-g(x)}{h}=g(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-1}{h}$$
$$=g(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=g(x)\,g'(0)\quad(\because g'(0)=f'(0)=2)$$
$$=2g(x)=2\{f(x)+4\}$$

따라서
$f'(\ln 2)=2\{f(\ln 2)+4\}=2\times 4=8$

문제 2

$f(x)=\dfrac{\sin x}{e^{2x}}=e^{-2x}\sin x$ 이므로 $f'(x)=-2e^{-2x}\sin x+e^{-2x}\cos x=e^{-2x}(-2\sin x+\cos x)$

이고

$f''(x)=-2e^{-2x}(-2\sin x+\cos x)+e^{-2x}(-2\cos x-\sin x)=e^{-2x}(3\sin x-4\cos x)$

이다.

이때 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극솟값을 가지므로 $f'(a)=0,\quad f''(a)>0$ 이어야 한다.

이때 $e^{-2a}>0$ 이므로

$-2\sin a+\cos a=0 \quad \cdots$ ㉠

$3\sin a-4\cos a>0 \quad \cdots$ ㉡

이 성립해야 한다.

㉠에서 $\cos a=2\sin a$ 이므로 $\tan a=\dfrac{1}{2}$

㉠을 ㉡에 대입하면 $-5\sin a>0$

따라서 $\tan a>0$ 이고, $\sin a<0$ 이므로 $\pi<a<\dfrac{3}{2}\pi$

$\sec^2 a=1+\tan^2 a=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

$\cos a=\dfrac{1}{\sec a}=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \cos a=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\quad \left(\because\ \pi<a<\dfrac{3}{2}\pi\right)$

(다른 풀이)

미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 가지므로 $f'(a)=0$ 이어야 한다.

$f(x)=\dfrac{\sin x}{e^{2x}}=e^{-2x}\sin x$ 이므로

$f'(x)=-2e^{-2x}\sin x+e^{-2x}\cos x=-e^{-2x}(2\sin x-\cos x)$

이때 $-e^{-2a}(2\sin a-\cos a)=0$ 에서 $\tan a=\dfrac{1}{2}$

ⅰ) $0<a<\dfrac{\pi}{2}$ 일 때

$0<x<a$ 이면 $\sin x<\sin a$ 이고 $\cos x>\cos a$ 이므로

$2\sin x-\cos x<2\sin a-\cos a=0$

$\therefore\ f'(x)>0$

$a<x<\dfrac{\pi}{2}$ 이면 $\sin x>\sin a$ 이고 $\cos x<\cos a$ 이므로

$2\sin x-\cos x>2\sin a-\cos a=0$

$\therefore\ f'(x)<0$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극댓값을 갖는다.

ii) $\pi<a<\frac{3}{2}\pi$ 일 때

$\pi<x<a$ 이면 $\sin x>\sin a$ 이고 $\cos x<\cos a$ 이므로

$2\sin x-\cos x>2\sin a-\cos a=0$

$\therefore\ f'(x)<0$

$a<x<\frac{3\pi}{2}$ 이면 $\sin x<\sin a$ 이고 $\cos x>\cos a$ 이므로

$2\sin x-\cos x<2\sin a-\cos a=0$

$\therefore\ f'(x)>0$

따라서 $x=a$ 에서 극솟값을 갖는다.

$\sec^2 a=1+\tan^2 a=\frac{5}{4}$ 에서 $\sec a=-\frac{\sqrt{5}}{2}$ $\left(\because\ \pi<a<\frac{3}{2}\pi\right)$

$\therefore\ \cos a=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(다른 풀이)

$f(x)=\frac{\sin x}{e^{2x}}$ 는 미분가능한 함수이므로 몫의 미분법을 사용하면

$$f'(x)=\frac{e^{2x}\cos x-2e^{2x}\sin x}{(e^{2x})^2}=-\frac{2\sin x-\cos x}{e^{2x}}$$

이때 삼각함수의 합성에 의해서 $2\sin x-\cos x=\sqrt{5}\sin(x-\alpha)$ 이므로

(단, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$)

$$f'(x)=-\frac{\sqrt{5}\sin(x-\alpha)}{e^{2x}}$$

이때 $f'(x)=0$ 에서 $\sin(x-\alpha)=0$ 이므로 $x-\alpha=0$ 또는 $x-\alpha=\pi$

$\therefore\ x=\alpha$ 또는 $x=\pi+\alpha$

이때 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\pi+\alpha$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\pi+\alpha)$	$\nearrow$	

그러므로 함수 $f(x)$ 는 $x=\pi+\alpha$ 에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore\ a = \pi + \alpha$

$\therefore\ \cos a\ = \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

문제 3

만약 구간 $(0,1)$ 의 어떤 실수 a 에 대해 $f(a) > 0$ 이 성립한다고 가정하자.

그러면 평균값의 정리를 적용하여 $f'(c_1) = \dfrac{f(a)}{a}$ 인 c_1 이 구간 $(0,a)$ 에 존재하고,

$f'(c_2) = -\dfrac{f(a)}{1-a}$ 인 c_2 가 구간 $(a,1)$ 에 존재한다.

함수 $f'(x)$ 의 도함수 $f''(x)$ 가 구간 $(0,1)$ 에서 항상 정의되므로 $f'(x)$ 는 같은 구간에서 연속이다. 따라서 구간 $[c_1, c_2]$ 에서 함수 $f'(x)$ 에 평균값의 정리를 적용할 수 있다. 즉, $f''(d) = \dfrac{f'(c_2)-f'(c_1)}{c_2-c_1} = \dfrac{-f(a)(\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{a})}{c_2-c_1}$ 인 d 가 구간 (c_1, c_2) 에 존재한다.

그런데 $f(a) > 0$ 이므로 $f''(d) < 0$ 이고, 이것은 구간 $(0,1)$ 에서 항상 $f''(x) \ge 0$ 이라는 가정에 모순이다. 따라서 $f(x) \le 0$ 이 구간 $[0,1]$ 에서 성립한다.

(대학발표 예시답안)

대학출제 문제 1

로렌츠 곡선 $y = L(x)$ 는 소득이 하위 x 에 해당하는 인구의 소득의 합계가 전체 소득에서 차지하는 비율의 함수이다. 따라서 로렌츠곡선의 도함수 $L'(x)$ 는 소득이 하위 x 와 $x+\Delta x$ 에 들어가는 인구의 소득의 합이 전체소득에서 차지하는 비율을 Δx 으로 나눈 후, Δx 를 0 으로 보내는 극한값이다. 즉,

$$L'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{L(x+\Delta x) - L(x)}{\Delta x}$$

이다. 따라서, 전체인구를 P, 전체 소득의 합을 I 라고 하면,

$$L'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{L(x+\Delta x)-L(x)\}\cdot I}{\Delta x \cdot P} \cdot \frac{P}{I} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{소득이 } x \text{ 와 } x+\Delta x \text{ 사이인 인구의 소득}}{\text{소득이 } x \text{ 와 } x+\Delta x \text{ 사이인 인구}} \cdot \frac{P}{I}$$

이다. 인구가 매우 많다고 하면 근사적으로

$$L'(x) = \frac{\text{소득 하위 } x \text{ 인 사람의 소득}}{\text{평균소득}}$$

이다. 따라서 로렌츠곡선의 도함수 $L'(x)$ 는 단조증가한다. 로렌츠 곡선이 2번 미분하고 직선이 구간을 포함하지 않는다고 했으므로 $L''(x) > 0$ 이다. 따라서 로렌츠 곡선은 아래로 볼록이다.

12 동국대학교 수시

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】 과속으로 인한 자동차 사고를 예방하기 위하여 도로의 상태에 따라 제한속도를 정하고 때로는 단속을 통하여 과속을 예방하고 있다. 특히 운전자가 무인 단속 카메라 앞에서는 감속을 하지만 곧 과속을 하는 경향이 있기 때문에 우리나라에서도 '구간 단속'이란 방법을 도입하였다. 이를테면 제한속도가 시속 $100km$ 인 직선 도로에서 $10km$ 간격을 두고 설치되어 있는 카메라를 어떤 자동차가 5분 만에 통과하였다면, 이 자동차의 평균속도가 시속 $120km$ 이므로 이 구간 사이에서 적어도 한 번은 과속을 했다는 뜻이므로 단속 대상이 된다.

$$\frac{A\text{ 지점과 }B\text{ 지점 사이의 거리}}{(B\text{ 지점 단속시간}-A\text{ 지점 단속 시간})}=(\text{구간 평균속도})$$

– 『고등학교 수학』

【나】 평균값의 정리: 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a, b) 에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

– 『고등학교 수학』

【다】 점 P가 수직선 위를 시각 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 움직일 때, 시각 t 에서의 속도를 $v(t)$ 라고 하면 시각 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_a^b v(t)dt$$

이다.

– 『고등학교 수학』

문제 1

최대 $2m/s^2$ 로 가감속할 수 있는 모형자동차로 일직선으로 $25m$ 지점까지 주행하고자 한다. 출발시각부터 $16m$ 지점을 통과하는 시각까지 평균 속도가 $2m/s$ 라고 할 때, $25m$ 를 주행하는 데 적어도 9초가 필요함을 제시문 【가】, 【나】, 【다】를 이용하여 설명하시오. (단, 모형자동차는 출발지점에서 정지 상태이며 후진을 하지 않고 일직선으로만 주행한다.) <12~15줄> [35점]

배경지식 쌓기

1. 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 시각 $t=t_0$에서의 점 P 의 위치를 $s(t_0)$라 할 때,

시각 t 에서의 점 P 의 위치는 ➡ $s(t)=\underbrace{s(t_0)}_{\to\text{처음 위치}}+\underbrace{\int_{t_0}^{t} v(t)dt}_{\to\text{위치의 변화량}}$

시각 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지의 점 P 의 위치의 변화량 ➡ $\int_{a}^{b} v(t)dt$

시각 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지의 점 P 가 실제로 움직인 거리 ➡ $\int_{a}^{b} |v(t)|dt$

2. 평균값의 정리

함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고, 열린 구간 (a, b)에서 미분 가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

가 되는 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다.

풀어보기

문제 1

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{d}{dx}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\cos x\cdot f(t)dt$$

라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2011년 10월 전국연합)

< 보 기 >

ㄱ. $g(0)=0$

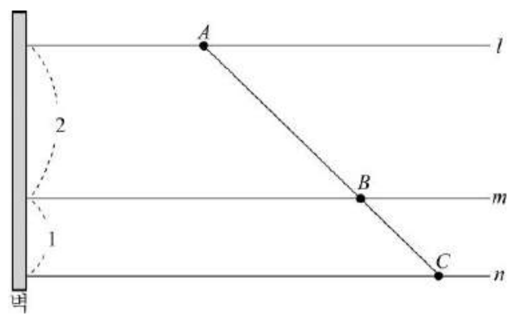
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$이다.

ㄷ. $g'(c)=0$인 실수 c가 개구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 적어도 두 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 2

그림과 같이 케이블 l, m, n은 모두 벽면과 수직이고, 케이블 사이의 거리가 각각 2, 1이다. l위의 광원 A에서 m위의 물체 B에 빛을 비추면 n위에 그림자 C가 나타난다.



광원 A와 물체 B의 시각 $t\,(t\le 8)$에서 벽으로부터의 거리를 각각 $x=4-\frac{1}{2}t$, $y=t^2-\frac{11}{2}t+10$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 광원, 물체, 그림자의 크기는 무시한다.) (2010년 7월 전국연합)

< 보 기 >

ㄱ. $t=\frac{5}{2}$에서 광원과 물체의 속도가 같아진다.

ㄴ. A와 C사이의 거리가 3인 순간은 두 번이다.

ㄷ. $2<t<3$에서 그림자 C의 가속도는 1이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예시답안

풀어보기

문제 1

$g(x) = -\sin x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt + \cos x \cdot f(x)$

ㄱ. $g(0) = 0$ ($\because f(0)=0$) (참)

ㄴ. $g(-x) = -\sin(-x)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-x} f(t)dt + \cos(-x) \cdot f(-x)$

$$= \sin x\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-x} f(t)dt + \int_{-x}^{x} f(t)dt\right) - \cos x \cdot f(x)$$

$$= \sin x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt - \cos x \cdot f(x) = -g(x) \text{ (참)}$$

ㄷ. $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g(0)$ 이므로 평균값의 정리에 의해 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 에서 $g'(c)=0$ 인 c가 적어도 하나 존재한다. 마찬가지로 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $g'(c)=0$ 인 c 가 적어도 하나 존재한다. (참)

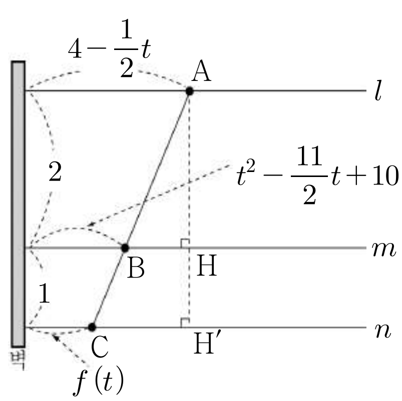
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

문제 2

ㄱ. 광원과 물체의 속도는 각각 $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}$, $\frac{dy}{dt} = 2t - \frac{11}{2}$ 이므로 $t = \frac{5}{2}$ 에서 속도는 $-\frac{1}{2}$ 로 같다. (참)

ㄴ. $\overline{AB} + \overline{BC} = 3$ 인 순간은 $t^2 - \frac{11}{2}t + 10 = 4 - \frac{1}{2}t$ 이므로 $t=2$ 또는 $t=3$ (참)

ㄷ. 그림자 C 의 시각 t 에서 벽으로부터의 거리를 $f(t)$, 점 A 에서 직선 m, n 에 내린 수선의 발을 각각 H, H′ 라 하자.



$\overline{\mathrm{BH}}=\left(4-\frac{1}{2}t\right)-\left(t^2-\frac{11}{2}t+10\right)=-t^2+5t-6$

$\overline{\mathrm{CH'}}=4-\frac{1}{2}t-f(t)$

$\overline{\mathrm{BH}}:\overline{\mathrm{CH'}}=2:3$ 이므로 $f(t)=\frac{3}{2}t^2-8t+13$ 이다.

속도 v 는 $v=\frac{df(t)}{dt}=3t-8$ 이므로 가속도 a 는 $a=\frac{dv}{dt}=3$ 이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

(대학발표 예시답안)

대학출제 문제 1

$v(t)$ 를 시각 t 일 때 속도라고 하면 처음 $16m$ 구간의 평균속도가 $2m/s$ 이므로 출발한지 8초 후에 $16m$ 지점을 통과해야 한다. 따라서 $\int_0^8 v(t)dt=16$ 이다. 가속도가 $2m/s^2$ 이하이므로 평균값 정리에 의해 $\frac{v(t)-v(8)}{t-8}\le 2$ $(t>0)$ 이다. 따라서 $0<t<8$ 일 때, $v(t)\ge 2t-16+v(8)$ 이고 $t>8$ 일 때, $v(t)\le 2t-16+v(8)$ 이다. $v(t)\ge 0$ 을 가정하였으므로

$$16=\int_0^8 v(t)dt \ge \int_{8-\frac{v(8)}{2}}^{8}(2t-16+v(8))dt=\frac{v^2(8)}{4}$$

따라서 $0\le v(8)\le 8$ 이다. 또한

$$\begin{aligned}\int_0^9 v(t)dt&=\int_0^8 v(t)dt+\int_8^9 v(t)dt\\&\le 16+\int_8^9(2t-16+v(8))dt\\&\le 16+\int_8^9(2t-8)dt\\&=25\end{aligned}$$

따라서 처음 9초 동안 이동한 거리는 $25m$ 이하이므로 $25m$ 를 이동하는 데는 적어도 9초 이상 필요하다.

13 부산대학교 모의(1차)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.[10)]

길이, 넓이, 부피, 온도, 질량과 같은 양은 단지 크기에 의해 결정될 수 있다. 그러나 변위, 속도, 힘 등의 양에는 크기와 방향 모두 필요하다. 이것을 간단히 벡터라고 한다. 벡터는 수학, 물리학, 공학, 컴퓨터 그래픽, 경영학 등 많은 영역에서 중요한 역할을 한다.

2차원 평면의 임의의 두 벡터에 대해서 내적과 거리함수를 다음과 같이 정의한다.

A. 임의의 두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ 의 내적은 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ 이고, $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 사이의 거리는 $\|\vec{a}-\vec{b}\|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$ 이다. 이 때, $\|a\|$ 는 원점인 영벡터 $\vec{0}$ 와 벡터 $\vec{a}$ 사이의 거리이다.

B. 임의의 세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 와 임의의 실수 k 에 대해서 내적은 다음의 성질을 만족한다.

(a) $\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$
(b) $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ 일 필요충분조건은 $\vec{a}=\vec{0}$ 이다.
(c) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
(d) $\vec{a}\cdot(k\vec{b}+\vec{c})=k\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

C. $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ 는 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1\ a_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$ 로 나타낼 수 있다.

D. 임의의 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 와 임의의 실수 k 에 대해서 거리는 다음의 성질을 만족한다.

(a) $\|\vec{a}\|\geq 0$
(b) $\|\vec{a}\|=0$ 일 필요충분조건은 $\vec{a}=\vec{0}$ 이다.
(c) $\|k\vec{a}\|=k\|\vec{a}\|$
(d) $\|\vec{a}+\vec{b}\|\leq\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$

E. 임의의 두 평면 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ 에 대해서 실수 $<\vec{a}, \vec{b}>$ 로의 함수가 B의 성질을 모두 만족하면 **일반화된 내적**이라 한다.

F. 임의의 평면 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$ 에 대해서 실수 $\|\vec{a}\|$ 로의 함수가 D의 성질을 모두 만족하면 **일반화된 거리**라 한다.

문제 1

2차 정사각행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 로부터 일반화된 내적을 $<\vec{a}, \vec{b}> = (a_1\ a_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ 로 정의할 때

(1) $b=c$ 임을 보이시오. (10점)

(2) $ad-bc>0,\ a>0$ 임을 보이시오. (10점)

(3) 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ 로 정의된 내적에 대해서 $<(1, 1), (1, 1)>=7$ 일 때, 자연수 a, b, c 를 구하시오.(15점)

문제 2

평면 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$ 에 대해 일반화된 거리를 $\|\vec{a}\|=|a_1|+|a_2|$ 로 정의할 때,

(1) 원점 $(0, 0)$ 으로부터 일반화된 거리가 1 인 점들이 나타내는 도형을 그리고, 주어진 도형으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오. (10점)

(2) 두 점 $(-1, 0)$, $(1, 0)$ 까지의 일반화된 거리의 합이 9 인 점들이 나타내는 도형을 그리고, 주어진 도형으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오. (15점)

10) 부산대학교 입학처

배경지식 쌓기

벡터의 내적

1. 벡터의 내적

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적은 $\vec{a}\cdot\vec{b}$로 표시하고, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 이다.

2. 벡터의 내적의 성분표시

가) 평면벡터의 내적 : $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ 일 때,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

나) 공간벡터의 내적 : $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 일 때,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

3. 내적의 연산법칙

가) 교환법칙 $\vec{a}\bullet\vec{b}=\vec{b}\bullet\vec{a}$

나) 분배법칙 $\vec{a}\bullet(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{a}\bullet\vec{c}$

다) $(k\vec{a})\bullet\vec{b}=\vec{a}\bullet(k\vec{b})=k(\vec{a}\bullet\vec{b})$

4. 두 벡터가 이루는 각의 크기

가) 평면벡터가 이루는 각

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ 일 때 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

나) 공간벡터가 이루는 각

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ 일 때 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^3}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^3}}$$

풀어보기

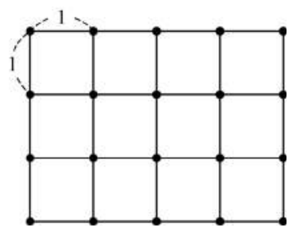
문제 1

좌표평면 위에 세 점 O $(0,0)$, A $(2,0)$, B $(0,2)$ 가 있다. 점 P (x,y) 가 두 조건 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} \le 0$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \le 4$ 를 만족할 때, 점 P 가 존재하는 영역의 넓이는?(2004년 전국연합)

① π ② $\sqrt{2}+\pi$ ③ $2+\pi$ ④ $3+\pi$ ⑤ 2π

문제 2

그림은 한 변의 길이가 1인 정사각형 12개를 붙여 만든 도형이다. 20개의 꼭짓점 중 한 점을 시점으로 하고 다른 한 점을 종점으로 하는 모든 벡터들의 집합을 S라 하자. 집합 S의 두 원소 $\vec{x}$, $\vec{y}$에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (2008년 전국연합)



[보 기]

ㄱ. $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ 이면 $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$의 값은 모두 정수이다.
ㄴ. $|\vec{x}| = \sqrt{5}$, $|\vec{y}| = \sqrt{2}$ 이면 $\vec{x} \cdot \vec{y} \ne 0$ 이다.
ㄷ. $\vec{x} \cdot \vec{y}$ 는 정수이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

문제 3

좌표공간에서 직선 $l : \frac{x}{2} = 6 - y = z - 6$ 과 평면 α 가 점 P$(2, 5, 7)$ 에서 수직으로 만난다. 직선 l 위의 점 A(a, b, c) 와 평면 α 위의 점 Q 에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 6$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은? (단, $a > 0$)(2015년 대수능)

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

읽기자료

거리 함수

1. 거리함수[11]

X를 공집합이 아닌 집합이라 하자. 모든 a, b, c에 대하여 다음 공리를 만족하는 $X \times X$상, 즉 X에 속하는 원소의 순서쌍에서, 정의되는 실수치함수 d를 x상의 거리(metric) 또는 거리함수(distance function)라고 한다.

(1) $d(a, b) \geq 0$ 이고 $d(a, a) = 0$

(2) $d(a, b) = d(b, a)$

(3) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$

(4) $a \neq b$ 이면 $d(a, b) > 0$

이때, $d(a, b)$를 a에서 b까지의 거리(distance)라고 한다.

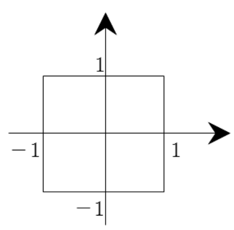
2. 거리함수의 예

(1) a와 b가 실수일 때, $d(a, b) = |a - b|$로 정의되는 함수 d는 거리이고 실직선 R 상의 통상거리(usual metric)라고 부른다. 또한 $p = (a_1, a_2)$, $q = (b_1, b_2)$를 평면 R^2의 점이라 할 때, $d(p, q) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ 으로서 정의되는 함수 d는 거리이다.

(2) $p = (a_1, a_2)$, $q = (b_1, b_2)$를 평면 R^2의 임의의 점일 때, 다음과 같이 정의된 함수 d_1, d_2는 거리함수이다.

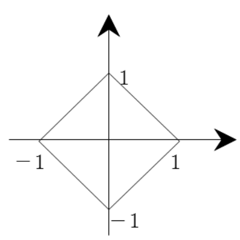
(가) $d_1(p, q) = \max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|)$

▷ 원점$(0, 0)$으로부터 거리가 1인 점들이 나타내는 도형



(나) $d_2(p, q) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$

▷ 원점$(0, 0)$으로부터 거리가 1인 점들이 나타내는 도형



11) seymour lipschutz. 일반위상수학 경문사. 2002

읽기자료

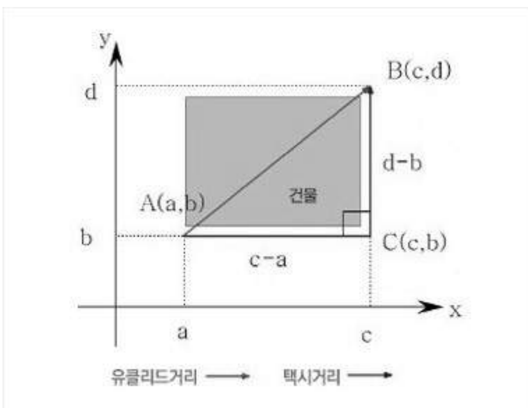
택시 기하학(수학산책)[12]

(1) 가장 간단한 비유클리드 기하학, 택시 기하학

우리가 고등학교까지 유클리드기하학을 배우는 이유는 논리적인 사고와 증명의 본질을 이해하기 위함이다. 하지만 우리가 유클리드기하학을 너무나도 직관적으로 받아들이기 때문에 이것이 '공리'나 '공준'에 기초한 공리체계라는 사실을 인식하지 못하고 있다. 그래서 유클리드기하학은 모든 과학에서 절대적인 것으로 여겨져 왔고, 비로소 19세기가 돼서야 유클리드기하학이 아닌 기하학인 비유클리드기하학을 생각할 수 있게 되었다. 우리가 배우고 또 알고 있는 유클리드기하학을 정확히 이해하기 위해서는 간단하면서도 흥미로운 비유클리드기하학을 소개하는 것이 필요하다. 비유클리드기하학 중에서 가장 간단한 일명 '택시기하학(Taxicab-Geometry)'을 소개하려는 것이다.

(2) 택시 기하학은 '거리의 정의'가 다르다

택시기하학과 유클리드기하학의 차이를 알기 위하여 먼저 유클리드기하학에서의 거리가 어떻게 정의되는지 알아보자.



유클리드기하학에서 점, 선, 면, 거리, 각 등은 일반적으로 우리가 잘 알고 있는 것들이다. 이 중에서 두 점 사이의 거리는 직각삼각형에 관한 피타고라스의 정리를 이용하여 구할 수 있다. 즉, 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, b)$와 $\mathrm{B}(c, d)$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\text{유클리드거리 } d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

이제 바둑판 모양의 도로망을 가진 도시의 점 A에서 택시를 타고 점 B로 가는 경우를 생각해 보자. 오른쪽 그림에서와 같이 두 점 사이에 건물이 있으므로 택시를 타고 A에서 B로 가려면 직선으로 곧바로 가지 못하고 점 A에서 점 C를 거쳐 점

12) 네이버 캐스트 - 수학산책 http://navercast.naver.com/contents.nhn?rid=22&contents_id=629

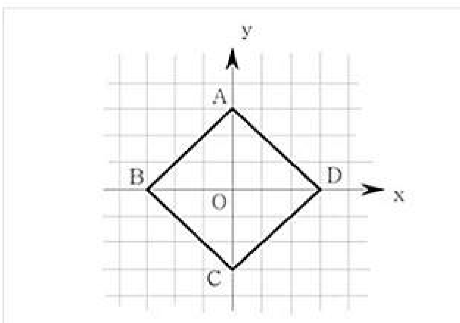
B 로 가야 한다. 즉, 다음과 같이 거리를 측정하는 것을 '택시거리(Taxi−metric)'라고 한다.

$$\text{택시거리 } d_T(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = |c-a| + |d-b|$$

그리고 xy−평면에 유클리드거리가 적용되면 '유클리드 평면', 택시거리가 적용되면 '택시평면'이라고 한다. 그런데 실생활에서 두 지점 사이의 거리는 택시거리로 측정하는 것이 더 현실적이며, 택시평면 위에서는 유클리드기하학의 내용들이 옳지 않다. 즉, 택시기하학은 비유클리드기하학인 것이다.

(3) 택시 평면에서의 원의 모양?

택시기하학과 유클리드기하학은 많은 차이점이 있다. 그 중에서 두 기하학에서 서로 확연히 다른 것은 원에 관한 내용일 것이다. 사실 우리가 알고 있고 실생활에 사용하고 있는 원은 유클리드거리에 의한 원이다. 실제로 원의 정의는 '한 정점에서 일정한 거리에 있는 점의 집합'으로 이 정점을 중심, 일정한 거리를 원의 반지름이라고 한다. 이 원의 정의를 그대로 택시평면 위에 옮겨 놓아도 우리가 알고 있는 모양의 원이 될까?



중심이 $(0, 0)$ 이고 반지름의 길이가 3 인 택시원을 xy−평면 위에 나타내보자. 반지름의 길이가 3 이므로 택시평면 위에서 원은 $|x|+|y|=3$ 을 만족시키는 점 (x, y) 의 집합이 된다. 그림은 이 식을 만족시키는 점의 집합을 택시평면 위에 나타낸 것으로 택시원은 우리가 알고 있는 원이 아니고 두 대각선의 길이가 같은 마름모 모양의 정사각형이다.

택시원은 두 대각선이 좌표축과 평행한 유클리드평면에서의 정사각형과 같으며, 원점 이외의 점을 중심으로 하여도 마찬가지로 택시원은 정사각형 모양이 된다. 이를테면 중심이 $(2, 1)$ 이고 반지름의 길이가 3인 택시원은 $|x-2|+|y-1|=3$ 으로 나타낼 수 있고 이는 위의 도형을 x 축으로 2 만큼 y 축으로 1 만큼 평행이동 시킨 도형이 된다.

예시답안

풀어보기

문제 1

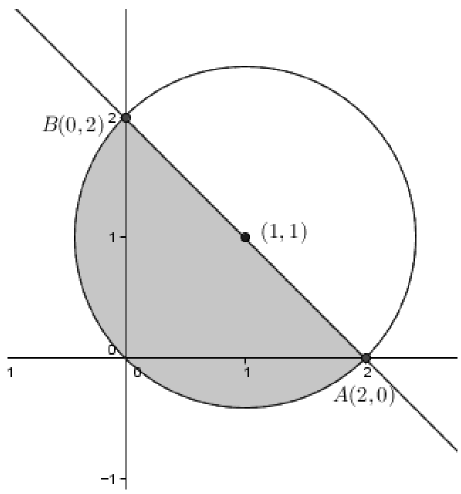
$\overrightarrow{PA}=(2-x,\ -y)$, $\overrightarrow{PB}=(-x,\ 2-y)$

이므로 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2-2x+y^2-2y \le 0$

$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2 \le 2 \quad \cdots$ ㉠

$\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(x,\ y)\cdot(2,\ 2)$

$=2x+2y \le 4 \quad \therefore\ x+y \le 2 \quad \cdots$ ㉡



㉠, ㉡에서 점 P가 나타내는 영역은 그림의 색칠한 부분이다. 따라서 구하는 영역의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\pi=\pi$

정답 ①

문제 2

ㄱ. (반례) $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$ 이지만 $|\vec{x}|=\sqrt{2}$, $|\vec{y}|=\sqrt{2}$ 인 경우가 있다. (거짓)

ㄴ. $|\vec{x}|=\sqrt{5}$, $|\vec{y}|=\sqrt{2}$ 이면 두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$는 수직이 될 수 없다.

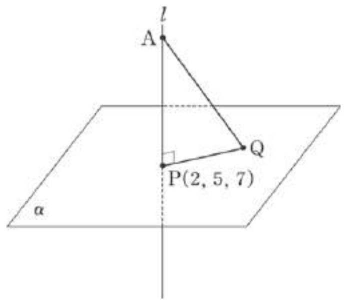
$\therefore\ \vec{x}\cdot\vec{y}\neq 0$ (참)

ㄷ. 주어진 도형을 좌표평면에서 생각하면 $\vec{x}$, $\vec{y}$의 성분은 모두 정수이므로 $\vec{x}\cdot\vec{y}$는 항상 정수이다. (참)

정답 ⑤

문제 3

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = 6$, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = \sqrt{6}$



$\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-6}{-1} = \dfrac{z-6}{1} = t$ 에서 $\mathrm{A}(2t, -t+6, t+6)$ 라 하면

$\therefore |\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = \sqrt{4(t-1)^2 + (-t+1)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{6(t-1)^2}$

$\therefore |t-1| = 1$

$a > 0$ 에서 $t = 2$ 이고 $\mathrm{A}(4, 4, 8)$ $\therefore a+b+c = 4+4+8 = 16$

대학 출제 문제 1

(1) B의 (c) 에서 임의의 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 에 대하여 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ 를 만족한다.

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = (a_1\ a_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a a_1 b_1 + b a_1 b_2 + c a_2 b_1 + d a_2 b_2$$

$$\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle = (b_1\ b_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a a_1 b_1 + b a_2 b_1 + c a_1 b_2 + d a_2 b_2$$

이므로 $ba_1b_2 + ca_2b_1 = ba_2b_1 + ca_1b_2$ 이다. 즉, $(b-c)(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$ 이고,
임의의 두 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 에 대하여 성립해야 하므로 $b = c$ 이다.

(2) $\vec{a} \neq \vec{0}$ 이면 $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0$ 이고, (1)에서 $b = c$ 이므로

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = (a_1\ a_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a a_1^2 + (b+c) a_1 a_2 + d a_2^2 = a a_1^2 + 2b\, a_1 a_2 + d a_2^2$$

$$= a\left(a_1 + \frac{b}{a} a_2\right)^2 + \left(\frac{ad - b^2}{a}\right) a_2^2 = a\left(a_1 + \frac{b}{a} a_2\right)^2 + \left(\frac{ad - bc}{a}\right) a_2^2 > 0$$

이다. 임의의 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 에 대해 성립해야 하므로 $a > 0$, $ad - b^2 = ad - bc > 0$ 이다.

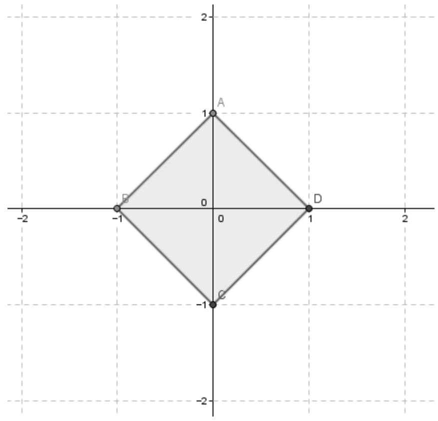
(3) $b = c$ 이므로 $\langle (1,1), (1,1) \rangle = (1\ 1)\begin{pmatrix} a & b \\ b & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a + 2b + 2 = 7$ 이다.

그러므로 $a + 2b = 5$ 를 만족하는 자연수 a, b, c 는 $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$ 또는 $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$ 이다.

이 때, $ad - bc > 0$ 을 만족하여야 하므로 $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$ 이다.

대학 출제 문제 2

(1) 정의에 의하여 원점으로부터 거리가 1 인 점들이 나타내는 도형은 $|x|+|y|=1$ 이다.



그러므로 둘러싸인 영역의 넓이는 2 이다.

(2) 정의에 의하여 거리의 합이 9 인 점들이 나타내는 도형은

$$|x+1|+|y|+|x-1|+|y|=9$$

이다.

ⅰ) $y \geq 0$ 일 때,

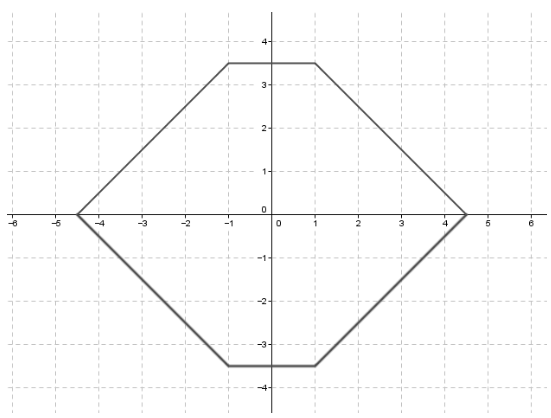
$y=\frac{1}{2}(9-|x+1|-|x-1|)$

$x \geq 1$ 일 때, $y=-x+\frac{9}{2}$

$-1 < x < 1$ 일 때, $y=\frac{7}{2}$

$x \leq -1$ 일 때, $y=x+\frac{9}{2}$

$y<0$ 은 위의 경우에 대해 x 축 대칭이므로 주어진 도형은 다음과 같다.



그러므로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\frac{77}{2}$ 이다.

(참고) 두 정점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$를 택시타원의 초점으로 하고, 그 두 점으로부터 거리의 합이 $2a(0 < c < a)$인 택시타원의 방정식을 구하여 보자. (제시문에 정의된 거리를 택시거리라 하고, 그 거리를 사용하여 정의되는 도형에 택시도형이라 이름 붙이자.)

$$|x-c|+|y|+|x+c|+|y|=2a$$

i) $y \geq 0$일 때,

$x \geq c$이면 $y=-x+a$

$-c < x < c$이면 $y=a-c\,(=b)$

$x \leq -c$이면 $y=x+a$

ii) $y < 0$일 때,

$x \geq c$이면 $y=x-a$

$-c < x < c$이면 $y=c-a\,(=-b)$

$x \leq -c$이면 $y=-x-a$

(대학발표 예시답안)

대학출제 문제 1

(1) $\vec{a}=\langle a_1, a_2\rangle$, $\vec{b}=\langle b_1, b_2\rangle$, $k\in\mathbb{R}$라 두자. 일반화된 내적은 B의 모든 성질을 만족해야 한다.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1\ a_2)\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}=a_1b_1a+a_1b_2b+a_2b_1c+a_2b_2d$

$\vec{b}\cdot\vec{a}=(b_1\ b_2)\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=a_1b_1a+a_2b_1b+a_1b_2c+a_2b_2d$이다. --(5점)

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$로부터 $(b-c)(a_1b_2-a_2b_1)=0$ 이다.

임의의 $\vec{a}, \vec{b}$에 대하여 성립해야 하므로 $b=c$ 이다. --(5점)

(2)

$\vec{a}\neq\vec{0}$인 경우 $\vec{a}\cdot\vec{a}>0$이고 $b=c$ 을 이용하자.

$\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1^2a+2a_1a_2b+a_2^2d=a(a_1^2)+2a_2b(a_1)+a_2^2d>0$ 이다. --(5점)

즉, $a>0$, $(a_2b)^2-a_2^2ad<0$ 이므로 $a>0$, $ad-bc>0$ 이다. --(5점)

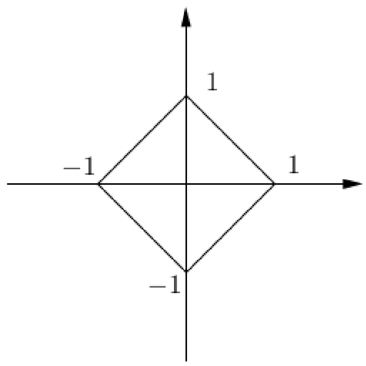
(3) $7=\langle(1,1), (1,1)\rangle=(1\ 1)\begin{pmatrix}a & b\\ c & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=a+b+c+2$ --(6점)

$b=c$, $2a-bc>0\,(a,b,c\in\mathbb{N})$이므로 $a+2b=5$ 로부터 $a=3$, $b=1$, $c=1$ 이다. --(9점)

(대학발표 예시답안)

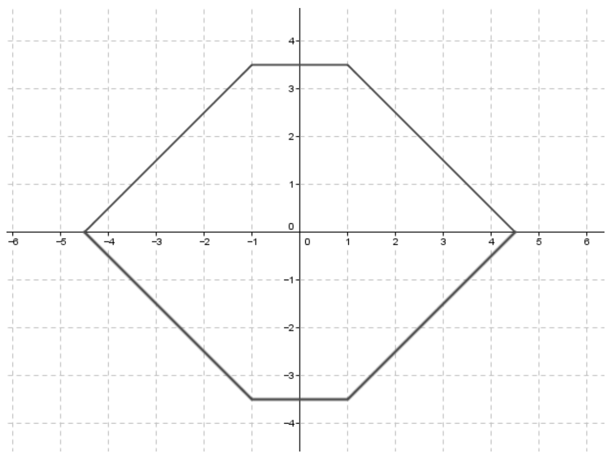
대학출제 문제 2

(1) $1=\|(0,0)-(x,y)\|=\|(-x,-y)\|=|x|+|y|$
이므로 넓이는 2 이다.



(2) $9=\|(-1,0)-(x,y)\|+\|(1,0)-(x,y)\|=|1+x|+|1-x|+2|y|$

이므로 넓이는 $\dfrac{77}{2}$ 이다.



14 부산대학교 모의(2차)

※ 제시문

1. 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수는 최솟값과 최댓값을 가진다.

2. 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 증가함수 $y=f(x)$ 의 최솟값을 c, 최댓값을 d 라 하면, 닫힌구간 $[c, d]$ 에서 연속인 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 가 존재한다. 이 경우에 $y=f(x)$ 와 $x=f^{-1}(y)$ 는 평면에서 같은 점을 나타낸다.

3. 실수구간에서 정의된 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 치역이 함수 $g(x)$ 의 정의역에 포함되면 합성함수 $g(f(x))$ 는 정의된다.
두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 미분가능이면 합성함수 $g(f(x))$ 도 미분가능한 함수이고, 그 도함수는 $(g(f(x)))'=f'(x)\,g'(f(x))$이다.

4. 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f'(x)\neq 0$ 이면 $f^{-1}(x)$ 도 미분가능이다.

문제 1

(1.1) 함수 $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$ 은 전체 실수구간에서 증가함수임을 보여라. (5점)

(1.2) 적분 $\int_{-1}^{1} f^{-1}(x)dx$ 을 계산하여라.(15점)

문제 2

$g(x)=\sin x$ 는 전체 실수구간에서 미분가능이고, 닫힌구간 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 에서 증가함수이고, 이 구간에서 $-1\leq \sin x \leq 1$ 이다. 닫힌구간 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 에서 $y=g(x)$ 의 역함수를 $y=g^{-1}(x)$ 라 할 때 다음 물음에 답하여라.

(2.1) 구간 $-1<x<1$ 에서 $g^{-1}(x)$ 의 도함수를 구하여라. (10점)

(2.2) 구간 $-2<x<2$ 에서 $h(x)=g^{-1}\left(\frac{1}{2}x\right)$ 라 둘 때, $h(x)$ 의 도함수 $h'(x)$ 를 구하여라. (7점)

(2.3) $x=0$ 에서 곡선 $y=h(x)$ 의 접선의 방정식을 구하여라. (8점)

문제 3

> 벡터는 크기와 방향을 동시에 나타내는 물리량을 나타내는 수학적인 표현이다. 예를 들면 변위, 힘, 속도, 가속도 등은 크기와 방향을 동시에 나타내는 벡터이다. 벡터는 평면이나 공간에서 도형의 성질이나 수학적인 성질을 밝히는데 다양하게 활용된다.

(3.1) 평면에 놓인 볼록 사각형에서 각 변의 중점을 차례로 연결하여 얻어진 새로운 사각형은 평행사변형이 됨을 벡터를 이용하여 보여라. (8점)

(3.2) 평면에 놓은 삼각형 $\triangle ABC$ 가 놓여 있다. 벡터 $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{BC}$ 의 끝점이 삼각형의 내부에 놓이도록 x 의 범위를 구하여라. (7점)

풀어보기

문제 1

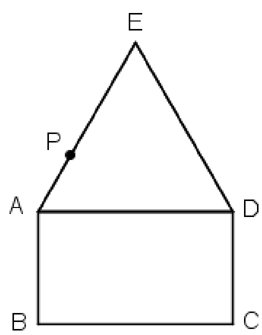
함수 $f(x)$는 미분가능하고 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다. 두 실수 $\alpha,\ \beta$에 대하여 $f(\alpha)=\beta,\ f'(\alpha)=2\beta$일 때, $\displaystyle\lim_{x\to\beta}\frac{\frac{1}{\sqrt{g(x)}}-\frac{1}{\sqrt{g(\beta)}}}{x-\beta}=k$이다. 상수 k의 값을 α와 β로 옳게 나타낸 것은? (단, $\alpha>0,\ \beta\neq 0$) (2013년 수능특강)

① $-\dfrac{1}{2\alpha\beta\sqrt{\alpha}}$ ② $-\dfrac{2}{5\alpha\beta\sqrt{\alpha}}$ ③ $-\dfrac{1}{3\alpha\beta\sqrt{\alpha}}$

④ $-\dfrac{2}{7\alpha\beta\sqrt{\alpha}}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4\alpha\beta\sqrt{\alpha}}$

문제 2

평면에서 그림과 같이 $\overline{AB}=1$이고 $\overline{BC}=\sqrt{3}$인 직사각형 ABCD와 정삼각형 EAD가 있다. 점 P가 선분 AE 위를 움직일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2010년 9월 평가원)



< 보 기 >

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 1이다.

ㄴ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$의 값은 일정하다.

ㄷ. $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 $\dfrac{7}{2}$이다.

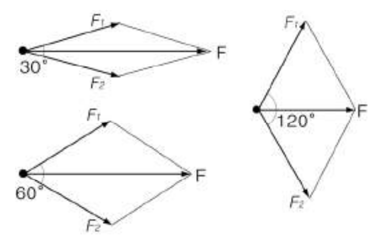
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

읽기자료

1. 벡터의 개념

수학에서 벡터의 개념은 인간의 도전과 정복의 꿈이 무르익어 가던 르네상스 시대를 거치면서 유럽 사회가 식민지 경영을 위해 다른 대륙으로 원거리 항해를 시작하며 도입됐다. 즉 원거리 항해를 위해 필요한 천체의 운동과 항해 궤도를 보다 빠르고 간편하게 계산하기 위해서 출발하였다.

16세기 이후 네덜란드에서는 대양 항해가 늘어나면서 바다에서 배의 위치나 기항지의 위치, 기항지의 밀물 혹은 썰물이 이는 시각 등을 예측하기 위해 달이나 행성의 위치를 아는 것이 필요했다. 또한 행성의 운동을 예측하기 위해서는 행성의 운동 곡선 방향에서의 접선을 계산하고 이들 간의 합성에 의한 새로운 방향 예측이 절실하였다. 실제 이 시기 네덜란드의 활발한 무역활동은 1653년 네덜란드에서 일본의 동인도 회사로 항해하다 제주도에 표류한 하멜(Hendrik Hamel, 1630~1692)의 기록에서도 찾아 볼 수 있다. 이 때 활용된 것이 벡터의 ‘합성의 법칙’이다. 이는 나란하지 않은 두 방향으로 진행하는 힘 또는 운동의 합성을 표현한 법칙으로, 네덜란드의 스테빈(Simon Stevin, 1548~1620)에 의해 발견되었다.



서로 다른 두 방향의 힘 F_1과 F_2를 합성한 합력 F는 오른쪽 그림에서와 같이 F_1과 F_2를 두 변으로 하는 평행사변형의 대각선으로 표현된다는 ‘힘의 평행사변형 법칙’에서 나온 것이다. 스테빈은 그의 책 『균형의 원리(De Beghinselen der Weegconst, 1586)』에서 고체의 정역학과 유체의 정역학을 다루었으며, 도르래의 이론을 전개하여 가상(假想) 변위의 원리를 설명하였다. 그리고 빗면에 관한 균형의 조건을 제시하였으며, 힘의 평행사변형의 법칙을 제시하여 역학과 수학의 결합 구조로서 벡터 이론을 탄생시키는 모태를 제공하였다.

2. 미분과 적분의 역사

미분은 곡선의 접선을 긋는 것에서, 적분은 곡선으로 둘러싸인 부분의 면적을 구하는 것에서 시작되었다고 한다. 미분법과 적분법에 대해서는 그리스 시대부터 논의가 이루어져 왔는데, 고대 그리스 수학자 아르키메데스는 오늘날의 구분구적법과 유사한 방법으로 평면 영역과 구면의 넓이를 구하였고, 프랑스의 페르마(1601~1665)는 함수의 극솟값과 극댓값을 구하는데 미분법과 유사한 방법을 이용하였다. 그러나 오늘날과 같은 미적분학은 뉴턴과 라이프니츠에 의해 발견되었다. 영국의 뉴턴(1642~1727)은 운동체의 속도를 구하는 과정에서 미분법을 발견하였다. 그는 행성의 움직임을 연구하기 위해 미적분을 고안하였으며, 미분방정식을 풀어서 케플러법칙을 증명하였다. 독일의 라이프니츠(1646~1716)는 곡선의 접선과 함수의 극대, 극소를 고찰하는 과정에서 미분법을 발견했으며, 현대적인 미분과 적분의 기호를 개발하는데 크게 공헌하였다.

뉴턴과 라이프니츠에 의해 발견되고, 오일러 등 여러 학자에 의하여 발전된 미분법과 적분법은 현대수학의 가장 기본적인 개념이 되었을 뿐만 아니라 자연과학, 공학 및 사회과학 등 거의 모든 분야에 응용되고 있다. 예를 들어 최댓값, 최솟값을 구하는데 사용되기도 하고, 움직이는 물체의 운동이나 사물의 변화하는 현상을 기술하는데 이용되기도 한다. (2006 서울대 예시)

예시답안

풀어보기

문제 1

[정답] ⑤

$h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{g(x)}}$ 이라 하면

$$h'(x)=\frac{-\frac{1}{2}\{g(x)\}^{-\frac{1}{2}}g'(x)}{g(x)}=-\frac{g'(x)}{2g(x)\sqrt{g(x)}}$$

이고, $f(\alpha)=\beta$, $f'(\alpha)=2\beta$ 에서 $g(\beta)=\alpha$ 이므로

$$g'(\beta)=\frac{1}{f'(\alpha)}=\frac{1}{2\beta}$$

$$\therefore \lim_{x\to\beta}\frac{\frac{1}{\sqrt{g(x)}}-\frac{1}{\sqrt{g(\beta)}}}{x-\beta}=\lim_{x\to\beta}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}=h'(\beta)=-\frac{g'(\beta)}{2g(\beta)\sqrt{g(\beta)}}=-\frac{1}{4\alpha\beta\sqrt{\alpha}}$$

문제 2

[정답] ⑤

ㄱ $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{PB}|$ 이므로 최솟값은 1 이다. (참)

ㄴ. $|CA|^2=4$ (참)

ㄷ. $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|^2=|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}|^2=3+4+x^2+6-\sqrt{3}\,x$

$=x^2-\sqrt{3}\,x+13,$

$|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|$ 는 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때, 최솟값 $\dfrac{7}{2}$ 을 가진다. (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

대학 출제 문제 1-1

(대학발표 예시답안)

임의의 실수 x 에 대하여 $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geq 0$ 이므로 증가함수이다.

(다른 풀이 1)

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geq 0$ 이므로 전체 실수 구간에서 증가함수이다.

(다른 풀이 2)

$f(x)=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$ 이다.

$f(x)$가 증가함수임을 보이기 위해서 서로 다른 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1>x_2$ 일 때, $f(x_1)>f(x_2)$ 임을 보이면 된다.

$x_1-1=a$, $x_2-1=b$라 하면 $x_1>x_2$ 이므로 $a>b$이다.

$$f(x_1)-f(x_2)=f(a+1)-f(b+1)=(a+1-1)^3-(b+1-1)^3 \ =a^3-b^3$$

$$=(a-b)(a^2+ab+b^2) \ =(a-b)\left\{\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right\}\geq 0$$

따라서 $f(x)$는 증가함수이다.

대학 출제 문제 1-2

(대학발표 예시답안)

$f(0)=-1$

$f(2)=8-12+6-1=1$

$f:[0,2]\to[-1,1]$

$f^{-1}:[-1,1]\to[0,2]$ 증가함수이므로

$\int_{-1}^{1} f^{-1}(x)dx=$사각형의 넓이 $-$ $f(x)$의 그래프 아래쪽의 넓이

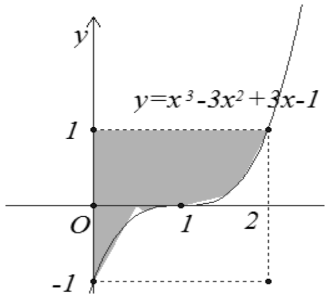
$$=4-\int_0^2 f(x)+1\,dx$$

$$=2$$

(다른 풀이)

$y=f(x)$ 는 $(0,\ -1)$, $(1,\ 0)$, $(2,\ 1)$ 을 지나는 삼차함수이므로

$\int_{-1}^{1} f^{-1}(x)dx$ 는 아래 그림의 노란색(음영) 부분이다.



또한, $f(x)=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$ 이므로 $(1,0)$ 에서 점대칭 도형이다.

따라서 위 그림에서 정사각형 내부의 노란색 부분과 흰색 부분의 넓이가 같다.

$2\int_{-1}^{1} f^{-1}(x)dx=4$ 이므로 $\int_{-1}^{1} f^{-1}(x)dx=2$ 이다.

대학 출제 문제 2-1

(대학발표 예시답안)

$$1=\frac{d}{dx}(x)=\frac{d}{dx}(\sin y)=\cos y\frac{d}{dx}(y)=\cos(g^{-1}(x))\frac{d}{dx}(g^{-1}(x))=\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}(g^{-1}(x))$$

이므로 $\frac{d}{dx}(g^{-1}(x))=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 이다.

(다른 풀이)

<제시문4>에 의해 $g(x)$ 가 미분가능이므로 역함수 $y=g^{-1}(x)$ 는 미분가능하다. 역함수 미분법에 의해

$$\frac{d}{dx}g^{-1}(x)=\frac{1}{g'(y)}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

대학 출제 문제 2-2

(대학발표 예시답안)

$$h'(x)=(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

(다른 풀이)

<제시문3>의 합성함수의 미분법에 의해

$$h'(x)=\left(g^{-1}\left(\frac{1}{2}x\right)\right)'\left(\frac{1}{2}x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

대학 출제 문제 2-3

(대학발표 예시답안)

$$h'(0)=\frac{1}{2}$$

$$h(0)=g^{-1}(0)=0$$

$$y=\frac{1}{2}x$$

(다른 풀이)

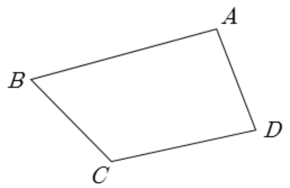
$h(0)=0$ 이고, $h'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{4-0^2}}=\dfrac{1}{2}$ 이므로 접선의 방정식은

$y-0=\dfrac{1}{2}(x-0)$ 에서 $y=\dfrac{1}{2}x$ 이다.

대학 출제 문제 3-1

(대학발표 예시답안)

다음과 같이 사각형 $ABCD$의 각 변을 벡터에 대응시키면



벡터의 합에 성질에 의해서 다음이 성립한다.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$

변 AB의 중점을 a, 변 BC의 중점을 b, 변 CD의 중점을 c 변 DA의 중점을 d 라고 놓으면

$\overrightarrow{ab}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}}{2}=\overrightarrow{cd}$

$\overrightarrow{ac}=\dfrac{\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}}{2}=\overrightarrow{bd}$

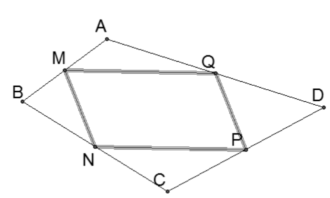
이 되고 두 쌍의 대변이 서로 평행하므로 사각형 $abcd$는 평행사변형이다.

(다른 풀이)

임의의 볼록사각형 ABCD 에 대하여 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, $D(x_4,y_4)$ 이라고 하고, 네 변의 중점을 각각

$M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}, \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$, $P\left(\dfrac{x_3+x_4}{2}, \dfrac{y_3+y_4}{2}\right)$, $Q\left(\dfrac{x_1+x_4}{2}, \dfrac{y_1+y_4}{2}\right)$

라 하자.



$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{x_3-x_1}{2}, \frac{y_3-y_1}{2}\right)$, $\overrightarrow{QP}=\left(\frac{x_3-x_1}{2}, \frac{y_3-y_1}{2}\right)$ 이다.
$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$ 이므로 $\overrightarrow{MN}//\overrightarrow{QP}$ 이고 $|\overrightarrow{MN}|=|\overrightarrow{QP}|$ 가 성립한다.
따라서 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같으므로 사각형 $MNPQ$ 는 평행사변형이다.

대학 출제 문제 3-2

(대학발표 예시답안)

변 AC의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OM}$이다.

따라서 $\overrightarrow{OM}+x\overrightarrow{BC}$가 삼각형의 내부에 놓이기 위해서는 $-\frac{1}{2}<x<0$ 이다.

(다른 풀이 1)

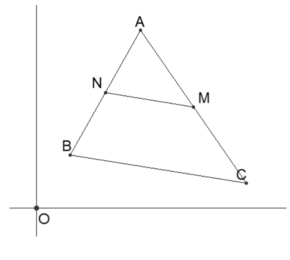
삼각형 $\triangle ABC$에서 선분 AC의 중점을 M, 선분 AB의 중점을 N이라 하자.

$\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OM}$ 이고, $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{MN}$ 이므로

$\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OM}+(-2x)\overrightarrow{MN}$ 이다.

따라서 끝점이 삼각형의 내부에 놓이기 위해서는

$0<-2x<1$ 이므로 $-\frac{1}{2}<x<0$ 이다.



(다른 풀이 2)

삼각형 $\triangle ABC$에서 선분 BC위의 한 점을 Q, 선분 AQ위의 한 점을 P라 하면,
$\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}$ (단, $0<t<1$), $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AQ}$ $(0<k<1)$ 이다.
따라서 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AQ}=k\left(t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}\right)$ ⋯ ①
또 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+x\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=-x\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\overrightarrow{AC}$ ⋯ ②

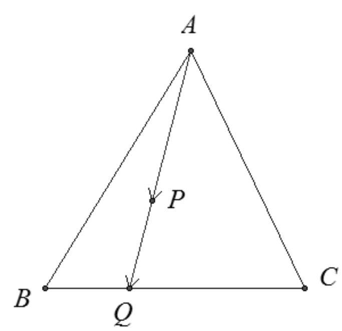
①과 ②에서

$kt=-x$, $k-kt=\frac{1}{2}+x$

연립방정식을 풀면

$k=\frac{1}{2}$, $t=-2x$

$0<t<1$ 이므로, $-\frac{1}{2}<x<0$ 이다.



15 부산대학교 수시(논술전형)

【문항1】 다음 제시문을 근거로 하여 아래 논제에 답하시오.[13]

$M(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\text{는 실수}\right\}$ 이다. 즉, $M(\mathbb{R})$ 은 실수를 성분으로 갖는 2×2 행렬 전체의 집합이다. 특히, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 을 **영행렬**이라고 한다.

(가) 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ 와 $B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ 의 **곱**은

$AB=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1+a_2b_3 & a_1b_2+a_2b_4 \\ a_3b_1+a_4b_3 & a_3b_2+a_4b_4 \end{pmatrix}$ 로 정의한다.

(나) 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ 의 **전치행렬**은 $A^t=\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$ 로 정의한다.

(다) 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ 의 **대각합**은 $\mathrm{tr}(A)=a_1+a_4$ 로 정의한다.

(라) 두 행렬 A 와 B 의 **행렬내적**은 $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(AB^t)$ 로 정의한다.

(마) 행렬 $A\in M(\mathbb{R})$ 의 **크기**는 $\|A\|=(\langle A,A\rangle)^{\frac{1}{2}}$ 로 정의한다.

(바) $M(\mathbb{R})$ 에 속하는 영행렬이 아닌 두 행렬 A 와 B 의 **사잇각** $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$ 는 $\cos\theta=\dfrac{\langle A,B\rangle}{\|A\|\,\|B\|}$ 이 되게 정의한다.

논제 1-1

행렬 $A\in M(\mathbb{R})$ 가 영행렬이 아니면 행렬내적 $\langle A,A\rangle$ 는 양의 실수임을 보이시오.(10점)

논제 1-2

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 와 $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 의 사잇각을 구하시오. (8점)

논제 1-3

$\|A\|=2$ 인 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ 의 개수를 구하시오.(단, $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ 는 정수이다.)(7점)

13) 부산대학교 입학처

【문항 2】 다음 제시문을 근거로 하여 아래 논제에 답하시오.

(가) 닫힌구간 $[a, b]$ 에 속하는 $x_1,$ x_2 가

$$x_1 < x_2 \text{ 이면 } f(x_1) > f(x_2) \text{ 일 때,}$$

함수 f 는 구간 $[a, b]$ 에서 **감소함수**라고 한다.

(나) 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능한 함수 f 가 구간 (a, b) 에 속하는 모든 x 에 대하여, $f'(x) < 0$ 이면 함수 f 는 구간 $[a, b]$ 에서 감소함수이다.

(다) **[중간값 정리]** 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, $f(a) \neq f(b)$ 이면 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k 에 대하여 $f(c) = k$ 인 점 c 가 구간 (a, b) 안에 적어도 한 개 이상 존재한다.

함수 $f(x) = e^x(1-x)$ 에 대하여,

논제 2-1

$f(x) = e^x(1-x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 감소함수임을 증명하시오. (7점)

논제 2-2

실수 $0 < t < 1$ 에 대하여, $f(a_t) = t$ 가 되는 a_t 가 열린구간 $(0, 1)$ 사이에 유일하게 존재함을 증명하시오. (8점)

논제 2-3

실수 $0 < t < 1$ 에 대하여, 다음 부등식

$$\int_0^{a_t} \frac{1}{(1-x)^2}\, dx \leq \frac{1}{2t^2}(e^2 - 1)$$

을 증명하시오. (20점)

배경지식 쌓기

1. 벡터의 내적

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ 일 때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 의 내적은 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 로 표시하고

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2$$

(1) 벡터의 크기 : $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2}$

(2) 두 벡터가 이루는 각의 크기: $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

2. 증가 · 감소함수와 미분가능

(1) 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여

$$x_1 < x_2 \text{ 이면 } f(x_1) < f(x_2)$$

일 때, 함수 $f(x)$ 는 구간 $[a, b]$ 에서 증가한다고 하고

$$x_1 < x_2 \text{ 이면 } f(x_1) > f(x_2)$$

일 때, 함수 $f(x)$ 는 구간 $[a, b]$ 에서 감소한다고 한다.

(2) 함수 $y=f(x)$ 가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x 에 대하여

① $f'(x)>0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.

3. 중간값의 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 일 때, $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k 에 대하여 $f(c)=k$ 인 c 가 닫힌구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

4. 정적분의 기본정리

구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 의 임의의 부정적분의 하나를 $F(x)$ 라 하면

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

풀어보기

문제 1

정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le \pi\}$ 인 함수 $f(x)=2x\cos x$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2011학년도 대수능)

<보기>

ㄱ. $f'(a)=0$ 이면 $\tan a=\dfrac{1}{a}$ 이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극댓값을 가지는 a 가 구간 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ 에 있다.

ㄷ. 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 에서 방정식 $f(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 2

함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(가) 함수 $f(x)$ 는 모든 실수에서 연속이다.
(나) 모든 정수 n 에 대하여 $f(2n)=1$ 이고 $f(2n+1)=-1$ 이다.

함수 $f(x)$ 에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2009년 5월 교육청)

<보기>

ㄱ. $f(x)$ 는 역함수가 존재하지 않는다.
ㄴ. 폐구간 $[1,2]$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값은 1 이다.
ㄷ. 자연수 m 에 대하여 방정식 $f(x)=0$ 은 개구간 $(0,2m)$ 에서 적어도 $2m$ 개의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 3

함수 $f(x)=e^x-1$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2012년 4월 교육청)

<보기>

ㄱ. $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=e-2$

ㄴ. $x>0$ 에서 $f(x)>x$ 이다.

ㄷ. $\dfrac{5(e^5-1)}{2}<\displaystyle\int_0^{e^5-1} f^{-1}(x)dx<\dfrac{(e^5-1)^2}{2}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예시답안

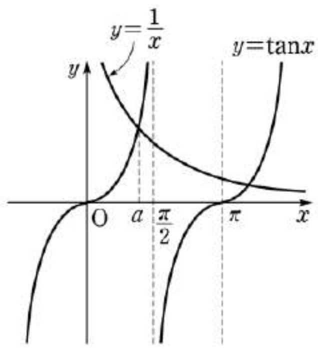
풀어보기

문제 1

정답 ⑤

ㄱ. $f(x)=2x\cos x$ 에서 $f'(x)=2\cos x-2x\sin x$, $f'(a)=2\cos a-2a\sin a=0$

$\therefore\ \tan a=\dfrac{\sin a}{\cos a}=\dfrac{\sin a}{a\sin a}=\dfrac{1}{a}$ (참)

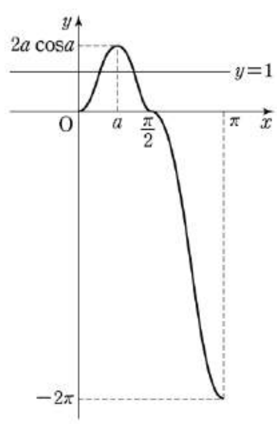


ㄴ. $f'(x)=2\cos x(1-x\tan x)=0$ 에서 $\cos x=0$ 또는 $\tan x=\dfrac{1}{x}$

$\tan x=\dfrac{1}{x}$ 의 근을 a 라 하면 $0<a<\dfrac{\pi}{2}$ 이고, 증감표를 그려보면

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$	2	+	0	−	0	−	−2
$f(x)$	0	↗	$2a\cos a$	↘	0	↘	-2π

$\therefore\ f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극댓값을 가진다.



구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $y=\frac{1}{x}$ 은 감소함수, $y=\tan x$ 는 증가함수이므로

$g(x)=\tan x-\frac{1}{x}$ 은 증가함수이다.

$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{4}{\pi}<0$, $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{3}{\pi}>0$ 이므로 중간값 정리에 의해 $\frac{\pi}{4}<a<\frac{\pi}{3}$ (참)

ㄷ. $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{1}{2}>1$ 이므로 $f(a)>1$

$\therefore$ 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 $f(x)=1$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

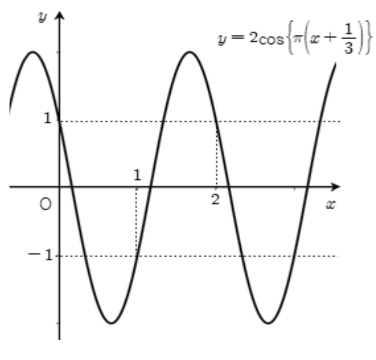
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

문제 2

정답 ③

ㄱ. $y=f(x)$ 는 일대일 대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. (반례) $y=2\cos\left\{\pi\left(x+\frac{1}{3}\right)\right\}$ (거짓)



ㄷ. $f(x)$ 는 정수 k 에 대하여 폐구간 $[2k,\ 2k+1]$, $[2k+1,\ 2(k+1)]$ 에서 연속이고

$f(2k)\cdot f(2k+1)<0$, $f(2k+1)\cdot f(2(k+1))<0$ 이므로

중간값의 정리에 의하여 $f(x)$ 는 $f(c_1)=0$, $f(c_2)=0$ 인 점 $c_1\in(2k,\ 2k+1)$, $c_2\in(2k+1,\ 2(k+1))$ 가 적어도 하나씩 존재한다.

그러므로 $f(x)$ 는 개구간 $(0,\ 2m)$ 에서 $f(x)=0$ 인 점이 적어도 $2m$ 개 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

문제 3

정답 ⑤

ㄱ. $\int_0^1 f(x)dx = \left[e^x - x\right]_0^1 = e-2$ (참)

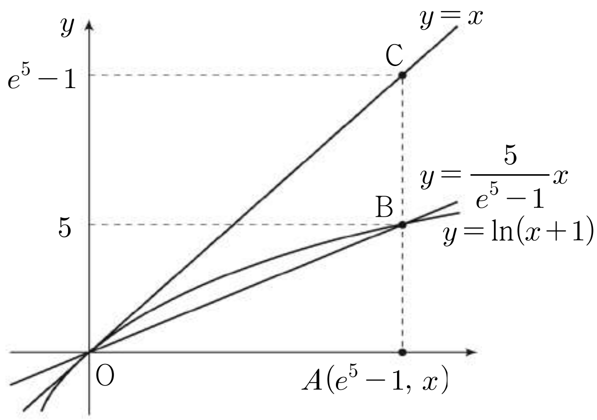
ㄴ. $g(x)=f(x)-x$ 라 하자.

$x>0$ 에서 $g'(x)=e^x-1>0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 구간 $(0, \infty)$ 에서 증가한다.

따라서 $g(0)=0$ 이므로 $x>0$ 에서 $f(x)>x$ 이다. (참)

ㄷ. $f^{-1}(x)=\ln(x+1)$ 이므로

$\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{5(e^5-1)}{2} < \int_0^{e^5-1} f^{-1}(x)dx$, $\int_0^{e^5-1} f^{-1}(x)dx < \dfrac{(e^5-1)^2}{2} = \triangle\mathrm{OAC}$ (참)



따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

논제 1-1

(대학발표 예시답안)

$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ 이면 $A^t=\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$ 이므로 $AA^t=\begin{pmatrix} a_1^2+a_2^2 & a_1a_3+a_2a_4 \\ a_1a_3+a_2a_4 & a_3^2+a_4^2 \end{pmatrix}$

$\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}(AA^t) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a_1^2+a_2^2 & a_1a_3+a_2a_4 \\ a_1a_3+a_2a_4 & a_3^2+a_4^2 \end{pmatrix}\right) = a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2$ 이다.

그러므로 $A \neq O$ 이면 $\langle A, A\rangle = \sum_{i=1}^{4} a_i^2 > 0$ 이다.

논제 1-2

(대학발표 예시답안)

$\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\right) = -2$ 이고,

$\| A \| = \sqrt{4} = 2$, $\| B \| = \sqrt{2}$ 이므로,

두 행렬 A 와 B의 사잇각을 θ 라고 하면 $\cos\theta = \dfrac{\langle A,B\rangle}{\| A \| \ \| B \|} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

그러므로 $\theta = \dfrac{3\pi}{4}(\mathrm{rad})$ $(=135^{\circ})$ 이다.

논제 1-3

(대학발표 예시답안)

$\| A \| = 2$ 이면 $\| A \|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 4$ 이다.

이를 만족하는 정수 $a_1,$ $a_2,$ $a_3,$ a_4 를 찾아보면,

$a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = a_4^2 = 1$

즉, $a_1 = \pm 1,$ $a_2 = \pm 1,$ $a_3 = \pm 1,$ $a_4 = \pm 1$ 인 경우의 수가 $2^4 = 16$ 가지이다.
그리고

$a_1^2 = 4$ $(a_2^2 = a_3^2 = a_4^2 = 0),$ $a_2^2 = 4$ $(a_1^2 = a_3^2 = a_4^2 = 0),$

$a_3^2 = 4$ $(a_1^2 = a_2^2 = a_4^2 = 0),$ $a_4^2 = 4$ $(a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = 0)$ 인 경우,

즉

$(a_1 = \pm 2,$ $a_2 = a_3 = a_4 = 0$ $),$ $(a_2 = \pm 2,$ $a_1 = a_3 = a_4 = 0$ $),$

$(a_3 = \pm 2,$ $a_1 = a_2 = a_4 = 0$ $),$ $(a_4 = \pm 2,$ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ $)$인 경우 8가지로

모두 $16 + 8 = 24$가지 있다.

논제 2-1

(대학발표 예시답안)

함수 $f(x) = e^x(1-x)$ 는 열린구간 $(0,1)$ 에서 미분 가능한 함수이고

$$f'(x) = -xe^x < 0$$

이므로 ((나)에 의하면) 함수 f 는 감소함수이다.

논제 2-2

(대학발표 예시답안)

[존재성] $f(0)=1,\ f(1)=0$ 이므로 실수 t 는 $f(0)$ 와 $f(1)$ 사이에 있다.

함수 f 는 닫힌구간 $[0,1]$ 에서 연속함수이므로 (다) 중간값 정리에 의하여

$f(a_t)=t$ 인 a_t 가 구간 $(0,1)$ 에 존재한다.

[유일성] a_t 가 유일함을 보이자(모범답안으로 세 가지 방법을 제시한다).

$f(a_t)=f(b_t)=t$ 인 서로 다른 a_t 와 b_t 가 열린구간 $(0,1)$ 에 존재한다고 가정하자.

[방법1]

함수 f가 $[0,1]$ 에서 감소함수이므로 일대일대응이다.

따라서 a_t , b_t 가 서로 다르면 $f(a_t)$ 와 $f(b_t)$ 도 서로 달라야한다.

이것은 $f(a_t)=f(b_t)=t$ 에 모순이다.

(혹은 $f(a_t)=f(b_t) \Rightarrow a_t=b_t$ 이것은 서로 다른 a_t 와 b_t 라는 것에 모순이다.)

[방법2]

$$a_t \neq b_t \Rightarrow a_t < b_t \text{ 또는 } b_t < a_t$$
$$\Rightarrow f(b_t) < f(a_t) \text{ 또는 } f(a_t) < f(b_t) \quad (\because f\text{는 감소함수})$$

이것은 $f(a_t)=f(b_t)=t$ 에 모순이다.

[방법3]

평균값정리에 의하면

$0=f(b_t)-f(a_t)=f'(c)(b_t-a_t)\neq 0$ $(\because f'(c)<0)$ 인 점 c 가 a_t 와 b_t 사이에 존재한다. 이것은 $f(a_t)=f(b_t)=t$ 에 모순이다.

논제 2-3

(대학발표 예시답안)

함수 f 가 감소함수이므로

$$0 \le x \le a_t \Rightarrow t=f(a_t) \le f(x) \ (\because f: \text{감소함수})$$
$$\Rightarrow \frac{f(x)}{t} \ge 1$$
$$\Rightarrow \frac{e^x(1-x)}{t} \ge 1$$

이다.

그러므로

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{a_t} \frac{1}{(1-x)^2}\, dx \\
&\le \int_0^{a_t} \frac{1}{(1-x)^2}\left(\frac{e^x(1-x)}{t}\right)^2 dx \quad \left(\because \frac{e^x(1-x)}{t} \ge 1,\ 0 \le x \le a_t\right) \\
&= \frac{1}{t^2}\int_0^{a_t} e^{2x}\, dx \\
&\le \frac{1}{t^2}\int_0^{1} e^{2x}\, dx \quad (\because a_t \le 1) \\
&= \frac{1}{2t^2}\left(e^2-1\right)
\end{aligned}
$$

(다른 풀이 1)

편의상 $a=a_t$ 라 하자. (즉, $t=e^a(1-a)$ 이고, $0<t<1$, $0<a<1$ 이다.)
f가 감소함수이므로

$$0<x<a \Rightarrow e^x(1-x)>e^a(1-a) \Rightarrow \frac{e^x(1-x)}{e^a(1-a)}>1$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2t^2}\left(e^2-1\right) &= \frac{1}{2(e^a(1-a))^2}\int_0^1 2e^{2x}dx \\
&= \int_0^1 \frac{e^{2x}}{(e^a(1-a))^2}dx = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{(e^a(1-a))^2}\cdot\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2}dx \\
&\ge \int_0^a \frac{e^{2x}}{(e^a(1-a))^2}\cdot\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2}dx \\
&= \int_0^a \frac{(e^x(1-x))^2}{(e^a(1-a))^2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}dx \\
&\ge \int_0^a \frac{1}{(1-x)^2}\, dx \quad \left(\because \frac{e^x(1-x)}{e^a(1-a)}>1,\ 0<x<a\right)
\end{aligned}
$$

(다른 풀이 2)

편의상 $a=a_t$ 라 하자. (즉, $t=e^a(1-a)$ 이고, $0<t<1$, $0<a<1$ 이다.)

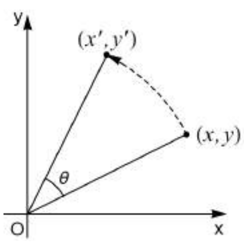
$$
\begin{aligned}
\int_0^a \frac{1}{(1-x)^2}dx &= \left|(1-x)^{-1}\right|_0^a = \frac{1}{1-a}-1 \\
&= \frac{e^a}{t}-1 = \frac{e^a-t}{t} = \frac{ae^a}{t} \\
&= a\frac{e^a}{t} \le 1\cdot\frac{e}{t} \le \frac{e}{t}\cdot\frac{2}{2t} < \frac{1}{t}\cdot\frac{e^2-1}{2t}
\end{aligned}
$$

$$(\because\ e>1+\sqrt{2}\ \text{이고}\ x>1+\sqrt{2} \Rightarrow x^2-2x-1>0)$$

임을 알 수 있다.

16 부산대학교 수시 지역인재전형 I

【문항1】 다음 제시문을 근거로 하여 아래 논제에 답하시오.[14]



점 (x, y)를 원점 O를 중심으로 각 θ만큼 회전이동한 점을 (x', y')라고 할 때,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ 이다.

논제 1-1

이차곡선 $5x^2 - 6\sqrt{3}\,xy - y^2 - 24 = 0$을 원점 O를 중심으로 적당한 $\theta\ (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$만큼 회전이동 하여 $Ax'^2 + By'^2 + C = 0$의 꼴로 표현하시오. (15점)

논제 1-2

이차곡선 $5x^2 - 6\sqrt{3}\,xy - y^2 - 24 = 0$의 두 초점 F 와 F′에 대하여 F를 지나는 직선이 이차곡선과 만나는 점을 A와 B라고 하자(단, 점 F는 선분 $\overline{AB}$ 위에 있다). 삼각형 AF′B의 둘레의 길이가 $12\sqrt{3}$일 때, 선분 $\overline{AB}$의 길이를 구하시오. (15점)

14) 부산대학교 입학처

【문항 2】 다음 제시문을 근거로 하여 아래 논제에 답하시오.

(가) x가 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워짐에 따라 $f(x)$의 값이 한없이 커질 때,

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$$

와 같이 나타내고,

x가 a보다 작은 값을 가지면서 a에 한없이 가까워짐에 따라 $f(x)$의 값이 한없이 작아질 때,

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = -\infty$$

와 같이 나타낸다.

(나) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$는 구간 $[a, b]$에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(다) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 구간 $[a, b]$에서의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $m \le r \le M$ 인 임의의 실수 r에 대하여, $f(c) = r$ 인 실수 c가 구간 $[a, b]$에 존재한다.

(라) 열린구간 (a, b)에서 연속인 함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$ 이고 $\lim_{x \to b-0} f(x) = -\infty$ 이면 임의의 실수 r에 대하여 $f(c) = r$ 인 c가 구간 (a, b)에 존재한다.

(마) $f(x)$가 다항식이고 $f(a) = 0$ 이면, $f(x) = (x-a)^k g(x)$로 표현된다. 이때, k는 자연수, $g(x)$는 다항식이고 $g(a) \neq 0$ 이다.

$f(x)$는 다항식이고 $f(0) = f(1) = 0$ 이며, 열린구간 $(0, 1)$에서 $f(x) > 0$ 라 할 때,

논제 2-1

$\lim_{x \to 0+0} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \infty$ 이고 $\lim_{x \to 1-0} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$ 가 됨을 증명하시오. (15점)

논제 2-2

임의의 실수 r에 대하여 $f'(a) = rf(a)$ 인 a가 구간 $(0, 1)$에 존재함을 증명하시오. (10점)

논제 2-3

$\int_0^1 f(x)dx=1$ 일 때, 닫힌구간 $[0,1]$ 에서 연속인 함수 $g(x)$ 에 대하여,

$\int_0^1 f(x)g(x)dx=g(b)$ 인 b가 구간 $[0,1]$ 에 존재함을 증명하시오. (15점)

【문항 3】 다음 제시문을 근거로 하여 아래 논제에 답하시오.

> 임의의 실수 x 에 대하여 x 를 넘지 않는 최대의 정수를 $[x]$ 로 나타낸다.
> 예를 들어, $[3.14]=3$, $[7]=7$ 이다.

$\triangle$ 는 평면상의 세 점 $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ 을 꼭짓점으로 하는 직각삼각형의 내부의 점들로 이루어진 집합이다. 즉, $\triangle=\{(x,y) \mid 0<x<1,\ 0<y<x\}$ 이다. 자연수 n 에 대하여 $\triangle$ 의 부분집합 A_n 을 $A_n=\left\{(x,y)\in\triangle \mid \left[\log_2\frac{x}{y}\right]=2n-1\right\}$ 로 정의하고, A_n 의 면적을 a_n 이라 할 때,

논제 3-1

a_n 을 구하시오. (15점)

논제 3-2

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 의 값을 구하시오. (5점)

논제 3-3

$\triangle$ 의 점 (x,y) 중 $\left[\log_2\frac{x}{y}\right]$ 가 자연수가 되는 점 (x,y) 의 전체 집합을 S라고 할 때, 집합 S에서 임의의 점 (a,b) 를 뽑았을 때 $\left[\log_2\frac{a}{b}\right]$ 가 홀수가 될 확률을 구하시오. (10점)

배경지식 쌓기

1. 회전변환

일차변환 $f\ :X \to AX$ 에서 즉, 일차변환 f 를 나타내는 행렬이 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 일 때 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}\,(x,y)$ 를 원점을 중심으로 각의 크기 θ 만큼 회전하여 점 $\mathrm{P}'(x', y')$ 으로 옮기는 변환을 원점을 중심으로 각의 크기가 θ 인 회전변환이라 하고 이는 일차변환이고 다음의 식으로 나타내어진다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

이때, $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 를 회전변환을 나타내는 행렬이라 하고, 회전변환의 역변환 행렬은 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 이다.

2. 쌍곡선

평면 위에서 두 정점 F, F$'$ 으로부터 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 쌍곡선이라 하고, 두 정점 F, F$'$ 을 그 쌍곡선의 초점이라 한다.

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(k, 0)$, $\mathrm{F}'(-k, 0)$ 으로부터 거리의 차가 $2a$ $(k>a>0)$ 인 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b^2=k^2-a^2)$

(2) 두 초점이 $\mathrm{F}(0, k)$, $\mathrm{F}'(0, -k)$ 으로부터 거리의 차가 $2b$ $(k>b>0)$ 인 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ $(a^2=k^2-b^2)$

(3) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm 1$ $(a>0,\ b>0)$ 의 점근선의 방정식은 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

3. 중간값의 정리(사이값 정리)

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$ 일 때, $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k 에 대하여

$$f(c)=k\ (a<c<b)$$

인 c가 적어도 하나 존재한다.

4. 가우스함수

실수 x 에 대하여 x 보다 크지 않은 최대 정수를 $[x]$ 라 하고 $y=[x]$ 를 x 의 정수함수(가우스함수)라고 한다. 다음과 같은 기본성질이 성립한다.

(1) 함수 $y=[x]$ 는 구간으로 나뉘어 표시되고, 감소하지도 않으며 한계도 없는 함수이다. 즉 $x \leq y$ 일 때, $[x] \leq [y]$ 이다.

(2) $[n+x] = n+[x] \quad (n \in Z)$

(3) 모든 실수 x, y 에 대하여 $[x]+[y] \leq [x+y]$

(4) $[-x] = \begin{cases} -[x]-1 & (x \notin Z) \\ -[x] & (x \in Z) \end{cases}$

5. 무한등비급수의 수렴과 발산

무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots \ (a \neq 0)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

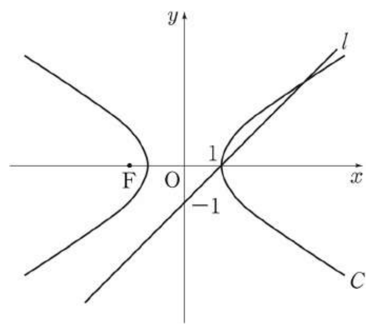
(1) $|r|<1$ 일 때 수렴하고, 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$ 이다.

(2) $|r| \geq 1$ 일 때 발산한다.

풀어보기

문제 1

그림과 같이 직선 $l : x-y-1=0$ 과 한 초점이 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$ (단, $c<0$)인 쌍곡선 $C : x^2-2y^2=1$ 이 있다. 다음 물음에 답하시오.

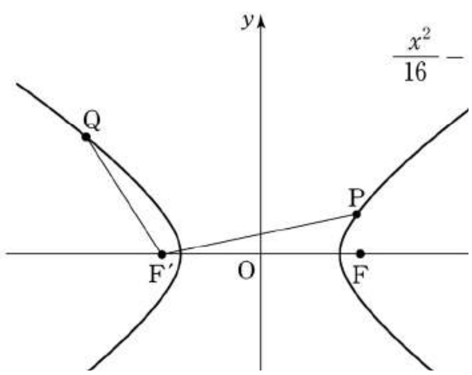


원점을 중심으로 θ 만큼 회전하는 회전변환에 의하여 직선 l 은 쌍곡선 C 의 초점 F 를 지나는 직선으로 옮겨진다. $\sin 2\theta$ 의 값은? (2014년 대수능)

① $-\dfrac{2}{3}$　　② $-\dfrac{5}{9}$　　③ $-\dfrac{4}{9}$　　④ $-\dfrac{1}{3}$　　⑤ $-\dfrac{2}{9}$

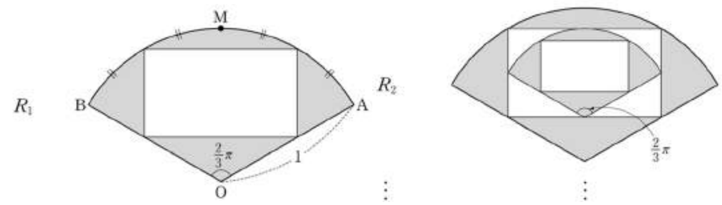
문제 2

그림과 같이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 의 두 초점을 F , F′ 이라 하자. 제 1 사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P 와 제 2 사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 Q 에 대하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{QF'}}=3$ 일 때, $\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}}$ 의 값을 구하시오. (2007년 대수능)



문제 3

중심이 O , 반지름의 길이가 1 이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 부채꼴 OAB 가 있다. 그림과 같이 호 AB 를 이등분하는 점을 M 이라 하고 호 AM 과 호 MB 를 각각 이등분하는 점을 두 꼭짓점으로 하는 직사각형을 부채꼴 OAB 에 내접하도록 그리고, 부채꼴의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.
그림 R_2 에 새로 그려진 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 부채꼴을 그리고 이 부채꼴에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? (2014년 9월 모의수능)



① $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\pi-\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{2\pi-3\sqrt{2}}{3}$ ④ $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{3}$

문제 4

$[\sqrt{x}]+[\sqrt{x^2+y^2}] \le 1$ 의 그래프를 그리고 넓이를 구하시오.

(2011년 성균관대 심층면접)

문제 5

(1) $f(x)$ 는 모든 실수에서 연속이고, $g(x)$ 는 모든 실수에서 양수라 할 때,
$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)dx$ 를 만족하는 m, M 이 존재함을 증명하여라.

(2) $f(x)$ 는 모든 실수에서 연속이고, $g(x)$ 는 모든 실수에서 양수라 할 때,
$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$ 인 c 가 a 와 b 사이에 존재함을 증명하여라.

(2013년 GIST 심층면접)

예시답안

풀어보기

문제 1

쌍곡선 $x^2-2y^2=1$, $x^2-\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$ 에서 $c^2=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ 이므로 $c=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ $(\because\ c<0)$

따라서, $\mathrm{F}\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ 0\right)$ 이다.

한편, 직선 l 위에 있는 점 (x,y) 가 원점을 중심으로 θ 만큼 회전한 회전변환에 의하여 옮겨진 점을 (x',y') 이라 하면

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ 이므로 } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ 이다.}$$

즉, $x=\cos\theta\cdot x'+\sin\theta\cdot y'$, $y=-\sin\theta\cdot x'+\cos\theta\cdot y'$

이 식을 직선 l 의 방정식 $x-y-1=0$ 에 대입하면

$$(\cos\theta x'+\sin\theta y')-(-\sin\theta x'+\cos\theta y')-1=0$$

$$(\cos\theta+\sin\theta)x'+(\sin\theta-\cos\theta)y'-1=0 \cdots\cdots ㉠$$

이 때 직선 ㉠이 쌍곡선의 초점 $\mathrm{F}\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ 0\right)$ 을 지나므로

$$(\cos\theta+\sin\theta)\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)-1=0$$

$$\text{즉, }\sin\theta+\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{3} \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변을 제곱하면

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+\sin2\theta=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ \sin2\theta=\dfrac{2}{3}-1=-\dfrac{1}{3}$

(다른 풀이)

초점 F 를 $(-\theta)$ 만큼 회전하면 직선 l 에 놓이므로 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c\cos\theta \\ -c\sin\theta \end{pmatrix}$ 에서

$c\cos\theta-(-c\sin\theta)-1=0$, $c(\cos\theta+\sin\theta)=1$

양변을 제곱하면 $c^2(1+2\sin\theta\cos\theta)=1$

그런데 F 가 초점이므로 $c^2=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ \dfrac{3}{2}(1+\sin2\theta)=1$, $1+\sin2\theta=\dfrac{2}{3}$ $\therefore\ \sin2\theta=-\dfrac{1}{3}$

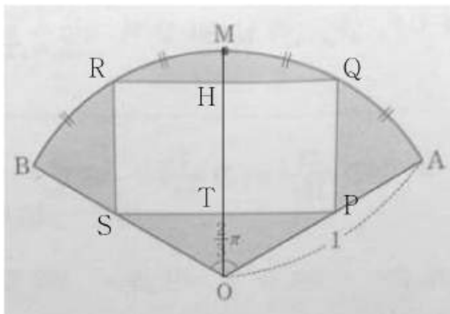
문제 2

$$\begin{array}{rll} & \overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF'}}=8 & (\because\ \overline{\mathrm{QF}}>\overline{\mathrm{QF'}}) \\ + & \overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=8 & (\because\ \overline{\mathrm{PF'}}>\overline{\mathrm{PF}}) \\ \hline & (\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{QF'}})+(\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}})=16 & \end{array}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}}=13$

문제 3

정답 ④



위의 그림 R_1 에서 직사각형의 꼭짓점을 각각 P, Q, R, S 라 하자. 선분 OM 과 두 선분 QR, PS 의 교점을 각각 H, T 라 하자.

$\angle\mathrm{POQ}=\angle\mathrm{QOM}=\dfrac{\pi}{6}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{RQ}}=2\overline{\mathrm{HQ}}=2\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\sin\frac{\pi}{6}=2\times\frac{1}{2}=1$$

$$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OQ}}\times\cos\frac{\pi}{6}=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

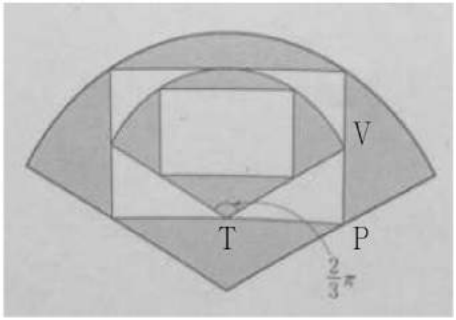
한편, 삼각형 OPT 에서 $\angle\mathrm{POT}=\dfrac{\pi}{3}$ 이고 $\overline{\mathrm{PT}}=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{OT}}=\frac{\overline{\mathrm{PT}}}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{HT}}=\overline{\mathrm{OH}}-\overline{\mathrm{OT}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 직사각형 PQRS 의 넓이는 $1\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 그림 R_1 에서 색칠한 부분의 넓이 S_1 은

$$S_1=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$$



위의 그림 R_2 에서 그림 R_1 의 직사각형과 그 내부에 있는 부채꼴이 만나는 한 점을 그림과 같이 점 V 라 하자. 삼각형 TPV 에서 $\angle \mathrm{VTP} = \frac{\pi}{6}$ 이고 $\overline{\mathrm{TP}} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{TV}} = \frac{\overline{\mathrm{TP}}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

즉, 그림 R_1 에서 부채꼴의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{OA}} = 1$ 이고 그림 R_2 에서 작은 부채꼴의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{TV}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로 $S_2 = S_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 S_1 \cdots\cdots$

따라서,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S_1 + \frac{1}{3}S_1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 S_1 + \cdots = \frac{S_1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}S_1 = \frac{3}{2} \times \frac{\pi - \sqrt{3}}{3} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$$

문제 4

$\sqrt{x}$ 에서 $x \geq 0$ 이고 $x^2 + y^2 \geq 0$ 이다. 또한, 가우스 값은 모두 정수이므로 $[\sqrt{x}]$, $[\sqrt{x^2+y^2}]$ 는 각각 0 이상의 정수임을 알 수 있다.

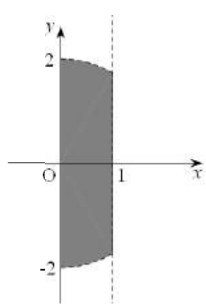
따라서, $[\sqrt{x}] + [\sqrt{x^2+y^2}] \leq 1$ 를 만족하는 경우는 다음의 세 가지이다.

(1) $[\sqrt{x}] = [\sqrt{x^2+y^2}] = 0$ 인 경우 : $0 \leq x < 1,\ 0 \leq x^2 + y^2 < 1$

(2) $[\sqrt{x}] = 0,\ [\sqrt{x^2+y^2}] = 1$ 인 경우 : $0 \leq x < 1,\ 1 \leq x^2 + y^2 < 2$

(3) $[\sqrt{x}] = 1,\ [\sqrt{x^2+y^2}] = 0$ 인 경우 :

$$1 \leq x < 2,\ 0 \leq x^2 + y^2 < 1$$



이를 만족하는 영역은 오른쪽 그림과 같고, 이 영역의 넓이는 $4\pi \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 = \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$ 이다.

문제 5

(1) 연속함수의 최대최소 정리에 의해 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 하면 $m \le f(x) \le M$이고 $g(x)$ 는 모든 실수에서 양수이므로 $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$ 이다. 따라서

$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)dx$ 이다.

(2) (1)에서 $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$이므로 중간값 정리에 의해

$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$ 인 c가 a와 b사이에 존재한다.

논제 1-1

(대학발표 예시답안)

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 이므로

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{pmatrix}$$

$x = x'\cos\theta + y'\sin\theta$, $y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta$ 를 $5x^2 - 6\sqrt{3}xy - y^2 - 24 = 0$ 에 대입하면

$5(x'\cos\theta + y'\sin\theta)^2 - 6\sqrt{3}(x'\cos\theta + y'\sin\theta)(-x'\sin\theta + y'\cos\theta) - (-x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 - 24 = 0$

풀어서 정리하면

$$(5\cos^2\theta + 6\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta)x'^2 + (5\sin^2\theta - 6\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta - \cos^2\theta)y'^2 \\ + (6\sqrt{3}\sin^2\theta + 12\cos\theta\sin\theta - 6\sqrt{3}\cos^2\theta)x'y' - 24 = 0 \quad \cdots (*)$$

이므로

$$6\sqrt{3}\sin^2\theta + 12\cos\theta\sin\theta - 6\sqrt{3}\cos^2\theta = 0 \quad \cdots\cdots (**)$$

가 되기 위한 θ 를 구하기 위해

[방법1]

식 (**)를 $\cos^2\theta$ 로 나누어 $\sqrt{3}\tan^2\theta + 2\tan\theta - \sqrt{3} = 0$ 를 만족하는 $\tan\theta > 0$ $(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ 를 구하면 (근의 공식 또는 인수분해 이용) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로,

$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ 이고 (*)에 대입하면, $2x'^2 - y'^2 - 6 = 0$ 가 된다.

[방법2]

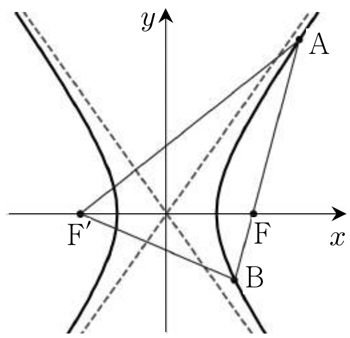
2 배각 공식 $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ 와 $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ 를 이용하면 식 (**) 는

$\sqrt{3}\cos 2\theta = \sin 2\theta$ 이므로 $\tan 2\theta = \sqrt{3}$ 이고 $2\theta = \frac{\pi}{3}$ 즉, $\theta = \frac{\pi}{6}$ 이고 (*)에 대입하면, $2x'^2 - y'^2 - 6 = 0$ 가 된다.

논제 1-2

(대학발표 예시답안)

회전 변환에 의해 초점과 이차곡선 위의 점들과의 거리는 변화하지 않으므로, 쌍곡선 $2x'^2 - y'^2 - 6 = 0$ 즉, $\frac{x'^2}{3} - \frac{y'^2}{6} = 1$ 의 초점을 F 와 F′ 라 하고 F 를 지나는 직선이 $\frac{x'^2}{3} - \frac{y'^2}{6} = 1$ 과 만나는 점을 A 와 B 라고 할 때,



쌍곡선 위의 점 A 와 B 에서 두 초점까지의 거리의 차가 $2\sqrt{3}$ 으로 일정하므로

$\overline{\mathrm{AF}'} - \overline{\mathrm{AF}} = 2\sqrt{3}$ 이고 $\overline{\mathrm{F'B}} - \overline{\mathrm{FB}} = 2\sqrt{3}$ 이므로 두식을 합하면

$\overline{\mathrm{AF}'} + \overline{\mathrm{F'B}} - \overline{\mathrm{AB}} = 4\sqrt{3}$ …… (i) 이고,

삼각형 AF′B 의 둘레의 길이가 $12\sqrt{3}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AF}'} + \overline{\mathrm{F'B}} + \overline{\mathrm{AB}} = 12\sqrt{3}$ …… (ii) 이다.

식 (ii) 에서 식 (i) 을 빼면 $2\overline{\mathrm{AB}} = 8\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}} = 4\sqrt{3}$ 이다.

논제 2-1

(대학발표 예시답안)

$f(0) = 0$ 이므로 $f(x) = x^m g(x)$ (단, m 은 자연수, $g(x)$ 는 다항식, $g(0) \neq 0$)의 꼴로 나타낼 수 있다.

$f'(x) = mx^{m-1}g(x) + x^m g'(x)$ 이므로 $0 < x < 1$ 에 대하여

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{x} + \frac{g'(x)}{g(x)}$ 이고, $\lim_{x \to 0+0} \frac{f'(x)}{f(x)} = \left(\lim_{x \to 0+0} \frac{m}{x}\right) + \frac{g'(0)}{g(0)} = \infty$

마찬가지로, $f(1) = 0$ 이므로 $f(x) = (x-1)^k h(x)$ (단, k 는 자연수, $h(x)$ 는 다항식, $h(1) \neq 0$)의 꼴로 나타낼 수 있다.

$f'(x)=k(x-1)^{k-1}h(x)+(x-1)^k h'(x)$ 이므로 $0<x<1$ 에 대하여

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{k}{x-1}+\dfrac{h'(x)}{h(x)}$ 이고, $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{f'(x)}{f(x)}=\left(\lim_{x\to 1-0}\frac{k}{x-1}\right)+\frac{h'(1)}{h(1)}=-\infty$

논제 2-2

(대학발표 예시답안)

$f(x)$ 가 다항식이므로 $f'(x)$ 도 다항식이고, 다항식은 연속함수이며,

$0<x<1$ 에서 $f(x)\neq 0$ 이므로 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 는 연속함수이고

논제 2-1에서 $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}\frac{f'(x)}{f(x)}=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{f'(x)}{f(x)}=-\infty$ 이므로 (라)에 의하면 임의의 실수 r 에 대하여 $\dfrac{f'(a)}{f(a)}=r$ 인 a 가 구간 $(0,1)$ 에 반드시 존재한다.

즉, $f'(a)=rf(a)$ 인 a 가 구간 $(0,1)$ 에 존재한다.

논제 2-3

(대학발표 예시답안)

(나)에 의해, 닫힌구간 $[0,1]$ 에서 $g(x)$ 는 연속함수이므로 구간 $[0,1]$ 에서 최댓값과 최솟값을 갖는다. 구간 $[0,1]$ 에서 $g(x)$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 두자.

구간 $[0,1]$ 에서 $f(x)\geq 0$ 이므로 $mf(x)\leq f(x)g(x)\leq Mf(x)$ 이다.

각 변을 0 에서 1 까지 적분하면

$m\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\leq\int_0^1 f(x)g(x)dx\leq M\int_0^1 f(x)dx$ 이고,

$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=1$ 이므로, $m\leq\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx\leq M$ 이다.

(다)에 의하면 $\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx=g(b)$ 인 b 가 구간 $[0,1]$ 에 존재한다.

논제 3-1

(대학발표 예시답안)

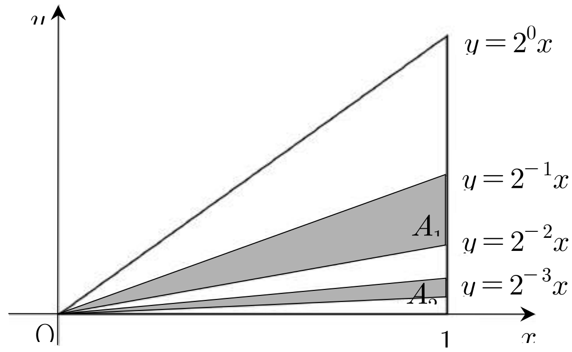
가우스 함수 [ ]의 정의는 임의의 실수 x 에 대하여 $n\leq x<n+1$ 일 때 $[x]=n$ (여기서 n 은 정수)이다.

$(x,y)\in A_n=\left\{(x,y)\in\triangle \mid \left[\log_2\dfrac{x}{y}\right]=2n-1\right\}$ 이면 $\left[\log_2\dfrac{x}{y}\right]=2n-1$ 이다.

그러므로 $$2n-1 \le \log_2 \frac{x}{y} < 2n$$

$$2^{2n-1} \le \frac{x}{y} < 2^{2n}$$

역수를 취하여 $\frac{1}{2^{2n}} < \frac{y}{x} \le \frac{1}{2^{2n-1}}$ 이 된다. 그러므로 $\frac{1}{2^{2n}} x < y \le \frac{1}{2^{2n-1}} x$ 을 얻을 수 있다. 이를 그림으로 그려보면 다음과 같다.



삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times$(높이)$\times$(밑변) 이므로

$a_n=$(A_n의 넓이)$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}-\frac{1}{2^{2n}}\right)$

$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ 이 된다.

논제 3-2

(대학발표 예시답안)

수열 a_n 은 등비급수로 공비가 $\frac{1}{4}$, 초항이 $\frac{1}{8}$ 이다.

무한등비급수의 합은 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{6}$ 이다.

논제 3-3

(대학발표 예시답안)

구하는 확률$=\frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{S\text{의 넓이}}$ 이다.

한편, S의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 이고, 논제 3-2의 결과로부터 확률 $=\frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{S\text{의 넓이}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$ 를 얻을 수 있다.

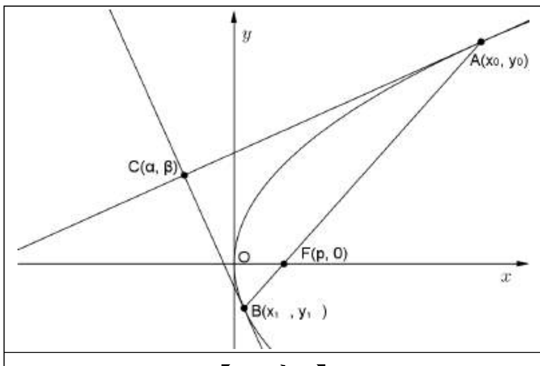
17 서강대 수시(자연과학부)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

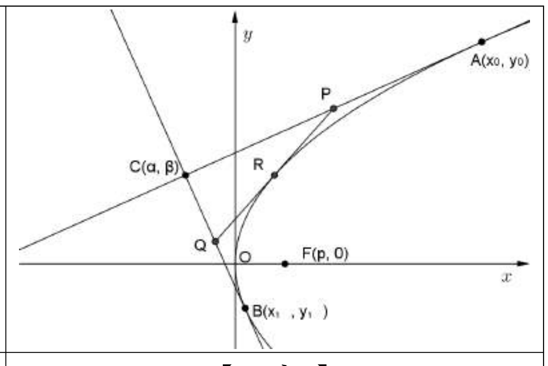
[가] 평면 위에 한 점 F와 그 점을 지나지 않는 한 직선 l이 있을 때, 점 F와 직선 l로부터의 거리가 각각 서로 같은 점의 집합을 포물선이라고 한다. 이 때 점 F를 포물선의 초점, 직선 l을 포물선의 준선이라고 한다.

점 $\mathrm{F}(p, 0)$ (단, $p>0$)를 초점으로 하고 y축에 평행한 직선 $x=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ 이다. 임의의 음의 실수 α, 임의의 실수 β에 대하여 좌표평면 위의 점 $\mathrm{C}(\alpha, \beta)$를 지나면서 $y^2=4px$에 접하는 직선은 항상 두 개 존재한다. 이 두 직선이 포물선과 접하는 점을 각각 $\mathrm{A}(x_0, y_0)$, $\mathrm{B}(x_1, y_1)$ (단, $y_0>0$ 이고 $y_1<0$) 라고 하자.(【그림 1】 참고.)

[나] 제시문 [가]에서 $0<t<1$인 실수 t에 대하여 선분 AC를 $t:(1-t)$로 내분하는 점을 P, 선분 BC를 $(1-t):t$로 내분하는 점을 Q, 선분 PQ를 $t:(1-t)$로 내분하는 점을 R이라고 하자.(【그림 2】 참고.)



【그림 1】



【그림 2】

논제 1-1

제시문 [가]에서 두 접점의 y좌표 y_0, y_1을 α, β에 관한 식으로 나타내시오.

논제 1-2

제시문 [가]에서 점 $C(\alpha, \beta)$ 가 준선 위에 있으면 점 $A(x_0, y_0)$ 와 점 $B(x_1, y_1)$ 을 지나는 직선은 초점 $F(p, 0)$ 를 지남을 보이시오.

논제 1-3

제시문 [나]에서 점 R 의 좌표를 $t, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 를 이용하여 나타내시오. (단, $\overrightarrow{OA}=(x_0, y_0)$, $\overrightarrow{OB}=(x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OC}=(\alpha, \beta)$)

논제 1-4

제시문 [나]에서 점 R 은 포물선 $y^2=4px$ 위에 있고, 점 R 에서의 접선은 직선 PQ 임을 보이시오.

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[가] (중간값의 정리) 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 이면 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k 에 대하여 $f(c)=k$ 를 만족하는 c 가 구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

[나] 좌표평면 위의 일차변환 $f:(x, y) \to (x', y')$는 아래와 같이

$$\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases}$$

로 주어진다. 즉, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 이다. 이 때 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 를 f 를 나타내는 행렬이라고 한다. 자연수 n 에 대하여 f 를 n 번 합성한 함수를 f^n 이라고 나타낸다.

논제 2-1

함수 $f(x)=x^3-2x+\frac{1}{2}$ 이라고 하자. 제시문 [가]를 참고하여 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근 α, β, γ (단, $\alpha<\beta<\gamma$)를 가짐을 보이시오. 또한 각각의 근이 유리수가 아님을 보이시오.

논제 2-2

점 $\mathrm{A}(\alpha, 0)$, $\mathrm{B}(\beta, 0)$, $\mathrm{C}(\gamma, 0)$ 는 $y=x^3-2x+\frac{1}{2}$ 위에 있다. (단, $\alpha<\beta<\gamma$) 점 $\mathrm{P_n}(n, 0)$ (n 은 자연수)에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\overline{\mathrm{AP}_n}\times\overline{\mathrm{BP}_n}\times\overline{\mathrm{CP}_n}$ 라고 하자. 이 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 를 구하시오.

논제 2-3

행렬 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (단, $ad-bc\neq 0$)가 나타내는 일차변환 f 에 의하여 곡선 $y=x^3-2x+\frac{1}{2}$ 이 $y=\frac{2}{27}x^3+1$ 로 옮겨진다고 하자. 이 때 행렬 M을 구하시오.

논제 2-4

자연수 n에 대하여 논제 2-3에서 구한 일차변환 f 를 n 번 합성한 함수 f^n 에 의하여 $y=x^3-2x+\frac{1}{2}$이 옮겨지는 곡선을 구하시오.

배경지식 쌓기

1. 이차곡선 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식

(1) 원 $x^2+y^2=r^2$

원점 O와 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}$의 기울기는 $\dfrac{y_1}{x_1}$이고, 접선은 $\overline{\mathrm{OP}}$와 직교하므로 그 기울기는 $-\dfrac{x_1}{y_1}$이다. 따라서 구하는 접선은 $y-y_1=-\dfrac{x_1}{y_1}(x-x_1) \Leftrightarrow x_1x+y_1y=r^2$

cf) $x^2+y^2=r^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $2x+2yy'=0$

$\therefore$ 접선의 기울기는 $y'=-\dfrac{x_1}{y_1}$

(2) 포물선 $y^2=4px$

양변을 x에 대하여 미분하면 $2yy'=4p$ $\therefore$ 접선의 기울기는 $y'=\dfrac{2p}{y_1}$

따라서, 구하는 접선의 방정식은 $y-y_1=\dfrac{2p}{y_1}(x-x_1) \Leftrightarrow y_1y=2p(x+x_1)$

$x^2=4py$: 양변을 x에 대하여 미분하면 $2x=4py'$ $\therefore$ 접선의 기울기는 $y'=\dfrac{x_1}{2p}$

따라서, 구하는 접선의 방정식은 $y-y_1=\dfrac{x_1}{2p}(x-x_1) \Leftrightarrow x_1x=2p(y+y_1)$

(3) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

양변을 x로 미분하면, $\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2y}{b^2}y'=0$ $\therefore$ 접선의 기울기는 $y'=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_1}{y_1}$

따라서, 구하는 접선의 방정식 $y-y_1=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_1}{y_1}(x-x_1) \Leftrightarrow \dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

(4) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

양변을 x로 미분하면, $\dfrac{2x}{a^2}-\dfrac{2y}{b^2}y'=0$ $\therefore$ 접선의 기울기는 $y'=\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_1}{y_1}$

따라서, 구하는 접선의 방정식은 $y-y_1=\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_1}{y_1}(x-x_1) \Leftrightarrow \dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$: 양변을 x로 미분하면, $\dfrac{2x}{a^2}-\dfrac{2y}{b^2}y'=0$

$\therefore$ 접선의 기울기는 $y' = \dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{x_1}{y_1}$

따라서, 구하는 접선의 방정식은 $y - y_1 = \dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{x_1}{y_1}(x - x_1) \iff \dfrac{x_1 x}{a^2} - \dfrac{y_1 y}{b^2} = -1$

2. 이차곡선 중 기울기 m 인 접선의 방정식

(1) 원 $x^2 + y^2 = r^2$

접선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라 두고 원의 방정식에 대입한 후 판별식 $D = 0$ 을 적용하거나 원의 중심에서 직선까지의 거리가 r 임을 이용한다.

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 에서의 접선은

$x(r\cos\theta) + y(r\sin\theta) = r^2 \iff y = -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}x + \dfrac{r}{\sin\theta} \quad \cdots ㉠$

기울기 $-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ 를 m 이라 하면, $-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = m$ 으로부터 $m^2 = \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{1 - \sin^2\theta}{\sin^2\theta}$

$\therefore \sin^2\theta(m^2 + 1) = 1 \quad \therefore \dfrac{1}{\sin\theta} = \pm\sqrt{m^2 + 1} \quad \therefore$ ㉠ : $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

(2) 포물선 $y^2 = 4px$

접선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라 두고 포물선의 방정식에 대입한 후 판별식 $D = 0$ 을 적용한다. 접선 $y_1 y = 2p(x + x_1)$ 에서 $y = \dfrac{2p}{y_1}x + \dfrac{2px_1}{y_1} = \dfrac{2p}{y_1}x + \dfrac{y_1}{2}$ $(\leftarrow y_1^2 = 4px_1)$

기울기 $m = \dfrac{2p}{y_1}$ 이므로 $y = mx + \dfrac{p}{m}$

(3) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{(a\cos\theta)x}{a^2} + \dfrac{(b\sin\theta)y}{b^2} = 1$

$\therefore y = -\dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}x + \dfrac{b}{\sin\theta} \quad \cdots ㉠$

기울기 $-\dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}$ 를 m이라 하면, $-\dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta} = m$ 으로부터 $-\dfrac{ma}{b} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\therefore \dfrac{m^2 a^2}{b^2} = \dfrac{1 - \sin^2\theta}{\sin^2\theta} \quad \therefore \sin^2\theta\left(\dfrac{m^2 a^2}{b^2} + 1\right) = 1 \quad \therefore \dfrac{1}{\sin\theta} = \pm\sqrt{\dfrac{a^2 m^2 + b^2}{b^2}}$

$\therefore$ ㉠ : $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$

(4)−1 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ 에서의 접선의 방정식은 $\frac{(a\sec\theta)x}{a^2}-\frac{(b\tan\theta)y}{b^2}=1$

$\therefore\ y=\frac{b}{a\sin\theta}x-\frac{b}{\tan\theta}=\frac{b}{a}(\mathrm{cosec}\theta)x-b\cot\theta\ \cdots㉠$

기울기 $\frac{b}{a}\mathrm{cosec}\theta$ 를 m 이라 하면, $\frac{b}{a}\mathrm{cosec}\theta=m$ 으로부터 $\mathrm{cosec}\theta=\frac{am}{b}$

$\therefore\ \cot^2\theta=\mathrm{cosec}^2\theta-1=\frac{a^2m^2}{b^2}-1=\frac{a^2m^2-b^2}{b^2}\quad\therefore\ \cot\theta=\pm\sqrt{\frac{a^2m^2-b^2}{b^2}}$

$\therefore$ ㉠ : $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

(4)−2 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점 $(a\tan\theta, b\sec\theta)$ 에서의 접선의 방정식은

$\frac{(a\tan\theta)x}{a^2}-\frac{(b\sec\theta)y}{b^2}=-1$

$\therefore\ y=\frac{b\sin\theta}{a}x+\frac{b}{\sec\theta}=\frac{b\sin\theta}{a}x+b\cos\theta\ \cdots㉠$

기울기 $\frac{b\sin\theta}{a}$ 를 m 이라 하면, $\frac{b\sin\theta}{a}=m$ 으로부터 $\sin\theta=\frac{am}{b}$

$\therefore\ \cos\theta=\pm\sqrt{1-\frac{a^2m^2}{b^2}}=\pm\sqrt{\frac{b^2-a^2m^2}{b^2}}\qquad\therefore$ ㉠ : $y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}$

3. 일차변환

(1) 일차변환

좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,y)$를 점 $\mathrm{P}'(x',y')$로 옮기는 변환 $f:(x,y)\to(x',y')$ 에서 대응하는 점의 좌표 사이에 $\begin{cases}x'=ax+by\\y'=cx+dy\end{cases}$ 와 같이 **상수항이 없는 일차식**으로 나타내어질 때, 이 변환 f 를 **일차변환**이라 하고, 위의 식을 일차변환 f 의 **변환식**이라 한다.

일차변환 f 의 변환식은 행렬을 써서 $\begin{cases}x'=ax+by\\y'=cx+dy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$로 나타낼 수 있다.

이 때 행렬 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$를 **일차변환 f를 나타내는 행렬**, 또는 간단히 **일차변환 f의 행렬**이라 하고, f를 간단히 **일차변환 A**라 하기도 한다.

(2) 일차변환의 기본성질

일차변환 $f:X\to AX$ 곧, $f(X)=AX$에서 2×1 행렬 $P,\ Q$에 대하여 다음과 같은 성질이 성립한다.

① $f(P+Q)=f(P)+f(Q)$ ② $f(kP)=kf(P)$ (단, k는 실수의 상수)

③ $f(kP+hQ)=kf(P)+hf(Q)$ (단, k는 실수의 상수)

풀어보기

문제 1

좌표평면에서 포물선 $y^2=8x$에 접하는 두 직선 l_1, l_2의 기울기가 각각 m_1, m_2이다. m_1, m_2가 방정식 $2x^2-3x+1=0$의 서로 다른 두 근일 때, l_1과 l_2의 교점의 x좌표는? (2014년 대수능)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

문제 2

자연수 n에 대하여 포물선 $y^2=\dfrac{x}{n}$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=1$이고 $\overline{\mathrm{FQ}}=a_n$이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}$의 값은? (2013년 대수능)

① 210　② 205　③ 200　④ 195　⑤ 190

문제 3

좌표평면에서 원점을 중심으로 $\dfrac{\pi}{3}$만큼 회전하는 회전변환을 f, 직선 $y=x$에 대한 대칭변환을 g라 하자.
합성변환 $g^{-1}\circ f\circ g$에 의하여 직선 $x+2y+5=0$이 직선 $ax+by+5=0$으로 옮겨질 때, $a+2b$의 값은?(단, a, b는 상수이다)(2013년 대수능)

① $\dfrac{1}{2}$　② 1　③ $\dfrac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\dfrac{5}{2}$

문제 4

좌표평면 위의 점 (x, y)를 x축에 대하여 대칭이동시키는 일차변환을 f, 원점을 중심으로 $\dfrac{\pi}{3}$만큼 회전이동시키는 일차변환을 g라 하자. 합성변환 h를 $h=f\circ g\circ f$라 할 때, 합성변환 h^{2011}에 의하여 점 $(2, 2)$가 옮겨지는 점은 (a, b)이다. 이때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, $h^1=h$, $h^{n+1}=h^n\circ h$이다.)(2011년 7월 전국연합)

예시답안

풀어보기

문제 1

두 직선 l_1, l_2 의 기울기 m_1, m_2 $(m_1 < m_2)$가 방정식

$2x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이므로 $x = \frac{1}{2}, x = 1$

$\therefore m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = 1$

즉, 두 직선 l_1, l_2 의 기울기는 각각 $\frac{1}{2}$, 2 라고 할 수 있다.

두 직선 l_1, l_2 는 포물선 $y^2 = 8x$ 의 접선이므로

(i) 기울기 $m_1 = \frac{1}{2}$ 인 접선 l_1 의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x + 4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

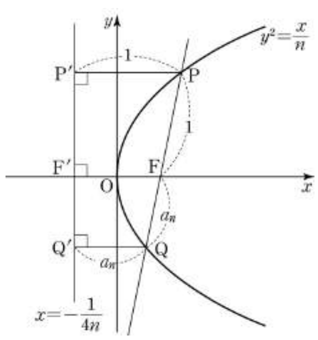
(ii) 기울기 $m_2 = 1$ 인 접선 l_2 의 방정식은

$y = x + 2$ ⋯⋯㉡

두 직선의 방정식 ㉠, ㉡을 연립하면

$x = 4$, 따라서 구하는 교점의 x 좌표는 4 이다.

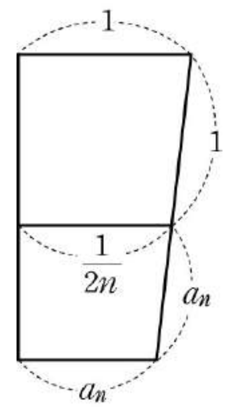
문제 2



포물선 $y^2 = \frac{x}{n}$ 의 초점은 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{4n}, 0\right)$이다.

세 점 P, F, Q 에서 준선 $x = -\frac{1}{4n}$ 에 내린 수선의 발을 각각 P′, F′, Q′ 이라 하면

$\overline{\mathrm{FF'}}=\dfrac{1}{2n}$ 이고, 포물선의 정의에 의해



$\overline{\mathrm{PP'}}=1$, $\overline{\mathrm{QQ'}}=a_n$, $\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1\cdot a_n+1\cdot a_n}{1+a_n}$, $\dfrac{1}{2n}=\dfrac{2a_n}{1+a_n}$

$4na_n=1+a_n$, $a_n(4n-1)=1$

$\therefore\ a_n=\dfrac{1}{4n-1}$

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)=4\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-10=210$$

문제 3

회전변환 f 의 행렬을 A , 대칭변환 g 의 행렬을 B 라 하면

$$A=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\text{ 이고}$$

합성변환 $g^{-1}\circ f\circ g$의 행렬은 $B^{-1}AB$이다.

$$B^{-1}AB=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\text{ 에서}$$

$x'=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y$, $y'=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{2}y$

$x+2y+5=0$ 이 $ax'+by'+5=0$ 으로 옮겨지므로

$$a\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)+b\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)+5=0$$

$$\left(\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\right)y+5=0\ \cdots\cdots\ ㉠$$

㉠이 $x+2y+5=0$ 와 같아야 하므로

따라서 $\dfrac{1}{2}a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=1$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a+\dfrac{1}{2}b=2$

연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}$, $b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$

$\therefore\ a+2b=\dfrac{5}{2}$

문제 4

일차변환 f, g 를 나타내는 행렬을 각각 A, B 라 하면

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

합성변환 h 를 나타내는 행렬을 C 라 하면

$$C=ABA=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$C^6=E$이므로 $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=C^{2011}\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}\\ 1-\sqrt{3}\end{pmatrix}$

따라서 $a^2+b^2=8$

논제 1-1

기울기가 m 이고 $y^2=4px$ 에 접하는 접선의 방정식은 $y=mx+\dfrac{p}{m}$ 이고 이 직선위에 점 (α, β) 가 있으므로 $\beta=m\alpha+\dfrac{p}{m}$ 가 성립하고 이를 풀면 $\alpha m^2-\beta m+p=0$ 이고

$m=\dfrac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha p}}{2\alpha}$ …… ① 이다.

점 A, B 는 $y=mx+\dfrac{p}{m}$ 과 $y^2=4px$ 와의 교점이므로 연립하면

$\left(mx+\dfrac{p}{m}\right)^2=4px \Rightarrow \left(mx-\dfrac{p}{m}\right)^2=0$ 이므로

$x=\dfrac{p}{m^2}$, $y=\dfrac{2p}{m}$ 이다. 이때 ①에 의해

$$y=\frac{2p}{\dfrac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha p}}{2\alpha}}=\frac{4\alpha p}{\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha p}}=\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha p}$$

$y_0>0$ 이므로 $y_0=\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha p}$, $y_1=\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha p}$ 이 된다.

(대학발표 예시답안)[15]

점 $\left(\dfrac{u^2}{4p}, u\right)$ 에서 포물선 $y^2=4px$ 과 접하는 직선의 방정식은 $y-u=\dfrac{2p}{u}\left(x-\dfrac{u^2}{4p}\right)$. 즉

15) 서강대학교 입학처

$y=\dfrac{2p}{u}x+\dfrac{u}{2}$ 이다. 이 직선이 점 (α, β) 를 지나면 $\beta=\dfrac{2p}{u}\alpha+\dfrac{u}{2}$ 이다. 이 식을 정리하면 $u^2-2\beta u+4p\alpha=0$ 이므로 $u=\beta\pm\sqrt{\beta^2-4p\alpha}$ 이다. 그러므로 $y_0=\beta+\sqrt{\beta^2-4p\alpha}$ 이고 $y_1=\beta-\sqrt{\beta^2-4p\alpha}$ 이다.

논제 1-2

논제 1-1에 의해 기울기가 m 이고 $y^2=4px$ 에 접하는 접선의 방정식이 $y=mx+\dfrac{p}{m}$ 일 때, 접선과 포물선의 방정식을 연립하면

$\alpha m^2-\beta m+p=0$ …… ②

$m=\dfrac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha p}}{2\alpha}$ 이고, 접선과 포물선의 교점의 각각 좌표는 다음과 같다.

$x=\dfrac{p}{m^2}$, $y=\dfrac{2p}{m}$ 이는 m 의 값에 따라 달라지므로

$m_1=\dfrac{\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha p}}{2\alpha}$, $m_2=\dfrac{\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha p}}{2\alpha}$ 로 나눌 수 있고 따라서 교점의 좌표는

$\mathrm{A}(x_0, y_0)=\left(\dfrac{p}{m_1}, \dfrac{2p}{m_1}\right)$, $\mathrm{B}(x_1, y_1)=\left(\dfrac{p}{m_2}, \dfrac{2p}{m_2}\right)$ 로 둘 수 있다.

1) $\beta=0$ 이면 $(x_0, y_0)=(p, 2p)$이고$(x_1, y_1)=(p, -2p)$이므로 두 점을 지나는 직선은 초점 $\mathrm{F}(p, 0)$ 을 지난다.

2) $\beta\neq 0$ 일 때,

교점 (α, β) 가 준선 위에 있으면 $\alpha=-p$ 이고 ②의 식에 대입하면 $-pm^2-\beta m+p=0$ 이고 $p(1-m^2)=\beta m$ 이다. ……③

$m_1+m_2=\dfrac{\beta}{\alpha}$, $m_1m_2=\dfrac{p}{\alpha}$ 이고 A, B 를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{\dfrac{2p}{m_2}-\dfrac{2p}{m_1}}{\dfrac{p}{{m_2}^2}-\dfrac{p}{{m_1}^2}}\left(x-\frac{2p}{{m_1}^2}\right)+\frac{2p}{m_1}$$

$$y=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\left(x-\frac{p}{m_1^2}\right)+\frac{2p}{m_1}$$

$y=\dfrac{2p}{\beta}\left(x-\dfrac{p}{{m_1}^2}\right)+\dfrac{2p}{m_1}$ 이 된다.

x 에 p 를 대입하면

$$y=\frac{2p}{\beta}\left(p-\frac{p}{{m_1}^2}\right)+\frac{2p}{m_1}=\frac{2p}{\beta}\times\frac{(m_1^2-1)p}{{m_1}^2}+\frac{2p}{m_1}=\frac{2p}{\beta}\times\frac{-\beta m_1}{m_1^2}+\frac{2p}{m_1}=0\ (\because\ ③에\ 의해)$$

따라서 $y=\frac{2p}{\beta}\left(x-\frac{p}{{m_1}^2}\right)+\frac{2p}{m_1}$ 은 초점 $(p, 0)$ 을 지난다.

(대학발표 예시답안)[16]

$\alpha=-p$ 인 경우 논제 1-1의 답안에 의해

$y_0=\beta+\sqrt{\beta^2-4p\alpha}$ 이고 $y_1=\beta-\sqrt{\beta^2-4p\alpha}$ 이므로

$$x_1-x_0=\frac{{y_1}^2-{y_0}^2}{4p}=\frac{(y_1-y_0)(y_1+y_0)}{4p}=-\frac{\beta\sqrt{\beta^2+4p^2}}{p}$$ 이다.

$\beta=0$ 이면 $(x_0,\ y_0)=(p,\ 2p)$이고$(x_1,\ y_1)=(p,\ -2p)$이므로 두 점을 지나는 직선은 초점 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ 을 지난다. $\beta\neq0$ 이면 $x_1-x_0\neq0$ 이고 점 $(x_0,\ y_0)$ 과 점 $(x_1,\ y_1)$ 을 지나는 $y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$ 이다. 그런데 $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{4p}{y_1+y_0}=\frac{2p}{\beta}$ 이므로 이 직선의 방정식은 $y=\frac{2p}{\beta}x-\frac{2p}{\beta}x_0+y_0$ 을 얻는다. $x=p$를 대입하면 우변은 $\frac{2p^2}{\beta}-\frac{2p}{\beta}x_0+y_0$ 이다.

여기에 $x_0=\frac{{y_0}^2}{4p}=\frac{\beta^2+(\beta^2+4p^2)+2\beta\sqrt{\beta^2+4p^2}}{4p}=\frac{4p^2+2\beta y_0}{4p}=p+\frac{\beta}{2p}y_0$ ………… (1)

을 대입하면 $\frac{2p^2}{\beta}-\frac{2p}{\beta}\left(p+\frac{\beta}{2p}y_0\right)+y_0=0$ 이므로 이 직선은 $(p,\ 0)$ 을 지난다.

논제 1-3

내분점 공식에 의해 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ 이다.

그런데 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ 이고 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)^2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2t(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t^2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 로 나타낼 수 있다.

논제 1-4

(대학발표 예시답안)[17]

(i) 점 R 은 포물선 $y^2=4px$ 위에 있다.

논제 1-3에 의하여 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=((1-t)^2x_0+2t(1-t)\alpha+t^2x_1,\ (1-t)^2y_0+2t(1-t)\beta+t^2y_1)$ 이다.

---

16) 서강대학교 입학처
17) 서강대학교 입학처

(1)과 같은 방법으로 계산하면 $x_0 = -\alpha + \frac{\beta y_0}{2p}$, $x_1 = -\alpha + \frac{\beta y_1}{2p}$ 이고, 이 값을 위의 식에 대입하면 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ 의 x 좌표는 $(-4t^2+4t-1)\alpha+(1-t)^2\frac{\beta y_0}{2p}+t^2\frac{\beta y_1}{2p}$ 이다. 그런데 $y_0+y_1=2\beta$ 이므로 이 식은 $(-4t^2+4t-1)\alpha+(1-t)^2\frac{(1-2t)\beta y_0}{2p}+\frac{t^2\beta^2}{p}$ .... (2)

이다.

이 값을 X라 하자. 같은 방법으로 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ 의 y 좌표는 $(1-2t)y_0+2t\beta$ 임을 보일 수 있다. 이 값을 Y라 하자. 이제 $Y^2=4pX$ 임을 보이자.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4p}Y^2 &= \frac{1}{4p}((1-2t)^2{y_0}^2+4t^2\beta^2+2t(1-2t)y_0\beta)\\ &= -(1-2t)^2\alpha+\frac{(1-2t)^2\beta y_0}{2p}+\frac{t^2\beta^2}{p}+\frac{t(1-2t)y_0\beta}{2p}\end{aligned}$$

이므로 (2)에 의해 $Y^2=4pX$ 이다.

(ii) 점 R 에서의 접선은 직선 PQ 이다. 점 R 은 선분 PQ 의 내분점이므로 직선 PQ 위에 있다. 그러므로 직선 PQ 가 접선임을 보이기 위해서는 직선 PQ 의 (크기가 1인) 방향벡터와 접선의 (크기가 1인) 방향벡터가 같음을 보이면 된다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &=((1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})-((1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\ &=t(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2\overrightarrow{\mathrm{OC}})+(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}) \quad \cdots\cdots\cdots (3)\end{aligned}$$

이다.

t 가 0 과 1 사이를 움직일 때 점 R 이 움직이는 자취는 t 로 매개화된 곡선이다.

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ 을 $(f(t), g(t))$ 라고 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)^2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2(1-2t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t^2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 이므로

점R 에서의 속도벡터는

$$\begin{aligned}(f'(t), g'(t)) &= -2(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2(1-2t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+2t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &=2(t(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2\overrightarrow{\mathrm{OC}})+(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}))\\ &=2\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\end{aligned}$$

이다. 그러므로 두 직선은 점 R 을 지나고 같은 방향벡터를 가지므로 서로 일치한다.

논제 2-1

$f(-2)=-8+4+\frac{1}{2}<0$, $f(-1)=-1+2+\frac{1}{2}>0$, $f(0)=\frac{1}{2}>0$,

$f(1)=1-2+\frac{1}{2}<0$, $f(2)=8-4+\frac{1}{2}>0$

이므로 제시문 [나]에 의하여 세 개의 근 α, β, γ 가 존재하며 $-2<\alpha<-1$,

$0<\beta<1$, $1<\gamma<2$ 임을 알 수 있다.

이제는 이 근들이 유리수가 아님을 보이자. 근 $x=\dfrac{a}{b}$ (단 a, b 는 서로소인 정수)라고 두자. 그러면 $f\left(\dfrac{a}{b}\right)=\left(\dfrac{a}{b}\right)^3-2\left(\dfrac{a}{b}\right)+\dfrac{1}{2}=0$

$$\Leftrightarrow 2a^3-4ab^2+b^3=0 \Leftrightarrow b^3=4ab^2-2a^3=2(2ab^2-a^3)$$

마지막 식의 우변의 식 $2(2ab^2-a^3)$ 이 짝수이므로 좌변의 식 b^3 도 짝수이어야 한다. 그러면 b 도 짝수여야 한다. 이제 $b=2k$ 라고 두면

$2a^3-16ak^2+8k^3=0 \Leftrightarrow a^3-8ak^2+4k^3=0 \Leftrightarrow a^3=8ak^2-4k^3=2(4ak^2-2k^3)$

마지막 식의 우변의 식 $2(4ak^2-2k^3)$ 이 짝수이므로 좌변의 식 a^3 도 짝수이다. 따라서 a 도 짝수이다. a, b 가 모두 짝수인 것은 서로소라는 가정에 위배되므로, x 는 유리수가 아니다.

논제 2-2

$k=1$ 일 때

$a_1=(1-\alpha)(1-\beta)(\gamma-1)$ (왜냐하면 $\alpha, \beta<1, \gamma>1$). $k\ge 2$일 때,

$a_k=(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)$ 가 된다. 따라서

$$S_n=a_1+\sum_{k=2}^{n}(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)=-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)+\sum_{k=2}^{n}(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)$$

$$=-2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)+\sum_{k=1}^{n}(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)$$

$$=-2(1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma)+\sum_{k=1}^{n}(k^3-(\alpha+\beta+\gamma)k^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)k-\alpha\beta\gamma)$$

$$=-2\left(1-0-2+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-0+(-2)\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}n$$

$$=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-n(n+1)+\frac{n}{2}+1=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}-\frac{3}{4}n^2-\frac{n}{2}+1$$

논제 2-3

(대학발표 예시답안)[18]

M의 역행렬을 구해보면 $M^{-1}=\dfrac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$ (단, $D=ad-bc$)가 된다.

따라서 $\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}=\dfrac{1}{D}\begin{pmatrix} dx'-by' \\ -cx'+ay'\end{pmatrix}$

18) 서강대학교 입학처

즉, $x=\frac{1}{D}(dx'-by'), y=\frac{1}{D}(-cx'+ay')$ 을 $y=x^3-2x+\frac{1}{2}$ 에 대입하면

$$\frac{1}{D}(-cx'+ay')=\left(\frac{1}{D}(dx'-by')\right)^3-2\left(\frac{1}{D}(dx'-by')\right)+\frac{1}{2}$$

$y'=\frac{2}{27}(x')^3+1$ 에는 $(y')^3$ 이 없으므로, 위 식에서 $b=0$ 이어야 한다.

이를 이용하여 위 식을 간단히 정리하면

$y'=\frac{1}{D^2}\frac{1}{a}d^3(x')^3+\frac{1}{a}(c-2d)x'+\frac{1}{2a}D$ (여기서 $a\neq 0$ 왜냐하면 $D\neq 0$).

$y'=\frac{2}{27}(x')^3+1$ 과 각각의 계수를 비교하면 $c=2d,\ \frac{d}{2}=1$, 즉 $d=2, c=4$ 가 된다.

또한 $\frac{2}{27}=\frac{1}{a^2d^2}\frac{1}{a}d^3=\frac{d}{a^3}$, 즉 $a=3$ 이 된다. 따라서 $M=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

논제 2-4

(대학발표 예시답안)[19]

$M=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ 라고 할 때, $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2x'\\ -4x'+3y'\end{pmatrix}$ 즉 $x=\frac{1}{3}x'$, $y=-\frac{2}{3}x'+\frac{1}{2}y'$ 이 된다. 이 식을 연속해서 n 번 적용하면 된다. 즉, 이 식을 한 번 적용했을 때 ($n=1$), $y=x^3-2x+\frac{1}{2}$ 이 $y=\frac{2}{27}x^3+1$로 된다.(**논제 2-3**)

$n=2$ 인 경우를 구하기 위해,

$y=\frac{2}{27}x^3+1$에 $x=\frac{1}{3}x'$, $y=-\frac{2}{3}x'+\frac{1}{2}y'$ 을 적용하면 $y'=\frac{2^2}{27^2}(x')^3+2\left(\frac{2}{3}x'\right)+2$ 이고

x', y' 를 x, y 로 변경하면 $y=\frac{2^2}{27^2}(x)^3+2\left(\frac{2}{3}x\right)+2$ 가 된다.

$n=3$ 인 경우를 구하기 위해,

$y=\frac{2^2}{27^2}(x)^3+2\left(\frac{2}{3}x\right)+2$ 에 $x=\frac{1}{3}x'$, $y=-\frac{2}{3}x'+\frac{1}{2}y'$ 을 적용하면

$y=\frac{2^3}{27^3}x^3+\left(2^2\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{2}{3}\right)\right)x+2^2$ 가 된다.

이와 같은 과정을 계속하면 임의의 n에 대하여 다음의 곡선이 얻어진다.

$$y=\left(\frac{2}{27}\right)^n x^3+2^2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)x+2^{n-1}$$

---

19) 서강대학교 입학처

18 서강대학교 수시(공대)

문제 1

[가] 곡물이나 기름 등을 운반하는 탱크 트럭을 뒤에서 보면 용기의 단면이 원을 살짝 눌러 놓은 듯한 모양인데, 이 도형을 타원이라고 한다. 탱크 트럭에서 타원형 용기를 사용하는 이유는, 부피는 원형 용기보다 조금 작지만 무게중심의 위치가 더 낮기 때문에 트럭이 회전할 때 뒤집힐 가능성은 훨씬 적어지기 때문이라고 한다. 미국의 백악관의 대통령 집무실인 청실(Blue Room)의 천장이 타원으로 이루어져 있다. 또한, 독일의 천문학자 케플러는 태양계 행성의 공전 궤도가 타원임을 발견하였으며, 영국의 수학자 뉴턴은 공전 궤도가 타원임을 수학적으로 증명하였다.

[나] 두 초점 $\mathrm{F}(c, 0), \mathrm{F}'(-c, 0)$ 에서의 거리의 합이 $2a$ 인 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>c>0$, $b^2=a^2-c^2$)로 주어진다. 이때 장축의 길이는 $2a$, 단축의 길이는 $2b$ 이다. 마찬가지로 두 초점 $\mathrm{G}(0, c), \mathrm{G}'(0, -c)$ 에서의 거리의 합이 $2b$ 인 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $b>c>0$, $a^2=b^2-c^2$)로 주어진다. 이때 장축의 길이는 $2b$, 단축의 길이는 $2a$ 이다.

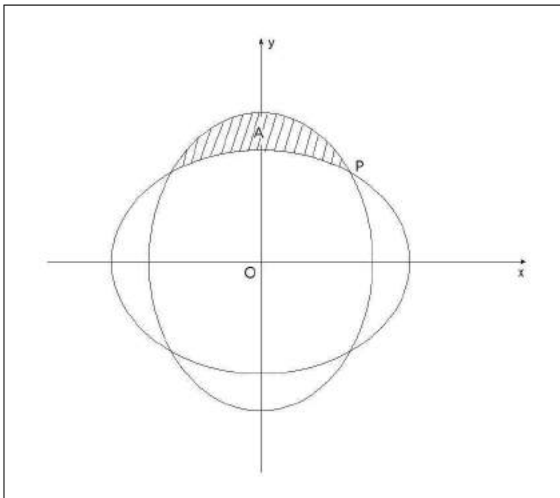
[다] 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$ 로 주어진다.

논제 1-1

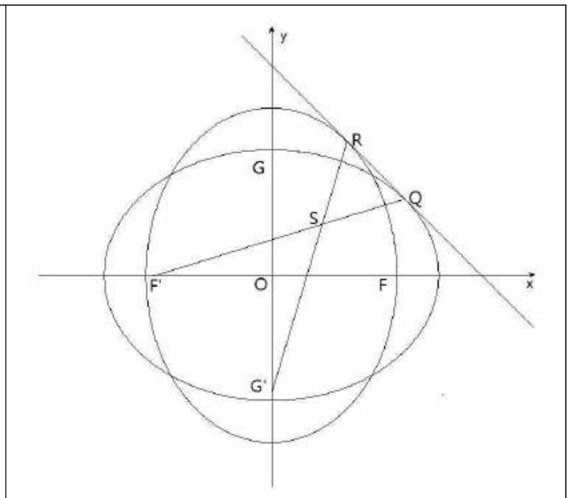
타원의 방정식 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 로 주어진 타원 E_1 을 시계 반대 방향으로 $\dfrac{\pi}{2}$ 만큼 회전하여 얻어진 타원을 E_2 라 하자. E_1 과 E_2 가 만나는 교점을 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ (단, $x_1>0$, $y_1>0$)라고 하자(【그림 1】 참고). E_1 위의 점 P 에서의 접선과 E_2 위의 점 P 에서의 접선이 이루는 예각을 θ 라고 할 때 $\sqrt{\cot\theta}$ 를 구하시오.

논제 1-2

문제 【1-1】에서 정의된 타원 E_1의 두 초점을 F, F'이라고 하고, 타원 E_2의 두 초점을 G, G'이라고 하자(【그림 2】 참고). 두 개의 타원 E_1과 E_2에 동시에 접하는 직선이 E_1과 만나는 점을 $Q(s_1, t_1)$(단, $s_1 > 0, t_1 > 0$), E_2와 만나는 점을 $R(s_2, t_2)$(단, $s_2 > 0, t_2 > 0$)이라고 하자. 또한 선분 $F'Q$와 선분 GR이 만나는 점을 S라고 하자. 이때 삼각형 SQR의 면적을 구하시오.



【그림 1】



【그림 2】

논제 1-3

제시문 [다]를 참고하여, 두 곡선으로 둘러싸인 영역 A의 면적을 구하시오.
(【그림 1】 참고)

논제 1-4

영역 A를 직선 $y = -5$의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하시오.
(【그림 1】 참고)

문제 2

[가] 일반적으로 좌표평면 위의 변환 $f:(x,y)\to(x',y')$ 이 $\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$ (단, a, b, c, d는 상수)의 꼴로 나타날 때, 이러한 변환 f를 일차변환이라고 한다. 좌표평면 위의 점을 직선이나 점에 대하여 대칭인 점으로 옮기는 대칭변환, 원점을 중심으로 θ만큼 회전하는 회전변환, 0이 아닌 실수 k에 대하여 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,y)$를 $\mathrm{P}'(kx,ky)$로 옮기는 닮음변환 등이 일차변환의 예이다. 일차변환 f를 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

여기서, $X'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$라고 놓으면 $X'=AX$이다. 임의의 일차변환 f,g에 대하여 f와 g의 합성변환도 일차변환이고, f를 나타내는 행렬을 A, g를 나타내는 행렬을 B라고 하면 $g\circ f$를 나타내는 행렬은 BA이다. 특히 자연수 n에 대하여 f를 n번 합성한 함수 f''을 나타내는 행렬은 A''이고, A의 역행렬 A^{-1}가 존재하면 f의 역변환 $f^{-1}:(x',y')\to(x,y)$도 일차변환이고 f^{-1}를 나타내는 행렬은 A^{-1}이다.

[나] 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 서로 다른 r개($n\geq r$)를 택할 때, 이것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 이 조합의 수를 기호 ${}_n\mathrm{C}_r$로 나타낸다. 순열과 조합의 관계를 이용하여 다음 공식을 얻을 수 있다.

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad (\text{단, } 0<r\leq n)$$

이 수는 행렬의 전개식에서도 자주 등장한다. 이차정사각행렬 A와 이차단위행렬 E에 대하여 다음 등식들이 성립한다.

$$(A+E)^2=A^2+{}_2\mathrm{C}_1A+E$$

$$(A+E)^3=A^3+{}_3\mathrm{C}_1A^2+{}_3\mathrm{C}_2A+E$$

$$(A+E)^4=A^4+{}_4\mathrm{C}_1A^3+{}_4\mathrm{C}_2A^2+{}_4\mathrm{C}_3A+E$$

$$(A+E)^5=A^5+{}_5\mathrm{C}_1A^4+{}_5\mathrm{C}_2A^3+{}_5\mathrm{C}_3A^2+{}_5\mathrm{C}_4A+E$$

이 등식에 나타나는 계수들은 $(x+1)^2$, $(x+1)^3$, $(x+1)^4$, $(x+1)^5$의 이항전개에서 나타나는 계수와 일치함을 볼 수 있다.

논제 2-1

좌표평면 위의 점 $(3, 0)$ 에서 포물선 $y=\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x$ 가 일차변환 $f:(x, y)\rightarrow(2x, x+3y)$ 에 의하여 옮겨지는 곡선에 이르는 최단거리를 구하시오.

논제 2-2

일차변환

$$f:(x, y)\rightarrow(x, 0),$$
$$g:(x, y)\rightarrow(0, y),$$
h : 직선 $y=mx$ (단, $m\neq 0$)에 대한 대칭변환

에 대하여 합성변환 $f\circ h\circ g\circ h\circ f$ 를 나타내는 행렬을 B 라고 놓자. 자연수 n 에 대하여 $\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix}=B^n\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}$ 라고 할 때, 무한급수 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$ 의 수렴, 발산을 설명하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

논제 2-3

제시문 [나]를 참고하여 $A=\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{5}-1 & -\sin\frac{2\pi}{5}\\ \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5}-1\end{pmatrix}$ 일 때

$(2\times1)_7\mathrm{C}_2E+(3\times2)_7\mathrm{C}_3A+(4\times3)_7\mathrm{C}_4A^2+(5\times4)_7\mathrm{C}_5A^3+(6\times5)_7\mathrm{C}_6A^4+(7\times6)_7\mathrm{C}_7A^5$
을 구하시오.

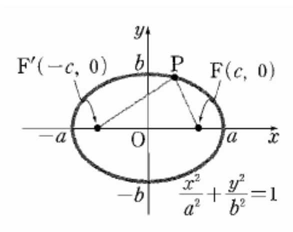
논제 2-4

$\sin\frac{\pi}{5}$ 를 s 라고 할 때, 논제 2-3의 행렬 A에 대해 A^7 을 s 에 관한 식으로 나타내시오.

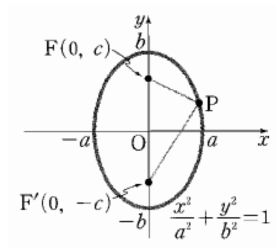
배경지식 쌓기

1. 타원의 방정식

두 초점 $\mathrm{F}(c, 0), \mathrm{F}'(-c, 0)$ 으로부터의 거리의 합이 $2a\ (a>b>0)$ 인 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $c^2=a^2-b^2$)이고 두 초점 $\mathrm{F}(0, c), \mathrm{F}'(0, -c)$ 로부터의 거리의 합이 $2b(b>a>0)$인 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $c^2=b^2-a^2$)이다.



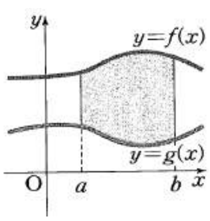
$a>b>0$

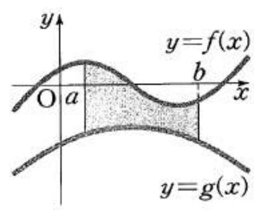


$b>a>0$

2. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 사이의 넓이

구간 $[a, b]$ 에서 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이 S 는 $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$ 이다.

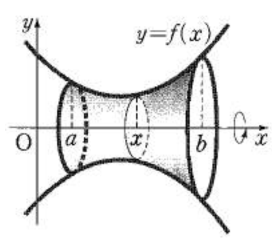




3. x 축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ $(a<b)$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킬 때, 생기는 회전체의 부피 V_x 는

$$V_x=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$$



4. 일차변환과 행렬

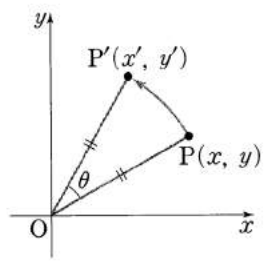
일차변환 f를 나타내는 식이 $\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases}$ $(a,\ b,\ c,\ d$는 상수$)$일 때, 이를 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

따라서 일차변환 f를 나타내는 식이 주어지면 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 오직 하나로 결정된다. 역으로 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 결정되면 일차변환 f가 오직 하나 정해진다. 이때 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$를 일차변환 f를 나타내는 행렬 또는 일차변환 f의 행렬이라고 한다.

5. 회전변환

좌표평면 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 원점을 중심으로 각 θ만큼 회전하여 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$으로 옮기는 변환을 원점을 중심으로 각 θ만큼 회전하는 회전변환이라고 한다.



이때 회전변환을 나타내는 식이 $\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$이므로 일차변환이고, 이를 행렬을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

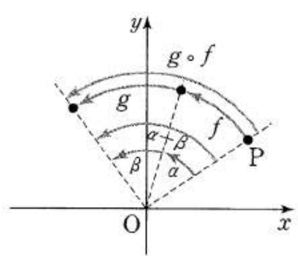
따라서 원점을 중심으로 각 θ만큼 회전하는 회전변환을 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$이다.

6. 합성변환을 나타내는 행렬

두 일차변환 $f,\ g$를 나타내는 행렬을 각각 $A,\ B$라 할 때, 합성변환 $g \circ f$를 나타내는 행렬은 BA이고, 합성변환 $g \circ f$는 일차변환이다.

7. 회전변환의 합성을 나타내는 행렬

원점을 중심으로 α만큼 회전하는 회전변환을 f, 원점을 중심으로 β만큼 회전하는 회전변환을 g라 할 때, 좌표평면 위의 점 P를 합성변환 $g \circ f$에 의하여 옮긴다고 하면 이는 오른쪽 그림과 같이 점 P를 원점을 중심으로 α만큼 회전한 다음, 다시 원점을 중심으로 β만큼 회전하여 옮기므로 다음이 성립한다.



원점을 중심으로 α만큼 회전한 다음, 원점을 중심으로 β만큼 회전하는 회전변환	$\Leftrightarrow$	원점을 중심으로 $\alpha+\beta$만큼 회전하는 회전변환

이때 합성변환 $g \circ f$ 를 나타내는 행렬은 원점을 중심으로 $\alpha+\beta$ 만큼 회전하는 회전변환을 나타내는 행렬과 같다. 따라서

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

즉 두 회전변환의 행렬의 곱셈은 각의 크기만 더하면 된다. 이와 같은 방법으로 회전변환 f 의 합성변환 $f \circ f = f^2$ 은 원점을 중심으로 $\alpha+\alpha=2\alpha$ 만큼 회전하는 회전변환과 같으므로

합성변환 $f \circ f$ 를 나타내는 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

따라서 일반적으로 회전변환 f의 합성변환 $f \circ f \circ \cdots \circ f = f^n$ (n 은 자연수)은 좌표평면 위의 점을 원점을 중심으로 $n\alpha$ 만큼 회전하는 회전변환과 같으므로 합성변환 f^n 을 나타내는 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$$

8. 이항정리

자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n \\ &= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r\end{aligned}$$

이고 이와 같이 $(a+b)^n$ 을 전개하는 것을 이항정리라고 하고, 전개식에서 각 항의 계수 ${}_n\mathrm{C}_0$, ${}_n\mathrm{C}_1$, ${}_n\mathrm{C}_2$, $\cdots$, ${}_n\mathrm{C}_r$, $\cdots$, ${}_n\mathrm{C}_n$ 을 이항계수라 한다. 한편, ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$ 을 $(a+b)^n$ 의 전개식의 일반항이라 한다.

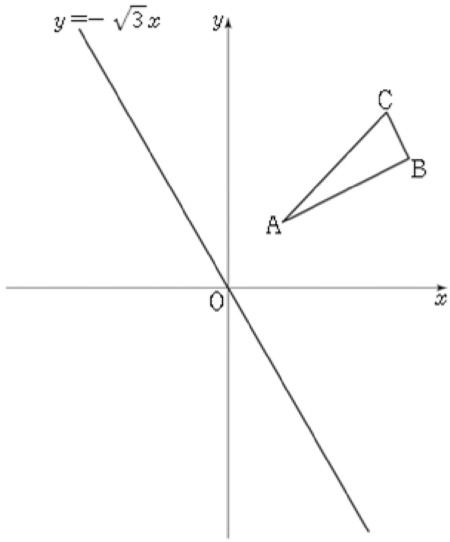
풀어보기

문제 1

그림과 같이 좌표평면 위에 세 점 $A(1,1)$, $B(2\sqrt{3},2)$, $C(3,2\sqrt{2})$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 가 있다. 행렬

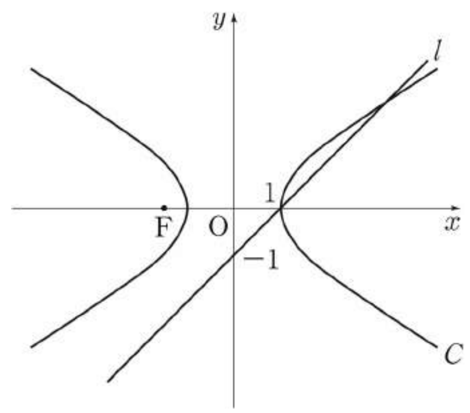
$$\begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{24} & -\sin\frac{n\pi}{24} \\ \sin\frac{n\pi}{24} & \cos\frac{n\pi}{24} \end{pmatrix} \qquad (0 < n < 48)$$

로 나타내어지는 일차변환에 의하여 세 점 A, B, C 가 옮겨지는 점을 각각 A', B', C' 이라 하자. 삼각형 $A'B'C'$ 과 직선 $y=-\sqrt{3}x$ 가 만나도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오. (2015년 4월 전국연합)



문제 2

그림과 같이 직선 $l : x-y-1=0$ 과 한 초점이 점 $\mathrm{F}(c, 0)$ (단, $c<0$)인 쌍곡선 $C : x^2-2y^2=1$ 이 있다.



원점을 중심으로 θ 만큼 회전하는 회전변환에 의하여 직선 l 은 쌍곡선 C의 초점 F를 지나는 직선으로 옮겨진다. $\sin 2\theta$ 의 값은?(2014년 대수능)

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{5}{9}$ ③ $-\frac{4}{9}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{2}{9}$

문제 3

곡선 $y=\sqrt{x}$ 와 직선 $y=x-2$ 및 x축으로 둘러싸인 부분을 x축 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 V라 할 때, $\frac{30V}{\pi}$의 값을 구하시오. (2013년 7월 전국연합)

읽기자료

푸리에 분석[20]

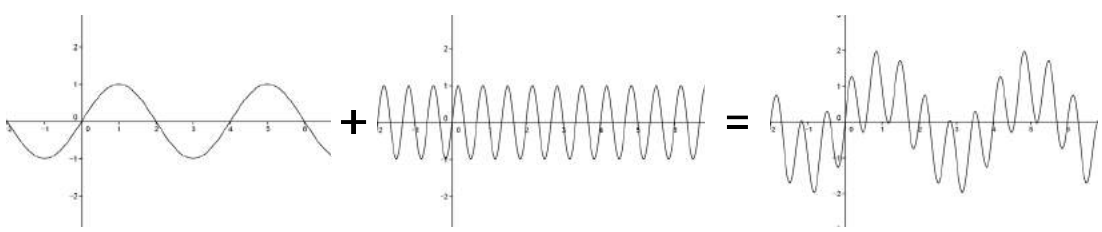
삼각함수는 어느 분야에 응용될 수 있는 것일까? 우선, 삼각법이 등장하게 된 역사적 배경처럼 거리나 높이를 측정할 때 사용된다. 피라미드처럼 직접 재기 힘든 건물 및 동상의 높이나 산의 높이를 알고 싶을 때, 또는 강 건너 섬까지의 거리나 달이나 태양까지의 거리, 지구의 반지름을 구할 때에도 사용할 수 있다.

예를 들어, 우리나라 서해는 만조와 간조의 차이가 큰데, 이때 시간에 따른 해수면의 높이를 구해보면 주기적 현상이 있음을 알 수 있다. 이러한 주기적 현상은 삼각함수를 이용하여 표현할 수 있는데, 일반적으로 해수면의 높이는 코사인 함수의 합으로 표현할 수 있다.

그리고 최근 불붙는 연구 분야 중 하나가 바로 '푸리에 분석'이다. 프랑스의 수학자 푸리에(Joseph Fourier, 1768~1830)는 1882년에 아무리 복잡한 주기적 파동이라 하더라도 진폭과 진동수가 다른 여러 사인곡선의 합으로 나눌 수 있다는 사실을 밝혀냈다. 이와 같은 수학적 작업을 푸리에 분석이라고 하는데, 오늘날 푸리에 분석은 CT나 MRI와 같은 의료장비에서부터 로봇의 음성인식 기능에 이르기까지 광범위하게 활용하고 있다.

소리를 마이크를 사용하여 전기신호를 바꾸어 오실로스코프로 나타내면 상당히 복잡한 모양의 주기적인 파동의 그래프를 얻게 되는데, 여기에 푸리에 분석을 사용하여 이 그래프를 이루는 삼각함수들을 분리해내면 유용한 정보들을 얻을 수 있다. 기계 소음으로부터 결함 부위를 찾아내는 기술도 마찬가지의 원리이다. 마치 유능한 내과의사가 청진기만 대고도 건강상태를 체크하듯이 푸리에 분석은 복잡한 전기신호나 파동의 생성원인을 밝혀내는 것이다. 어느 정도까지 소리를 골라 들을 수 있는 우리의 귀는 자동적으로 푸리에 분석을 하고 있다고도 할 수 있을 것이다.

합성되지 않은 가장 순수한 소리, 즉 $y=\sin x$의 그래프를 갖는 순음은 악기 중에는 플루트와 가장 유사하다고 한다. 그러니까 플루트와 피아노 소리의 차이와 같은 음색도 푸리에 분석을 통해 수치화할 수 있다는 얘기이다. 온갖 종류의 소리를 만들어내는 신시사이저는 이러한 수학적 원리가 사용된 예이다.



20) 헬퍼 수리논술, 이슈투데이, 2011

예시답안

풀어보기

문제 1

주어진 일차변환은 원점을 중심으로 $\frac{n\pi}{24}$ 만큼 회전하는 회전변환이다.

세 직선 OA, OB, OC 가 x 축과 이루는 각의 크기는 각각 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, α $\left(단,\ \frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$이므로 직선 OA 가 직선 $y=-\sqrt{3}x$ 와 이루는 각의 크기는 $\frac{5\pi}{12}$ 또는 $\frac{17\pi}{12}$ 이고, 직선 OB 가 직선 $y=-\sqrt{3}x$ 가 만나도록 하려면

i) $\frac{5\pi}{12}\le\frac{n\pi}{24}\le\frac{\pi}{2}$ 이므로 $10\le n\le 12$ $\therefore\ n=10, 11, 12$

ii) $\frac{17\pi}{12}\le\frac{n\pi}{24}\le\frac{3\pi}{2}$ 이므로 $34\le n\le 36$ $\therefore\ n=34, 35, 36$

i), ii)에 의하여 모든 자연수 n 의 값의 합은 138 이다.

문제 2

쌍곡선 $x^2-2y^2=1$, $x^2-\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$ 에서 $c^2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore\ c=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ $(\because\ c<0)$

$$\therefore\ \mathrm{F}\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ 0\right)$$

직선 l 위에 있는 점 (x, y) 가 원점을 중심으로 θ 만큼 회전한 회전변환에 의하여 옮겨진 점을 (x', y') 이라 하면 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 이므로

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ x=\cos\theta\cdot x'+\sin\theta\cdot y',\ \ y=-\sin\theta\cdot x'+\cos\theta\cdot y'$$

이 식을 직선 l 의 방정식 $x-y-1=0$ 에 대입하면

$$(\cos\theta x'+\sin\theta y')-(-\sin\theta x'+\cos\theta y')-1=0$$

$$(\cos\theta+\sin\theta)x'+(\sin\theta-\cos\theta)y'-1=0\ \cdots\ ㉠$$

이때 직선 ㉠이 쌍곡선의 초점 $F\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ 0\right)$을 지나므로

$$(\cos\theta+\sin\theta)\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)-1=0$$

$$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}\ \cdots\ ㉡$$

㉡의 양변을 제곱하면

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+\sin 2\theta=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \sin 2\theta=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$$

(다른 풀이)

초점 F 를 $(-\theta)$ 만큼 회전하면 직선 l 에 놓이므로 $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\cos\theta\\ -c\sin\theta\end{pmatrix}$에서

$$c\cos\theta-(-c\sin\theta)-1=0,\ c(\cos\theta+\sin\theta)=1$$

양변을 제곱하면

$$c^2(1+2\sin\theta\cos\theta)=1$$

그런데 F 가 초점이므로 $c^2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$$\therefore\ \frac{3}{2}(1+\sin 2\theta)=1,\ 1+\sin 2\theta=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \sin 2\theta=-\frac{1}{3}$$

문제 3

$y=\sqrt{x}$ 와 $y=x-2$ 의 교점은 $(4,2)$ 이므로

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^4 x\,dx-\pi\int_2^4(x-2)^2\,dx\\&=\pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4-\pi\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_2^4\\&=8\pi-\pi\left(\frac{56}{3}-24+8\right)=\frac{16}{3}\pi\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{30V}{\pi}=160$$

논제 1-1

(대학발표 예시답안)

E_1 으로부터 $\frac{\pi}{2}$ 회전하여 얻어진 포물선 E_2 의 방정식은 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 로 주어진다. 따라서 $y^2=9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)$ 를 아래와 같이 대입하면 $\frac{x^2}{9}+\frac{1}{16}\left\{9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)\right\}=1$ 이다. 좀더 간략히 하면

$$\frac{x^2}{9}+\frac{9}{16}\left(1-\frac{x^2}{16}\right)=1$$
$$16x^2+81\left(1-\frac{x^2}{16}\right)=9\times16$$
$$16^2x^2-81x^2=9\times16^2-81\times16$$
$$175x^2=9\times16\times7$$
$$x=\pm\frac{12}{5}$$

조건에 의하여 $x>0$ 이므로 $x_1=\frac{12}{5}$ 이다.

이것을 $y^2=9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)$ 에 이를 대입하면 $y^2=\frac{3^2\times16^2}{4^2\times5^2}$ 이므로 $y=\pm\frac{12}{5}$ 이다. $y>0$ 이므로 $y_1=\frac{12}{5}$ 이다. 따라서 점 $\mathrm{P}\left(\frac{12}{5},\ \frac{12}{5}\right)$ 을 얻는다. 타원 E_1 위의 점 $\mathrm{P}\left(\frac{12}{5},\ \frac{12}{5}\right)$ 에서의 접선의 방정식은 공식에 의하여 $\frac{\frac{12}{5}x}{16}+\frac{\frac{12}{5}y}{9}=1$ 이다. 이 접선의 기울기 $m_1=-\frac{9}{16}$ 이다. 이 직선과 양의 x 축과 이루는 각을 θ_1 이라고 하면 $\tan\theta_1=-\frac{9}{16}$ 이 된다.

마찬가지 방식으로 타원 E_2 위의 점 $\mathrm{P}\left(\frac{12}{5},\ \frac{12}{5}\right)$ 에서 접선의 방정식의 기울기 $m_2=-\frac{16}{9}$ 이 된다. 두 접선이 이루는 예각을 θ 라고 하면 $\theta=\theta_1-\theta_2$ 를 얻는다. 따라서 $\tan\theta=\tan(\theta_1-\theta_2)$ 를 얻는다. 따라서

$$\tan\theta=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$$
$$=\frac{\left(-\frac{9}{16}\right)-\left(-\frac{16}{9}\right)}{1+\frac{9}{16}\times\frac{16}{9}}=\frac{1}{2}\left(\frac{16^2-9^2}{9\times16}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{25\times7}{9\times16}$$

그러므로 $\sqrt{\cot\theta}=\sqrt{\frac{2\times9\times16}{25\times7}}=\frac{12\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}=\frac{12\sqrt{14}}{35}$ 이다.

(다른 풀이)

E_1 으로부터 $\frac{\pi}{2}$ 회전하여 얻어진 포물선 E_2 의 방정식은 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 로 주어지고 타원 E_1 과 E_2 는 $y=x$ 에 대하여 대칭이 되므로 교점 P 는 직선 $y=x$ 위에 있다. P 의 좌표를 (a, a) 로 둔다.

타원 E_1 의 방정식 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $y'=-\frac{9x}{16y}$ 이고 점 P 에서의 접선의 기울기는 $-\frac{9a}{16a}=-\frac{9}{16}$ 이다. 마찬가지로 타원 E_2 의 방정식 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $y'=-\frac{16x}{9y}$ 이고 점 P 에서의 접선의 기울기는 $-\frac{16a}{9a}=-\frac{16}{9}$ 이다. 따라서

$$\tan\theta = \left| \frac{-\frac{9}{16}+\frac{16}{9}}{1+\left(-\frac{9}{16}\right)\left(-\frac{16}{9}\right)} \right| = \left| \frac{-9^2+16^2}{2\times16\times9} \right| = \frac{175}{288}$$

이고

$$\sqrt{\cot\theta} = \sqrt{\frac{288}{175}} = \frac{12\sqrt{2}}{5\sqrt{7}} = \frac{12\sqrt{14}}{35}$$

논제 1-2

(대학발표 예시답안)

공통접선의 y 절편이 양수임을 고려하여, 타원 E_1 에 접하는 기울기가 m 인 접선의 방정식은 공식에 의하여 $y=mx+\sqrt{m^2\times16+9}$ 이고 타원 E_2 에 접하는 기울기가 m 인 접선의 방정식 $y=mx+\sqrt{m^2\times9+16}$ 이다. 이 두 직선이 서로 같으므로, y 절편의 값도 동일해야 한다. 즉, $16m^2+9=9m^2+16$ 이고 $m=\pm1$ 이다. 따라서 공통접선의 방정식은 $l_1 : y=-x+5$ 이다.

한편 타원 E_1 위의 점 $\mathrm{Q}(s_1, t_1)$ 에서 접하는 직선의 방정식은 $\frac{s_1x}{16}+\frac{t_1y}{9}=1$ 이다. 이것을 $l_1 : y=-x+5$ 와 비교하면 $s_1=\frac{16}{5}$, $t_1=\frac{9}{5}$ 이다. 즉, $\mathrm{Q}(s_1, t_1)=\mathrm{Q}\left(\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right)$ 이다.
마찬가지로 계산하면 타원 E_2 위의 점 $\mathrm{R}(s_2, t_2)$ 에서 접하는 직선의 방정식은 $\frac{s_2x}{9}+\frac{t_2y}{16}=1$ 이고 이것을 $l_1 : y=-x+5$ 와 비교하면 $s_2=\frac{9}{5}$, $t_2=\frac{16}{5}$ 이다.

즉, $\mathrm{R}(s_2, t_2)=\mathrm{R}\left(\frac{9}{5}, \frac{16}{5}\right)$ 이다.

Q 와 R 은 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

또한 $\overline{\mathrm{QR}}$ 는 $\sqrt{\left(\frac{16-9}{5}\right)^2+\left(\frac{9-16}{5}\right)^2}=\frac{7}{5}\sqrt{2}$ 이다. 한편, 직선 F′Q 의 방정식은

$$y=\frac{9}{16+5\sqrt{7}}(x+\sqrt{7})$$

이고 직선 G′R 의 방정식은

$$y=\frac{16+5\sqrt{7}}{9}(x-\sqrt{7})$$

이다. 두 직선이 만나는 점의 좌표는

$$x=y=\frac{9\sqrt{7}}{7+5\sqrt{7}}=\frac{5-\sqrt{7}}{2}$$

즉, $\mathrm{S}=\left(\frac{5-\sqrt{7}}{2}, \frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$ 이다.

원점과 S 를 지나는 직선의 방정식은 $y=x$ 이며 이는 $l_1 : y=-x+5$ 과 수직임을 알 수 있다.

따라서 S 로부터 직선 l_1 의 수선의 발은 선분 QR 의 중점 $\mathrm{M}\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 이 된다.

$\overline{\mathrm{SM}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$ 이 되므로, 삼각형의 면적은 $\frac{1}{2}\frac{7\sqrt{2}}{5}\frac{\sqrt{14}}{2}=\frac{7\sqrt{7}}{10}$ 이다.

논제 1-3

(대학발표 예시답안)

E_2 내부에는 속하고 E_1 내부에는 속하지 않는 영역의 면적을 구하는 문제이다. 이중에 1, 2 사분면에 있는 부분 A 의 면적을 구하면 된다.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-12/5}^{12/5}\left\{\sqrt{16\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}-\sqrt{9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)}\right\}dx \\ &= \frac{8}{3}\int_0^{12/5}\sqrt{9-x^2}\,dx-\frac{6}{4}\int_0^{12/5}\sqrt{16-x^2}\,dx \end{aligned}$$

우선, 각각의 적분값을 구한 후 간략히 하자. $A_1=\int_0^{12/5}\sqrt{9-x^2}\,dx$ 라고 하자. 치환방법을 이용하여 이 값을 구하고자 한다.

$x=3\sin\theta\ (0\le\theta\le\pi/2)$ 라고 하면, $dx=3\cos\theta\, d\theta$ 이고 $12/5=3\sin\theta \Rightarrow \sin\alpha=4/5$, 따라서 $\cos\alpha=3/5$ 이다. 따라서

$$A_1 = \int_0^{\alpha} \sqrt{9-9\sin^2\theta}\ 3\cos\theta\, d\theta = \int_0^{\alpha} 3\cos\theta\, 3\cos\theta\, d\theta$$
$$= 9\int_0^{\alpha} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\alpha} (1+\cos 2\theta)\, d\theta$$
$$= \frac{9}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\alpha} = \frac{9}{2}\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) = \frac{9}{2}(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)$$
$$= \frac{9}{2}\left(\alpha + \frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{2}\left(\alpha + \frac{12}{25}\right)$$

이다. 마찬가지로 $A_2 = \int_0^{12/5} \sqrt{16-x^2}\, dx$ 라고 두고 $x = 4\sin\theta \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$ 라 하면 $dx = 4\cos\theta\, d\theta$ 이고 $\frac{12}{5} = 4\sin\theta \Rightarrow \sin\beta = \frac{3}{5}$, 따라서 $\cos\beta = \frac{4}{5}$ 이고

$$A_2 = \int_0^{\beta} \sqrt{16-16\sin^2\theta}\ 4\cos\theta\, d\theta = \int_0^{\beta} 4\cos\theta\, 4\cos\theta\, d\theta = 8\left(\beta + \frac{12}{25}\right)$$

이다. 따라서

$$A = \frac{8}{3}A_1 - \frac{3}{2}A_2 = 12\left(\alpha + \frac{12}{25}\right) - 12\left(\beta + \frac{12}{25}\right) = 12(\alpha - \beta)$$

(단, α, β 는 예각이고 $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{3}{5}$ 이다.)

논제 1-4

(대학발표 예시답안)

본 회전체는 직선 $y=-5$ 과 영역 A를 y축으로 5만큼 이동한 후 x축 둘레로 회전하는 것으로 볼 수 있다. 따라서 회전체의 부피 V는

$$V = \int_{-12/5}^{12/5} \pi\left(4\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}+5\right)^2 dx - \int_{-12/5}^{12/5} \pi\left(3\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}+5\right)^2 dx$$
$$= 2\pi\left[\int_0^{12/5}\left\{16\left(1-\frac{x^2}{9}\right)+40\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}+25\right\}dx\right.$$
$$\left. - \int_0^{12/5}\left\{9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)+30\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}+25\right\}dx\right]$$
$$= 2\pi\int_0^{12/5}\left\{7+\left(\frac{9}{16}-\frac{16}{9}\right)x^2+\frac{40}{3}\sqrt{9-x^2}-\frac{30}{4}\sqrt{16-x^2}\right\}1\, dx$$

여기서 $B_1 = \int_0^{12/5}\left\{7+\left(\frac{9}{16}-\frac{16}{9}\right)x^2\right\}dx = \frac{56}{5}$ 이고 $B_2 = \int_0^{12/5}\frac{40}{3}\sqrt{9-x^2}\, dx$ 라 하고 $x = 3\sin\theta$, $\frac{12}{5} = 3\sin\alpha_1$ 라 두면, $dx = 3\cos\theta\, d\theta$, $\sin\alpha_1 = \frac{4}{5}$ 이다. 따라서

$$B_2 = \frac{40}{3}\int_0^{\alpha_1}\sqrt{9-9\sin^2\theta}\,3\cos\theta\,d\theta = \frac{40}{3}\int_0^{\alpha_1}9\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= 60\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\alpha_1} = 60\left(\alpha_1+\frac{12}{25}\right)$$

이고, 같은 방식으로 $B_3 = \int_0^{12/5}\frac{30}{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$, $x=4\sin\theta$, $\frac{3}{5}=\sin\alpha_2$ 라 두면,

$$B_3 = \frac{30}{4}\int_0^{\alpha_2}\sqrt{16-16\sin^2\theta}\,4\cos\theta\,d\theta = \frac{30}{4}\int_0^{\alpha_2}16\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= 60\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\alpha_2} = 60\left(\alpha_2+\frac{12}{25}\right)$$

이다. 따라서

$$V=2\pi(B_1+B_2-B_3)=\frac{112}{5}\pi+120\pi(\alpha_1-\alpha_2)$$

(단, α_1 , α_2 는 예각이고 $\sin\alpha_1=\frac{4}{5}$, $\sin\alpha_2=\frac{3}{5}$ 이다.)

논제 2-1

(대학발표 예시답안)

일차변환 f 에 의해 임의의 점 (x, y) 가 (x', y') 으로 옮겨진다고 하면 $x'=2x$, $y'=x+3y$ 이다. 그러므로 $x=\frac{x'}{2}$, $y=\frac{-x+2y}{6}$ 이고 이 값을 포물선의 방정식 $y=\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x$ 에 대입해 풀면, $y'=x'^2$ 을 얻는다. 그러므로 옮겨진 포물선의 방정식은 $y=x^2$ 이다.

한편, 점 $(3, 0)$ 에서 포물선 $y=x^2$ 위의 임의의 점 (r, r^2) 에 이르는 거리를 제곱한 함수를 $d(t)$ 라고 하면 $d(t)=(t-3)^2+t^4$ 이고 이 식을 t 로 미분하면

$$d'(t)=4t^3+2t-6$$

이다. 이때 우변은 $2(t-1)(2t^2+2t+3)$ 으로 인수분해가 되고 $2t^2+2t+3$ 은 판별식이 음수이므로 $t=1$ 이 $d'(t)=0$ 의 유일한 실근임을 알 수 있다. 함수 $y=d(t)$ 는 사차함수이므로 점 $(1, d(1))$ 에서 유일한 극솟점을 갖고 $d(t)$ 는 $t=1$ 에서 최솟값을 갖는다. 그러므로 함수 $\sqrt{d(t)}$ 는 $t=1$ 에서 최솟값 $\sqrt{5}$ 를 갖는다.

논제 2-2

(대학발표 예시답안)

일차변환 f, g 를 나타내는 행렬은 각각 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이다. 이제 일차변환 h 를 나타내는 행렬을 구해보자. 좌표평면 위의 임의의 점 (x, y) 에 일차변환 h 에 의해 (x', y') 으로 옮겨진다고 하면, $\left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}\right)$ 는 직선 $y=mx$ 위에 있고 $\dfrac{y'-y}{x'-x}=-\dfrac{1}{m}$ 이다.

이 식을 정리하면 $\begin{cases} mx'-y'=-mx+y \\ x'+my'=x+my \end{cases}$ 을 얻는다.

연립해서 풀면 $x'=\dfrac{1-m^2}{m^2+1}x+\dfrac{2m}{m^2+1}y$, $y'=\dfrac{2m}{m^2+1}x+\dfrac{m^2-1}{m^2+1}y$ 을 얻는다.

그러므로 구하는 행렬은 $\dfrac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$ 이다.

제시문 [가]에 의해 합성변환 $f\circ h\circ g\circ h\circ f$ 를 나타내는 행렬 B 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이 행렬의 곱을 계산하면 $B=\dfrac{1}{(m^2+1)^2}\begin{pmatrix} 4m^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\dfrac{4m^2}{(m^2+1)^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이다. 그러므로 $\alpha_n=\left(\dfrac{4m^2}{(m^2+1)^2}\right)^n$ 이다. 수열 $\{\alpha_n\}$ 은 초항과 공비가 $\left(\dfrac{2m}{m^2+1}\right)^2$ 인 등비수열이므로 무한급수 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$ 은 $-1<\dfrac{2m}{m^2+1}<1$ 일 때에만 존재한다. $m\neq\pm1$ 인 모든 실수에 대해 이 부등식은 성립한다. 가정에 의해 $m\neq0$ 이므로 $m\neq-1, 0, 1$ 인 경우에만 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$ 이 존재하고 그 합은 $\dfrac{\dfrac{4m^2}{(m^2+1)^2}}{1-\dfrac{4m^2}{(m^2+1)^2}}=\dfrac{4m^2}{(m^2-1)^2}$ 이다.

논제 2-3

(대학발표 예시답안)

직접 이항계수를 계산해보면 구하는 식

$$(2\times1)_7C_2E+(3\times2)_7C_3A+(4\times3)_7C_4A^2+(5\times4)_7C_5A^3+(6\times5)_7C_6A^4+(7\times6)_7C_7A^5 \quad \cdots\cdots \ (1)$$

은 $(7\times6)(A^5+{}_5C_1A^4+{}_5C_2A^3+{}_5C_3A^2+{}_5C_4A+E)$ 이 됨을 보일 수 있다. 제시문 [나]에

의해 $(A+E)^5=A^5+{}_5C_1A^4+{}_5C_2A^3+{}_5C_3A^2+{}_5C_4A+E$ 이므로 식 (1) 은

$$42\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{5} & -\sin\frac{2\pi}{5}\\ \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5}\end{pmatrix}=42\begin{pmatrix}\cos2\pi & -\sin2\pi\\ \sin2\pi & \cos2\pi\end{pmatrix}=42E$$

이다.

논제 2-4

(대학발표 예시답안)

먼저 임의의 각 θ 에 대해 삼각함수의 배각공식을 사용하면 다음을 보일 수 있다.

$$\begin{pmatrix}\cos2\theta-1 & -\sin2\theta\\ \sin2\theta & \cos2\theta-1\end{pmatrix}=-2\sin\theta\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ -\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}$$

문제에서 주어진 행렬 A 는 위 행렬에 $\theta=\frac{\pi}{5}$ 를 대입하여 얻을 수 있다. 그런데

$$\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ -\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}$$

이므로 $\begin{pmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}$ 은 $\theta-\frac{\pi}{2}$ 만큼 회전변환을 나타내는 행렬이다. 그러므로

$$\begin{pmatrix}\cos2\theta-1 & -\sin2\theta\\ \sin2\theta & \cos2\theta-1\end{pmatrix}^7=(-2\sin\theta)^7\begin{pmatrix}\cos7\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin7\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin7\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) & \cos7\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}$$

이다. 이로부터

$$\begin{aligned}A^7&=\left(-2\sin\frac{\pi}{5}\right)^7\begin{pmatrix}-\sin\frac{7\pi}{5} & -\cos\frac{7\pi}{5}\\ \cos\frac{7\pi}{5} & -\sin\frac{7\pi}{5}\end{pmatrix}\\ &=\left(-2\sin\frac{\pi}{5}\right)^7\begin{pmatrix}\sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5}\\ -\cos\frac{2\pi}{5} & \sin\frac{2\pi}{5}\end{pmatrix}=-\left(2\sin\frac{\pi}{5}\right)^7\begin{pmatrix}\sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5}\\ -\cos\frac{2\pi}{5} & \sin\frac{2\pi}{5}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

을 얻을 수 있다. 다시 한 번 삼각함수의 배각공식을 이용하면

$$A^7=-\left(2\sin\frac{\pi}{5}\right)^7\begin{pmatrix}2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} & 1-2\sin^2\frac{\pi}{5}\\ -1+2\sin^2\frac{\pi}{5} & 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\end{pmatrix}$$

이고 $s=\sin\frac{\pi}{5}$ 라 놓으면 $\cos\frac{\pi}{5}=\sqrt{1-s^2}$ 이므로 $A^7=-2^7s^7\begin{pmatrix}2s\sqrt{1-s^2} & 1-2s^2\\ 1-2s^2 & 2s\sqrt{1-s^2}\end{pmatrix}$

이다.

19 서울시립대학교 수시

문제 1

좌표공간에서 점 $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$ 와 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

임을 보여라. (100점)

문제 2

포물선 $y=x^2+8x+15$ 와 직선 $y=x+5$ 로 둘러싸인 영역을 x축 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라. (100점)

문제 3

실수 전체에서 정의된 함수 $f(x)$ 는 다음 두 조건을 모두 만족시킨다.

(1) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$ 이다.
(2) $-1 \le x < 1$ 일 때 $f(x)=2-\left\|x-\frac{1}{2}\right\|-\left\|x+\frac{1}{2}\right\|$ 이다.

자연수 n 에 대하여 직선 $y=-\frac{1}{2n}x+\frac{n}{2}$ 과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{99} a_k$ 의 값을 구하여라. (100점)

문제 4

다음 물음에 답하여라.

(a) 삼각함수의 덧셈정리와 배각의 공식을 이용하여 다음을 증명하여라. (20점)

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

(b) 중간값의 정리를 활용하여 $100\cos\frac{4\pi}{9}$ 의 정수 부분을 구하여라. (80점)

필요하면 다음 표를 이용하여라.

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x^3	1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6859

배경지식 쌓기

1. 점과 평면 사이의 거리

점 $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 와 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

2. 회전체의 부피

닫힌구간 $[a,\ b]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 를 x 축을 회전축으로 하여 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V 는

$$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

3. 주기함수

함수 $f(x)$ 의 정의역에 속하는 실수 x 에 대하여,

$$f(x+p)=f(x)$$

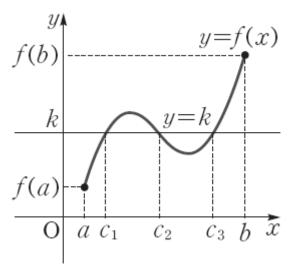
를 만족시키는 0 이 아닌 상수 p 가 존재할 때 함수 $f(x)$ 를 **주기함수**라 하고, 이런 상수 p 중에서 최소인 양수를 그 함수의 **주기**라고 한다.
예를 들어 $\sin x=\sin(x+2\pi)$, $\cos x=\cos(x+2\pi)$ 이므로 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 는 주기가 2π 인 주기함수이다.

4. 중간값의 정리 (사잇값 정리)

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a,\ b]$ 에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$ 이면, $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k 에 대하여

$$f(c)=k$$

인 c 가 열린구간 $(a,\ b)$ 에 적어도 하나 존재한다.

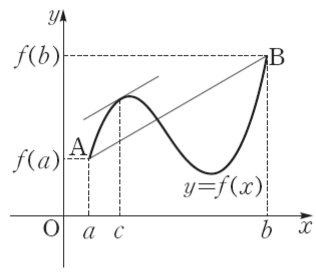


5. 평균값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$ 에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$ 에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.



풀어보기

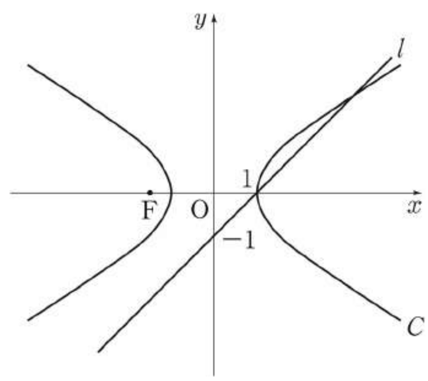
문제 1

좌표공간에서 직선 $l : \dfrac{x}{2}=6-y=z-6$ 과 평면 α 가 점 $\mathrm{P}(2, 5, 7)$ 에서 수직으로 만난다. 직선 l 위의 점 $\mathrm{A}(a, b, c)$ 와 평면 α 위의 점 Q 에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=6$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은? (단, $a>0$) (2015년 대수능)

① 15　　② 16　　③ 17　　④ 18　　⑤ 19

문제 2

그림과 같이 직선 $l : x-y-1=0$ 과 한 초점이 점 $\mathrm{F}(c, 0)$ (단, $c<0$)인 쌍곡선 $C : x^2-2y^2=1$ 이 있다.



직선 l 과 쌍곡선 C 로 둘러싸인 부분을 y 축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? (2014년 대수능)

① $\dfrac{5}{3}\pi$　　② $\dfrac{3}{2}\pi$　　③ $\dfrac{4}{3}\pi$　　④ $\dfrac{7}{6}\pi$　　⑤ π

문제 3

정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le \pi\}$ 인 함수 $f(x)=2x\cos x$ 에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (2012년 대수능)

[보 기]

ㄱ. $f'(a)=0$ 이면 $\tan a=\dfrac{1}{a}$ 이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극댓값을 가지는 a 가 구간 $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ 에 있다.

ㄷ. 구간 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 에서 방정식 $f(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2 이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 4

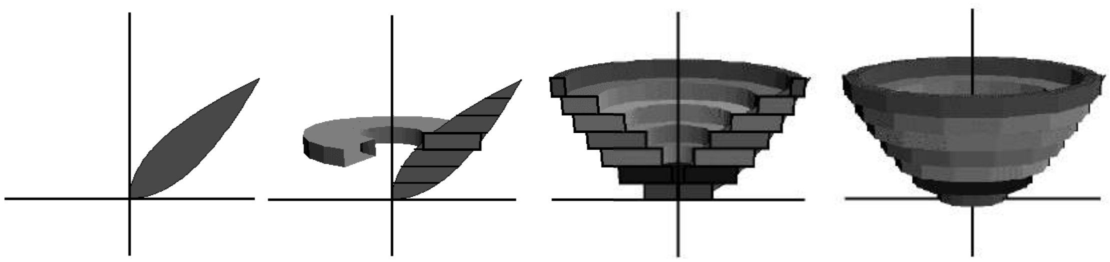
모든 실수에 대하여 정의된 함수 $f(x)$ 는 $f(x)=x^2 \quad (-1 \le x \le 1)$ 과 $f(x+2)=f(x)$ 를 만족하는 주기함수이다. 좌표평면 위에서 각 자연수 n 에 대하여 직선 $y=\dfrac{1}{2n}x+\dfrac{1}{4n}$ 과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와의 교점의 개수를 a_n 이라고 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 의 값은? (1997년 대수능)

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

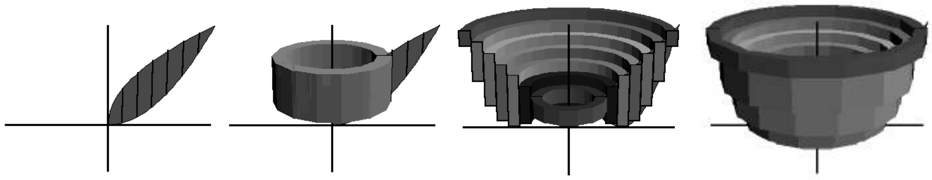
읽기자료

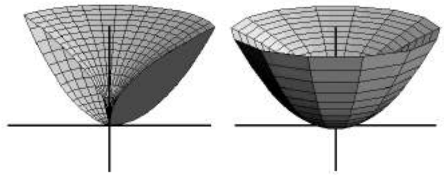
와셔법(Washer Method)과 원통각법(Cylindrical Shell Method)

회전체의 부피를 구하는 대표적인 방법으로 와셔법(Washer Method)이 있다. 고등학교 교육과정에 나오는 회전체의 부피를 구하는 방법이 와셔법이다. 아래 색칠된 영역을 세로축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피를 구할 때, 회전축에 수직이 되게 자른 단면에 근접하는 직사각형을 회전시켜 원통의 부피를 구할 수 있다. 그런 원통들의 부피를 모두 더하면 회전체의 부피의 근삿값을 얻게 된다. 이때 자르는 구간의 크기를 한없이 작게 하면 이 근삿값은 구하고자 하는 부피에 가까워지므로 이 근삿값의 극한값으로 구하고자 하는 부피를 구한다.



그런데 원통각법(Cylindrical Shell Method, 원기둥껍질법, 원통껍질법)은 아래 그림을 보면 와셔법과는 조금 다른 것을 확인할 수 있다. 원통각법은 회전 입체를 회전축에서 가장 바깥쪽으로부터 한 껍질씩 벗겨가면서 그 껍질의 부피를 다 더하는 식이다. 즉, 회전축에 평행하게 자른 단면에 근접하는 직사각형을 회전시켜 원통의 부피를 구한다. 그런 원통들의 부피를 모두 더하면 회전체의 부피의 근삿값을 얻게 된다. 이때 자르는 구간의 크기를 한없이 작게 하면 이 근삿값은 구하고자 하는 부피에 가까워지므로 이 근삿값의 극한값으로 구하고자 하는 부피를 구한다.



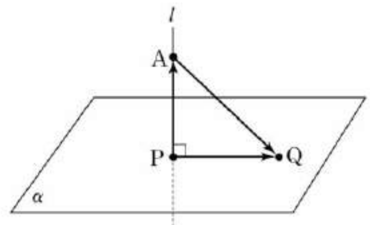


출처 : http://cafe.naver.com/advancedplacement/149

예시답안

풀어보기

문제 1



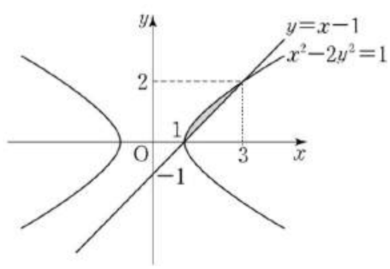
평면 α의 방정식을 구하면 $2x-y+z-6=0$이다. 점과 평면 사이의 거리 공식에 의해 $\dfrac{|2a-b+c-6|^2}{6}=6$이다. 한편, $\dfrac{a}{2}=6-b=c-6$을 만족하므로 방정식을 a에 관하여 나타내면 $|3a-6|^2=36$이다. $a>0$이므로 $a=4$이다. 따라서 $b=4$, $c=8$이다.

$\therefore a+b+c=16$ 답 ②

문제 2

직선과 쌍곡선이 만나는 교점을 구하기 위해 두 식을 연립하여 풀면

$x^2-2(x-1)^2=1$, $x^2-2(x^2-2x+1)=1$, $x^2-4x+3=0$ $\therefore x=1, 3$



그러므로 만나는 교점은 $(1, 0)$, $(3, 2)$이다.

직선 l과 쌍곡선 C로 둘러싸인 부분을 y축 둘레로 회전한 부피를 구하면

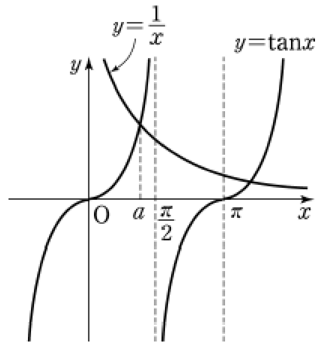
$$V_y=\pi\int_0^2\left\{(y+1)^2-(2y^2+1)\right\}dy$$

$$=\pi\int_0^2(-y^2+2y)\,dy=\frac{\pi}{6}(2-0)^3=\frac{4}{3}\pi$$ 답 ③

문제 3

ㄱ. $f(x)=2x\cos x$에서 $f'(x)=2\cos x-2x\sin x$이다. $f'(a)=2\cos a-2a\sin a=0$

이므로 $\tan a=\dfrac{\sin a}{\cos a}=\dfrac{\sin a}{a\sin a}=\dfrac{1}{a}$ [참]



ㄴ. $f'(x)=2\cos x(1-x\tan x)=0$ 에서 $\cos x=0$ 또는 $\tan x=\frac{1}{x}$

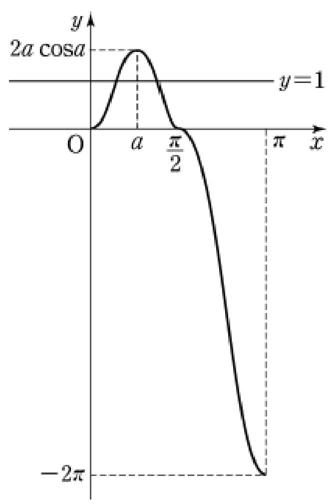
$\tan x=\frac{1}{x}$ 의 근을 a 라 하면 $0<a<\frac{\pi}{2}$ 이다. 함수 $f(x)$ 의 증감표를 그려보면

x	0		a		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	2	$+$	0	$-$	0	$-$	-2
$f(x)$	0	↗	$2a\cos a$	↘	0	↘	-2π

그러므로 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극댓값을 가진다.

구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $y=\frac{1}{x}$ 은 감소함수, $y=\tan x$ 는 증가함수이므로 $g(x)=\tan x-\frac{1}{x}$ 은 증가함수이다. $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{4}{\pi}<0$, $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{3}{\pi}>0$ 이므로 중간값 정리(사잇값 정리)에 의해 $\frac{\pi}{4}<a<\frac{\pi}{3}$ [참]

ㄷ. $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{1}{2}>1$ 이므로 $f(a)>1$

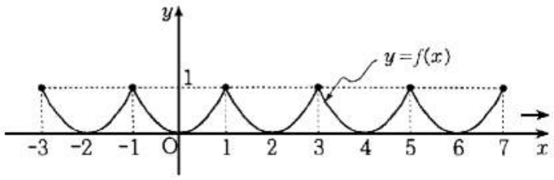


그러므로 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 $f(x)=1$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. [참]

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

문제 4

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2)=f(x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 는 주기가 2 인 함수이다. 따라서 $f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.

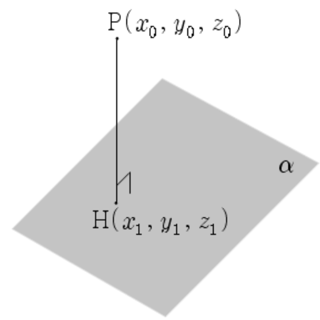


그러므로 $y=f(x)$ 와 $y=\dfrac{1}{2n}x+\dfrac{1}{4n}$ 의 교점은 $0\le y\le 1$ 의 영역에서만 존재할 수 있다. 또한 $y=\dfrac{1}{2n}x+\dfrac{1}{4n}$ 은 $\left(2n-\dfrac{1}{2},\, 1\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2},\, 0\right)$ 을 지난다. 이 두 점의 x 좌표의 차이는 $2n$ 이다. 그러므로 $y=\dfrac{1}{2n}x+\dfrac{1}{4n}$ 은 $y=f(x)$ $(-1\le x<0)$의 그래프 모양을 $n+1$ 개 통과하고 $y=f(x)$ $(0\le x<1)$의 그래프 모양을 n 개 통과한다. 따라서

$$a_n=2n+1\,,\qquad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$$

답 ③

대학출제 문제 1



평면 $ax+by+cz+d=0$ 을 평면 α 라고 하고 점 $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$ 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 점 $\mathrm{H}(x_1, y_1, z_1)$ 라고 하자. 그러면 선분 PH 의 길이가 점 $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$ 와 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리이고 $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ 는 평면 α 의 방향벡터 (a, b, c) 에 평행하다. 그러므로 $\overrightarrow{\mathrm{PH}}=t(a, b, c)$ 인 실수 t 가 존재한다. 따라서

$$(x_1-x_0,\, y_1-y_0,\, z_1-z_0)=t(a,\, b,\, c),\ \begin{cases} x_1-x_0=ta \\ y_1-y_0=tb \\ z_1-z_0=tc \end{cases},\ \begin{cases} x_1=x_0+ta \\ y_1=y_0+tb \\ z_1=z_0+tc \end{cases}$$

한편, 점 $\mathrm{H}(x_1, y_1, z_1)$ 은 평면 $ax+by+cz+d=0$ 위의 점이므로

$$ax_1+by_1+cz_1+d=0\,,\ a(x_0+ta)+b(y_0+tb)+(cz_0+tc)+d=0\,,$$

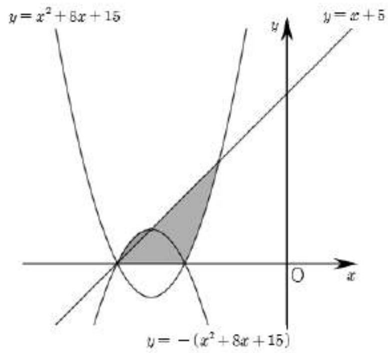
$$t=-\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}\,,\ |t|=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{a^2+b^2+c^2}$$

그러므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PH}} &= \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2} = \sqrt{(ta)^2+(tb)^2+(tc)^2} \\ &= |\,t\,|\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \frac{|\,ax_0+by_0+cz_0+d\,|}{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ &= \frac{|\,ax_0+by_0+cz_0+d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{aligned}$$

따라서 점 $\mathrm{P}(x_0,\,y_0,\,z_0)$ 와 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|\,ax_0+by_0+cz_0+d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 이다.

대학출제 문제 2



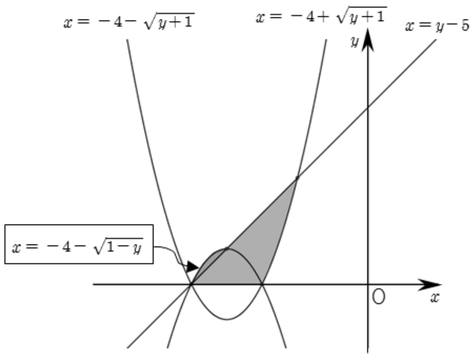
포물선 $y=x^2+8x+15$ 와 x축과의 교점은 $(-5,0)$, $(-3,0)$ 이고 $y=x^2+8x+15$ 의 꼭짓점은 $(-4,\,-1)$ 이다. 또한 $y=x^2+8x+15$ 와 $y=x+5$ 의 교점을 구하면 $(-5,0)$, $(-2,3)$ 이고 $y=-x^2-8x-15$ 와 $y=x+5$ 의 교점을 구하면 $(-5,0)$, $(-4,1)$ 이다. 따라서 회전체의 부피 V는 그림의 색칠한 부분을 x축에 대하여 회전시킨 회전체의 부피와 같으므로

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_{-5}^{-4}(x^2+8x+15)^2dx + \pi\int_{-4}^{-3}(x+5)^2dx + \pi\int_{-3}^{-2}\{(x+5)^2-(x^2+8x+15)^2\}dx \\ &= \pi\int_{-5}^{-4}(x^2+8x+15)^2dx - \pi\int_{-3}^{-2}(x^2+8x+15)^2dx + \pi\int_{-4}^{-2}(x+5)^2dx \\ &= \pi\int_{-5}^{-4}(x^4+16x^3+94x^2+240x+225)dx \\ &\quad -\pi\int_{-3}^{-2}(x^4+16x^3+94x^2+240x+225)dx + \pi\int_{-4}^{-2}(x^2+10x+25)dx \\ &= \pi\left[\frac{1}{5}x^5+4x^4+\frac{94}{3}x^3+120x^2+225x\right]_{-5}^{-4} \\ &\quad +\pi\left[\frac{1}{5}x^5+4x^4+\frac{94}{3}x^3+120x^2+225x\right]_{-3}^{-2} + \pi\left[\frac{1}{3}x^3+5x^2+25x\right]_{-4}^{-2}\end{aligned}$$

$$=\pi\left\{\frac{1}{5}\left(-4^5+5^5+2^5-3^5\right)+4\left(4^4-5^4-2^4+3^4\right)+\frac{94}{3}\left(-4^3+5^3+2^3-3^3\right)\right\}$$
$$+\pi\left\{120\left(4^2-5^2-2^2+3^2\right)+225(-4+5+2-3)\right\}$$
$$+\pi\left\{\frac{1}{3}\left(-2^3+4^3\right)+5\left(2^2-4^2\right)+25(-2+4)\right\}$$
$$=\frac{20}{3}\pi$$

(다른 풀이)

원통각법(Cylindrical Shell Method, 원기둥겹질법, 원통겹질법)을 이용한 풀이

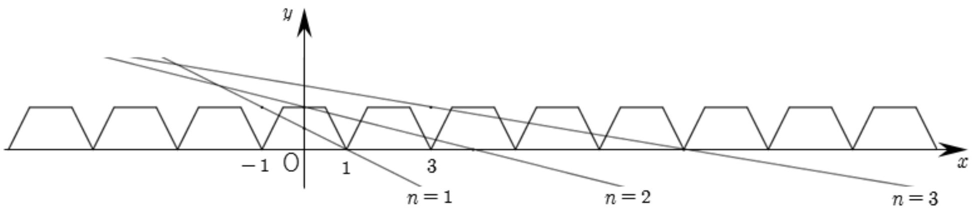


$$V=2\pi\int_0^1 y\{-4+\sqrt{y+1}+4+\sqrt{1-y}\}dy+2\pi\int_1^3 y\{-4+\sqrt{y+1}-y+5)dx$$
$$=2\pi\int_0^1 y\sqrt{y+1}\,dy+2\pi\int_0^1 y\sqrt{1-y}\,dy+2\pi\int_1^3(y-y^2)\,dy+2\pi\int_1^3 y\sqrt{y+1}\,dy$$
$$=2\pi\int_0^3 y\sqrt{y+1}\,dy+2\pi\int_0^1 y\sqrt{1-y}\,dy+2\pi\int_1^3(y-y^2)\,dy$$
$$(\sqrt{y+1}=t,\ y=t^2-1,\ dy=2t\,dt,\ \sqrt{1-y}=s,\ y=1-s^2,\ dy=-2s\,ds)$$
$$=4\pi\int_1^2\left(t^4-t^2\right)dt-4\pi\int_1^0(s^2-s^4)\,ds+2\pi\int_1^3(y-y^2)\,dy$$
$$=\frac{20}{3}\pi$$

대학출제 문제 3

$-1 \le x < 1$일 때 $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & (-1 \le x < -\frac{1}{2}) \\ 1 & (-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}) \\ -2x+2 & (\frac{1}{2} \le x < 1) \end{cases}$ 이고 $f(x+2) = f(x)$ 이므로

$y=f(x)$ 의 그래프 개형은 아래 그림과 같다. $n=1, 2, 3$ 일 때의 $y= -\frac{1}{2n}x+\frac{n}{2}$ 의 그래프도 같이 나타내었다.



$y=f(x)$ 와 $y= -\frac{1}{2n}x+\frac{n}{2}$ 의 교점은 $0 \le y \le 1$ 의 영역에서만 존재할 수 있다. 또한 $y= -\frac{1}{2n}x+\frac{n}{2}$ 은 $(n(n-2), 1)$, $(n^2, 0)$ 을 지난다. 이 두 점의 x 좌표의 차이는 $2n$ 이다. 그러므로 $y= -\frac{1}{2n}x+\frac{n}{2}$ 은 $y=f(x)$ $(-1 < x \le 1)$의 그래프 모양을 n 개 통과한다. 1 개 통과할 때마다 교점이 2 개씩 생겨서 $2n$ 개 생기는데, n 이 짝수일 때는 첫 번째 교점 $(n(n-2), 1)$ 이 1 개 더 추가된다. 따라서

$$a_n = \begin{cases} 2n & (n\text{은 홀수}) \\ 2n+1 & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$$

이고

$$\sum_{k=1}^{99} a_k = 2\sum_{k=1}^{99} k + 49 = 9900 + 49 = 9949$$

따라서 $\sum_{k=1}^{99} a_k = 9949$ 이다.

대학출제 문제 4

(1) $\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta = (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta$

$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta = 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$$

$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

(2) $\alpha = 100\cos\frac{4\pi}{9}$ 라고 두면, (1)의 3배각 공식에 의해서

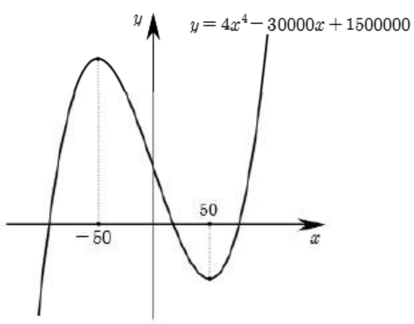
$\cos\frac{4\pi}{3} = 4\cos^3\frac{4\pi}{9} - 3\cos\frac{4\pi}{9}$, $-\frac{1}{2} = 4\left(\frac{\alpha}{100}\right)^3 - 3\left(\frac{\alpha}{100}\right)$, $4\alpha^3 - 30000\alpha + 500000 = 0$

그러므로 함수 $f(x) = 4x^3 - 30000x + 500000$ 이라고 두면 $f(\alpha) = 0$ 이다. 또한,

$f'(x) = 12x^2 - 30000 = 0$ 에서 $x = \pm 50$ 이고

$$f(-50) = 4(-50)^3 - 30000(-50) + 500000 = 1500000\ ,$$

$$f(50) = 4(50)^3 - 30000(50) + 500000 = -500000$$



그러므로 $f(x) = 0$ 인 양수 x 는 50 보다 큰 것이 1 개 있고 50 보다 작은 것이 1 개 있다. 또한, $f(x) = 4x^3 - 30000x + 500000$ 은 닫힌구간 $[17, 18]$ 에서 연속이고

$$f(17) = 4\times 17^3 - 30000\times 17 + 500000 = 4\times 4913 - 30000\times 17 + 500000 = 9652 > 0,$$

$$f(18) = 4\times 18^3 - 30000\times 18 + 500000 = 4\times 5832 - 30000\times 17 + 500000 = -16672 < 0$$

이므로 중간값 정리(사잇값 정리)에 의하여 $4x^3 - 30000x + 500000 = 0$ 인 50 보다 작은 양수 x 는 $17 < x < 18$ 이다. $f(\alpha) = 0$ 이고 $0 < \alpha = 100\cos\frac{4\pi}{9} < 100\cos\frac{\pi}{3} = 50$ 이므로 $17 < \alpha < 18$ 이다. 그러므로 $100\cos\frac{4\pi}{9}$ 의 정수부분은 17 이다.

20 성균관대학교 모의

[수학1]

다음 <제시문1>과 <제시문2>를 읽고 [수학 1－ⅰ] ～ [수학1－ⅲ]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.21)

<제시문 1>

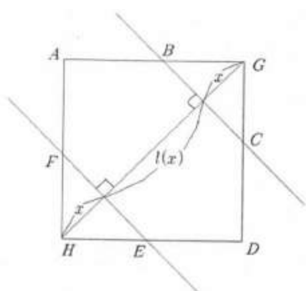
함수 $f(x)$ 에서 x 가 a 와 다른 값을 가지면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값 이 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면 $f(x)$ 는 α 에 수렴한다고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

와 같이 나타낸다.

<제시문 2>

다음 그림과 같이 대각선의 길이가 $2a$ 인 정사각형을 세부분으로 나누려고 한다. (단, $a > 0$)



$(0 < x < a)$

수학 1－ⅰ $0 < x < a$ 에 대하여 육각형 ABCDEF 의 넓이 $S(x)$ 를 구하시오.

수학 1－ⅱ 정삭각형 AGDH 의 넓이가 삼등분되기 위한 x 의 값을 구하시오.

수학 1－ⅲ 극한값 $\lim_{x \to a} \dfrac{S(x)}{l(x)}$ 의 값을 구하시오.

---

21) 성균관대학교 입학처

[수학2]

다음 <제시문1> - <제시문4>를 읽고 [수학 2-ⅰ] ~ [수학2-ⅳ]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.[22)]

<제시문1>

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

<제시문2>

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$ 이 서로 수직이기 위한 필요충분조건은

$$mm'=-1$$

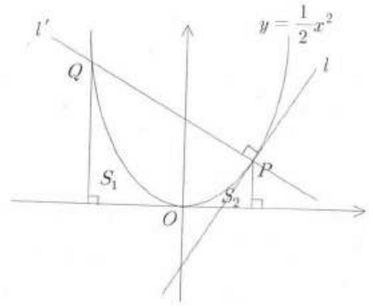
<제시문3>

함수 $f(x)$ 가 구간 $[a,\ b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

<제시문4>

다음 그림과 같이 포물선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 $P(a,\ \frac{1}{2}a^2)$ 에서의 접선을 l 이라 하고, 접선 l 과 수직인 직선 l' 이 포물선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 과 만나는 점을 Q 라 하자(단, $a>0$)



수학 2-ⅰ 접선 l 의 방정식을 구하시오.

수학 2-ⅱ 포물선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 Q 의 좌표를 구하시오.

수학 2-ⅲ S_1 과 S_2 의 넓이를 구하시오.

수학 2-ⅳ 모든 $a>0$ 에 대하여 S_1 과 S_2 는 넓이가 같지 않음을 논증하시오.

22) 성균관대학교 입학처

배경지식 쌓기

1. 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.
즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선은 점 $(a,\ f(a))$를 지나고 기울기가 $f'(a)$인 직선이다.

따라서 접선의 방정식은

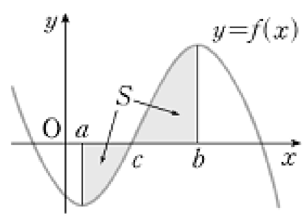
$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

이다.

2. 정적분과 넓이

1) 곡선과 x축 사이의 넓이

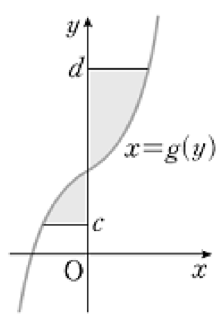
구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는



$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

2) 곡선과 y축 사이의 넓이

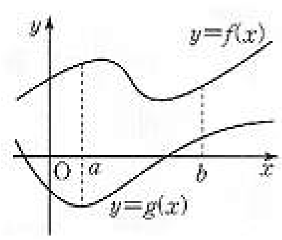
구간 $[c,\ d]$에서 연속인 함수 $x=g(y)$의 그래프와 y축 및 두 직선 $y=c,\ y=d$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는



$$S=\int_c^d |g(y)|\,dy$$

3) 두 곡선 사이의 넓이

구간 $[a,\ b]$에서 연속인 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는



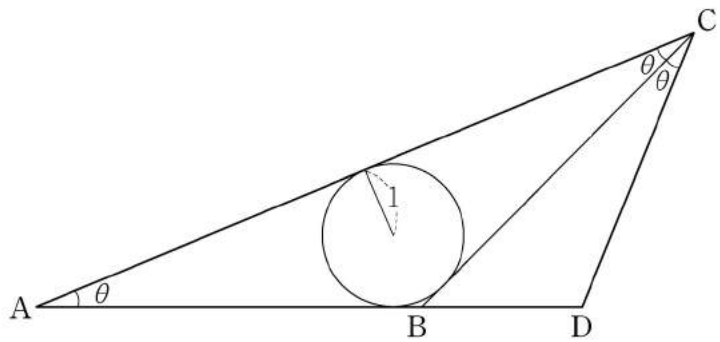
$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

풀어보기

문제 1

그림과 같이 반지름의 길이가 1 인 원에 외접하고 $\angle CAB = \angle BCA = \theta$ 인 이등변삼각형 ABC 가 있다. 선분 AB 의 연장선 위에 점 A 가 아닌 점 D 를 $\angle DCB = \theta$ 가 되도록 잡는다. 삼각형 BCD 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \{\theta \times S(\theta)\}$ 의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) (2015학년도 대수능 B형)

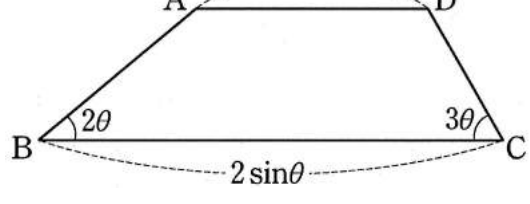


① $\frac{2}{3}$　② $\frac{8}{9}$　③ $\frac{10}{9}$　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{14}{9}$

문제 2

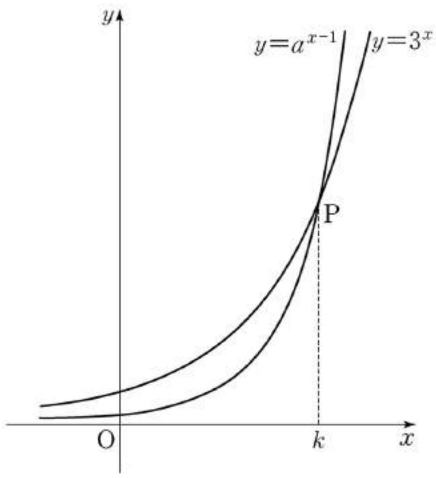
그림과 같이 사다리꼴 ABCD 에서 변 AD 와 변 BC 가 평행하고 $\angle B = 2\theta$, $\angle C = 3\theta$, $\overline{BC} = 2\sin\theta$, $\overline{AD} = \sin\theta$ 이다. 사다리꼴 ABCD 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) (2014년 6월 모의평가)



문제 3

$a>3$ 인 상수 a 에 대하여 두 곡선 $y=a^{x-1}$ 과 $y=3^x$ 이 점 P 에서 만난다. 점 P 의 x 좌표를 k 라 하자.



점 P 에서 곡선 $y=3^x$ 에 접하는 직선이 x 축과 만나는 점을 A , 점 P 에서 곡선 $y=a^{x-1}$ 에 접하는 직선이 x 축과 만나는 점을 B 라 하자. 점 $\mathrm{H}(k, 0)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AH}}=2\overline{\mathrm{BH}}$ 일 때, a 의 값은? (2015학년도 대수능 B형)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

문제 4

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=f(x)\ln x^4$$

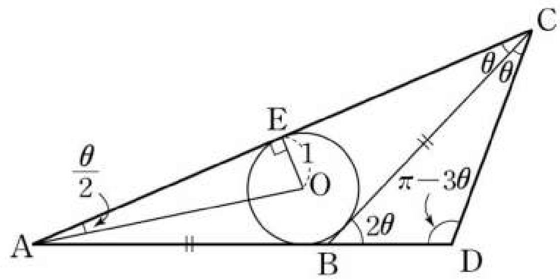
이라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e,\ -e)$ 에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e,\ -4e)$ 에서의 접선이 서로 수직일 때, $100f'(e)$ 의 값을 구하시오.

(2014년 6월 모의평가)

예시답안

풀어보기

문제 1



$\overline{AC} = 2\cot\frac{\theta}{2}$, 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{AC}}{\sin 2\theta} = \frac{\overline{AB}}{\sin\theta}$, $\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{\cot\frac{\theta}{2}}{\cos\theta}$

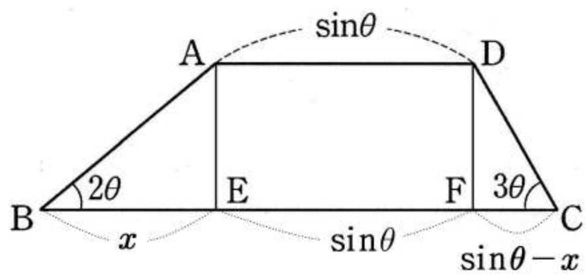
다시 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{AC}}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{\overline{CD}}{\sin\theta}$, $\overline{CD} = \frac{2\sin\theta\cot\frac{\theta}{2}}{\sin 3\theta}$

$S(\theta) = \frac{\sin\theta}{2}\overline{BC}\cdot\overline{CD}$

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\{\theta\times S(\theta)\} = \frac{4}{3}$$

문제 2

점 A, F 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 E, F 라 하면



$\overline{BE} + \overline{CF} = \overline{BC} - \overline{AD}$ 이므로 $\frac{h}{\tan 2\theta} + \frac{h}{\tan 3\theta} = 2\sin\theta - \sin\theta$

$$\therefore h = \frac{\sin\theta}{\frac{1}{\tan 2\theta} + \frac{1}{\tan 3\theta}}$$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}(\sin\theta+2\sin\theta)\left(\frac{\sin\theta}{\frac{1}{\tan2\theta}+\frac{1}{\tan3\theta}}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\frac{1}{\tan2\theta}+\frac{1}{\tan3\theta}}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}\frac{3\sin^2\theta}{2\theta^3\left(\frac{1}{\tan2\theta}+\frac{1}{\tan3\theta}\right)}=\frac{3}{2}\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2\theta}{\tan2\theta}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3\theta}{\tan3\theta}}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{9}{5}$$

$\therefore p+q=14$

문제 3

P 에서 $y=3^x$ 에 접하는 직선을 l_1 P 에서 $y=a^{x-1}$ 에 접하는 직선을 l_2

$l_1 : y=\ln3\ 3^k(x-k)+3^k$

$l_2 : y=\ln a\ a^{k-1}(x-k)+a^{k-1}$

$A\left(k-\frac{1}{\ln3},0\right)$, $B\left(k-\frac{1}{\ln a},0\right)$ 에서 $a>3$ 이므로 B 는 A 보다 오른쪽에 있다.

따라서 B 는 A 와 H 의 중점이다.

$2\left(k-\frac{1}{\ln a}\right)=2k-\frac{1}{\ln3}$, $\qquad a=9$

문제 4

점 $(e,-e)$ 는 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(e)=-e$

$y=f(x)$ 위의 점 $(e,-e)$ 에서의 접선의 기울기를 $f'(e)=a$ 라 하자.

$y=g(x)$ 를 미분하면 $g'(x)=f'(x)\cdot\ln x^4+f(x)\cdot\frac{4}{x}$ 이고 $y=g(x)$ 위의 점 $(e,-4e)$ 에서의 접선의 기울기는 $g'(e)=f'(e)\cdot\ln e^4+f(e)\cdot\frac{4}{e}=4a-4$ 이다.

한편, $x=e$ 에서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 접선이 수직이므로

$f'(e)\times g'(e)=-1$, $a(4a-4)=-1$, $4a^2-4a+1=0$,

$(2a-1)^2=0$, $\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore 100f'(e)=100a=50$

수학 1-i

(대학발표 예시답안)

대각선의 길이가 $2a$ 인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}a$ 이므로 정사각형 AGDH 의 넓이는 $2a^2$ 이다. 또한, 삼각형 BGC 의 넓이는 x^2 이다. 따라서 육각형 ABCDEF 의
넓이 $S(x)$ 는 다음과 같다.

$$S(x) = 2a^2 - 2x^2 = 2(a^2 - x^2)$$

수학 1-ii

(대학발표 예시답안)

정사각형 AGDH 의 넓이가 삼등분되기 위해서는 삼각형 BGC 의 넓이가 정사각형 AGDH 의 넓이의 $\frac{1}{3}$이 되어야 한다. 따라서

$$\frac{2a^2}{3} = x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

수학 1-iii

(대학발표 예시답안)

대각선의 길이가 $2a$ 이므로 $l(x) = 2a - 2x$. 따라서

$$\lim_{x \to a} \frac{s(x)}{l(x)} = \lim_{x \to a} \frac{2(a^2 - x^2)}{2(a-x)} = \lim_{x \to a} \frac{2(a-x)(a+x)}{2(a-x)} = \lim_{x \to a}(a+x) = 2a$$

수학 2-i

(대학발표 예시답안)

$y = \frac{1}{2}x^2$ 이므로 $y' = x$ 이다. 따라서 <제시문1>에 의하여 접선 l 의 방정식은

$$y - \frac{1}{2}a^2 = a(x-a) \quad \Rightarrow \quad y = ax - \frac{1}{2}a^2$$

수학 2-ii

(대학발표 예시답안)

두 직선 l 과 l' 은 서로 수직이므로 <제시문2>에 의하여 직선 l' 의 기울기는 $-\frac{1}{a}$ 이다. 직선 l' 이 점 $P(a,\ \frac{1}{2}a^2)$ 를 지나므로 직선 l' 의 방정식은

$$y - \frac{1}{2}a^2 = -\frac{1}{a}(x-a) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{a}x + 1 + \frac{1}{2}a^2$$

따라서 포물선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 과 직선 l' 의 교점은

$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{a}x+1+\frac{1}{2}a^2 \quad \Rightarrow x^2+\frac{2}{a}x-a^2-2=0$$

$$\Rightarrow (x-a)\left(x+(a+\frac{2}{a})\right)=0 \quad (P(a,\ \frac{1}{2}a^2)\text{ 는 하나의 교점})$$

$$\Rightarrow Q\text{ 의 좌표는 }\left(-(a+\frac{2}{a}),\ \frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})^2\right)$$

수학 2-iii

(대학발표 예시답안)

S_1 의 넓이 $=\int_{-(a+\frac{2}{a})}^{0}\frac{1}{2}x^2dx=\frac{1}{6}(a+\frac{2}{a})^3$

S_2 의 넓이 $=\int_{0}^{a}\frac{1}{2}x^2dx=\frac{1}{6}a^3$

수학 2-iv

(대학발표 예시답안)

S_1 과 S_2 의 넓이는 같다. $\Leftrightarrow\ \frac{1}{6}(a+\frac{2}{a})^3=\frac{1}{6}a^3$

$$\Leftrightarrow\ (a+\frac{2}{a})^3=a^3$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{2}{a}=0$$

이는 모순이다. 따라서 모든 $a>0$ 에 대하여 S_1 과 S_2 의 넓이는 같지 않다.

(다른 풀이)

포물선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 은 y 축에 대칭이므로

S_1 과 S_2 의 넓이는 같다. $\Leftrightarrow\ a+\frac{2}{a}=a$

$$\Leftrightarrow\ \frac{2}{a}=0$$

이는 모순이다. 따라서 모든 $a>0$ 에 대하여 S_1 과 S_2 의 넓이는 같지 않다.

21 성균관대학교 수시(과학인재 공통)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

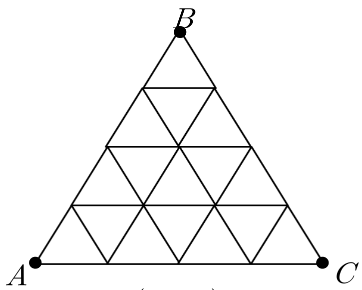
> 가. 수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 에서 각 항이 그 앞의 항에 일정한 수 d를 더해서 만들어질 때 $\{a_n\}$ 을 등차수열이라고 한다. 이 때 d를 공차라 한다.

논제 1

첫 번째 항 $a_1 = 2015$ 이고 두 번째 항 a_2 는 정수 x일 때 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 0 이 나올 수 있는 모든 정수 x의 합을 구하고 이유를 논하시오. (15점)

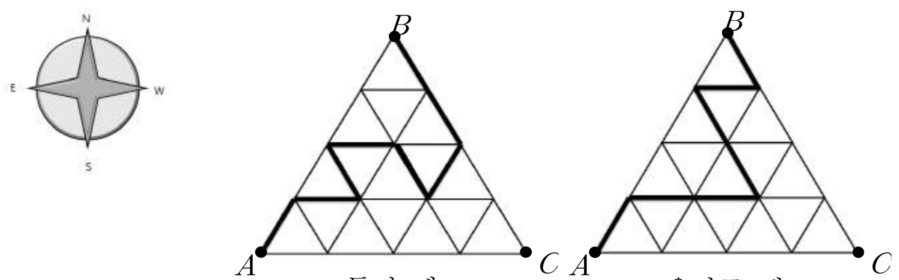
※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

> 가. 밑변이 선분 AC 이고 한 변의 길이가 n 인 정삼각형을 한 변의 길이가 1 인 정삼각형이 아래와 같이 덮고 있다.



$(n=4)$

> 나. 정삼각형의 점 A 에서 점 B 로 이동할 때 다음과 같은 규칙을 따른다.
> (1) 이전에 방문했던 점을 다시 방문하거나 같은 길을 두 번 갈 수 없다.
> (2) 현재 있는 점에서 남쪽으로는 갈 수 없다.



틀린 예 올바른 예

논제 2-1

제시문 나에서 점 A 에서 점 B 로 이동할 때 가능한 경로의 수를 p_n 이라 할 때 p_n 을 n 으로 표현하고 그 이유를 논하시오. (10점)

논제 2-2

위 문제에서 제시한 p_n 이 $1000000 = 10^6$ 의 배수가 되는 최소 n 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오. (5점)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

> 가. 원 C는 원점을 중심으로 하고 반지름이 2 인 원이다.
> 나. 직선 l_1, l_2 는 점 $(1,0)$ 을 지나고 서로 수직이다.
> 다. 직선 l_1 과 원 C가 만나는 두 점을 A, B 라 하고, 직선 l_2 와 원 C가 만나는 두 점을 C, D 라 한다.

논제 3

선분 AB 의 길이와 선분 CD 의 길이의 곱이 최대가 되는 직선 l_1, l_2 를 구하고 그 이유를 논하시오. (15점)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

> 가. 두 실수 a, b 는 $0 < a, b < 1$, $a + b \le 1$ 을 만족한다. 이 때 A, B, C, D, E 는 다음과 같다.
>
> $$A = \{(x,y) | x^2 + y^2 < 1\}$$
> $$B = \{(x,y) | x < a\}$$
> $$C = \{(x,y) | x < a + b\}$$
> $$D = \{(x,y) | y < 2\}$$
> $$E = \{(x,y) | x > 0, y > 0\}$$
>
> 나. $A^c \cap B^c \cap C \cap D \cap E$ 의 넓이와 $A \cap C^c \cap E$ 의 넓이는 같다.
> 다. $0 < a < 1$ 이므로 $a = \sin t$ 라 나타낼 수 있다. 이 때 실수 t 가 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에 존재한다.

논제 4-1

위의 제시문에서 b 와 t 사이의 관계에 대해 논하시오. (10점)

논제 4-2

a 가 0 으로 다가갈 때 b 는 어떻게 되는지 논하시오. (5점)

배경지식 쌓기

1. 등차수열

첫째항에 차례로 일정한 수를 더하여 얻어진 수열을 '등차수열'이라 하고, 그 일정한 수를 '공차'라고 한다.

수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항이 a, 공차가 d 일 때, 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = a + (n-1)d$$

2. 수열의 귀납적 정의

수열에서 이웃하는 항 a_n 과 a_{n+1} 의 관계식$(n \geq 1)$ 으로 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의하고 하며, 이 때 서로 이웃하는 항 사이의 관계식을 점화식이라고 한다.
특히, $a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$ 꼴의 점화식을 풀이하는 방법은 다음과 같다.

(1) $f(n)$ 이 상수이면 수열 $\{a_n\}$ 은 (공비)$=f(n)$ 인 등비수열이다.

(2) $f(n)$ 이 변수이면

[방법 1] 하나씩 수를 대입하여($n=1, n=2, n=3 \cdots$) 규칙을 찾는다.

[방법 2] n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$ 을 대입하여 변변 곱한다.

[방법 3] 공식을 이용한다.

$$a_n = a_1 \times f(1) \times f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(n-1)$$

3. 직선의 방정식과 두 직선의 위치관계

한 점 $A(x_1, y_1)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은 $y - y_1 = m(x - x_1)$ 이다.
한편, 두 직선 $l : y = mx + n$ 과 $l' : y = m'x + n'$ 에 대하여

(1) l 과 l' 이 한 점에서 만난다. $\Leftrightarrow m \neq m'$

(2) l 과 l' 이 평행하다. $\Leftrightarrow m = m'$, $n \neq n'$

(3) l 과 l' 이 일치한다. $\Leftrightarrow m = m'$, $n = n'$

(4) l 과 l' 이 수직이다. $\Leftrightarrow m \times m' = -1$

4. 치환적분법

$I = \int_a^b f(x) f'(x) dx$ 를 계산하기 위하여 다음과 같이 치환적분을 할 수 있다.

$f(x) = t$ 로 두면

$x = a$ 일 때, $t = f(a)$ 이고, $x = b$ 일 때, $t = f(b)$ 이고, $dx = \dfrac{1}{f'(x)} dt$ 이므로

$I = \int_a^b f(x) f'(x) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} t dt$ 이다.

풀어보기

문제 1

첫째항이 30 이고 공차가 $-d$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 등식

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} = 0$$

을 만족시키는 두 자연수 m, k 가 존재하도록 하는 자연수 d 의 개수는?
(2014년 3월 전국연합평가)

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

문제 2

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고 $2\left(a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots\cdots + \frac{1}{n}a_n\right) = a_{n+1} - 1\ (n \geq 1)$ 을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정의 일부이다.

> 주어진 식으로부터 $a_2 = \boxed{\text{(가)}}$ 이다.
> $S_n = a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots\cdots + \frac{1}{n}a_n$ 이라 두면
> $2(S_n - S_{n-1}) = (a_{n+1} - 1) - (a_n - 1)\ (n \geq 2)$
> 이므로 $\frac{2}{n}a_n = a_{n+1} - a_n$ 이다. 즉,
> $a_{n+1} = \boxed{\text{(나)}} \times a_n\ (n \geq 2)$ $\cdots$ ㉠ 이다.
> ㉠의 양변의 n 에 $2, 3, \cdots, n-1$ 을 차례대로 대입하여 얻은 식들을 변변 곱하여 정리하면
> $a_n = \boxed{\text{(다)}} \times a_2$
> 이다.
> ⋮

위의 (가)에 알맞은 수를 α, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $\alpha \times f(2) \times g(2)$ 의 값은? (2014년 8월 영남권 연합평가)

① 6 ② 12 ③ 18 ④ 24 ⑤ 30

문제 3

$\int_{e^2}^{e^3} \frac{a + \ln x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x)\cos x\, dx$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은?
(2014년 4월 전국연합평가)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

예시답안

풀어보기

문제 1

정답 : ②

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 30 이고 공차가 $-d$ 인 등차수열이므로

$$a_n = 30-(n-1)d \ (n \ge 1)$$

주어진 식에서

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m+k} = \frac{(k+1)\{30-(m-1)d+30-(m+k-1)d\}}{2}$$
$$= \frac{(k+1)\{60-(2m+k-2)d\}}{2} = 0$$

이고, 이 때, $k+1>0$ 이므로

$$(2m+k-2)d = 60$$
$$2m+k = 2+\frac{60}{d} \quad \cdots ㉠$$

이다.

㉠을 만족하는 자연수 m, k 이 존재하기 위해서는 d 가 60 의 약수이어야 한다.

즉, $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ 이므로 d 의 개수는 $3 \times 2 \times 2 = 12$ 이다.

문제 2

정답 : ①

주어진 식에 $n=1$ 을 대입하면 $2a_1 = a_2 - 1$ 이므로 $a_2 = 3$ 이다.

$S_n = a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots\cdots + \frac{1}{n}a_n$ 라 하자.

$2(S_n - S_{n-1}) = (a_{n+1}-1)-(a_n-1)$ $(n \ge 2)$ 이므로

$$\frac{2}{n}a_n = a_{n+1} - a_n$$
$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \times a_n \quad \cdots ㉠$$

㉠의 양변의 n 에 $2, 3, \cdots, n-1$ 을 차례대로 대입하여 얻은 식들을 변변 곱하여 정리하면

$a_n = \frac{n(n+1)}{6} \times a_2$ 이다.

즉, $\alpha = 3$, $f(n) = \frac{n+2}{n}$, $g(n) = \frac{n(n+1)}{6}$ 이다.

그러므로, $\alpha \times f(2) \times g(2) = 3 \times \frac{4}{2} \times \frac{2\times 3}{6} = 6$ 이다.

문제 3

정답 : ②

주어진 등식의 좌변에서 $\ln x = s$ 라 하면

$$\int_{e^2}^{e^3} \frac{a+\ln x}{x}\,dx = \int_2^3 (a+s)\,ds = \left[as+\frac{1}{2}s^2\right]_2^3 = a+\frac{5}{2}$$

주어진 등식에서 $\sin x = t$ 라 하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin x)\cos x\,dx = \int_0^1 (1+t)dt = \left[t+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

이므로 $a+\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$ 이다. 따라서, $a=-1$ 이다.

논제 1

등차수열 $\{a_n\}$ 의 항 중에 0 이 나오려면 공차가 $-$(2015 의 양의 약수)이다.

2015 의 양의 약수를 구하기 위하여 이를 소인수분해하면

$2015=5\times13\times31$ 이다. 2015 의 양의 약수의 개수가 8 개이다.

따라서

$$x=2015-1,\ 2015-5,\ 2015-13,\ 2015-31,\ 2015-5\times13,$$
$$2015-5\times31,\ 2015-13\times31,\ 2015-5\times13\times31$$

이므로 모든 정수 x 의 합은

$$2015\times7-(1+5+13+31+5\times13+5\times31+13\times31)=14105-673=13432$$

(대학발표 예시답안)

수열의 일반항은 $a_n = 2015+(n-1)(x-2015)$ 이므로 $n-1=\dfrac{2015}{2015-x}$ 를 만족하는 자연수 n이 존재하는 x를 구하면 된다. 즉, $2015-x$ 는 2015 의 약수이다.

$2015=5\times13\times31$ 이므로 $2015-x=5^a\times13^b\times31^c$, $a, b, c\in\{0, 1\}$ 이다.

따라서, $\sum(2015-x)=(1+5)(1+13)(1+31)=2688$ 이다.

그러므로, $\sum x = 8\times2015-2688=13432$ 이다.

논제 2-1

점 A 에서 점 B 로 이동할 때 가능한 경로의 수를 p_n 이라 하면

$$p_n = 2n\times p_{n-1}\ (n\ge2),\ p_1=2$$

그러므로

$$p_n = 2\times4\times6\times\cdots\times2n = 2^n\cdot n!$$

(대학발표 예시답안)

밑변 AC 에서 바로 위 선분으로 이동할 수 있는 방법의 가짓수는 $1+2(n-1)+1=2n$ 이다. 바로 다음 윗 선분으로 이동할 수 있는 방법의 가짓수는 $2(n-1)$ 이므로 따라서 총 이동경로의 수는

$$p_n=(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times4\times2=2^n\cdot n!$$

논제 2-2

p_n 이 10^6 의 배수가 되려면 p_n 이 5^6 을 약수로 가져야 하므로

$n!$ 이 5^6 을 약수로 가지는 최소의 수는 25 이다.

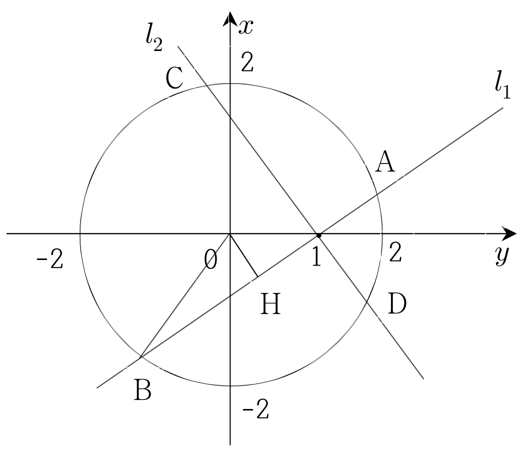
(대학발표 예시답안)

$10^6=2^6\times5^6$ 이다. $2^n n!$ 을 소인수분해했을 때, 2 의 지수가 5 의 지수보다 크므로, 5 의 지수가 6 이상이 되는 가장 작은 자연수 n 을 찾으면 된다.

다시 말해, $\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]+\cdots\geq6$ 인 자연수 n 을 찾아야 한다.

따라서 $n\geq25$ 이고 최소자연수는 $n=25$ 이다.

논제 3



직선 l_1 의 기울기를 m 이라고 두면 직선 l_2 의 기울기는 $-\frac{1}{m}$ 이므로

두 직선 l_1 과 l_2 는 다음과 같다.

$$\begin{cases} l_1: y=m(x-1) \\ l_2: y=-\frac{1}{m}(x-1) \end{cases}$$

삼각형 OHB 가 직각삼각형이므로

$$\overline{AB}=2\overline{HB}=2\sqrt{4-\frac{m^2}{1+m^2}}=2\sqrt{\frac{3m^2+4}{1+m^2}}$$

이고, 같은 방법으로

$$\overline{CD}=2\sqrt{\frac{4m^2+3}{1+m^2}}$$

따라서

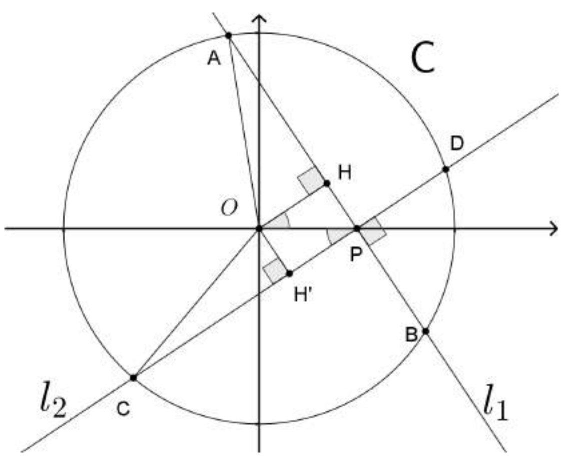
$$\overline{AB}\times\overline{CD}=4\sqrt{\frac{3m^2+4}{1+m^2}}\sqrt{\frac{4m^2+3}{1+m^2}}=4\sqrt{(3+\frac{1}{1+m^2})(4-\frac{1}{1+m^2})}$$

$$=4\sqrt{-(\frac{1}{1+m^2}-\frac{1}{2})+\frac{49}{4}}$$

이므로 $\frac{1}{1+m^2}=\frac{1}{2}$ 일 때, 최댓값 14 을 갖는다. 그러므로 $m=\pm1$ 이다.

따라서 두 직선은 $y=\pm(x-1)$ 이다.

(다른 풀이)



원점 O에서 직선 l_1에 그은 수선의 발을 H라 하고, l_2에 그은 수선의 발을 H′라 하자.

P(1, 0)와 원점, H가 이루는 각을 α라 하면(l_1이 P를 중심으로 회전 할 때 x축을 기준으로 $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$) ,

$\overline{OH}=\cos\alpha$, $\overline{HA}=\sqrt{2^2-\cos^2\alpha}$

그러므로 $\overline{AB}=2\sqrt{2^2-\cos^2\alpha}$

$\overline{OH}//\overline{H'P}$ 이므로 $\angle OPH'=\alpha$가 된다.

$\overline{OH'}=\sin\alpha$, $\overline{H'C}=\sqrt{2^2-\sin^2\alpha}$

그러므로 $\overline{CD}=2\sqrt{2^2-\sin^2\alpha}$

$$\overline{\mathrm{AB}} \cdot \overline{\mathrm{CD}} = 2\sqrt{2^2-\cos^2\alpha} \cdot 2\sqrt{2^2-\sin^2\alpha}$$
$$= 4\sqrt{16-4\sin^2\alpha-4\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$
$$= 4\sqrt{12+\frac{1}{4}(2\sin\alpha\cos\alpha)^2}$$
$$= 4\sqrt{12+\frac{1}{4}(\sin 2\alpha)^2}$$

그러므로 $2\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$일 때 최대값을 가진다. $\alpha=\pm\frac{\pi}{4}$이고 $\angle\mathrm{OPH}=\frac{\pi}{4}$가 되어 l_1, l_2의 기울기는 ±1이고 직선의 식은 $y=\pm(x-1)$이 된다.

(대학발표 예시답안)

제시문의 원의 방정식은 $O:\ x^2+y^2=4$ 이다.

일반성을 잃지 않고 l_1 과 l_2 를 각각 다음과 같이 적을 수 있다.

$$y=m(x-1) \qquad \cdots (1)$$
$$y=-\frac{1}{m}(x-1) \qquad \cdots (2)$$

대칭성에 의해 $m\geq 0$ 인 경우만 생각하면 된다. $m=0$ 인 경우는 $l_1: y=0$, $l_2: x=1$ 로 생각한다. (1)과 원 O를 연립하면

$$(m^2+1)x^2-2m^2x+m^2-4=0$$

이를 풀면

$$A:\left(\frac{m+\sqrt{3m^2+4}}{m^2+1}, \frac{m(-1+\sqrt{3m^2+4}\,)}{m^2+1}\right),\ B:\left(\frac{m^2-\sqrt{3m^2+4}}{m^2+1}, \frac{m(-1-\sqrt{3m^2+4}\,)}{m^2+1}\right)$$

같은 방법으로 (2)과 원 O를 연립하면

$$C:\left(\frac{1+m\sqrt{4m^2+3}}{m^2+1}, \frac{m-\sqrt{4m^2+3}}{m^2+1}\right),\ D:\left(\frac{1-m\sqrt{4m^2+3}}{m^2+1}, \frac{m+\sqrt{4m^2+3}}{m^2+1}\right)$$

따라서

$$\overline{\mathrm{AB}} = \left\{\left(\frac{2\sqrt{3m^2+4}}{m^2+1}\right)^2+\left(\frac{2m\sqrt{3m^2+4}}{m^2+1}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3m^2+4}}{\sqrt{m^2+1}}$$

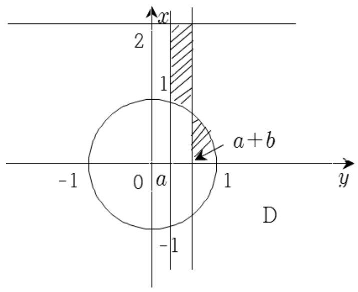
$$\overline{\mathrm{CD}} = \left\{\left(\frac{2m\sqrt{4m^2+3}}{m^2+1}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{4m^2+3}}{m^2+1}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{4m^2+3}}{\sqrt{m^2+1}}$$

따라서 산술 기하 평균을 이용하여

$$\overline{\mathrm{AB}}^{\,2}\times\overline{\mathrm{CD}}^{\,2} = 16\left(\frac{12m^4+24m^2+12}{(m^2+1)^2}\right) = 16\left(12+\frac{m^2}{(m^2+1)^2}\right)$$
$$= 16\left(12+\frac{1}{(m+\frac{1}{m})^2}\right) \leq 16(12+\frac{1}{4}) = 196$$

이고 최댓값은 $m=1$ 일 때 성립한다. 즉, 두 직선이 점 $(1,0)$ 을 각각 45 도와 -45 도로 통과할 때 최댓값을 가진다.

논제 4-1



$A^c \cap B^c \cap C \cap D \cap E$ 와 $A \cap C^c \cap E$가 위의 그림과 같으므로

$$2b - \int_a^{a+b} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{a+b}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \quad \Rightarrow \quad 2b = \int_a^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$x = \sin u$ 로 치환하면

$$2b = \int_t^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,du = \int_t^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du = \int_t^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2}du$$

$$= \left[\frac{u}{2} + \frac{1}{4}\sin 2u\right]_t^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t$$

따라서, $b = \frac{\pi}{8} - \frac{t}{4} - \frac{1}{8}\sin 2t$

(대학발표 예시답안)

제시문 (나)로부터 $A^c \cap B^c \cap C \cap D \cap E$와 $A \cap B^c \cap C \cap E$의 합집합의 넓이는 영역 $A \cap C^c \cap E$과 영역 $A \cap B^c \cap C \cap E$의 합집합의 넓이와 같음을 알 수 있다. 이것으로부터 다음의 식을 얻는다.

$$2b = \int_a^1 \sqrt{1-y^2}\,dy \quad \cdots (1)$$

우변을 풀기 위해 $y = \sin\theta$ 로 두고 치환적분법을 적용하면 제시문 (다)에 의해

$$\int_a^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = \int_t^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta = \int_t^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_t^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{\pi - 2t - \sin 2t}{4} \quad \cdots (2)$$

(1)과 (2)로 부터 다음의 관계식을 얻는다.

$$8b = \pi - 2t - \sin 2t \quad \cdots (3)$$

논제 4-2

$a \to 0$ 이면 $t \to 0$ 이므로 $b \to \frac{\pi}{8}$ 이다.

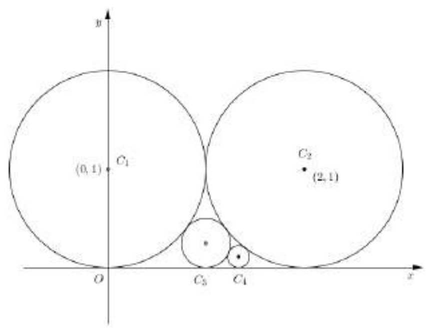
(대학발표 예시답안)

a가 0으로 접근하면 t도 0으로 접근한다. 따라서 (3)으로부터 b는 $\frac{\pi}{8}$로 수렴함을 알 수 있다.

22 성균관대학교 수시(과학인재 선택)

문제 1 [15점] ※ 다음 제시문을 읽고 답하시오.

가. 아래 그림과 같이 중심이 $(0, 1)$ 이고 반지름이 1 인 원과 중심이 $(2, 1)$ 이고 반지름이 역시 1 인 원을 각각 C_1, C_2 라고 한다. 그리고 C_1, C_2 와 x 축에 동시에 접하는 원을 C_3 이라고 한다. 이런 방법으로 임의의 자연수 n 에 대하여 원 C_n 과 원 C_{n+1} 그리고 x 축에 동시에 접하는 원을 C_{n+2} 라고 한다. (단, $C_n \neq C_{n+3}$ 이다.)



나. 원 C_n 의 반지름을 r_n 이라고 한다.

극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{r_{n+1}}{r_n}$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

문제 2 [15점] ※ 다음 제시문을 읽고 답하시오.

가. 함수 $f(x) = \cos(\pi x)$ 로 정의한다.

나. 배각의 공식에 의해, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

[2-1] [10점] 함숫값 $f\left(\frac{1}{5}\right)$ 이 유리수인지 무리수인지를 판별하고 그 이유를 논하시오.

[2-2] [5점] 세 개의 자연수 a_1, a_2, a_3 을 집합 $A = \{3, 4, 5\}$ 에서 중복을 허락하여 임의로 선택할 때, $f\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{5}\right)$ 이 유리수가 될 확률을 구하고 그 이유를 논하시오.

문제 3 [15점] ※ 다음 제시문을 읽고 답하시오.

가. $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ 는 $x \geq 0$ 에서 정의된 함수들이다.

나. $n=0, 1, 2, \cdots$ 에 대하여 다음의 관계가 성립한다.

$$f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(y)dy, \quad x \geq 0$$

$$f_0(x)=\frac{1}{(1+x)^3}$$

n 의 값이 무한대로 감에 따라 $f_n(1)$ 의 값이 어떻게 될지 논하시오.

문제 4 [15점] ※ 다음 제시문을 읽고 답하시오.

가. $u(x)$ 는 실수에서 정의된 두 번 미분 가능한 함수이다.

나. 양의 실수 r 이 존재하여 $u(1)=r\times u(0)$ 과 $u'(1)=r\times u'(0)$ 을 만족한다.

다. 닫힌구간 $[0, 1]$ 의 모든 x 에 대하여, $u(x)\neq 0$ 이고 $u'(x)\neq 0$ 이다.

라. 함수 $u''(x)$ 는 연속이다.

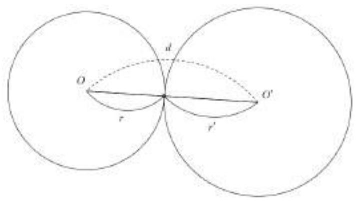
$\dfrac{u''(\alpha)}{u(\alpha)}>0$ 을 만족하는 α 가 닫힌구간 $[0, 1]$ 안에 적어도 하나가 존재함을 논하시오.

배경지식 쌓기

1. 원의 외접

두 원의 중점 사이의 거리는 각 원의 반지름의 길이의 합과 같다.

$$d=r+r'$$



2. 피보나치 수열

앞의 두 개 항을 더한 것이 다음 항인 수의 배열을 피보나치 수열이라 하고 다음과 같은 수열이다.

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ \cdots$$

$\{a_n\}$ 을 피보나치 수열이라 하면 이 수열의 점화식은 $\begin{cases} a_1=a_2=1 \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n\geq 1) \end{cases}$

이다.

3. 적분의 비교 성질

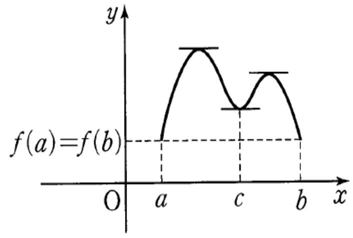
가. $a\leq x\leq b$ 인 x 에 대하여 $f(x)\geq 0$ 이면, $\int_a^b f(x)dx\geq 0$ 이다.

나. $a\leq x\leq b$ 인 x 에 대하여 $f(x)\geq g(x)$ 이면, $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$ 이다.

다. $a\leq x\leq b$ 인 x 에 대하여 $m\leq f(x)\leq M$ 이면,

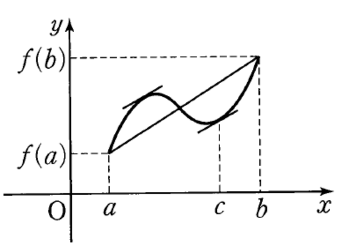
$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$ 이다.

4. 평균값의 정리



가. 롤의 정리

함수 $y=f(x)$ 가 닫힌구간 $[a,\ b]$ 에서 연속이고, 열린구간 $(a,\ b)$ 에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$ 이면 $f'(c)=0$ 인 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.



나. 평균값의 정리

함수 $y=f(x)$ 가 닫힌구간 $[a,\ b]$ 에서 연속이고, 열린구간 $(a,\ b)$ 에서 미분가능할 때, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 가 되는 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

풀어보기

문제 1

정의역이 $\{x|x>-1\}$ 인 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x^3)^2}$ 이고, $g(x)=x^2$ 일 때, $\displaystyle\int_0^1 f(x)g'(x)dx=\frac{1}{6}$ 이다. $f(1)$ 의 값은? (2012학년도 대수능 6월 모의평가)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{5}{18}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{7}{18}$

문제 2

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 가 $f(-1)=-1$, $f(0)=1$, $f(1)=0$ 을 만족시킬 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?
(2007학년도 대수능 9월 모의평가)

[보 기]

ㄱ. $f(a)=\frac{1}{2}$ 인 실수 a 가 구간 $(-1, 1)$ 에 두 개 이상 존재한다.

ㄴ. $f'(b)=-1$ 인 실수 b 가 구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 한 개 존재한다.

ㄷ. $f''(c)=0$ 인 실수 c 가 구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 한 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예시답안

풀어보기

문제 1

$$\int_0^1 f(x)g'(x)dx$$
$$= [f(x)g(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x)g(x)dx = \{f(1)g(1) - f(0)g(0)\} - \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx$$
$$= f(1) - \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx \ (\because g(1)=1,\ g(0)=0) \qquad \cdots ㉠$$

$1+x^3=t$ 라 두자. $dt=3x^2dx$ 이고 $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx = \int_1^2 \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{6}$$

따라서 ㉠에서

$$f(1) - \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx = f(1) - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \text{ 이므로 } f(1) = \frac{1}{3}$$

문제 2

ㄱ. $f(x)$ 는 미분가능하므로 연속함수이다.

$f(-1)=-1$, $f(0)=1$ 이므로 중간값의 정리에 의하여 $f(c_1)=\frac{1}{2}$ 인 실수 c_1 이 구간 $(-1, 0)$ 에 적어도 한 개 존재한다.

또한, $f(0)=1$, $f(1)=0$ 이므로 $f(c_2)=\frac{1}{2}$ 인 실수 c_2 가 구간 $(-1, 0)$ 에 적어도 한 개 존재한다.

따라서 $f(a)=\frac{1}{2}$ 인 실수 a 가 구간 $(-1, 1)$ 에 두 개 이상 존재한다. (참)

ㄴ. $g(x)=f(x)+x$ 로 놓으면 $f(x)$ 가 연속함수이므로 $g(x)$ 도 연속함수이다.
$g(0)=f(0)+0=1+0=1$이고 $g(1)=f(1)+1=0+1=1$
이므로 롤의 정리에 의하여
$g'(b)=0$ 인 실수 b 가 구간 $(0, 1)$ 에 적어도 한 개 존재한다.
$g'(x)=f'(x)+1$ 이므로 $g'(b)=f'(b)+1=0$ 에서 $f'(b)=-1$
따라서 $f'(b)=-1$ 인 실수 b 가 구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 한 개 존재한다. (참)

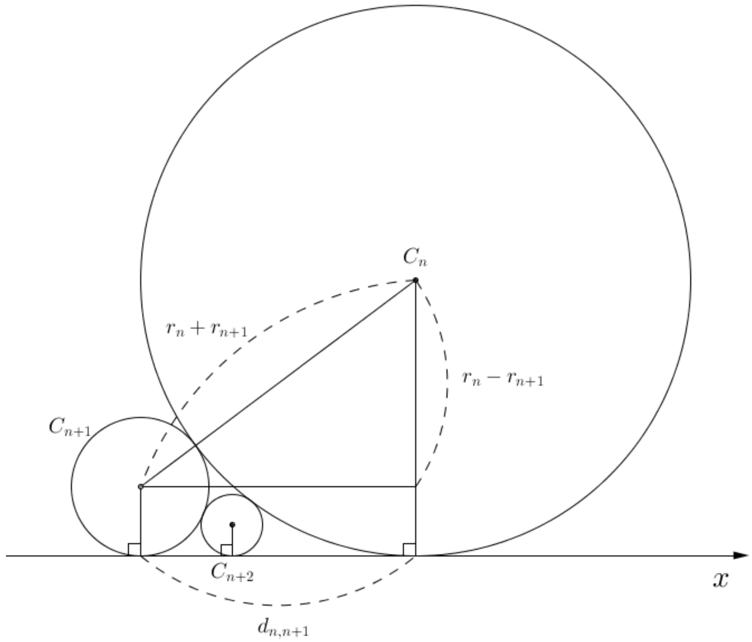
ㄷ. [반례] $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$ 이면 $f(-1)=-1$, $f(0)=1$, $f(1)=0$ 이지만

$f'(x)=-3x+\frac{1}{2}$, $f''(x)=-3$ 이므로 $f''(c)=0$ 인 실수 c 는 존재하지 않는다. (거짓)

대학출제 문제 1

(대학발표 예시답안)

원 C_n 과 원 C_m 의 중심으로부터 x 축으로 내린 수선의 발 사이의 거리를 $d_{n,m}$ 이라고 하자.



원 C_n 과 원 C_{n+1} 으로부터 $(r_n+r_{n+1})^2 = d_{n,n+1}^2 + (r_n - r_{n+1})^2$ 를 얻게 되고, 이를 간단히 하면 $d_{n,n+1} = 2\sqrt{r_n r_{n+1}}$ 를 얻게 된다.

마찬가지로, $d_{n+1,n+2} = 2\sqrt{r_{n+1}r_{n+2}}$ 와 $d_{n,n+2} = 2\sqrt{r_n r_{n+2}}$ 가 성립한다.

$d_{n,n+1} = d_{n,n+2} + d_{n+1,n+2}$ 이므로, $2\sqrt{r_n r_{n+1}} = 2\sqrt{r_{n+1}r_{n+2}} + 2\sqrt{r_n r_{n+2}}$ 이다.

따라서 $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ 이고, $r_1 = r_2 = 1$ 이므로, $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ 은 피보나치 수열이다.

$\sqrt{\dfrac{r_{n+1}}{r_{n+2}}} = \sqrt{\dfrac{r_{n+1}}{r_n}} + 1$ 이므로, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{r_{n+1}}{r_n}} = x$ 라고 하면, $\dfrac{1}{x} = x+1$.

즉, $x^2 + x - 1 = 0$ 을 만족한다.

따라서 $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 가 되므로 $x^2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 이다.

대학출제 문제 2-1

(대학발표 예시답안)

$x=f\left(\frac{1}{5}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ 라고 하면, 배각의 공식에 의해 $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=2x^2-1$ 이다.

다시 배각의 공식에 의해 $-x=\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=2\left(2x^2-1\right)^2-1$ 이다.

즉, $8x^4-8x^2+x+1=0$ 이고, 이는 $(x+1)(2x-1)\left(4x^2-2x-1\right)=0$ 로 인수분해 되므로, 가능한 해는 $x=-1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$ 이다.

한편, $0<\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)<1$ 이므로 $x=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ 이고 이는 무리수이다.

(다른 풀이)

$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ 가 무리수라고 가정하면 $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{q}{p}$ 이다. (단, p, q 는 서로소인 정수, $p\neq 0$)

배각의 공식에 의해 $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)^2-1=2\frac{q^2}{p^2}-1$ 이므로 $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+1=2\frac{q^2}{p^2}$ 이다.

따라서 $p^2\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+1\right\}=2q^2$ $\cdots$ ①이 되어 p 는 짝수가 된다.

$p=2n$ (단, n 은 정수) 을 ① 식에 대입하면 $2n^2\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+1\right\}=q^2$ 이 되어 q 역시 짝수가 된다. 이는 p, q 가 서로소인 정수라는 사실에 모순되므로 $f\left(\frac{1}{5}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ 은 무리수이다.

대학출제 문제 2-2

(대학발표 예시답안)

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-1$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

이므로, n 이 5 의 배수일 때, $\cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)$ 는 유리수가 된다.

$9 \le a_1 + a_2 + a_3 \le 15$ 이므로, $a_1 + a_2 + a_3 = 10$ 또는 15 이다.

각각의 경우가 발생하는 가짓수는 3 가지와 1 가지이므로 총 4 가지이다.

따라서 확률은 $\frac{4}{3^3}$ 이다.

대학출제 문제 3

(대학발표 예시답안)

$f_0(x) = \frac{1}{(1+x)^3} \le 1$ 임을 이용하여 계산하면

$$f_1(x) = \int_0^x f_0(y)dy = \int_0^x \frac{1}{(1+y)^3}dy \le \int_0^x 1dy = x$$

$$f_2(x) = \int_0^x f_1(y)dy \le \int_0^x ydy = \frac{x^2}{2}$$

$$f_3(x) = \int_0^x f_2(y)dy \le \int_0^x \frac{y^2}{2}dy = \frac{x^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$f_n(x) \le \frac{x^n}{n!} \quad \cdots (1)$$

마찬가지로

$$f_1(x) = \int_0^x f_0(y)dy = \int_0^x \frac{1}{(1+y)^3}dy \ge \int_0^x 0dy = 0$$

$$f_2(x) = \int_0^x f_1(y)dy \ge \int_0^x 0dy = 0$$

$$\vdots$$

$$f_n(x) \ge 0 \quad \cdots (2)$$

(1), (2) 를 종합하면

$0 \le f_n(x) \le \frac{x^n}{n!}$ 이고 $x=1$ 을 대입하고 극한을 취하면 $0 \le \lim_{n\to\infty} f_n(1) \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!} = 0$

따라서 $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 0$

대학출제 문제 4

(대학발표 예시답안)

(나), (다) 에 의해

$$\frac{u'(1)}{u(1)}-\frac{u'(0)}{u(0)}=0 \ \cdots \ (1)$$

또한 (가), (다), (라) 에 의해 $\frac{u''}{u}$ 와 $\left(\frac{u'}{u}\right)^2$ 는 구간 $[0, 1]$ 에서 적분가능하다.

따라서 (1) 과 부분 적분 공식에 의해 다음 부등식을 얻을 수 있다.

$$\int_0^1 \frac{u''(x)}{u(x)}dx = \int_0^1 \frac{1}{u(x)}(u'(x))' dx$$

$$= \frac{u'(1)}{u(1)}-\frac{u'(0)}{u(0)}-\int_0^1 \left(\frac{1}{u(x)}\right)' u'(x)dx \ \cdots \ (2)$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{u'(x)}{u(x)}\right)^2 dx > 0$$

만약 정의역의 모든 점에서 $\frac{u''(x)}{u'(x)} \le 0$ 이라면 $\int_0^1 \frac{u''}{u}dx \le 0$ 가 되어 부등식 (2) 와 모순이다.

따라서 $\frac{u''(\alpha)}{u'(\alpha)}>0$ 이 되는 α 가 $[0, 1]$ 안에 적어도 하나는 존재해야 한다.

(다른 풀이)

$f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ 라 두면 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$ 에서 미분가능하다.

한편, (나), (다)에 의해 $\frac{u'(0)}{u(0)}=\frac{u'(1)}{u(1)}$ 이므로 $f(0)=\frac{u'(0)}{u(0)}=\frac{u'(1)}{u(1)}=f(1)$ 이다.

따라서 롤의 정리에 의해 $f'(\alpha)=\frac{u''(\alpha)u(\alpha)-(u'(\alpha))^2}{(u(\alpha))^2}=\frac{u''(\alpha)}{u(\alpha)}-\left(\frac{u'(\alpha)}{u(\alpha)}\right)^2=0$ 을 만족하는 α 가 열린구간 $(0, 1)$ 안에 적어도 하나 존재한다.

즉, $\frac{u''(\alpha)}{u(\alpha)}=\left(\frac{u'(\alpha)}{u(\alpha)}\right)^2>0$ 을 만족하는 α 가 열린구간 $(0, 1)$ 안에 적어도 하나 존재한다.

23 성균관대학교 논술우수전형(자연 1교시)[23]

1. 다음 <제시문1> ~ <제시문4>를 읽고 [수학1-ⅰ] ~ [수학1-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

점 (x_1, y_1, z_1)과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 이다.

<제시문2>

밑면의 반지름이 r이고 높이가 h인 원뿔의 부피는 $V=\dfrac{\pi r^2 h}{3}$ 이다.

<제시문3>

실수 $0<t<3$에 대하여, 좌표공간의 세 점 $P_1(t,0,0)$, $P_2(0,t,0)$, $P_3(0,0,t)$를 꼭지점으로 가지는 삼각형의 내접원을 C_t라고 한다.

<제시문4>

밑면이 내접원 C_t이고 꼭지점의 좌표가 $Q(1,1,1)$인 원뿔을 V_t라고 한다.

수학 1-i 점 $\mathrm{Q}(1,1,1)$에서 <제시문3>의 세 점 P_1, P_2, P_3을 지나는 평면까지의 거리를 t에 관한 식으로 나타내고 그 이유를 논하시오.

수학 1-ii <제시문3>의 내접원 C_t의 반지름을 구하고 그 이유를 논하시오.

수학 1-iii 원뿔 V_t의 부피의 최댓값을 구하고 그 이유를 논하시오.

23) 성균관대학교 입학처

2. 다음 <제시문1> ~ <제시문4>를 읽고 [수학2-ⅰ] ~ [수학2-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

함수 $f(x)$가 어떤 구간의 임의의 두 실수 $x<y$에 대하여 $f(x)<f(y)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 한다.

<제시문2>

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ 이다.

<제시문3>

닫힌 구간 $[0, 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여, 평균값을 $\int_0^1 f(x)dx$로 정의하고 증가폭을 $f(1)-f(0)$으로 정의한다.

<제시문4>

무리수 $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\cdots$ 로 정의한다.

수학 2-i 함수 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)$로 정의하자.

(가) $\int_0^1 f(x)dx$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(나) 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 M이라 할 때,

$M < f(1)-f(0)+\int_0^1 f(x)dx$ 임을 보이고 그 이유를 논하시오.

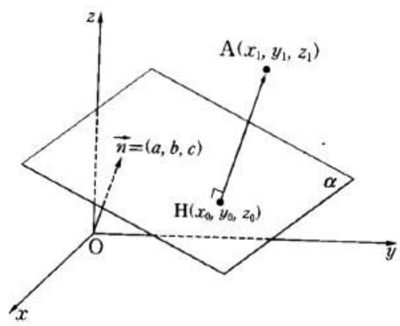
수학 2-ii 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 정의된, 연속이고 증가하는 임의의 함수 $g(x)$에 대하여 $g(x)$의 함수값이 평균값과 증가폭의 합보다 클 수 없음을 보이고 그 이유를 논하시오.

수학 2-iii 함수 $h(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}(4x+1)\right)$은 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 증가하는 함수가 아니다. 이 구간에서 $h(x)$의 함수값이 평균값과 증가폭의 합보다 클 수 없음을 보이고 그 이유를 논하시오.

배경지식쌓기

1. 점과 평면 사이의 거리

> 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 에서 평면 $ax+by+cz+d=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라고 할 때, 점 A 와 평면 사이의 거리는
>
> $$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



[증명] 평면 위에 있지 않은 한 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 에서 평면 $ax+by+cz+d=0$ 에 내린 수선의 발을$\mathrm{H}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 라 하면 점 A 와 평면사이의 거리는 $\overline{\mathrm{AH}}=|\overrightarrow{\mathrm{HA}}|$ 와 같다.

이 때, 평면의 법선벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ 와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{HA}}$ 가 평행하므로 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}}=\pm|\vec{n}|\,|\overrightarrow{\mathrm{HA}}|$ 이다.

즉, $|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}}|=|\vec{n}|\,|\overrightarrow{\mathrm{HA}}|$ 이므로

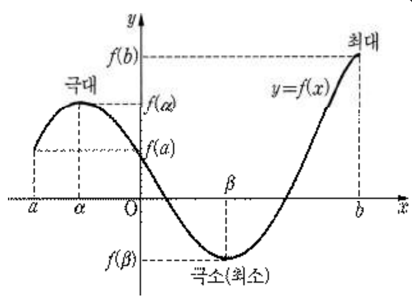
$$|\overrightarrow{\mathrm{HA}}|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}}|}{|\vec{n}|}$$

$$=\frac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

여기서 H 는 평면 위의 점이므로 $ax_0+by_0+cz_0=-d$

$$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{HA}}|=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

2. 함수의 최대, 최소

> 닫힌 구간 $[a,\ b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값
>
> 
>
>
> ① 닫힌 구간 $[a,\ b]$ 에서 극댓값, 극솟값을 구한다.
>
> ② 닫힌 구간 $[a,\ b]$ 의 양끝에서의 함수값 $f(a),\ f(b)$ 를 구한다.
>
> ③ 위의 ①, ②에서 구한 값들 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

풀어보기

문제 1

$\int_{e}^{e^3} \frac{\ln x}{x} dx$ 의 값은? (2015학년도 6월 모의평가 수학B형)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

문제 2

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\int_{0}^{x}(a-t)e^t dt$의 최댓값이 32이다. 곡선 $y=3e^x$과 두 직선 $x=a$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. (2015학년도 대수능 수학B형)

문제 3

세 점 A(1, 1, 1), B(0, 1, 0), C(1, 0, 2)를 지나는 평면을 α라 하자. 평면 α밖의 한 점 P(1, 3, 2)에서 평면에 내린 수선의 발을 P′이라 할 때, 선분 AP′의 길이는? (2015 EBS 수능특강 기하와 벡터)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

문제 4

닫힌 구간 $[1,\ e^2]$에서 정의된 함수 $f(x)=\ln x^2$에 대하여 $f(e^2)=(e^2-1)f'(c)+f(1)$을 만족시키는 상수 c의 값은? (2015 EBS 수능특강 수학Ⅱ)

① $e-1$ ② e ③ $\frac{e^2-1}{2}$
④ $e+1$ ⑤ $\frac{e^2+1}{2}$

예시답안

풀어보기

문제 1

$\ln x = t$로 치환하면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$ 이고 $x=e$일 때 $t=1$, $x=e^3$일 때 $t=3$ 이므로

$\displaystyle\int_e^{e^3}\frac{\ln x}{x}dx = \int_1^3 t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^3 = 4$ 이다.

문제 2

정적분과 미분의 관계에서

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x (a-t)e^t dt=(a-x)e^x$$

이므로

$f'(x)=0$에서 $x=a$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이자 최댓값을 갖는다.

부분적분법에 의하여

$$f(x)=\int_0^x (a-t)e^t dt = \left[(a-t)e^t\right]_0^x-\int_0^x(-e^t)dt=\left[(a-t)e^t\right]_0^x+\left[e^t\right]_0^x$$

$$=(a-x)e^x-a+e^x-1=(a+1-x)e^x-a-1$$

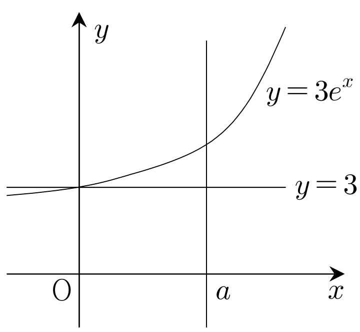
이므로 최댓값은

$$f(a)=e^a-a-1=32$$

$\therefore\ e^a-a=33\ \cdots$ ㉠

곡선 $y=3e^x$과 직선 $y=3$이 만나는 점의 x좌표를 t라 하면

$3e^t=3$에서 $t=0$



따라서 곡선 $y=3e^x$과 두 직선 $x=a$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^a (3e^x-3)dx=\left[3e^x-3x\right]_0^a=(3e^a-3a)-(3-0)=3(e^a-a)-3$$

$$=3\times 33-3\ (\because\ ㉠)=96$$이다.

문제 3

세 점 A(1, 1, 1), B(0, 1, 0), C(1, 0, 2)를 지나는 평면 α의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하면

$$a+b+c+d=0,\ b+d=0,\ a+2c+d=0$$

이다. 세 식을 연립하여 풀면

$$b=-d,\ a=-c=d$$

이다. 즉, 평면 α의 방정식은

$$dx-dy-dz+d=0$$

이다.

$\therefore\ x-y-z+1=0$

점 P(1, 3, 2)에서 평면 α에 내린 수선의 발이 P′이므로

$$\overline{\mathrm{PP'}}=\frac{|1-3-2+1|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}$$

$$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(1-1)^2+(1-3)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP'}}=\sqrt{5-3}=\sqrt{2}$

문제 4

$f(e^2)=(e^2-1)f'(c)+f(1)$에서

$$\frac{f(e^2)-f(1)}{e^2-1}=f'(c)\cdots\cdots ㉠$$

함수 $f(x)=\ln x^2$은 닫힌 구간 $[1,\ e^2]$에서 연속이고, 열린 구간 $(1,\ e^2)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여 ㉠을 만족시키는 c가 1과 e^2사이에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2}=\dfrac{2}{x}$이므로

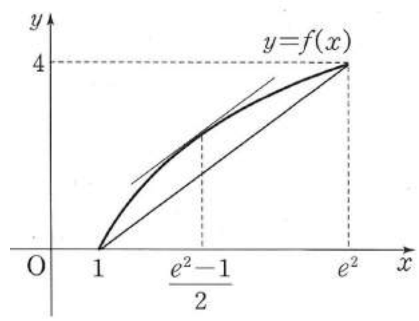
$$\frac{f(e^2)-f(1)}{e^2-1}=\frac{2}{c}$$

$$\frac{\ln e^4-\ln 1}{e^2-1}=\frac{2}{c}$$

$$\frac{4}{e^2-1}=\frac{2}{c}$$

이다.

$\therefore\ c=\dfrac{e^2-1}{2}$



수학 1-i

세 점 P_1, P_2, P_3 을 지나는 평면을 α 라 하자. 평면 α 는 법선벡터 $\vec{n}=(1,1,1)$ 이고 세 점 $P_1(t,0,0)$, $P_2(0,t,0)$, $P_3(0,0,t)$ 을 지나므로 그 방정식은 $x+y+z-t=0$ 이다.

<제시문1>에 의해 점 $Q(1,1,1)$ 과 평면 α 사이의 거리는 $\dfrac{|3-t|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}t}{3}$ 이다.

수학 1-ii

<제시문3>에 의해 삼각형 $P_1P_2P_3$ 는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}t$ 인 정삼각형이다. 그리고 한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 내접원의 반지름은 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$ 이다.

따라서 내접원 C_t 의 반지름은 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\times\sqrt{2}t=\dfrac{\sqrt{6}}{6}t$ 이다.

수학 1-iii

[문항 1-ⅰ], [문항 1-ⅱ]과 <제시문2>에 의해 원뿔 V_t 의 부피는

$\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{\sqrt{6}t}{6}\right)^2\left(\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}t}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{54}t^2(3-t)$ 이고,

이 식을 $f(t)$ 라고 하면 원뿔 V_t 의 부피의 최댓값은 함수 $f(t)$ 의 최댓값이다.

$f'(t)=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{18}t(2-t)$ 에서 $f(t)$ 는 $t=2$ 일 때 최댓값을 가진다.

따라서 구하는 최댓값은 $f(2)=\dfrac{2\sqrt{3}}{27}\pi$ 이다.

수학 2-i

(가) <제시문2> 부분적분법에서 $g'(x)=x+1$, $f(x)=\ln(x+1)$ 라 하면,

$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{(x+1)^2}{2}ln(x+1)\right]_0^1-\int_0^1\frac{(x+1)^2}{2}\frac{1}{x+1}dx$ 이다.

이를 계산하면 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=2\ln2-\frac{3}{4}$ 이다.

(나) 닫힌 구간 $[0,1]$ 에서 $f'(x)=\ln(x+1)+1>0$ 이므로 닫힌 구간 $[0,1]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 $f(1)=2\ln2$ 를 가진다.

그리고 이는 $f(1)-f(0)=2\ln2$ 와 같다. 따라서 $0<\int_0^1 f(x)dx=2\ln2-\frac{3}{4}$ 임을 보이면 된다.

즉 $\frac{3}{4}<2\ln2$ ⋯ ① 임을 보이면 된다.

로그부등식을 풀면 ①의 식은 $e^{\frac{3}{8}} \le 2$, $e^3 \le 2^8$ 이고, <제시문4>에서 $e \le 3$ 이므로 ①이 성립한다.

수학 2–ii

함수 $g(x)$ 가 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 증가하므로 $0 \le x \le 1$ 인 x 에 대해 $g(0) \le g(x) \le g(1)$ 이 항상 성립한다.

$g(0) \le g(x)$ 에서 양변을 적분하면 $\int_0^1 g(0)dx \le \int_0^1 g(x)dx$ 이다.⋯ ①

그리고 $g(0)=\int_0^1 g(0)dx$ 이다.⋯ ②

①, ②에 의해

$$g(x) \le g(1) \le g(1)+\left\{\int_0^1 g(x)dx-g(0)\right\} \le g(1)-g(0)+\int_0^1 g(x)dx$$

이다.

따라서 $g(x)$ 의 함수값이 평균값과 증가폭의 합보다 클 수 없다.

수학 2–iii

함수 $h(x)$ 의 평균값을 구하면

$$\int_0^1 h(x)dx=-\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{3}(4x+1)\right)dx=\left[\frac{3}{4\pi}\cos\left(\frac{\pi}{3}(4x+1)\right)\right]_0^1=0$$

이다.

그리고 함수 $h(x)$ 의 증가폭은

$$h(1)-h(0)=-\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$$

이다.

삼각함수인 $h(x)$ 의 최댓값은 $x=\frac{7}{8}$ 일 때 1 이다.

따라서 $h(x) \le 1 \le \sqrt{3} \le h(1)-h(0)+\int_0^1 h(x)dx$ 이다. 즉, 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 $h(x)$ 의 함수값이 평균값과 증가폭의 합보다 클 수 없다.

24 성균관대학교 논술우수전형(자연 2교시) [24]

1. 다음 <제시문1> ~ <제시문3>를 읽고 [수학1-ⅰ] ~ [수학1-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

양의 실수 a, b에 대하여, x축과의 교점이 각각 $(a, 0)$, $(-a, 0)$이고 y축과의 교점이 각각 $(0, b)$, $(0, -b)$인 타원 $E_{a,b}$는 다음의 식에 의해 정의된다.

$$E_{a,b}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

<제시문2>

제 1사분면은 $\{(x, y) \mid x>0, y>0\}$으로 정의하고, 원점 O의 좌표는 $(0, 0)$이다.

<제시문3>

타원 $E_{a,b}$ 위의 점 P를 제 1사분면에서 임의로 잡고, P에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B 그리고 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 한다.

수학 1-ⅰ $a=2$, $b=1$일 때, 타원 $E_{2,1}$에 대하여 사각형 OCPD의 면적이 최대가 되는 점 P의 좌표와 그 최댓값을 구하고 그 이유를 논하시오.

수학 1-ⅱ $a=\sqrt{3}$, $b=\frac{\sqrt{6}}{2}$일 때, 타원 $E_{\sqrt{3},\frac{\sqrt{6}}{2}}$에 대하여 사각형 OCPD를 x축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피가 최대가 되는 점 P의 좌표와 그 최댓값을 구하고 그 이유를 논하시오.

수학 1-ⅲ a, b가 임의의 양의 실수일 때, 타원 $E_{a,b}$에 대하여 $\overline{OA}\times\overline{OB}\times\overline{OC}\times\overline{OD}$의 값이 점 P의 위치에 관계없이 a, b에 의해 결정됨을 보이고 그 이유를 논하시오.

24) 성균관대학교 입학처

2. 다음 <제시문1> ~ <제시문4>를 읽고 [수학2-ⅰ] ~ [수학2-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

함수 $f(x)$에 대하여 $F'(x)=f(x)$인 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분 또는 원시함수라 하고, 기호로 $\int f(x)dx$와 같이 나타낸다.

<제시문2>

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$ 이다.

<제시문3>

함수 $f_1(x)=x^2e^x$로 정의한다.

<제시문4>

자연수 n에 대하여 함수 $f_{n+1}(x)$는 $f_n(x)$의 부정적분 중의 하나이며 다항식 $P_{n+1}(x)$에 대하여 $f_{n+1}(x)=P_{n+1}(x)e^x$의 꼴을 가진다.

수학 2–i 함수 $f_2(x)$를 x에 관한 식으로 나타내고 그 이유를 논하시오.

수학 2–ii 자연수 n에 대하여 $f_n(x)$를 x와 n에 관한 식으로 나타내고 그 이유를 논하시오.

수학 2–iii $\sum_{n=2}^{2015}\frac{1}{f_n(0)}$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

배경지식 쌓기

1. 타원

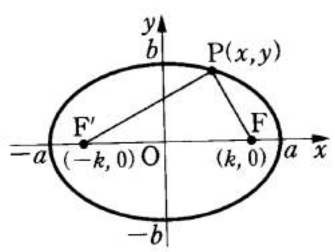
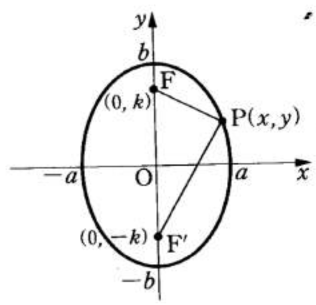
가. 타원의 방정식의 표준형

(1) 두 정점 $F(k,\ 0)$, $F'(-k,\ 0)$으로부터 거리의 합이 $2a(0<k<a)$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (0<b<a,\ b^2=a^2-k^2)$$

(2) 두 정점 $F(0,\ k)$, $F'(0,\ -k)$으로부터 거리의 합이 $2b(0<k<b)$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (0<a<b,\ a^2=b^2-k^2)$$

타원 방정식	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (0<b<a)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (0<a<b)$
거리의 합	$2a$	$2b$
장축의 길이	$2a$	$2b$
단축의 길이	$2b$	$2a$
초점	$F(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$, $F'(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$	$F(0,\ \sqrt{b^2-a^2})$, $F'(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$
꼭지점	$A(a,\ 0)$, $A'(-a,\ 0)$, $B(0,\ b)$, $B'(0,\ -b)$	$A(a,\ 0)$, $A'(-a,\ 0)$, $B(0,\ b)$, $B'(0,\ -b)$
중심	$O(0,\ 0)$	$O(0,\ 0)$
그래프		

나. 타원의 방정식의 평행이동

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 α만큼, y축의 방향으로 β만큼 평행이동한 타원의 방정식은 $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

다. 타원과 직선의 위치관계

직선 $y=mx+n$과 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에서 직선을 타원에 대입하여 정리하면 $(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0$인 x에 대한 이차방정식이 된다. 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 직선과 타원 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$D>0$	$D=0$	$D<0$
서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다.(접한다.)	만나지 않는다.

라. 타원의 접선의 방정식

(1) 기울기가 m인 접선의 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

(2) 타원 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

마. 타원 밖의 한 점 $(x_1,\ y_1)$에서 그은 접선의 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 밖의 한 점 $(x_1,\ y_1)$에서 그은 접선의 방정식은 다음의 세 가지 방법 중 하나를 선택하여 풀 수 있다.

① 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식 $y=m(x-x_1)+y_1$을 타원의 방정식에 대입하여 x에 대한 이차식으로 정리한 후, 판별식 $D=0$을 이용하여 기울기 m을 구한다.

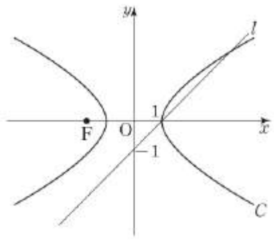
② 기울기 m인 접선 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$에 점 $(x_1,\ y_1)$을 대입하여 m을 구한다.

③ 접점을 $(x_2,\ y_2)$라 하고 $\frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}=1$에 점 $(x_1,\ y_1)$을 대입한 식과 점 $(x_2,\ y_2)$을 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입한 식을 연립하여 $(x_2,\ y_2)$를 구한다.

풀어보기

문제 1

그림과 같이 직선 $l: x-y-1=0$ 과 한 초점이 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$ (단, $c<0$)인 쌍곡선 $C: x^2-2y^2=1$ 이 있다.



직선 l 과 쌍곡선 C 로 둘러싸인 부분을 y 축 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? (2014학년도 대수능 수학B형)

① $-\frac{2}{3}$　② $-\frac{5}{9}$　③ $-\frac{4}{9}$　④ $-\frac{1}{3}$　⑤ $-\frac{2}{9}$

문제 2

$\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)} = \frac{15}{4}$ 일 때, n의 값은? [3점] (2015학년도 6월 평가원 수학A형)

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

문제 3

연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = \frac{\pi}{2}\int_{1}^{x+1} f(t)dt$$

이다. $f(1)=1$일 때, $\pi^2\int_{0}^{1} xf(x+1)dx$의 값은? (2014학년도 대수능 수학B형)

① $2(\pi-2)$　② $2\pi-3$　③ $2(\pi-1)$
④ $2\pi-1$　⑤ 2π

예시답안

풀어보기

문제 1

직선 $l: y=x-1$ 과 쌍곡선 $C: x^2-2y^2=1$ 의 교점의 x 좌표를 구하기 위해 두 식을 연립하면 $x^2-2(x-1)^2=1$, $(x-1)(x-3)=0$ 이다.
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$
따라서 두 교점의 좌표는 $(1, 0)$, $(3, 2)$ 이다.
한편 직선 l 의 방정식에서 $x=y+1$, 쌍곡선 C의 방정식에서 $x^2=2y^2+1$ 이므로 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_0^2(y+1)^2dy-\pi\int_0^2(2y^2+1)dy =\pi\int_0^2(2y-y^2)dy=\pi\left[y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^2$$
$$=\pi\left(4-\frac{8}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

문제 2

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}4\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{4n}{n+1}=\frac{15}{4}$$

따라서 $n=15$ 이다.

문제 3

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 연속이고 원점에 대하여 대칭이므로

$$f(0)=0,\ f(-1)=-f(1)=-1$$

한편 $f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1}f(t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)$이고 $f(x+1)=\frac{2}{\pi}f'(x)$이므로

$$\pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx=\pi^2\int_0^1\frac{2}{\pi}xf'(x)dx=2\pi\int_0^1 xf'(x)dx=2\pi\left\{\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 f(x)dx\right\}$$
$$=2\pi\left\{f(1)-\int_0^1 f(x)dx\right\}=2\pi\left\{1-\int_0^1 f(x)dx\right\}$$

이때 $f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1}f(t)dt$ 의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$f(-1)=\frac{\pi}{2}\int_1^0 f(t)dt$$

$$\therefore \int_0^1 f(t)dt=-\frac{2}{\pi}f(-1)=-\frac{2}{\pi}\times(-1)=\frac{2}{\pi}$$

$$\therefore \pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx=2\pi\left(1-\frac{2}{\pi}\right)=2(\pi-2)$$

수학 1-i

점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$ 라 하면 점 P 는 타원 $E_{2,1}$ 위의 점이므로 $\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2=1$ 이고, 사각형 OCPD 의 면적은 $\alpha\beta$ 이다. 그리고 산술기하평균에 의해

$\alpha\beta=2\left(\frac{\alpha}{2}\beta\right) \le \frac{2}{2}\left(\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2\right)=1$ 이다. (단, 등호는 $\frac{\alpha}{2}=\beta$ 일 때 성립한다.)

즉, 사각형 OCPD 의 면적의 최댓값은 1 이고, 그 때 점 P 의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이다.

수학 1-ii

점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$ 라 하면 $\mathrm{C}(\alpha, 0)$, $\mathrm{D}(0, \beta)$ 이다. 따라서 회전체의 부피는 $\alpha\beta^2\pi \cdots$ ① 이다. 그리고 점 P 는 타원 $E_{\sqrt{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}}$ 위의 점이므로 $\frac{\alpha^2}{3}+\frac{2}{3}\beta^2=1 \cdots$ ② 이다. ②의 식을 변형하여 ①의 식에 대입하면 회전체의 부피 $V=\left(-\frac{1}{2}\alpha^3+\frac{3}{2}\alpha\right)\pi$ 를 얻는다. 따라서 $\frac{dV}{d\alpha}=\frac{3\pi}{2}(1-\alpha)(1+\alpha)$ 이고 $\alpha=1$ 에서 최댓값 π 를 가진다.

즉, 구하는 회전체 부피의 최댓값은 π 이고, 그 때 점 P 의 좌표는 $\mathrm{P}(1, 1)$ 이다.

수학 1-iii

점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$ 라 하면 $\mathrm{C}(\alpha, 0)$, $\mathrm{D}(0, \beta)$ 이다. 그리고 점 P 에서의 접선의 방정식은 $\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}=1$ 이므로 $\mathrm{A}\left(\frac{a^2}{\alpha}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0, \frac{b^2}{\beta}\right)$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OB}} \times \overline{\mathrm{OC}} \times \overline{\mathrm{OD}} = \frac{a^2}{\alpha} \times \frac{b^2}{\beta} \times \alpha \times \beta = a^2b^2$ 이다.

즉, $\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OB}} \times \overline{\mathrm{OC}} \times \overline{\mathrm{OD}}$ 의 값이 점 P 의 위치에 관계없이 a, b 에 의해 결정된다.

수학 2-i

<제시문4>에 의해 $f_2(x)$ 는 $f_1(x)$ 의 부정적분 중 하나로, <제시문2>와 <제시문3>에 의해

$$\begin{aligned} f_2(x) = \int f_1(x)dx = \int x^2e^x dx \\ &= x^2e^x - 2\int xe^x dx \\ &= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) \\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = (x^2-2x+2)e^x + C \end{aligned}$$

이때 <제시문4>에 의해 모든 $f_{n+1}(x)$ 에는 상수가 존재하지 않는다. 즉, $C=0$ 이다. 따라서 $f_2(x)=(x^2-2x+2)e^x$ 이다.

수학 2–ii

수학2–ⅰ의 결과에 의해 $P_n(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차다항식이므로 $P_n(x)=x^2+a_nx+b_n$ 으로 둘 수 있다.

$a_1=b_1=0$ 이고, <제시문4>로부터 $a_{n+1}=a_n-2$, $b_{n+1}=b_n-a_{n+1}$ 을 얻을 수 있다.

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $a_1=0$ 이고, 공차가 -2 인 등차수열이므로 $a_n=-2(n-1)$ 이다.

수열 $\{b_n\}$ 의 일반항은 $b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}=\sum_{k=1}^{n-1}(-2k)=n(n-1)$ 이다.

따라서 $f_n(x)=\{x^2-2(n-1)x+n(n-1)\}e^x$ 이다.

수학 2–iii

$f_n(x)=\{x^2-2(n-1)x+n(n-1)\}e^x$ 에서 $f_n(0)=n(n-1)$이다.

따라서 $\sum_{n=2}^{2015}\frac{1}{f_n(0)}=\sum_{n=2}^{2015}\frac{1}{n(n-1)}=\sum_{n=2}^{2015}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2015}=\frac{2014}{2015}$ 이다.

25 아주대학교 모의

문제 1

<50점> ※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 주어진 수열 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$을 계수로 가지는 무한 급수

$$A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

를 수열 $\{a_n\}$의 생성함수라고 한다. 수열 $1,\ -1,0,0,0,0,\cdots$의 생성함수는

$$1-1x+0x^2+0x^3+\cdots=1-x$$

이며 수열$1,1,1,1,1,1,\cdots$의 생성함수는

$$1+1x+1x^2+1x^3+\cdots=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

이다.

$B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots$가 수열 $\{b_n\}$의 생성함수이고 두 생성함수의 합을

$$A(x)+B(x):=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+(a_3+b_3)x^3+\cdots$$

로 정의하면 $A(x)+B(x)$는 수열 $\{a_n+b_n\}$의 생성함수가 됨을 알 수 있다. 두 생성함수 $A(x)$와 $B(x)$의 곱을 다음과 같이 정의하는 것은 매우 자연스럽다:

$$A(x)B(x)$$
$$=(a_0b_0)+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0)x^3+\cdots$$

이제 $A(x)B(x)$는 수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{b_n\}$에 의해서 만들어지는 새로운 수열 $\{c_n\}$, $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}$의 생성함수임을 알 수 있다.

$(1-x)(1+x+x^2+x^3+\cdots)=1+(1-1)x+(1-1)x^2+(1-1)x^3+\cdots=1$ 이므로

$1+x+x^2+x^3+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$ 라고 표현할 수 있다.

(나) 수열 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$은 초깃값 a_0과 함수 f_n, $n\ge 1$들에 의해 정해지는 점화식 $a_n=f_n(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})\ (n\ge 1)$이 주어지면 유일한 방법으로 결정된다. 예를 들어

$d_0=d_1=1$, $d_n=d_{n-1}+d_{n-2}\ (n\ge 2)$에 의하여 수열 $\{d_n\}$은 완벽히 결정된다.

$$d_0=d_1=1,\ d_2=d_1+d_0=2,\ d_3=d_2+d_1=2+1=3,\cdots$$

따라서 초깃값과 점화식이 같은 두 수열은 같은 수열이며 같은 생성함수를 가지게 됨을 알 수 있다.

예제 1. 자연수 n을 1과 2의 합으로 나타내는 방법의 수를 $\{d_n\}$이라고 하자. 이때 더하는 순서가 다르면 다른 방법으로 생각한다. 예를 들어 $n=4$이면 다음 다섯 가지 서로 다른 방법이 존재 한다: $1+1+1+1$, $1+1+2$, $1+2+1$, $2+1+1$, $2+2$.

따라서 $d_4=5$이다. 수열 $\{d_n\}$의 점화식을 구해보자. n을 1과 2의 합으로 나타내는 방법은 그 첫 번째 수가 1인 경우와 2인 경우로 나누어 생각해볼 수 있으며 첫 수가 1이면 나머지 수들은 그 합이 $n-1$ 그리고 첫 수가 2이면 나머지 수들은 그 합이 $n-2$가 되어야 함을 알 수 있다. 따라서 $d_n=d_{n-1}+d_{n-2}$ $(n \geq 3)$이 성립하며 편의상 $d_0=1$이라 약속하면 $d_2=d_1+d_0$도 성립한다.

(1) 이제 수열 $\{d_n\}$의 생성함수를 $D(x)$라고 하면 $\{d_n\}$이 만족하는 점화식을 적절히 사용하여 다음과 같은 계산을 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
D(x) &= d_0+d_1x+d_2x^2+d_3x^3+\cdots \\
&= 1+x+(d_1+d_0)x^2+(d_2+d_1)x^3+\cdots \\
&= 1+x+(d_1x^2+d_2x^3+d_3x^4+\cdots)+(d_0x^2+d_1x^3+d_2x^4+\cdots) \\
&= 1+x+(xD(x)-d_0x)+x^2D(x)
\end{aligned}$$

따라서 $D(x)(1-x-x^2)=1$ 이며, $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 일 때,

$$\begin{aligned}
D(x) &= \frac{1}{(1-x-x^2)}=\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}\,x}\left\{\frac{1}{(1-\alpha x)}-\frac{1}{(1-\beta x)}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}\,x}\left\{(1+\alpha x+\alpha^2x^2+\cdots)-(1+\beta x+\beta^2x^2+\cdots)\right\}
\end{aligned}$$

이 된다. 그리고 $D(x)$에서 x^n의 계수를 읽으면 $d_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)$이 된다.

(2) 점화식 $d_n=d_{n-1}+d_{n-2}\,(n \geq 2)$ 을 다른 방법으로 생각해보자.

$d_n=d_{n-1}+d_{n-2}=0d_n+1d_{n-1}+1d_{n-2}+0d_{n-3}+\cdots+0d_0$ 이므로

$a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=a_4=a_5=\cdots=0$이라 하면 $d_n=\sum_{i=0}^{n}a_id_{n-i}\,(n \geq 2)$가 만족된다. 따라서 수열 $\{a_n\}$의 생성함수는 $A(x)=x+x^2$이며 생성함수의 곱의 규칙에 의하여

$$\begin{aligned}D(x) &= d_0 + d_1x + (a_0d_2 + a_1d_1 + a_2d_0)x^2 + (a_0d_3 + a_1d_2 + a_2d_1 + a_3d_0)x^3 + \cdots \\ &= d_0 + d_1x - (a_0d_0) - (a_0d_1 + a_1d_0)x \\ &\quad + (a_0d_0) + (a_0d_1 + a_1d_0)x + (a_0d_2 + a_1d_1 + a_2d_0)x^2 + (a_0d_3 + a_1d_2 + a_2d_1 + a_3d_0)x^3 + \cdots \\ &= 1 + x - x + A(x)D(x) = 1 + (x + x^2)D(x)\end{aligned}$$

이며 (1)에서와 같이 $D(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$ 이 된다.

예제2. 다섯 개의 수 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5를 더하는 순서를 정하는 방법의 수를 구해보자. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$를 계산하는 순서는 괄호를 이용하면 자연스럽게 정해진다. 예를 들어 $(x_1 + x_2) + \{x_3 + (x_4 + x_5)\}$는 $(x_1 + x_2)$와 $\{x_3 + (x_4 + x_5)\}$를 더하는 일을 마지막에 해야 함을 뜻한다. 덧셈기호 양쪽의 값을 계산하는 순서는 덧셈기호의 왼쪽을 먼저 계산하는 것으로 정하면 $(x_1 + x_2)$을 먼저 계산하고 $\{x_3 + (x_4 + x_5)\}$를 계산한 후에 두 수의 합을 계산하면 된다.

n개의 수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$를 더하는 순서를 정하는 방법의 수를 e_n이라고 한다면 우리가 구하고자 하는 수는 e_5이며, $e_1 = 1$로 약속하면 마지막으로 실행하는 덧셈의 위치에 따라 $e_5 = e_1e_4 + e_2e_3 + e_3e_2 + e_4e_1$로 쓸 수 있음을 알 수 있다. 이때 $e_0 = 0$이라 하면 $n \geq 2$일 때 $e_n = \sum_{i=0}^{n} e_ie_{n-i}$이 성립한다. 따라서 $E(x)$를 수열 $\{e_n\}$의 생성함수라 하면 $E(x)$가 만족하는 식을 얻을 수 있다.

문제 1-1

<20점> 자연수 n에 대하여, 길이가 n인 0과 1의 나열방법의 수를 a_n이라 하자. 그리고 a_n개의 가능한 나열 중에서 1이 연달아서 나타나지 않는 방법의 수를 b_n이라 하자.

1) <5점> $n \geq 1$일 때 a_n을 계산하라.

2) <15점> 편의상 $b_0 = 1$이라 하였을 때, 수열 $\{b_n\}$이 만족하는 점화식과 생성함수를 찾으라.

문제 1-2

<15점> $X(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$를 수열 $1, 1, 1, 1, 1, \cdots$의 생성함수라 하자. $\{d_n\}$은 예제 1에서 소개한 수열이며 수열 $\{w_n\}$은 $w_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_n$을 만족한다고 할 때, $\{w_n\}$의 생성함수를 $\{d_n\}$의 생성함수 $D(x)$와 $X(x)$를 이용하여 나타내라.

문제 1-3

<15점> 예제 1의 (2)번 방법을 참조하여 예제 2의 수열 $\{e_n\}$의 생성함수 $E(x) = e_0 + e_1x + e_2x^2 + e_3x^3 + \cdots$가 만족하는 식을 찾으라.

문제 2

<50점> ※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 정적분에 관한 가중 평균값의 정리

정리 1. 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 두 함수 F, G를 생각하자. 그리고 G는 구간 전체에서 부호가 바뀌지 않는다고 가정하자. 그러면, 다음 식을 만족하는 점 c가 열린구간 (a, b) 안에 존재한다.

$$\boxed{\int_a^b F(x)G(x)dx = F(c)\int_a^b G(x)dx}$$

정리 1은 연속함수의 대표적인 성질인 중간값의 정리를 이용하여 증명할 수 있으며, 정적분에 관한 평균값의 정리는 **정리 1**에서 G가 상수함수 1인 특수한 경우이다.

예제 1. 정리 1에서 $a=0$, $b=\pi$, $F(x)=x$, $G(x)=\sin x$인 경우를 생각해보자. $\int_0^\pi x\sin x\,dx=\pi$, $\int_0^\pi \sin x\,dx=2$이므로 $c=\frac{\pi}{2}$로 택하면 위의 등식이 성립한다.

(나) 수치적 구적분

정적분을 계산할 때 원시 함수를 구체적으로 구하기 어려워 정확한 값을 얻을 수 없는 경우가 흔히 발생한다. 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값을 근사하는데 자주 사용하는 방법으로 수치적 구적법(numerical quadrature)을 들 수 있으며, 이는 적당한 점 $x_1, x_2, \cdots, x_n$과 적당한 수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$를 이용하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)$$

형태로 나타낸다.

예제 2. 중점 규칙 (Midpoint rule)

가장 간단한 수치적 구적법으로 중점 규칙을 들 수 있다.

$$M(f)=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

예제 3. 사다리꼴 규칙 (Trapezoid rule)

정적분의 값을 구간의 양 끝점에서의 함숫값으로 근사하는 가장 간단한 방법은 **그림 1**에 나타난 것과 같은 사다리꼴 규칙이다.

$$T(f)=\frac{b-a}{2}\,[f(a)+f(b)]$$

사다리꼴 규칙은 다음 정리와 밀접한 관계가 있다.

정리 2. 닫힌구간 $[a, b]$를 포함하는 열린구간에서 정의된 두 번 미분가능한 함수 f를 생각하자. 이계도함수 f''이 $[a, b]$에서 연속이면,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\,[f(a)+f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12}f''(c)$$

을 만족하는 점 c가 열린구간 (a,b)에 존재한다.

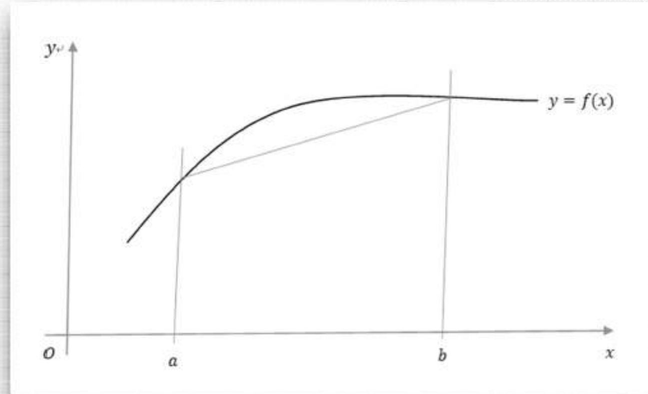


그림 1. 사다리꼴 규칙

(다) 정확도

주어진 구적법의 정확도(degree of accuracy)는 0이상 n이하의 모든 k에 대하여 함수 x^k의 구적법에 의한 근삿값과 적분값이 같아지는 n중 가장 큰 값을 의미한다.

예제 4. $a=0, b=1$이라 하고 **예제** 2에 있는 중점 규칙으로 정적분을 근사하는 경우를 생각해 보자. 우선, $\int_0^1 1\,dx = 1 = M(1)$, $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} = M(x)$이다. 하지만 $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = M(x^2)$이므로 중점 규칙은 정확도 1을 가짐을 알 수 있다.

예제 5. $a_0=0, b=1$이라 하고 **예제** 3에 있는 사다리꼴 규칙으로 정적분을 근사하는 경우, $\int_0^1 1\,dx = 1 = \frac{1}{2}[1+1] = T(1)$, $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}[0+1] = T(x)$이 성립한다. 하지만 $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}[0+1] = T(x^2)$이므로 사다리꼴 법칙은 정확도 1을 가짐을 알 수 있다. 1차 이하의 다항 함수의 이계도함수가 0이므로 정확도는 1이상이고, 2차 다항식의 이계도함수는 0이 아닌 상수이므로 오차가 0일 수 없어 정확도는 1이하가 되기 때문이다.

문제 2-1

<15점> 제시문 (가)의 정리 1을 $a_0 = 0,\, b = \pi$, $F(x) = \cos(\cos x)$, $G(x) = \sin x$에 적용할 때 $\cos c$의 값은 얼마인가?

문제 2-2

<20점> 사다리꼴 규칙에 대한 다음 물음에 답하라.

1) <10점> $p(a) = p(b) = 0$, $-p'(a) = p'(b) = b - a$를 만족하는 최고차항의 계수가 1인 이차다항식 $p(x)$를 구하고, 부분적분 공식을 적절히 적용하여 $\int_a^b f(x)dx$를 $T(f)$와 $\int_a^b f''(x)p(x)dx$를 이용하여 나타내라.

2) <10점> 정리 2를 증명하라.

문제 2-3

<15점> 자연수 n에 대하여 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$를 근사하는 다음과 같은 수치적 구적법을 생각하자.

$$\frac{n}{n+1} f(-\alpha) + (1-t) \cdot f(0) + \frac{n}{n+1} f(\beta)$$

이 구적법이 가장 높은 정확도를 갖도록 하는 음이 아닌 실수 α, β, t를 각각 α_n, β_n, t_n이라 하고, 이때의 정확도를 r_n이라 할 때 아래 극한값을 구하라.

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n \beta_n r_n$$

배경지식 쌓기

1. 수열의 귀납적 정의

수열의 일반항이 주어지지 않아도 수열의 첫째항이 주어지고, 차례로 다음 항을 구할 수 있는 관계식이 주어지면 수열의 모든 항을 구할 수 있다.

예를 들어, 수열 $\{a_n\}$에서 첫째항 $a_1=2$이고, 제 n항과 제 $n+1$항 사이에 $a_{n+1}=a_n+2$가 성립한다고 하면 $a_2=a_1+2$ 로부터 $a_2=4$, $a_3=a_2+2$ 로부터 $a_3=6$과 같이 모든 항을 차례로 구할 수 있다.

$a_{n+1}=a_n+2$와 같이 이웃하는 항 사이의 관계식을 **점화식**이라 하고, 첫째항과 점화식으로 수열을 정의하는 것을 수열의 **귀납적 정의**라고 한다.

2. 치환적분법

부정적분을 구할 때, 식의 일부 또는 전체를 새로운 변수로 바꾸어 놓고 적분하면 편리한 경우가 있다. 예를 들어, 부정적분 $\int (x+1)^6 dx$에서 $x+1=t$로 놓으면 피적분함수가 t^6으로 되어 이를 t에 대하여 쉽게 적분할 수 있다.

함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라고 하면

$$\int f(x)dx = F(x)+C \quad \cdots\cdots \text{①}$$

이고, $\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x)$이다. 여기서, $x=g(t)$로 놓으면 $F(x)$는 t의 함수가 된다.

즉, $F(x)=F(g(t))$이다. $F(x)$를 t에 대하여 미분하면 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dt}F(x)=\frac{d}{dx}F(x)\frac{dx}{dt}=f(x)\frac{dx}{dt}=f(g(t))g'(t)$$

즉,

$$\int f(g(t))g'(t)dt = F(x)+C \quad \cdots\cdots \text{②}$$

이다.

①, ②에서

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

이와 같이, 한 변수를 다른 변수로 치환하여 적분하는 방법을 치환적분법이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

치환적분법(1)

미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

참고 $\int f(x)dx = \int f(g(t))\frac{dx}{dt}dt = \int f(g(t))g'(t)\,dt$

풀어보기

문제 1

$\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^4 dx$ 의 전개식에서 x^{2n-5} 의 계수를 $P(n)$ 이라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $n=1, 2, 3, 4, 5$ 이다.)

(2014년 EBS 파이널 실전모의고사)

[보 기]

ㄱ. $P(1) = -\frac{1}{3}$

ㄴ. $\sum_{k=1}^{5} P(k) = \frac{16}{5}$

ㄷ. 방정식 $x^3 + P(a)x^2 + P(b)x + 1 = 0$ 이 오직 한 개의 실근을 갖게 하는 순서쌍 $(P(a), P(b))$ 의 개수는 5 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 2

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 x \, dx$ 의 값을 구하시오. (2014년 수능특강 적분과 통계)

읽기자료

수치적분법(numerical integration)

함수의 정적분의 값을 해석적 방법에 의하지 않고 수치로써 근사계산하는 방법. 해석적으로 계산되지 않는 문제에 널리 적용되므로 실무에 많이 이용되고 있다. 또한 계산절차가 비교적 단순하므로 컴퓨터로 처리하기가 좋다. 수치적분법의 원리는 적분구간을 몇 개의 소구간으로 나누고 각 소구간에서 피적분을 간단한 함수(보통은 보간다항식)로 근사하게 하여 근사식의 적분값을 합한다는 것이다.

공식적으로는 중점공식, 사다리꼴공식 및 심프슨의 공식 등이 간단하며 많이 쓰이고 있다. 보다 정밀도가 높은 공식으로는 뉴튼-코츠의 공식, 가우스형의 공식이 있다. 그 밖에 중적분의 공식, 무한구간상의 적분공식, 자동적분공식(계산식이나 분점수 〈分點數〉 등을 함수와 지정정밀도에 맞추어서 자동조절하는 공식) 등이 있다.

(1) 중점공식

우리가 처음 적분을 배울 때, 적분은 어떤 곡선을 가지고 있는 도형의 넓이를 구하는 것이며, 한 함수의 넓이를 알고자 할 때, 특정 구간 내에서 그 구간을 n등분시킨 후, 그 n개로 등분된 구간을 밑변으로 가지는 사각형을 만들어 곡선의 넓이를 근사한 후 그 사각형의 밑변을 극한으로 보내 그 함수 아래의 넓이를 구한다. 즉,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$

이다.

중점법칙은 위 식에서 $f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)$ 대신에 저 n개로 나눈 구간의 '중심'의 함숫값 $f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)$ (여기서, $x_k = a+\frac{b-a}{n}$, $k=0, 1, 2, 3, \cdots, n$)를 이용해서 구하는 것이다. 즉,

$$\int_a^b f(x)dx \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)\frac{b-a}{n}$$

이다.

(2) 사다리꼴 공식

함수 $y=f(x) \geq 0$ 인 그래프, 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 적분 $\int_a^b f(x)dx$ 로 주어진다. 이것을 수치적으로 구하기 위하여 a에서 b까지의 구간을 길이 h인 소구간으로 n등분하고 $x_0(=a), x_1, x_2, \cdots, x_n(=b)$ 에 대응하는 y값을

각각 $y_0, y_1, y_{2,} \cdots, y_n$ 이라 한다.

n이 클 때는 각 구간 $x_{i-1} \le x \le x_i$에서, 함수의 그래프는 두 점 (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i)를 지나는 직선이므로

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \fallingdotseq \frac{1}{2}(y_{i-1}+y_i)h \qquad (h = x_i - x_{i-1})$$

이다.

따라서 구하는 넓이를 사다리꼴 넓이의 합으로 근사시키면

$$\int_a^b f(x)dx \fallingdotseq \frac{1}{2}(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y+_{n-1})h$$

를 얻을 수가 있다. 이것을 사다리꼴공식이라 한다.

(3) 심프슨의 공식

위의 사다리꼴 공식에서 사다리꼴 윗변을 이차 함수의 그래프로 바꾸면 많은 경우 함수의 그래프의 곡선 부분에 보다 정확하게 맞출 수 있게 되므로 더 좋은 근사값을 얻게 된다. 심슨 방식을 소개하기 전에 이차함수의 정적분에 대한 다음 보조정리가 필요하다.

보조정리) 이차함수 $g(x) = Ax^2 + Bx + C$에 대하여 다음 식

$$\int_a^b g(x)dx = \frac{(b-a)}{6}\left\{g(a)+4g(\frac{a+b}{2})+g(b)\right\}$$

이 성립한다.(증명은 생략)

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이라고 하자. 짝수인 자연수 n이 주어지면 구간 $[a, b]$의 n등분 분할 $P = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 을 가지고 적분 $\int_a^b f(x)dx$의 근사값을 다음과 같이 구한다. 우선 세점 $(x_{2i-2}, f(x_{2i-2}))$, $(x_{2i-1}, f(x_{2i-1}))$, $(x_{2i}, f(x_{2i}))$를 지나는 이차함수 $g_i(x) = A_ix^2 + B_ix + C_i$ 가 유일하게 존재한다. 이 함수를 이용하면 분할의 각 구간 정적분에 대한 다음 근사식을 얻는다.

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \fallingdotseq \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} g_i(x)dx = \frac{x_{2i}-x_{2i-2}}{6}\left\{g(x_{2i-2})+4g\left(\frac{x_{2i-2}+x_{2i}}{2}\right)+g(x_{2i})\right\}$$

따라서 전체 구간의 정적분에 대한 다음 근사식을 얻는다.

$$\int_a^b f(x)dx$$
$$\fallingdotseq \frac{b-a}{3n}\{f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\}$$

예시답안

풀어보기

문제 1

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$ 의 전개식의 일반항은

$$\begin{aligned} {}_4\mathrm{C}_r\, x^r\left(\frac{1}{x}\right)^{4-r} &= {}_4\mathrm{C}_r\, x^r x^{r-4} \\ &= {}_4\mathrm{C}_r\, x^{2r-4} \text{ (단, } r=0,1,2,3,4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int\left(x+\frac{1}{x}\right)^4 dx &= \int \sum_{r=0}^{4} {}_4\mathrm{C}_r\, x^{2r-4}\, dx \\ &= \sum_{r=0}^{4} {}_4\mathrm{C}_r\, \frac{1}{2r-3}x^{2r-3} + C_r \text{ (단, } C_r \text{는 적분상수)} \end{aligned}$$

ㄱ. $\int\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4 dx$ 의 전개식의 일반항이 ${}_4C_r\,\dfrac{1}{2r-3}x^{2r-3}+C_r$ 이고, $P(n)$ 이 x^{2n-5} 의 계수이므로 $P(1)=(x^{-3}$ 의 계수$)$ 를 구하면 된다. ${}_4C_r\,\dfrac{1}{2r-3}$ 에 $r=0$ 을 대입하면

$$P(1) = -\frac{1}{3} \text{ (참)}$$

ㄴ. x^{2r-3} 의 계수인 ${}_4C_r\,\dfrac{1}{2r-3}$ 에 $r=0,1,2,3,4$ 를 대입하면 $x^{-3}, x^{-1}, x, x^3, x^5$ 의 계수가 나온다. 즉,

$P(1)=(x^{-3}$ 의 계수$) = -\dfrac{1}{3}$, $P(2)=(x^{-1}$ 의 계수$) = -{}_4C_1 = -4$,

$P(3)=(x$ 의 계수$) = {}_4C_2=6$, $P(4)=(x^3$ 의 계수$) = \dfrac{1}{3}{}_4C_3 = \dfrac{4}{3}$,

$P(5)=(x^5$ 의 계수$) = \dfrac{1}{5}{}_4C_4 = \dfrac{1}{5}$,

$$\therefore \sum_{k=1}^{5} P(k) = P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5) = \frac{16}{5} \text{ (참)}$$

ㄷ. $f(x)=x^3+P(a)x^2+P(b)x+1$ 이라고 하면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)=3x^2+2P(a)x+P(b)\ge 0$ 일 때, 즉 $\dfrac{D}{4}=\{P(a)\}^2-3P(b)\le 0$ 는 방정식 $x^3+P(a)x^2+P(b)x+1=0$ 이 오직 하나의 실근을 갖는 한 가지 경우이다. $P(a), P(b)$ 가 가질 수 있는 값은 ㄴ에서 구한 $-\dfrac{1}{3}, -4, 6, \dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{5}$ 이므로

$\{P(a)\}^2 = \frac{1}{9},\ 16,\ 36,\ \frac{16}{9},\ \frac{1}{25}$, $3P(b) = -1,\ -12,\ 18,\ 4,\ \frac{3}{5}$ 에서 $\{P(a)\}^2 \le 3P(b)$ 를 만족시키는 순서쌍이 $\left(-\frac{1}{3}, 6\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right), (-4, 6), \left(\frac{4}{3}, 6\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right),$ $\left(\frac{1}{5}, 6\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$이므로 순서쌍 $(P(a), P(b))$ 의 개수는 9이다. 따라서 순서쌍 $(P(a), P(b))$ 의 개수는 5보다 많다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

문제 2

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 x\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \sin^3 x\,dx$ 이므로 $f'(x) = \sin x$, $g(x) = \sin^3 x$ 로 놓으면 $f(x) = -\cos x$, $g'(x) = 3\sin^2 x \cos x$ 이다. 부분적분법에 의하여

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 x\,dx &= \left[-\cos x \sin^3 x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \cdot 3\sin^2 x \cos x\,dx \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16} + 3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos^2 x\,dx \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{8} + 3\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\,dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 x\,dx\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{8} + 3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx - 3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 x\,dx\end{aligned}$$

그러므로

$$4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 x\,dx = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 x\,dx = -\frac{\sqrt{3}}{32} + \frac{\pi}{16}$$

대학출제 문제 1-1

(대학발표 예시답안)

1) n개의 자리에 0 또는 1이 들어갈 수 있으므로 $a_n = 2^n$ 이다.

2) $b_1 = 2$이다. $n \ge 2$일 때 b_n을 다음 두 가지 경우로 나누어 계산해 보자.

첫 자리에 1이 오는 경우: 1이 연달아서 나타날 수 없으므로 두 번째 자리에는 반드시 0이 와야 한다. 세 번째부터는 1이 연달아 나타나지 않는 길이 $n-2$인 0과 1의 나열이면 되므로 이 경우 가능한 개수는 b_{n-2}이다.

첫 자리에 0이 오는 경우: 두 번째 자리부터의 나열이 1이 연달아 나타나지 않는 길이 $n-1$인 0과 1의 나열이면 되므로 b_{n-1}개의 나열이 가능하다.
따라서 $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$이다. 이는 예제 1의 수열 $\{d_n\}$의 점화식과 동일하며 $b_0 = d_1$, $b_1 = d_2$이므로 $\{b_n\}$의 생성함수는

$$B(x) = d_1 + d_2 x + d_3 x^2 + \cdots = \frac{1}{x}(d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \cdots)$$

이다. 즉, $B(x) = \frac{1}{x}(D(x) - 1)$이다.

이를 정리하면 $B(x) = \dfrac{1+x}{1-x-x^2}$ 이다.

대학출제 문제 1-2

(대학발표 예시답안)

$x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = 1$이라 하면 $w_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_n = d_0 x_n + d_1 x_{n-1} + \cdots d_n x_0$이므로 $\{w_n\}$의 생성함수는 $D(x)X(x) = \dfrac{1}{(1-x-x^2)(1-x)}$ 이다.

대학출제 문제 1-3

(대학발표 예시답안)

$$\begin{aligned} E(x) &= e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + e_3 x^3 + \cdots \\ &= 0 + x + (e_0 e_0) + (e_0 e_1 + e_1 e_0)x + (e_0 e_2 + e_1 e_1 + e_2 e_0)x^2 + (e_0 e_3 + e_1 e_2 + e_2 e_1 + e_3 e_0)x^3 + \cdots \\ &= x + E(x)E(x) \end{aligned}$$

이므로 $E(x)$는 $E(x)E(x) - E(x) + x = 0$을 만족한다.

(따라서 $E(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$ 가 되며 이 중 $x=0$일 때 0이 되는 함수는 $\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$ 이므로 $E(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$ 이다.)

대학출제 문제 2-1

(대학발표 예시답안)

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2,$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} F(x)G(x)\,dx &= \int_0^{\pi} \cos(\cos x)\sin x \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x)\sin x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(\cos x)\sin x \, dx \end{aligned}$$

$$=\int_0^1 \cos t\ dt+\int_{-1}^0 \cos t\ dt=2\int_0^1 \cos t\ dt=2\sin 1$$

문제에서 주어진 조건에 따라 $\cos(\cos c)=\sin 1$ 이다. 이제 $t=\cos c$ $(-1\le t\le 1)$ 라 하면 $\cos t=\sin 1=\cos(\frac{\pi}{2}-1)$을 만족하는 t의 값은 $\frac{\pi}{2}-1$또는 $1-\frac{\pi}{2}$임을 알 수 있다.

대학출제 문제 2-2

(대학발표 예시답안)

1) $p(x)=(x-a)(x-b)$라 하면 $p(a)=p(b)=0$, $-p'(a)=p'(b)=b-a$, $p''(x)=2$가 성립한다. 부분적분 공식을 두 번 이용하면

$$\begin{aligned}2\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b f(x)p''(x)\,dx=[f(x)p'(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)p'(x)dx\\ &= f(b)p'(b)-f(a)p'(a)-\int_a^b f'(x)p'(x)dx\\ &= [f(a)+f(b)](b-a)-[f'(x)p(x)]_a^b-\int_a^b f''(x)p'(x)dx\\ &= [f(a)+f(b)](b-a)-f'(b)p(b)+f'(a)p(a)+\int_a^b f''(x)p'(x)dx\\ &= [f(a)+f(b)](b-a)+\int_a^b f''(x)p'(x)dx\end{aligned}$$

따라서 $\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]+\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)p(x)dx$이다.

2) 제시문 (가)의 정리 1에 의하여 적당한 c가 열린구간 (a,b)에 존재하여 $\int_a^b f''(x)p(x)dx=f''(c)\int_a^b p(x)dx=-f''(c)\frac{(b-a)^3}{6}$을 만족한다. 이로부터 정리 2가 성립함을 알 수 있다.

대학출제 문제 2-3

(대학발표 예시답안)

정확도가 0이상이기 위해서는 $\frac{n}{n+1}+(1-t)+\frac{n}{n+1}=2$, 즉 $t=\frac{n-1}{n+1}$이다. 정확도가 1이상이기 위해서는 $\frac{n}{n+1}(-\alpha)+\frac{n}{n+1}\beta=0$이어야 하므로 $\alpha=\beta$이다. 정확도가 2이상이기 위해서는 $2\frac{n}{n+1}\alpha^2=\frac{2}{3}$ 즉 $\alpha^2=\beta^2=\frac{n+1}{3n}$. 즉, $\alpha_n=\beta_n=\sqrt{\frac{n+1}{3n}}$, $t_n=\frac{n-1}{n+1}$이다. 이렇게 선택하면 기함수의 성질에 의하여 정확도는 3 이상이 된다.
주어진 수치적 구적법이 x^4에 대해서는 정확할 수 없으므로 $r_n=3$이다.
따라서 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n\beta_n t_n r_n=1$이다.

26 연세대학교 모의

문제 1 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

(가) 한국 팀이 A, B, C 팀과의 개별 경기에서 이길 확률은 각각 $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{10}$이다. 또한 A, B, C 팀과 비길 확률은 각각 $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$이다.

(나) 한국 팀이 A, B, C 팀과 조별 경기를 한다고 하자. 한국 팀이 첫 경기에서 A, B, C 각 팀과의 이길 확률과 비길 확률은 개별 경기의 확률과 같다. 두 번째, 세 번째 경기에서 한국 팀이 이길 확률은 바로 앞서 벌어진 경기의 결과에 따라 다음과 같이 영향을 받는다.

▶직전 경기에서 이긴 경우, 다음 경기에서 이길 확률은 개별 경기에서 이길 확률의 1.3배이다.

▶직전 경기에서 비긴 경우, 다음 경기에서 이길 확률은 개별 경기에서 이길 확률의 1.1배이다.

▶직전 경기에서 진 경우, 다음 경기에서 이길 확률은 개별 경기에서 이길 확률의 0.9배이다.

▶비기는 확률은 직전 경기의 결과에 영향을 받지 않고 개별 경기에서 확률과 같다.

논제 1-1

한국 팀의 조별 경기가 A팀, B팀, C팀의 순서로 정해졌다. 한국 팀이 B팀과의 경기에서 질 확률을 구하시오. [8점]

논제 1-2

한국 팀의 조별 경기가 A팀, B팀, C팀의 순서로 정해졌다. 한국 팀이 B팀과의 경기에서 지지 않았을 때, 모든 경기에서 지지 않으면서 두 경기 이상 이길 확률을 구하시오. [8점]

논제 1-3

조별 경기 순서를 추첨을 통하여서 결정하였을 때, 한국 팀이 첫 번째 경기를 지고, 두 번째 경기는 비기고, 마지막 경기는 이겼다고 한다. 이런 경우가 일어날 확률이 가장 높은 한국 팀의 경기 순서를 찾고, 그 이유를 설명하시오. [8점]

문제 2 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합 R을 정의역과 공역으로 갖는 연속 함수이다.

포물선 $y=x^2+px$을 생각하자. 함수 $y=x^2+px-f(x)$는 상수 p의 값에 따라 최솟값을 가질 수도 가지지 않을 수도 있다. 집합 A를 다음과 같이 정의한다.

$$A=\{p\in R \mid x^2+px-f(x)\text{가 최솟값을 가진다.}\}$$

함수 $F(p)$는 $p\in A$에 대하여 $x^2+px-f(x)$의 최솟값을 대응하는 함수이다. 집합 B를 다음과 같이 정의한다.

$$B=\{t\in R \mid \text{어떤 } p\in A\text{에 대하여 } x^2+px-f(x)\text{는 } x=t\text{에서 최솟값을 갖는다.}\}$$

(나) 연속 함수 $g(x)$에 대하여 부등식 $g(x)\geq f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 성립하고 등호는 단 한 점에서만 성립하면 곡선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$의 위쪽에서 단 한 번 만난다고 한다.

(다) 두 실수 a, b에 대하여 $\min(a, b)$는 다음과 같이 정의한다.

$$\min(a, b)=\begin{cases} a, & a\leq b \\ b, & a>b \end{cases}$$

논제 2-1

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 모든 실수에 대하여 존재하고 또한 연속이라고 가정하자. 집합 $A=\{1\}$이고 $B=(-\infty, \infty)$인 함수 $f(x)$를 모두 찾고 그 이유를 설명하시오. 집합 $A=(0, \infty)$인 함수 $f(x)$가 존재하는지를 판단하고 그 이유를 설명하시오. [8점]

논제 2-2

포물선 $y=x^2$을 x축과 y축의 양의 방향으로 각각 a와 b만큼 평행이동 하면 곡선 $y=f(x)$의 위쪽에서 단 한 번 만난다고 하자. 이 정보만을 가지고 집합 A의 원소 p를 최소한 1개 찾아서 a, b에 대한 식으로 표현하고 $F(p)$를 구하시오. [8점]

논제 2-3

함수 $f(x)$의 최댓값이 존재한다고 가정하자. 이 때 집합 A를 구하고 그 이유를 설명하시오. [8점]

논제 2-4

함수 $f(x)=\min(ax+b, cx+d)$에 대하여 (단, $a<c$) 집합 A와 B를 찾고, $F(p)$를 a, b, c, d와 p에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

배경지식 쌓기

1. 조건부 확률

사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률을
사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부 확률이라고 부른다.
기호로는 $P(B|A)$라고 쓴다.

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\text{이다.}$$

2. 여사건의 확률

임의의 사건 A에 대하여

$$P(A^C)=1-P(A)$$

3. 이차함수에서 최대 최소

이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서

$a>0$인 경우, $y=ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$에서

최솟값 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$를 가진다.

$a<0$인 경우, $y=ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$에서

최댓값 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$를 가진다.

4. 극대, 극소의 판정

$x=a$를 포함하는 열린 구간에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 $f'(a)=0$을 만족할 때, 다음이 성립한다.

(1) $f''(a)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값 $f(a)$를 가진다.
(2) $f''(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값 $f(a)$를 가진다.

풀어보기

문제 1

흰 공 4 개, 검은 공 3 개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2 개의 공을 동시에 꺼내어, 꺼낸 2 개의 공의 색이 서로 다르면 1 개의 동전을
3 번 던지고, 꺼낸 2 개의 공의 색이 서로 같으면 1 개의 동전을 2 번 던진다. 이 시행에서 동전의 앞면이 2 번 나올 확률은? (2012년 대수능)

① $\frac{9}{28}$ ② $\frac{19}{56}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{11}{28}$

문제 2

함수 $f(x)=kx^2e^{-x}$ $(k>0)$ 과 실수 t 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서 x 축까지의 거리와 y 축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k 의 최댓값은? (2012년 대수능)

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

읽기자료

로또 당첨확률과 벼락 맞을 확률

1. 로또 당첨 확률

등위	당첨 방법	계산식과 당첨확률
1등	45개중 6개 번호 일치	$\frac{{}_6C_6}{{}_{45}C_6}=\frac{1}{8,145,060}$
2등	45개중 6개 번호 일치+ 보너스 번호 일치	$\frac{{}_6C_5\times{}_{39}C_1}{{}_{45}C_6}\times\frac{1}{39}=\frac{1}{1,357,510}$
3등	45개중 5개 번호 일치	$\frac{{}_6C_5\times{}_{39}C_1}{{}_{45}C_6}\times\frac{38}{39}=\frac{1}{35,724}$
4등	45개중 4개 번호 일치	$\frac{{}_6C_4\times{}_{39}C_2}{{}_{45}C_6}=\frac{1}{733}$
5등	45개중 3개 번호 일치	$\frac{{}_6C_3\times{}_{39}C_3}{{}_{45}C_6}=\frac{1}{45}$

2. 벼락 맞을 확률 25)

벼락 맞아 죽을 확률은 1년에 대략 1000명 정도라고 합니다. 지구의 인구를 60억이라고 하면 벼락 맞아 죽을 확률은 대략 (1/60만)이 됩니다. 따라서 로또 확률과 비교하려면 같은 1년을 주기로 계산해야 합니다. 1년을 52주로 계산하면 1등이 될 확률에 52를 곱해야 합니다. 즉, 1년에 로또 걸릴 확률은 (1/15만)로 계산할 수도 있습니다. 그러나 위의 계산은 논리적 모순을 포함하고 있습니다. 하나는 경험적 확률이고 하나는 논리적인 확률인데 기간을 곱한다는 개념이 과연 타당한가 하는 의문은 남을 수 있습니다.

어쨌든 위와 같은 계산이 타당하다고 가정하면 벼락 맞을 확률보다는 로또 당첨할 확률이 높다고 할 수 있습니다. 실제로 매주 로또 당첨자는 나타나지만, 벼락 맞아 죽었다는 신문보도는 거의 볼 수 없는 것도 사실입니다.

25) 수학선생님도 궁금한 101가지 수학질문사전 - 이동흔 외 8명 지음, 북멘토

예시답안

풀어보기

문제 1

(i) 꺼낸 공의 색이 다른 경우
꺼낸 공의 색이 다르고, 1 개의 동전을 3 번 던져서 앞면이 2 번 나올 확률은

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2} \times {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{12}{21} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{14}$$

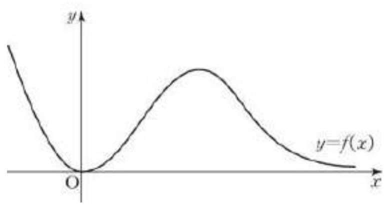
(ii) 꺼낸 공의 색이 같은 경우
꺼낸 공의 색이 같고, 1 개의 동전을 2 번 던져서 앞면이 2 번 나올 확률은

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{21} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{28}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{3}{14} + \frac{3}{28} = \frac{9}{28}$

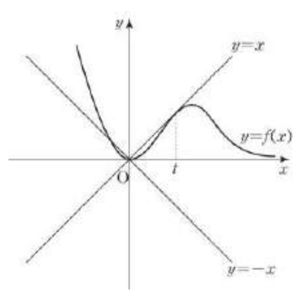
문제 2

$f(x) = kx^2e^{-x}\,(k>0)$ 에서 $f'(x) = 2kxe^{-x} - kx^2e^{-x} = kx(2-x)e^{-x}$
$f'(x) = 0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$



x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{4k}{e^2}$	↘

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$ 에서 x 축까지의 거리와 y 축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$ 라 하므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$, $y=-x$ 와 만나는 교점을 찾는다.



이때, 미분가능하지 않은 점이 한 곳만 있으려면 $x>0$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선

$y=x$ 가 만나지 않거나 접해야 한다. 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$ 라 하면

$$kt^2e^{-t}=t\ \cdots\cdots\ ㉠\ \text{이고}$$

$x=t$ 에서 접선의 기울기가 1 이므로 $kt(2-t)e^{-t}=1\ \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $2-t=1\quad \therefore\ t=1\quad \therefore\ k=e$ 따라서 k 의 최댓값은 e 이다.

논제 1-1

첫 번째 A 팀과의 경기에서 이긴 경우, 비긴 경우, 진 경우의 3가지로 나눈다.

(i) A 팀과의 경기에서 이긴 경우 (이길 확률 $\frac{1}{3}$)

(나)에 의해 B 와의 경기에서 이길 확률은 $1.3\times\frac{3}{5}$, 비길 확률은 $\frac{1}{5}$ 이므로 B 와의 경기에서 질 확률은

$$\frac{1}{5}\left(1-\frac{13}{10}\times\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{250}$$

이다.

(ii) A 팀과의 경기에서 비긴 경우 (비길 확률 $\frac{2}{5}$)

B 와의 경기에서 이길 확률은 $1.1\times\frac{3}{5}$, 비길 확률은 $\frac{1}{5}$ 이므로 B 와의 경기에서 질 확률은

$$\frac{2}{5}\left(1-\frac{11}{10}\times\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\right)=\frac{14}{250}$$

이다.

(iii) A 팀과의 경기에서 진 경우 (질 확률 $\frac{2}{5}$)

B 와의 경기에서 이길 확률은 $0.9\times\frac{3}{5}$, 비길 확률은 $\frac{1}{5}$ 이므로 B 와의 경기에서 질 확률은

$$\frac{2}{5}\left(1-\frac{9}{10}\times\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\right)=\frac{26}{250}$$

이다. 그러므로 (i),(ii),(iii)에 의해 B 와의 경기에서 질 확률은

$$\frac{1}{250}+\frac{14}{250}+\frac{26}{250}=\frac{41}{250}$$

이다.

논제 1-2

한국 팀이 B와의 경기에서 지지 않을 확률은 [1-1]에 의해 $1-\frac{41}{250}=\frac{209}{250}$ 이다.

문제의 조건을 만족시키는 경우는 A, B, C 팀에 대해 (이김,이김,이김), (이김,이김,비김), (이김,비김,이김), (비김,이김,이김)의 4가지 경우가 있다.

(i) (이김,이김,이김): $\frac{1}{5}\times\frac{13}{10}\times\frac{3}{5}\times\frac{13}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{507}{25000}$

(ii) (이김,이김,비김): $\frac{1}{5}\times\frac{13}{10}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{39}{1250}=\frac{780}{25000}$

(iii) (이김,비김,이김): $\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{11}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{11}{2500}=\frac{110}{25000}$

(iv) (비김,이김,이김): $\frac{2}{5}\times\frac{11}{10}\times\frac{3}{5}\times\frac{13}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{858}{25000}$

(i),(ii),(iii),(iv)의 확률을 모두 더하면

$$\frac{507+780+110+858}{25000}=\frac{2255}{25000}=\frac{451}{5000} \text{ 이다.}$$

그러므로 한국 팀이 B팀과의 경기에서지지 않았을 때, 모든 경기에서지지 않으면서 두 경기 이상 이길 확률은

$$\frac{\frac{451}{5000}}{\frac{209}{250}}=\frac{41}{380}$$

이다.

논제 1-3

두 번째 경기에서 비겼으므로 <제시문 나>에 의하여 앞 경기의 영향을 받지 않는 독립사건이다. 마지막 경기에서 승리할 확률은 어떤 경우든 1.1을 곱하게 되므로 지고, 비기고, 이기는 각각의 경우의 가장 높은 확률을 곱하면 되므로 순서는 C, A, B이다.

논제 2-1

① $A=\{1\}$ 이고 $B=(-\infty,\infty)$ 일 때,

$x^2+x-f(x)$ 는 모든 실수에서 최솟값을 가져야 하므로 함수 $x^2+x-f(x)$ 는 상수함수이다. 즉, $f(x)=x^2+x+C$ (C는 상수) 이다.

② $A=(0,\infty)$ 인 함수 $f(x)$ 를 만들어보자.

$x=t$ 에서 $y=x^2+px-f(x)$ 가 극솟값(최솟값)을 가지면

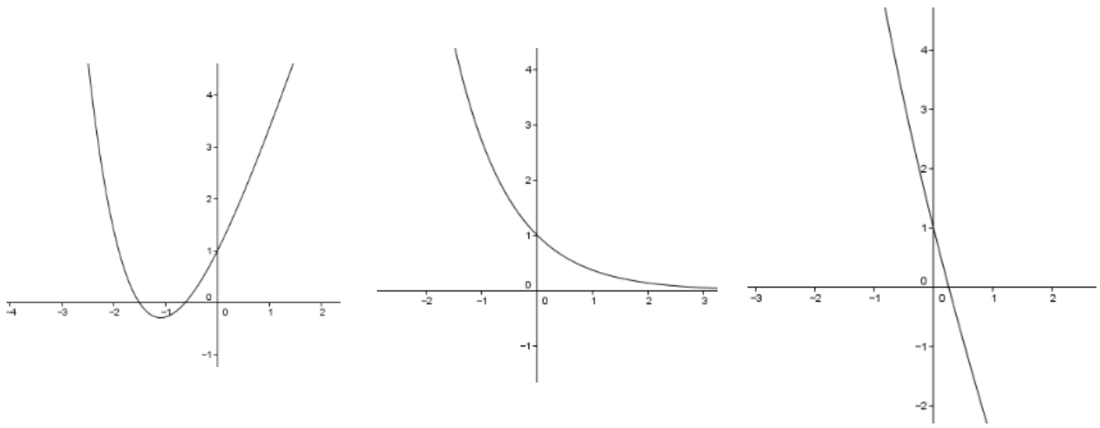
$$y'(t)=2t+p-f'(t)=0 \text{ 이고 } y''(t)=2-f''(t)>0$$

이다. 따라서 $p=f'(t)-2t>0$ 이고 $f''(t)<2$ 를 만족하도록 적당히

$p=f'(t)-2t=e^{-t}$ 라 두면

$f(x)=-e^{-x}+x^2$ 은 $A=(0,\infty)$ 인 함수이다. 그러므로 $A=(0,\infty)$ 인 함수 $f(x)$ 가 존재한다.

$p>0$ $\qquad$ $p=0$ $\qquad$ $p<0$



$y=x^2+px-\left(-e^{-x}+x^2\right)$ 의 그래프

(대학발표 예시답안)

■ $A=\{1\}$, $B=(-\infty,\infty)$ 라면 $x^2+x-f(x)$ 가 상수여야 한다.

따라서 $f(x)=x^2+x+C$ 이다.

■ $g(x)=f'(x)-2x$ 라고 하자. $p\in A$ 라면 $p=g(x)$ 인 x 가 존재하여야 한다.

따라서 $p\in A$ 인 필요조건은 p 가 $g(x)$ 의 치역에 들어가는 것이다.

예를 들어, $g(x)=e^{-x}$ 라 하면 $f(x)=x^2-e^{-x}$ 이고, 이 때 $A=(0,\infty)$ 임을 확인할 수 있다.

논제 2-2

$(x-a)^2+b=f(x)$ 의 근을 t 라 두면 문제의 조건에 의해

$$(x-a)^2+b\ge f(x) \text{ 이고, } f(t)=(t-a)^2+b \cdots ㉠$$

이다. 따라서

$$x^2+px-f(x)\ge x^2+px-(x-a)^2-b^2=(p+2a)x-a^2-b$$

이고, $p=-2a$ 이면 $x^2-2ax-f(x)\ge -a^2-b$ 이다. $x=t$ 일 때 ㉠에 의해 등호가 성립한다.

따라서 $x^2+px-f(x)$ 는 최솟값을 가지고, $F(p)=F(-2a)=-a^2-b$ 이다.

(대학발표 예시답안)

■ $(x-a)^2+b-f(x)$ 가 최솟값 0 을 가짐을 유추할 수 있다.
따라서 $x^2-2ax-f(x)\geq -a^2-b$ 이므로 $p=-2a$ 일 때 $F(p)=-a^2-b$ 이다.

논제 2-3

함수 $f(x)$ 의 최댓값을 M이라고 하면 모든 실수 x 에 대해 $f(x)\leq M$이 성립하므로

$$x^2+px-f(x)\geq x^2+px-M=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}-M$$

이다. 그리고 $\lim_{x\to\infty}(x^2+px-M)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}(x^2+px-M)=\infty$ 이므로

$$\lim_{x\to\infty}\{x^2+px-f(x)\}=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\{x^2+px-f(x)\}=\infty$$

이다. 함수 $x^2+px-f(x)$ 는 연속함수이므로 임의의 p 에 대하여 $(-\infty,\infty)$ 에서 최솟값이 반드시 존재한다. 그러므로 $A=(-\infty,\infty)$ 이다.

(대학발표 예시답안)

■ 상수 C가 $f(x)$ 의 최댓값보다 크다면 모든 실수 p 에 대하여 부등식 $x^2+px+\frac{p^2}{4}+C>f(x)$ 가 성립한다.
포물선 $y=x^2+px+\frac{p^2}{4}+C$ 을 y 축의 아랫방향으로 평행이동하면 $y=f(x)$ 와 최초로 만날 것이다.
따라서 모든 실수 p 에 대하여 $F(p)$ 가 존재하고 $A=(-\infty,\infty)$ 이다.

논제 2-4

$y=ax+b$ 와 $y=cx+d$ 의 교점의 x 좌표는 $x=\frac{b-d}{c-a}$ 이므로

$$f(x)=\min(ax+b,\ cx+d)=\begin{cases} cx+d & \left(x<\frac{b-d}{c-a}\right) \\ ax+b & \left(x\geq\frac{b-d}{c-a}\right)\end{cases}$$

이다.

(i) $x<\frac{b-d}{c-a}$ 일 때,

$x^2+px-f(x)=x^2+(p-c)x-d=\left(x+\frac{p-c}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(p-c)^2-d$ 이고,

$\frac{c-p}{2}<\frac{b-d}{c-a}$, 즉 $p>c-\frac{2(b-d)}{c-a}$ 이면 $x=\frac{c-p}{2}$ 에서 최솟값 $-\frac{1}{4}(p-c)^2-d$ 를 갖는다.

(ii) $x>\frac{b-d}{c-a}$ 일 때, $x^2+px-f(x)=x^2+(p-a)x-b=\left(x+\frac{p-a}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(p-a)^2-b$ 이고,

$\frac{a-p}{2} > \frac{b-d}{c-a}$, 즉 $p \le a-\frac{2(b-d)}{c-a}$ 이면 $x=\frac{a-p}{2}$ 에서 최솟값 $-\frac{1}{4}(p-a)^2-d$ 를 갖는다.

(iii) (i), (ii)에서 $\frac{c-p}{2} \ge \frac{b-d}{c-a}$, $\frac{a-p}{2} \le \frac{b-d}{c-a}$ 일 경우, 즉,

$a-\frac{2(b-d)}{c-a} \le p \le c-\frac{2(b-d)}{c-a}$ 이면 $x=\frac{b-d}{c-a}$ 에서 최솟값은

$\left(\frac{b-d}{c-a}\right)^2+p\left(\frac{b-d}{c-a}\right)+\frac{ad-bc}{c-a}$ 이다.

또한 실수 x는 $x<a-\frac{2(b-d)}{c-a}$, $a-\frac{2(b-d)}{c-a} \le x \le c-\frac{2(b-d)}{c-a}$,

$x>c-\frac{2(b-d)}{c-a}$ 중의 한 곳은 반드시 포함되므로

$$F(p)=\begin{cases} -\frac{1}{4}(p-a)^2-b^2 & \left(p<a-\frac{2(b-d)}{c-a}\right) \\ \left(\frac{b-d}{c-a}\right)^2+p\left(\frac{b-d}{c-a}\right)+\frac{ad-bc}{c-a} & \left(a-\frac{2(b-d)}{c-a} \le p \le c-\frac{2(b-d)}{c-a}\right) \\ -\frac{1}{4}(p-c)^2-d^2 & \left(p>c-\frac{2(b-d)}{c-a}\right) \end{cases}$$ 이고

$A=(-\infty,\infty)$ 이고 $B=(-\infty,\infty)$ 이다.

(대학발표 예시답안)

■ 두 직선 $y=ax+b$ 와 $y=cx+d$ 의 교점을 $\alpha=\frac{b-d}{c-a}$ 라 하자.

$x^2+px-f(x)$ 의 최솟값은 $x=\alpha$ 또는 $2x+p-f'(x)=0$ 인 점에서 발생한다.

$2x+p-f'(x)=\begin{cases} 2x+p-c, & x<\alpha \\ 2x+p-a, & x>\alpha \end{cases}$ 이므로

▶ $x<\alpha$, $2x+p-c=0$ 이면, $p>c-2\alpha$ 이고, $x=\frac{c-p}{2}$ 에서

$x^2+px-f(x)=-\frac{(p-c)^2}{4}-d$ 이다.

▶ $x>\alpha$, $2x+p-a=0$ 이면, $p>a-2\alpha$ 이고, $x=\frac{a-p}{2}$ 에서

$x^2+px-f(x)=-\frac{(a-p)^2}{4}-b$ 이다.

▶ $x=\alpha$ 에서는 $x^2+px-f(x)$ 의 값은 $\alpha^2+p\alpha-\frac{bc-ad}{c-a}$ 이다.

그런데, $-\frac{(p-c)^2}{4}-d-\alpha p-\alpha^2+\frac{bc-ad}{c-a}=-\frac{1}{4}(p+2\alpha-c)^2 \le 0$ 이고 마찬가지로

$-\frac{(p-a)^2}{4}-b-\alpha p-\alpha^2+\frac{bc-ad}{c-a}=-\frac{1}{4}(p+2\alpha-a)^2 \le 0$ 이므로

$$F(p)=\begin{cases} -\frac{1}{4}(p-a)^2-b, & p<a-2\frac{b-d}{c-a} \\ \frac{b-d}{c-a}p+\left(\frac{b-d}{c-a}\right)^2-\frac{bc-ad}{c-a}, & a-2\frac{b-d}{c-a} \le p \le c-2\frac{b-d}{c-a} \\ -\frac{1}{4}(p-c)^2-d, & p>c-2\frac{b-d}{c-a} \end{cases}.$$

따라서 $A=(-\infty,\infty)$ 이다. 또한 $B=(-\infty,\infty)$ 이다.

27 연세대학교 수시

※ 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

[가] C_0 는 좌표평면 위의 원 $x^2+y^2=1$ 이다.

[나] $n=1, 2, 3, \cdots$ 에 대하여 C_n 은 다음 조건을 만족하는 원이라고 귀납적으로 정의한다.

①C_n 은 좌표평면위의 $x>0$ 인 영역에서 C_{n-1} 과 접한다.

②C_n 은 쌍곡선 $y^2-x^2=1$ 의 $y>0$ 인 부분과 $y<0$ 인 부분에서 동시에 접한다.

[다] C_n 의 반지름의 길이는 r_n 이다.

[1-1]

C_1 의 중심의 좌표와 C_1 과 쌍곡선 $y^2-x^2=1$ 이 접하는 점의 좌표를 구하시오. [5점]

[1-2]

모든 자연수 n에 대하여 r_{n-1}, r_n, r_{n+1} 사이의 관계식으로 수열 $\{r_n\}$의 점화식을 구하시오. [10점]

[1-3]

모든 자연수 n 에 대하여 C_n 의 중심의 x 좌표와 C_n 과 쌍곡선 $y^2-x^2=1$ 이 접하는 접점의 x 좌표는 자연수임을 보이시오. [10점]

※ 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

[가] 두 벡터 $\vec{u}=(0,0,1)$ 와 $\vec{v}=(0,1,0)$ 가 주어졌을 때, 원점 $\mathrm{O}(0,0,0)$ 을 지나고 벡터 $\vec{w}=(\cos\alpha)\vec{u}+(\sin\alpha)\vec{v}$ 에 평행한 직선을 직선 l 이라고 하자. 단, α 는 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 인 상수이다.

[나] 공간위의 임의의 점 P 에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 와 $\vec{w}$가 이루는 각을 $\theta\,(0\le\theta\le\pi)$ 라고 하자. 점 P 를 직선 l 을 축으로 회전하여 시각 t 에는 원래 위치로부터 $2\pi t$ 만큼 회전이동 한다. 이 때, P 가 회전이동한 점의 위치 벡터를 $\vec{r}(t)$ 라고 하자.

[다] 집합 T를 다음과 같이 정의 한다.

$$T=\left\{t\in[0,1) \mid \vec{r}(t)\cdot\vec{v}\le 0\right\}$$

실수 t 에 좌표평면 위의 점 $(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ 를 대응시킬 때, T에 해당하는 호의 길이를 L 이라고 하자.

[2-1]

$L=2\pi$ 인 점 P 에 대하여 θ 값의 범위를 구하시오. [5점]

[2-2]

$\cos L$ 과 θ 의 관계식을 구하시오. (α 는 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 인 상수) [15점]

[2-3]

$\alpha=\frac{\pi}{6}$ 이고 $\mathrm{P}=(0,1,z)$ 일 때, $z=0$ 에서 L 의 z 에 대한 변화율을 구하시오. [15점]

배경지식 쌓기

1. 쌍곡선

1) 초점 $F(c,0), F'(-c,0)$ 으로부터의 거리의 차가 $2a$ 인 쌍곡선의 방정식은

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $c>a>0,\ c^2=a^2+b^2$)

꼭짓점:$(\pm a, 0)$, 중심$(0,0)$, 주축의 길이: $2a$

2) 초점 $F(0,c), F'(0,-c)$ 으로부터의 거리의 차가 $2b$ 인 쌍곡선의 방정식은

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ (단, $c>b>0,\ c^2=b^2+a^2$)

꼭짓점:$(0, \pm b)$, 중심$(0,0)$, 주축의 길이: $2b$

2. 내적

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 θ $(0 \le \theta \le \pi)$ 일 때

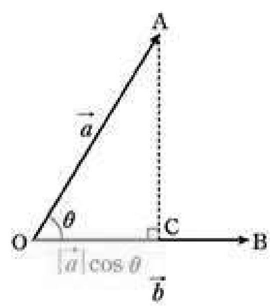
가. 정의

벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 내적 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ($\vec{a}=0$ 또는 $\vec{b}=0$ 일 때에는 $\vec{a} \cdot \vec{b}=0$)

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ 일 때, $\vec{a} \cdot \vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

나. 기하학적 의미

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 일 때, $\vec{a} \cdot \vec{b}$는 벡터 $\vec{a}$ 의 벡터 $\vec{b}$ 로의 정사영 $\overline{OC}$ 의 크기에 벡터 $\vec{b}$ 의 크기를 곱한 것이다.



3. 공간에서의 직선의 방정식

가. 점 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 을 지나고, 벡터 $\vec{d}=(l,\ m,\ n)$ 에 평행한 직선의 방정식

$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$, 이때, $\vec{d}$ 를 직선 l 의 방향벡터라 한다.

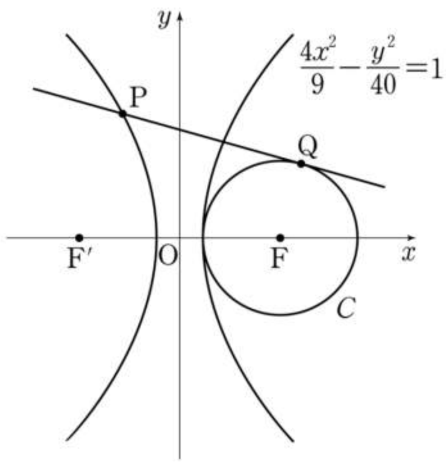
나. 두 점 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 를 지나는 직선의 방정식

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ (단,$x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2,\ z_1 \neq z_2$)

풀어보기

문제 1

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{4x^2}{9}-\frac{y^2}{40}=1$ 의 두 초점은 F , F′ 이고, 점 F 를 중심으로 하는 원 C는 쌍곡선과 한 점에서 만난다. 제 2사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P 에서 원 C에 접선을 그었을 때 접점을 Q 라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=12$ 일 때, 선분 PF′ 의 길이는? (2013년 6월 모의수능)



① 10　　② $\frac{21}{2}$　　③ 11　　④ $\frac{23}{2}$　　⑤ 12

문제 2

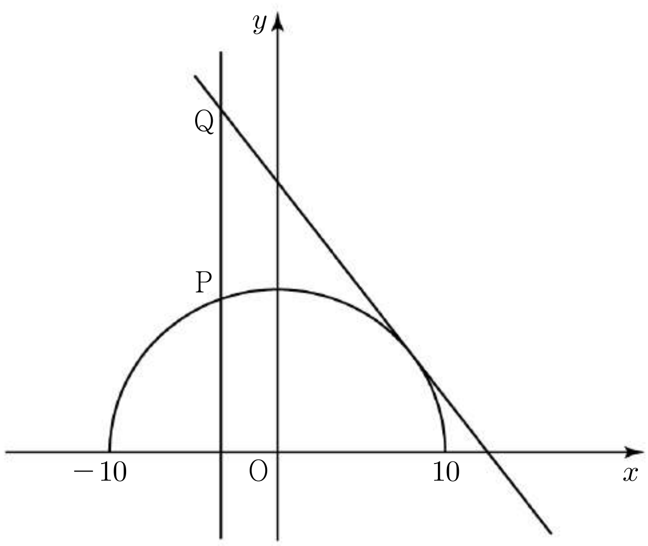
좌표공간에서 네 점 A_0, A_1, A_2, A_3이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2}\rvert=\lvert\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}\rvert=2$
(나) $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_k}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}\right)=\cos\frac{3-k}{3}\pi$ $(k=1, 2, 3)$

$\lvert\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}\rvert$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. (2012년 9월 모의수능)

문제 3

곡선 $C: x^2+y^2=100\ (y \geq 0)$ 과 곡선 C 의 접선 $y=-\sqrt{3}x+20$ 이 있다. 곡선 C 위의 점 P 에서 y 축에 평행한 직선을 그어 접선과 만나는 점을 Q 라 하자. 점 P 가 점 A$(10, 0)$ 을 출발하여 곡선 위를 매초 5 의 일정한 속력으로 점 B$(-10, 0)$ 까지 이동할 때, 시간(초)에 대한 선분 PQ 의 길이의 순간변화율의 최댓값을 구하시오. (2014년 7월 전국연합 B형)



읽기자료

부호설계에 활용되는 벡터의 내적[26]

1. 오류감지부호

가. 홀짝맞춤검사부호(parity check code)

> 1의 개수가 짝수가 되도록 하는 벡터인 검사숫자라 불리는 여분의 성분을 추가하여 만들어짐.
> 메시지가 Z_2^n 에 있는 이진벡터 $\vec{b}=[b_1, b_2, \cdots, b_n]$ 라고 가정하자.
> 홀짝맞춤검사부호벡터는 $\vec{v}=[b_1, b_2, \cdots, b_n, d]$ 이고 여기서 검사숫자 d 는 Z_2 에 있는 원소로서
> $$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + d = 0 \quad \text{또는} \quad 1 \cdot \vec{v} = 0$$
> 을 만족하도록 선택.
> 여기서 $\vec{1}=[1, 1, \cdots, 1]$ 을 검사벡터(check vector)라고 한다.

[예제 1]

메시지가 홀수 개의 1을 갖는 $[1, 0, 0, 1, 0, 1]$ 일 때, 검사숫자는 1이 됨.
부호벡터는 $[1, 0, 0, 1, 0, 1, 1]$ 이고 만약 $[1, 0, 1, 1, 0, 1, 1]$ 으로 오류발생시 홀짝맞춤은 홀수가 되어 오류를 발견할 수 있게 되는 원리.

나. 검사숫자부호

> 검사숫자 : 부호 번호의 최종 자리 단위에 기본 부호 외에 패리티를 만들어, 부호의 오류를 방지하거나 만일 발생하더라도 이것을 효율적으로 검출할 수 있도록 한 것. 검사 숫자 방법은 미리 부호 번호에서 정해진 계산 방식에 따라 수치를 산출하고, 이 결과를 부호 번호의 최종 자리 단위에 부여해서 사용한다. 그리고 컴퓨터에 입력할 때 같은 계산을 하여 마지막 자릿수와 비교하여 오류를 검사한다.

[예제 2]

$\vec{u}=[2, 2, 0, 1, 2]$ 일 때 검사벡터 $\vec{1}=[1, 1, \cdots, 1]$ 에 대해
$\vec{1} \cdot \vec{u}$ 은 $2+2+0+1+2=1$ (in Z_3)이므로 검사숫자는 2가 되어야 한다.
따라서 부호벡터는 $\vec{v}=[2, 2, 0, 1, 2, 2]$ 이다.
☞ 인접한 두 성분들의 우발적인 상호교환이나 위치교환과 같은 다른 공통형태의

26) 선형대수학, David Poole, 경문사, 알기 쉬운 선형대수, Howard Anton, 범한서적

오류를 찾아낼 때에도 종종 중요하다.
$\vec{v}$의 두 번째 성분과 세 번째 성분의 위치를 바꾸면
잘못된 벡터는 $\overrightarrow{v'}=[2, 0, 2, 1, 2, 2]$ 이 된다.
이러한 오류를 발견하기 위해 검사벡터 $\vec{1}$을 어떤 벡터 $\vec{c}$로 바꾸게 된다.

2. **세계상품코드**(Universal Product Code)
검사벡터 : $\vec{c}=[3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1]$
UPC : $\vec{u}=[0, 7, 4, 9, 2, 7, 0, 2, 0, 9, 4, 6]$ 에 대하여
$\vec{c} \cdot \vec{u} = 3\cdot 0+7+3\cdot 4+9+3\cdot 0+2+3\cdot 0+9+3\cdot 4+d \;=4+d$ (in Z_{10})
즉, Z_{10}에서 계산결과가 0 (10의 배수)이 되기 위해서 검사숫자 d가 6이 되어야 한다.
☞ 위치교환 오류발견
u의 네 번째와 다섯 번째 성분이 서로 바뀌어 $\overrightarrow{u'}=[0, 7, 4, 2, 9, 7, 0, 2, 0, 9, 4, 6]$으로 잘못 써진 경우 $\vec{c}\cdot\overrightarrow{u'}=4 \neq 0$이 되어 오류를 가지고 있음을 알려준다.

※ 바코드는 13자리 숫자로 이루어져 있는데, 제일 앞에 3개의 숫자는 제조국가를 나타내고, 다음 4 개는 제조업자, 그 다음 5 개는 어떤 제품인가를 나타낸다.
그리고 남은 **마지막 하나의 숫자가 앞의 12 개 숫자들에 의해 결정되는 <체크숫자>이다.**
이 <체크 숫자>는 다음의 법칙에 따라서 결정된다.
우선 체크숫자를 뺀 12자리 중 홀수 번 째 자리에 있는 수들을 그대로 더하고, 짝수 번째자리에 있는 수들은 더한 후 3 배를 한다. 이 두 값에 체크숫자까지 더하면 10의 배수가 되도록 해 놓았다.
(예) <lettering>(숫자) 제품의 바코드 번호이다. 끝의 7 이 체크숫자다.

8 8 0 3 6 4 8 0 1 4 7 2 7

홀수 번째 자릿수의 합 : $8+0+6+8+1+7=30$
짝수 번째 자릿수의 합 : $3\times(8+3+4+0+4+2)=63$
둘을 더한 값 + 체크 숫자 = (10의 배수)

$(30+63)+7=100$

체크 숫자 : 7

만일 기계가 바코드를 잘못 읽으면 바코드의 숫자로 검증 셈을 했을 때, 10 의 배수가 되지 않아 기계는 “삑”하는 경고음을 내게 되어있다.

3. 국제표준 도서번호(International Standard Book Number) 부호

부호벡터는 Z_{11}^{10} 에 있는 벡터.

성분 : 국가, 발행자, 도서정보 표시. 마지막 숫자가 검사숫자.

검사벡터 : $\vec{c}=[10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]$

$\vec{c} \cdot \vec{x}=0$ (in Z_{11})

4. 코다바 시스템

신용카드 16 자리 번호

검사벡터 : $\vec{c}=[2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1]$

h : 4 보다 크면서 홀수 번째 있는 숫자들의 개수

$(\vec{c} \cdot \vec{x})+h=0$ (in Z_{10}) 으로 검사숫자 결정됨.

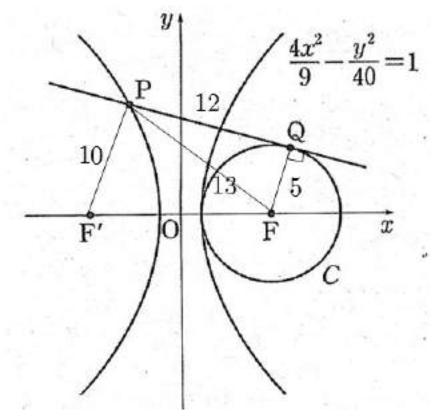
예시답안

풀어보기

문제 1

$\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{40}=1$ 에서 원 C와 쌍곡선의 교점은 $\mathrm{R}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이다. $\mathrm{F}(c,\ 0)$이라 두면

$c^2=\frac{9}{4}+40=\frac{169}{4}=\left(\frac{13}{2}\right)^2 \qquad \therefore\ \mathrm{F}\left(\frac{13}{2},\ 0\right)$



따라서, 원 C의 반지름의 길이 $r=\frac{13}{2}-\frac{3}{2}=5$

$\overline{\mathrm{PF}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{FQ}}^2=12^2+5^2=13^2 \quad \left(\because\ \angle\mathrm{PQF}=\frac{\pi}{2}\right) \quad \therefore\ \overline{\mathrm{PF}}=13$

쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}-3=10$

문제 2

$\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\right)=\cos\frac{2}{3}\pi$

$\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}-\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}|^2=-1$ …㉠

$\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}-\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}|^2=1$ …㉡

$\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\right)=1$

$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}|=2$

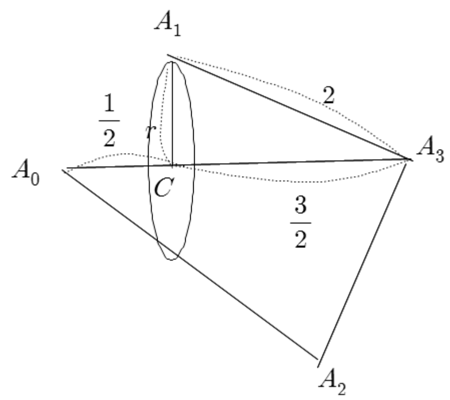
이때, ㉠, ㉡에 대입하면 $\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}=1$, $\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}=3$ 이고 $\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}$ 과 $\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}$ 이 이루는 각의 크기를 θ_1 , $\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}$ 과 $\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}$ 가 이루는 각의 크기를 θ_2 라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}=2|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}|\cos\theta_1=1 \qquad \therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}|\cos\theta_1=\dfrac{1}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}=4\cos\theta_2=3 \qquad \therefore\ \cos\theta_2=\dfrac{3}{4}$

이때, $|\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}}|^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\dfrac{3}{4}=2 \qquad \therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}}|=\sqrt{2}$

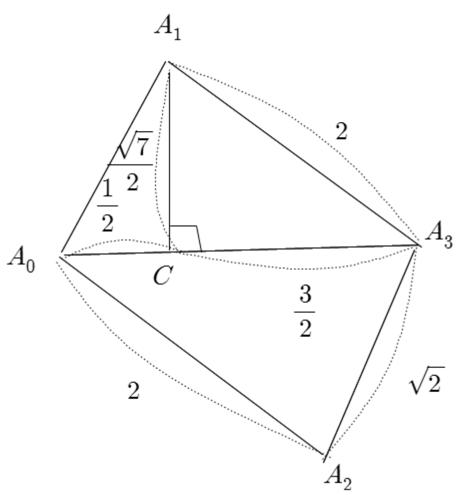
따라서, $|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}}|=2$ 이고 $|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}|\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 이므로 점 A_1 이 나타내는 도형은 선분 $\mathrm{A_0A_3}$ 을 1 : 3 으로 내분하는 점을 C 라 할 때, 점 C 를 중심으로 하는 원이다.



따라서, 반지름의 길이를 r 라 하면

$r^2=2^2-(\dfrac{3}{2})^2=\dfrac{7}{4}$. $\therefore\ r=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

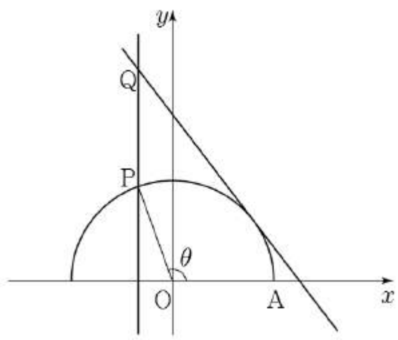
이때, $|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}|$ 가 최대가 되려면 즉, 선분 $\overline{\mathrm{A_1A_2}}$ 가 가장 긴 경우는 점 A_1 이 평면 $\mathrm{A_0A_2A_3}$ 과 같은 평면에 있을 때이다.



그런데, $\overline{A_0A_1}=\sqrt{(\frac{\sqrt{7}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{2}$ 이므로 두 삼각형 $A_0A_1A_3$, $A_0A_2A_3$ 은 합동이므로 $\angle A_1A_0A_3=\theta_3$ 이라 하면

$$M^2=2^2+(\sqrt{2})^2-2\times2\times\sqrt{2}\cos(\theta_2+\theta_3)=6-4\sqrt{2}(\cos\theta_2\cos\theta_3-\sin\theta_2\sin\theta_3)$$
$$=6-4\sqrt{2}(\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{\sqrt{14}}{4})=6-(\frac{3}{2}-\frac{7}{2})=8$$

문제 3



$\angle AOP=\theta$ 라 하면 호의 길이 $l=10\theta$

점 $P(10\cos\theta,\ 10\sin\theta)$ 가 매초 5 의 일정한 속력으로 이동하므로 양변을 시각 t 에 대해 미분하면

$$\frac{dl}{dt}=10\frac{d\theta}{dt}=5,\ \frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}$$

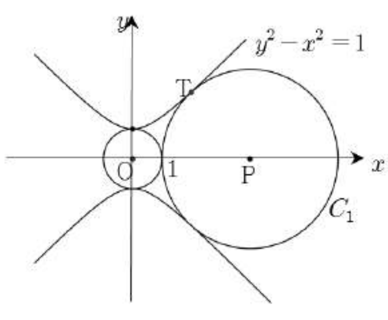
$$\overline{PQ}=L=20-10\sqrt{3}\cos\theta-10\sin\theta$$

따라서 L 을 시각 t 에 대해 미분하면

$$\frac{dL}{dt}=(10\sqrt{3}\sin\theta-10\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}=10\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$

따라서 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 일 때, 최댓값은 10

논제 1-1



원 C_1 의 반지름을 r_1 이라 하면 중심은 $P(r_1+1,0)$ 가 되므로 원의 방정식은

$$\{x-(r_1+1)\}^2+y^2=r_1{}^2$$

이다.

원 C_1 과 쌍곡선 $x^2-y^2=-1$ 이 접하므로 두 식을 연립한 이차식의 판별식이 0 이 되어야 한다.

$y^2=x^2+1$ 을 원의 방정식에 대입하여 정리하면

$$x^2-(r_1+1)x+(r_1+1)=0$$

이다.

$$D=(r_1+1)^2-4(r_1+1)=(r_1+1)(r_1-3)=0$$

에서 $r_1=3$ 이고, 원 C_1 의 중심의 좌표는 $\mathrm{P}(4,0)$ 이다.

이제 원 C_1 과 쌍곡선의 제1 사분면에서의 접점을 $\mathrm{T}(t,\sqrt{t^2+1})$ (단, $t>0$)라 두면 $\overline{\mathrm{PT}}=3$ 이므로

$$\sqrt{(t-4)^2+\left(\sqrt{t^2+1}-0\right)^2}=3$$

에서 $t=2$ 이다.

따라서, 원 C_1 과 쌍곡선 $x^2-y^2=-1$ 의 접점의 좌표는 $\left(2\,,\,\pm\sqrt{5}\right)$ 이다.

(다른 풀이)

원 C_1 의 반지름을 r_1 이라 하면 중심은 $\mathrm{P}(r_1+1,0)$ 가 되므로 원의 방정식은

$$\{x-(r_1-1)\}^2+y^2=r_1^2$$

이다. 원 C_1 과 쌍곡선이 접하므로 접점 $(x_0,\ y_0)$ 에서 접선의 기울기가 같다.

1) 쌍곡선 $x^2-y^2=-1$ 에서 접점 $(x_0,\ y_0)$ 에서의 접선의 기울기

쌍곡선 $x^2-y^2=-1$ 을 x 에 대하여 미분하면 $2x-2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$ 이므로 접점$(x_0,\ y_0)$ 에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x_0}{y_0}$ 이다.

2) 원 C_1 에서 접점 $(x_0,\ y_0)$ 에서의 접선의 기울기

원 C_1 을 x 에 대하여 미분하면 $2\{x-(1+r_1)\}+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$ 이므로 접점 $(x_0,\ y_0)$ 에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+r_1-x_0}{y_0}$ 이다.

1), 2)에서 두 접선의 기울기가 같으므로 연립하면 $x_0=\dfrac{1+r_1}{2}$ 이다.

또한, 접점 $(x_0,\ y_0)$ 는 원 C_1 과 쌍곡선 $x^2-y^2=-1$ 위의 점이므로

$$\{x_0-(r_1-1)\}^2+y_0^2=r_1{}^2\,,\quad x_0^2-y_0^2=-1$$

이다. 두 식을 연립하여 y_0 를 소거한 뒤 x_0 를 대입하여 정리하면

$$r_1^2-2r_1-3=0$$

이고, $r_1=3\ (r_1>0)$ 이다.

따라서, 원 C_1 의 중심은 $(4,0)$ 이고 접점의 좌표는 $(2,\ \pm\sqrt{5})$ 이다.

논제 1-2

자연수 $n(n\geq 1)$ 에 대하여 원 C_n 의 중점의 좌표를 $(x_n\ ,\ 0)$ 라 하자.

원 C_n : $(x-x_n)^2+y^2=r_n^2$ 과 쌍곡선 $y^2-x^2=1$ 이 접하므로 두 식을 연립하여 계산한 식

$$r_n^2-(x-x_n)^2=1+x^2$$

의 판별식은 0 이다. 따라서

$$x_n^2=2r_n^2-2 \cdots ①$$

이다. 같은 방법으로

$$x_{n+1}^2=2r_{n+1}^2-2 \cdots ②$$

가 된다. ②−① 하면

$$(x_{n+1}+x_n)(x_{n+1}-x_n)=2(r_{n+1}+r_n)(r_{n+1}-r_n)$$

이고 $x_{n+1}-x_n=r_{n+1}+r_n$ 이므로

$$x_{n+1}+x_n=2(r_{n+1}-r_n)\cdots ③$$

이다. 같은 방법으로

$$x_n+x_{n-1}=2(r_n-r_{n-1})\cdots ④$$

이다.

③−④하면

$$x_{n+1}-x_{n-1}=2r_{n+1}-4r_n+2r_{n-1}$$

이다.

한편, $x_{n+1}-x_{n-1}=r_{n+1}+2r_n+r_{n-1}$ 이므로 구하려는 점화식은

$$r_0=1\ ,\ r_1=3\ ,\ \ r_{n+1}-6r_n+r_{n-1}=0\ (n\geq 1)$$

이다.

논제 1-3

$x_n=1+2\sum_{k=1}^{n-1}r_k+r_n\ (n\geq 2)$, $x_1=4$ 이다. 그리고 원 C_n 과 쌍곡선의 접점의 x 좌표는 방정식

$$2x^2-2x_nx+x_n^2-r_n^2+1=0$$

의 중근이므로 $x=\dfrac{x_n}{2}$ 이다.

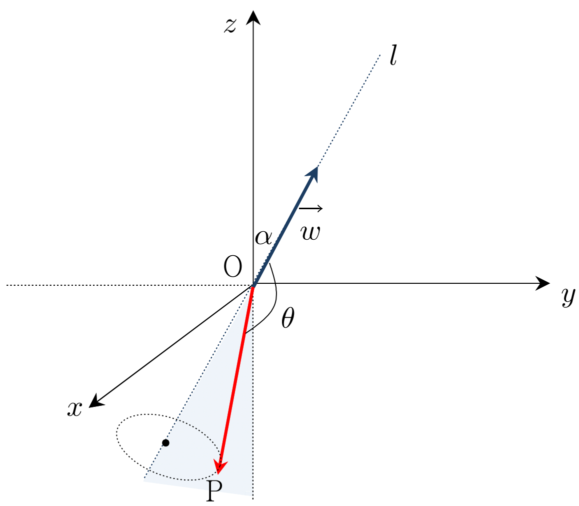
만약 r_{n-1} 과 r_n 이 모두 홀수이면 r_{n+1} 도 홀수다. ($\because r_{n+1}=6r_n-r_{n-1}$) 그런데 r_1, r_2 가 모두 홀수이므로 r_n 은 모든 자연수 n 에 대해 홀수다. 그러므로

$$x_n = 1+2\sum_{k=1}^{n-1} r_k + r_n \ = (홀수)+(짝수)+(홀수)=(짝수)$$

즉, 모든 n 에 대해 x_n 은 짝수이므로 접점의 x 좌표 $x=\frac{x_n}{2}$ 은 자연수이다.

논제 2-1

$\vec{w}=(0, \sin\alpha, \cos\alpha)$ 이므로 직선 l 은 yz 평면에서 z 축과 α 의 각을 이룬다. 이 때 점 P 는 아래 그림의 점선과 같이 회전한다. $\vec{r}(t) \cdot \vec{v} \le 0$ 일 때는 벡터 $\vec{r}(t)$ 의 y 성분이 0 또는 음수이다. 따라서 $L=2\pi$ 가 되려면 점 P 가 한 바퀴 돌 때 P 의 자취의 y 좌표가 항상 음수가 되어야 하므로 아래 그림의 음영부분에 벡터 $\overrightarrow{OP}$ 가 존재해야 한다. 따라서 $\pi-\alpha \le \theta \le \pi$ 이다.



(다른 풀이)

$L=2\pi$ 이므로 $0 \le t < 1$ 인 모든 t 에 대하여 $\overrightarrow{r(t)} \cdot \vec{v} \le 0$ 이 성립해야 한다. 이것이 성립하는 $\overrightarrow{r(t)}$ 의 y 성분의 최댓값은 $y=0$ 이다. 즉, 이 경우는 원이 z 축에 접하는 경우이다. 점 $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$ 에서 직선 l 에 내린 수선의 발 Q 는 원의 중심이고, 직선 l 의 방정식은

$$x=0, \ \frac{y}{\sin\alpha}=\frac{z}{\cos\alpha}$$

이다. 점 Q 의 좌표를 (a, b, c) 라고 두면 점 Q 는 직선 l 위의 점이고 두 벡터 $\overrightarrow{QP}$, $\vec{w}$ 은 서로 수직이므로 $\overrightarrow{QP} \cdot \vec{w}=0$ 이고, $\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{c}{\cos\alpha}$ 이다.

정리하면

$$b\sin\alpha + c\cos\alpha = y_0\sin\alpha + z_0\cos\alpha$$

$$b\cos\alpha - c\sin\alpha = 0$$

이고, 이것을 풀면, 점 Q 의 좌표는

$$(0,\ (y_0\sin\alpha + z_0\cos\alpha)\sin\alpha,\ (y_0\sin\alpha + z_0\cos\alpha)\cos\alpha)$$

이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OQ}} = |y_0\sin\alpha + z_0\cos\alpha|$ 이다.

또한, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{w} = y_0\sin\alpha + z_0\cos\alpha = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\times 1\times\cos\theta$ 이므로

$$\cos\theta = \frac{y_0\sin\alpha + z_0\cos\alpha}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$$

이다. 원의 중심 Q 에서 z 축에 이르는 거리는 원의 반지름의 길이($\overline{\mathrm{PQ}}$)보다 크거나 같아야 하므로

$$\overline{\mathrm{OQ}}\tan\alpha \ge \overline{\mathrm{PQ}}^2$$

가 성립해야 한다. 이 부등식의 양변을 제곱하고 $\overline{\mathrm{OQ}}$, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 값을 대입하면

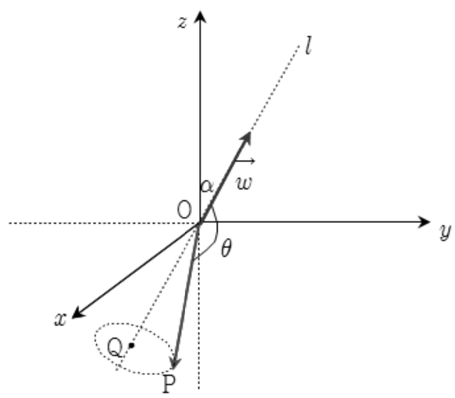
$$(y_0\sin\alpha + z_0\cos\alpha)^2\tan^2\alpha \ge x_0^2+y_0^2+z_0^2-(y_0\sin\alpha + z_0\cos\alpha)^2$$

이고, 이것을 정리하면

$$\cos^2\alpha \le \frac{(y_0\sin\alpha + z_0\cos\alpha)^2}{x_0^2+y_0^2+z_0^2} = \cos^2\theta$$

이다. $\cos^2\alpha \le \cos^2\theta$ 가 성립하기 위해서 $\theta \ge \pi-\alpha$ 이어야 한다.

따라서 $\pi-\alpha \le \theta \le \pi$ 이다.

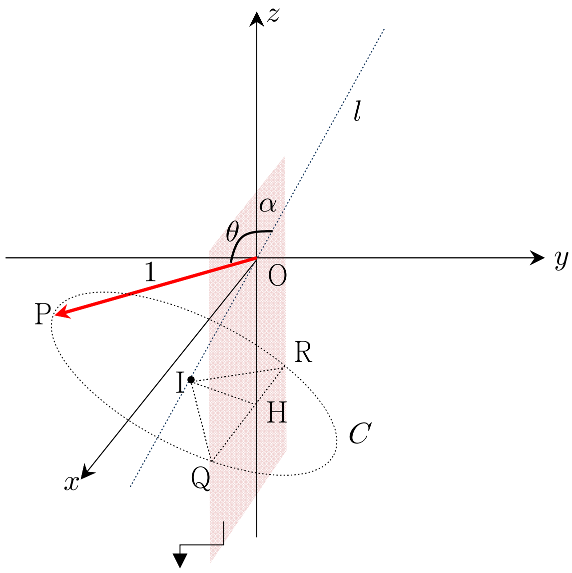


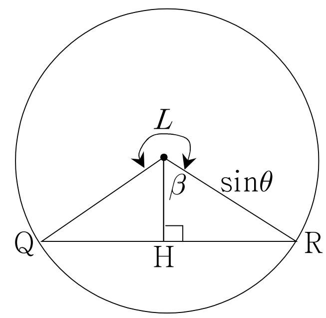
논제 2-2

(i) $0 \le \theta \le \alpha$ 일 때, 벡터 $\vec{r}(t)$ 의 y 성분이 0 이상이므로 $L=0$, $\cos L=1$

(ii) $\pi-\alpha \le \theta \le \pi$ 일 때, 벡터 $\vec{r}(t)$ 의 y 성분이 0 이하이므로 $L=2\pi$, $\cos L=1$

(iii) $\alpha \le \theta \le \pi-\alpha$ 일 때, 위치벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 를 직선 l 을 축으로 회전하면 다음 그림과 같이 평면 $y=0$ 을 기준으로 벡터 $\vec{r}(t)$ 의 y 좌표가 양수인 부분과 음수인 부분으로 나뉜다. 우리는 벡터 $\vec{r}(t)$ 의 y 좌표가 음수인 부분의 회전각이 중요하므로 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 를 단위벡터로 생각해도 일반성을 잃지 않는다.





선분 QR의 위 부분이 $\vec{r}(t)$ 의 y 좌표가 음수인 부분이다.

이제 점 P 가 회전이동한 원 C를 생각하자. 이 원의 반지름은 $\sin\theta$ 이고 원의 중심 I 에서 원이 $y=0$ 에 의해 잘린 선까지의 거리는 $\overline{\mathrm{IH}}=\cos\theta\cdot\tan\alpha$ 이다. $y \le 0$ 인 부분을 호로 가지는 부채꼴의 중심각이 L 이라 할 수 있고, $\angle\mathrm{RIH}=\beta$ 라 두면

$$\cos L=\cos(2\pi-L)=\cos 2\beta$$

가 된다.

$$\cos\frac{L}{2}=\cos\beta=\frac{\overline{\mathrm{IH}}}{\overline{\mathrm{RI}}}=\frac{1}{\sin\theta}\cdot\cos\theta\cdot\tan\alpha=\frac{\tan\alpha}{\tan\theta}=\cot\theta\cdot\tan\alpha$$

이므로 $\cos L=2\cos^2\frac{L}{2}-1=2\cot^2\theta\cdot\tan^2\alpha-1$ 이다.

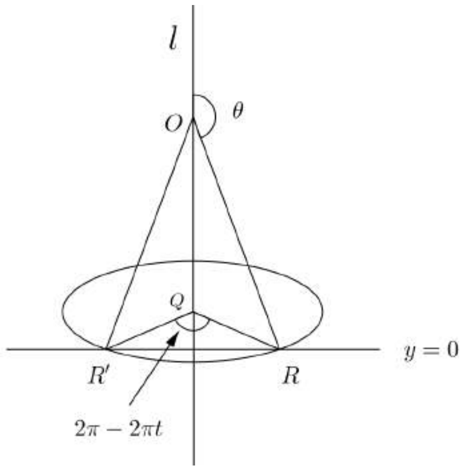
이상을 정리하면

$$\cos L=\begin{cases}2\cot^2\theta\cdot\tan^2\alpha-1 & (\alpha\le\theta\le\pi-\alpha)\\ 1 & (\text{그 외})\end{cases}$$

가 된다.

(다른 풀이)

$\alpha \le \theta \le \pi - \alpha$ 일 때만 다른 방법으로 접근해보자.



그림에서 벡터 $\vec{r}(t)$ 의 자취인 원이 평면 $y=0$ 과 만나는 두 점은 z 축에 대하여 대칭이다. 따라서 두 점을 각각 $\mathrm{R}(x_1, 0, z_1)$, $\mathrm{R}'(-x_1, 0, z_1)$ 라 하자. 그림에서

$$\cos L = \cos(2\pi t) = \cos(2\pi - 2\pi t) = \frac{2r^2 - (2x_1)^2}{2r^2} = 1 - \frac{2x_1^2}{r^2} \cdots\cdots ①$$

이고

$$\overline{\mathrm{OQ}} = \left|y_0 \sin\alpha + z_0 \cos\alpha\right| = z_1 \cos\alpha = \overline{\mathrm{OR}}\cos(\pi - \theta) = -\sqrt{x_1^2 + z_1^2}\cos\theta$$

이다. 이 식으로부터 $z_1^2\cos^2\alpha = (x_1^2 + z_1^2)\cos^2\theta$ 이고, 정리하여

$$x_1^2 = \frac{z_1^2(\cos^2\alpha - \cos^2\theta)}{\cos^2\theta} \cdots\cdots ②$$

을 얻을 수 있고, 원의 반지름의 길이 $r = \overline{\mathrm{OR}}\sin(\pi - \theta) = \sqrt{x_1^2 + z_1^2}\sin^2\theta$ $\cdots\cdots$ ③이다.
②, ③을 ①에 대입하여 정리하면

$$\cos L = 1 - \frac{2\cos^2\alpha - 2\cos^2\theta}{\cos^2\alpha\sin^2\theta}$$

이고, 이것을 다시 통분하여 정리하면 $\cos L = 2\cot^2\theta\tan^2\alpha - 1$ 이다.

논제 2-3

$z=0$ 이면 $\alpha \le \theta \le \pi-\alpha$ 일 때 이므로 $\cos\frac{L}{2}=\frac{\tan\alpha}{\tan\theta}=\frac{\cot\theta}{\sqrt{3}}$ 이다. 양변을 θ 에 관해 미분하면

$$-\frac{1}{2}\sin\frac{L}{2}\frac{dL}{d\theta}=-\frac{\mathrm{cosec}^2\theta}{\sqrt{3}}$$

$\theta=\frac{\pi}{3}$ 일 때, $\cos\frac{L}{2}=\frac{1}{3}$ 이므로 $\sin\frac{L}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다. 그러므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 에서 $\frac{dL}{d\theta}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 이다.

그리고 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 이므로 $\vec{p}=(0,1,z)$, $\vec{q}=(0,1,\sqrt{3})$ 이라 두면

$$\cos\theta=\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}=\frac{1+\sqrt{3}z}{2\sqrt{1+z^2}}$$

이다. 양변을 z 로 미분하면

$$-\sin\theta\frac{d\theta}{dz}=\frac{2\sqrt{3+3z^2}-\frac{2z(1+\sqrt{3}z)}{\sqrt{1+z^2}}}{4+4z^2}$$

이고 $z=0$, $\theta=\frac{\pi}{3}$ 에서 $\frac{d\theta}{dz}=-1$ 이다.

따라서 $z=0$ 일 때 L 의 z 에 대한 변화율은 $\frac{dL}{dz}=\frac{dL}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dz}=-\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 이다.

28 이화여자대학교 모의[27)]

문제 1

다음 주어진 각각의 도형 S에 대해 도형 S밖의 점 P 에서 그은 두 접선이 서로 수직할 때, 점 P 의 자취를 나타내는 방정식을 구하시오.

논제 1-1

$S: y = ax^2 (a \neq 0)$ [8점]

논제 1-2

$S: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \ (a, b > 0)$ [12점]

논제 1-3

$S: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \ (a, b > 0)$ [15점]

(힌트: 쌍곡선의 점근선과 기울기가 같은 접선은 존재하지 않는다.)

문제 2

2015 년 1 월1 일 현재 김이화 과장의 나이는 30 세이다. 이화은행에서는 김이화 과장에게 퇴직금으로 65 세부터 매해 1 회 연말에 1,000 만원씩 지급하려고 한다. 이때 연이율은 5% 의 복리로 고정되어 있다고 가정한다.

논제 2-1

김이화 과장이 100 세까지 퇴직금으로 매해 1,000 만원씩을 총 36 번을 수령했다고 할 때, 이 퇴직금 수령액 합계의 2015 년 1 월 1 일 현재 가치를 구하시오. [10점]

27) 이화여자대학교 입학처

논제 2-2

김이화 과장은 2015 년부터 64 세가 되는 2049 년까지 이화은행에 매해 연말에 300 만원씩 총 35 번을 적립한다고 한다. 이 적금(적립금 총액)으로 논제 2-1에 제시된 김이화 과장의 퇴직금을 충당하기에 충분한지 논하시오. [10점]

논제 2-3

김이화 과장이 매해 연말까지 생존할 확률이 $\frac{95}{100}$ 라고 하자. (예를 들어 현재 2015 년 1 월 1 일 나이가 30 세인 김이화 과장이 2015 년 12 월 31 일까지 살아있을 확률은 $\frac{95}{100}$, 그리고 2016 년 12 월 31 일까지 살아 있을 확률은 $\left(\frac{95}{100}\right)^2$ 이다.)

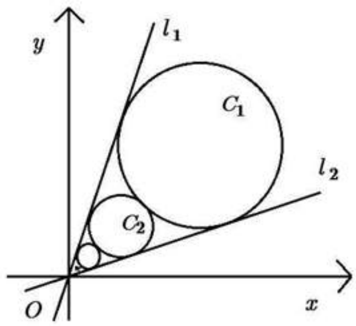
김이화 과장은 30 세부터 매해 연말 생존하였을 경우 일정한 금액 K를 매해 1 회 연말에 이화은행에 납입하며, 납입금은 김이화 과장이 64 세가 되는 2049 년 연말까지만 최대 35 번까지 납입될 수 있다. 그리고 퇴직금으로 김이화 과장이 65 세가 되는 해부터 최대 100 세가 되는 해까지 김이화 과장이 생존하였을 경우 매해 연말 1 회 1,000 만원씩이 지급되고, 최대 총 36 번까지 지급될 수 있다. 김이화 과장의 생존여부에 따른 적립예상금의 현재 가치를 적립금 현재가치라고 하고, 수령예상 퇴직금의 현재가치를 퇴직금 현재가치라고 하자. 이화은행은 김이화 과장의 퇴직금 현재가치의 기댓값과 김이화 과장의 적립금 현재가치의 기댓값이 같도록 납입금액 K를 책정하려고 한다. 이때 적절한 K를 구하시오. [10점]

(힌트: 위 문제에서 필요한 경우 다음의 계산을 사용할 수 있다.)

$1.05^{-1}=0.95$	$1.05^{-35}=0.18$	$1.05^{-36}=0.17$	$\frac{1}{1-1.05^{-1}}=21$
$\frac{95}{105}=0.90$	$\left(\frac{95}{105}\right)^{35}=0.030$	$\left(\frac{95}{105}\right)^{36}=0.027$	$\frac{1}{1-\frac{95}{105}}=10.5$

문제 3

아래 그림과 같이 두 직선 $l_1 : y=\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}x$ 와 $l_2 : y=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}x$ 에 동시에 접하는 원 C_1 이 있다. 두 직선 l_1, l_2 와 원 C_1 에 접하는 더 작은 원을 C_2 라 하고, 같은 방법으로 n 번째 원 C_n 과 두 직선 l_1, l_2 에 접하는 C_n 보다 작은 원을 C_{n+1} 이라고 할 때 다음 물음에 답하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$)



논제 3-1

원 C_n 의 반지름을 r_n 이라 할 때, 원의 중심의 좌표 (x_n, y_n) 을 반지름 r_n 으로 나타내시오. [10점]

논제 3-2

서로 이웃하는 두 원 C_n, C_{n+1} 에 대하여 반지름의 비율 $\dfrac{r_{n+1}}{r_n}$ 을 상수 θ 의 관계식으로 나타내시오. [10점]

논제 3-3

원 C_1 의 반지름의 길이가 2015 라고 할 때 원 C_n 들의 둘레의 길이의 합을 구하시오. [7점]

논제 3-4

원 C_1 의 반지름의 길이가 1일 때, 다음의 값을 구하시오. [13점]

배경지식 쌓기

1. 이차곡선의 기울기가 m 인 접선의 방정식

가. 포물선

(1) 포물선 $y^2=4px$ 에 접하고, 기울기가 m 인 접선의 방정식

$$y=mx+\frac{p}{m}\ (\text{단, } m\neq 0)$$

(2) 포물선 $x^2=4py$ 에 접하고, 기울기가 m 인 접선의 방정식

$$y=mx-m^2p$$

[증명] (1) 접선을 $y=mx+n$ 이라 하고 포물선의 식에 대입하여 정리하면

$$m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0$$

이다.

두 도형이 접하기 때문에 $\frac{D}{4}=(mn-2p)^2-m^2n^2=0,\ -4p(mn-p)=0$ 이다.

$\therefore mn=p\ (\because p\neq 0)$

$m\neq 0$ 이므로 $n=\frac{p}{m}$ 가 된다. 따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=mx+\frac{p}{m}$ 이다.

(2) 위와 같은 방법으로 증명할 수 있다.

나. 타원

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

[증명] 접선을 $y=mx+n$ 이라 두고 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 에 대입하여 정리하면

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0$$

이다.

두 도형이 접하기 때문에 $\frac{D}{4}=a^4m^2n^2-(a^2m^2+b^2)(a^2n^2-a^2b^2)=0$ 이다.

이 식을 정리하면 $n^2=a^2m^2+b^2$ 이다.

$\therefore n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 이다.

다. 쌍곡선

(1) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}\quad (\text{단, } a^2m^2-b^2>0)$$

(2) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}\quad (\text{단, } a^2m^2-b^2<0)$$

[증명] (1) 접선을 $y=mx+n$ 이라 하고 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 에 대입하여 정리하면

$$(b^2-a^2m^2)x^2-2mna^2x-a^2n^2-a^2b^2=0$$

이다.

$b^2-a^2m^2\neq 0$ 이므로 판별식 $\dfrac{D}{4}=0$ 이어야 한다. 즉,

$$\frac{D}{4}=a^4m^2n^2+(b^2-a^2m^2)(a^2n^2+a^2b^2)=0$$

$\therefore n^2=a^2m^2-b^2,\ \ n=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ 이다.

※ 위의 증명에서 알 수 있듯이 $b^2-a^2m^2=0$ 인 경우, 즉 기울기가 $m=\pm\dfrac{b}{a}$ 인 접선은 존재하지 않는다. 다시 말하면 쌍곡선의 접선 중 점근선과 평행한 것은 존재하지 않는다.

(2) 위와 같은 방법으로 증명할 수 있다.

2. 등비수열의 활용

가. 원리합계 (원금과 이자를 합한 금액)

원금 a 를 연이율 r 로 n 기간 동안 예금할 때의 원리합계 S

(1) 단리법에 의한 원리합계 : $S=a(1+rn)$

(2) 복리법에 의한 원리합계 : $S=a(1+r)^n$

※ 단리법은 처음 원금에만 이자를 더하여 원리합계를 계산하는 방법이고, 복리법은 이자를 원금에 더한 총금액을 다시 원금으로 하여 계산하는 방법이다.

나. 적금 (복리법 적용)

원금을 a, 이율을 r, 기간을 n이라 할 때

(1) 각 기간의 초에 적립하고 만료기간의 말에 찾을 때, 적금 총액 S

$$S=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$$

(2) 각 기간의 말에 적립하고 만료기간의 말에 찾을 때, 적금 총액 S

$$S=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}$$

다. 상환 (부채를 일정한 기간마다 일정한 금액씩 갚아나가는 것. 복리법 적용)

(1) 올해 초에 연이율 r로 A를 빌리고 올해 말부터 n년 동안 매년 갚아야 할 상환금 a

$$A(1+r)^n=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r} \rightarrow a=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$$

(2) 올해 초에 연이율 r로 A를 빌리고 올해 초부터 n년 동안 매년 갚아야 할 상환금 a

$$A(1+r)^n=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r} \rightarrow a=\frac{Ar(1+r)^{n-1}}{(1+r)^n-1}$$

라. 현가 (기간마다 받을 금액을 현재 일시에 받을 때의 가치. 복리법 적용)

(1) 올해 말부터 시작하여 매년 말에 a씩 n년 동안 받을 연금의 현가를 P, 연이율을 r라 하면

$$P(1+r)^n=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r} \rightarrow P=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r(1+r)^n}$$

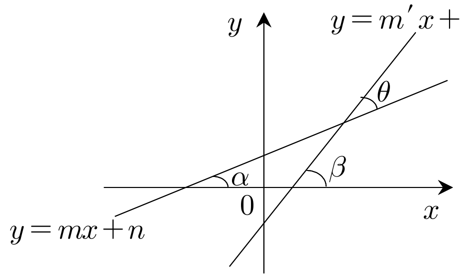
(2) 올해 초부터 시작하여 매년 초에 a씩 n년 동안 받을 연금의 현가를 P, 연이율을 r라 하면

$$P(1+r)^n=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r} \rightarrow P=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r(1+r)^{n-1}}$$

3. 두 직선이 이루는 각

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라 하고, 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$\theta=|\alpha-\beta|$, $\tan\alpha=m$, $\tan\beta=m'$ 이므로 $\tan\theta=\left|\dfrac{m-m'}{1+mm'}\right|$ (단, $mm'\neq 0$)이다.



4. 무한등비급수의 수렴

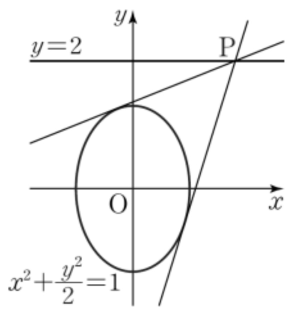
$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}\ (a\neq 0)$ 에 대하여, $|r|<1$ 일 때 수렴하고 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$ 이다.

[증명] $|r|<1$ 일 때 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}$ 이다.

풀어보기

문제 1

직선 $y=2$ 위의 점 P 에서 타원 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 에 그은 두 접선의 기울기의 곱이 $\frac{1}{3}$ 이다. 점 P 의 x 좌표를 k 라 할 때, k^2 의 값은? (2013년 6월 모의수능)



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

문제 2

쌍곡선 $x^2-4y^2=a$ 위의 한 점 $(b, 1)$ 에서의 접선이 쌍곡선의 한 점근선과 수직이다. $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 양수이다.) (2013년 대수능)

① 68 ② 77 ③ 86 ④ 95 ⑤ 104

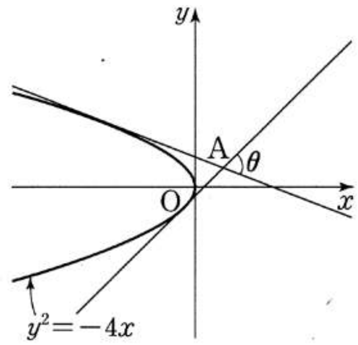
문제 3

어느 회사원은 2005년 1월 초에 300만 원을 적립한 후 다음 해부터 매년 초에 전년도보다 2%증액한 금액을 적립하고 있다. 이와 같은 방식으로 2005년 1월 초에 시작하여 2014년 1월 초까지 적립한 다음, 2015년부터는 추가금액을 더 이상 적립하지 않고 은행에 맡겨 2025년 1월 초에 목돈으로 찾을 계획이다. 2005년부터 적립한 금액을 연 이율 5%, 1년마다의 복리로 계산할 때, 2025년 1월 초에 받게 될 적립금의 원리합계는? (단, $1.05^{20}=2.65$, $\left(\frac{1.02}{1.04}\right)^{10}=0.75$로 계산하고, 금액의 단위는 만 원으로 하며 만 원 미만은 버린다.) (2014년 EBS 수능완성 수학 I B형)

① 6542 ② 6652 ③ 6762 ④ 6872 ⑤ 6956

문제 4

그림과 같이 점 A$(3,\ 2)$에서 포물선 $y^2=-4x$에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은?



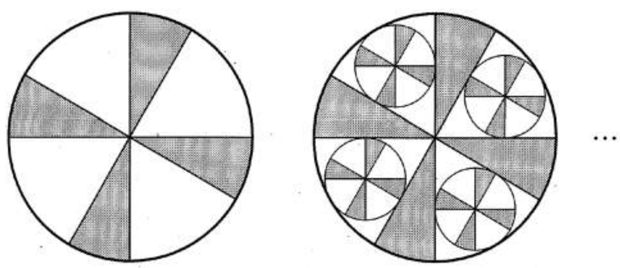
① $\sqrt{2}$　　② $\sqrt{3}$　　③ 2　　④ $2\sqrt{2}$　　⑤ $2\sqrt{3}$

문제 5

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 중심각의 크기가 $60°$이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴을 서로 겹치지 않게 4개 그린 후 원의 내부와 새로 그린 부채꼴의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 [그림 1]이라 하자.

[그림 1]에서 색칠되지 않은 각 부채꼴에 두 반지름과 호에 모두 접하도록 원을 그린다. 새로 그린 각 원에 중심각의 크기가 $60°$이고 반지름의 길이가 새로 그린 원의 반지름의 길이와 같은 부채꼴을 서로 겹치지 않게 4개씩 그린 후 새로 그린 원의 내부와 새로 그린 부채꼴의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 [그림 2]라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림에서 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



[그림 1]　　[그림 2]　　…

① $\frac{7}{15}\pi$　　② $\frac{8}{15}\pi$　　③ $\frac{3}{5}\pi$　　④ $\frac{2}{3}\pi$　　⑤ $\frac{11}{15}\pi$

읽기자료

수학사로 살펴보는 접선(tangent)[28]

접선에 대한 기록은 고대 그리스 시대의 유클리드 '원론(Elements)'에 처음 등장하는데, 제 Ⅲ권 정의 2에서 그는 "직선이 원과 만나며 길게 늘여서 이 원을 자르지 않을 때 이 직선을 원에 접한다."라고 정의하고 있다. 유클리드는 도형과 도형 사이의 관계에서 아름다움을 찾았는데, 직선과 원이 서로에게 전혀 영향을 주지 않다가 처음으로 관계를 맺게 되는, 접하는 상태에 많은 관심을 가졌던 것으로 보인다. 이후 일반적인 곡선에 대한 접선을 구하는 문제는 미적분학의 출현을 가져온 문제들 중 하나로써 17세기에 많이 연구되었다. 이를 다시 미적분학 출현 이전과 이후로 나눠보면, 미적분학의 출현 이전에 수학자들이 접선을 구하기 위해 고안한 방법으로 곡선 위를 움직이는 한 점의 운동방향을 벡터의 합을 이용하여 찾는 로베르발(Roberval)의 벡터 방법, 곡선의 방정식과 원의 방정식을 이용하여 접선을 작도하는 데카르트의 방법, 그리고 17세기 이후에 본격적으로 발달하는 '무한소'의 개념을 암암리에 사용한 페르마와 배로(Barrow)의 암묵적 무한소 방법 등이 있다.

곡선에 접선을 그리는 문제와 함수의 극댓값 및 극솟값을 구하는 과정에서 미분법이 유래되었는데, 이 미분법에 대한 최초의 아이디어는 1629년 페르마의 착상으로 알려져 있다. 또한, 뉴턴과 라이프니츠가 만든 미적분학의 출현 이후의 접선을 구하는 방법으로 무한소 방법과 극한 방법을 들 수 있는데, 무한소 방법은 모든 무한소량이 결과에서 무시되는 단순하고 직관적인 라이프니츠의 전통적 무한소 방법, 그리고 이 방법의 논리적 결함을 극복하기 위해 무한소 e를 수로 인정하고 실수체 R에 첨가하여 R^*를 만든 로빈슨(Robinson)의 현대적인 무한소 방법이 있다. 19세기 이후 일차원 그래프에 대한 접선의 개념은 고차원 공간의 그래프에 대한 접평면 개념으로 확대되며, 현대수학에서 접선의 개념은 비선형 문제에 대한 선형 근사의 의미까지 확대된다. 또한 현대수학의 중요한 사고 중 하나인 '근사(approximation)' 개념의 유용한 수단, 즉 접선은 국소적인 범위에서 곡선을 직선으로 근사시킬 수 있는 최적의 직선이기도 하다.

28) 벡터를 활용한 이차곡선과 사이클로이드의 접선에 대한 연구(2014, 수학교육, 이동원 외 2인)

현재 가치(present value)[29]

현가(現價)라고도 한다. 즉, 특정 기간 후에는 틀림없이 받게 될 금액(M)을 현재의 가치로 산출한 가치를 말한다. 현가의 계산은, 현재 얼마를 가지고 있으면 이것이 특정 기간후 M이 될 것인가를 생각하여야 한다. 예를 들어 1년 정기예금의 이자율을 10%라고 한다면, 현재 1만 원을 1년간 정기예금하면 1년 후에는 11,000원을 손에 넣을 수 있다. 따라서 이때의 확실한 11,000원은 현재의 가치로 계산하면 1만 원에 상당한다. 여기에서 1년 후의 확실한 11,000원의 현가는 $\dfrac{11,000}{1+\text{이자율}}$의 계산으로 구할 수 있다. 일반적으로 i기($i=1, 2, 3, \cdots, n$)의 기말(期末)에 확실히 얻을 수 있는 수입을 R_i, i기의 이자율을 r_i라 하면, R_i의 현가 V는 다음 식으로 얻어진다.

$$V=\frac{R_1}{1+r_1}+\frac{R_2}{(1+r_1)(1+r_2)}+\cdots+\frac{R_n}{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_n)}$$

위의 이자율 r_i는 할인율(rate of discount), V는 할인 가치(discount value)라고도 한다. 이 상은 장래의 가치가 확실할 때의 현가에 관한 것이지만, 장래의 가치가 불확실한 때에는 불확실성의 정도에 따라 할인율이 상승한다.

29) 두산백과

예시답안

풀어보기

문제 1

타원의 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{m^2+2}$$

이다. 이 접선이 점 $\mathrm{P}(k,\ 2)$ 를 지나므로

$$2=mk\pm\sqrt{m^2+2}\ ,\ (2-mk)^2=(\pm\sqrt{m^2+2})^2$$

$$m^2k^2-4mk+4=m^2+2\ ,\ (k^2-1)m^2-4km+2=0$$

이다. 두 접선의 기울기의 곱이 $\frac{1}{3}$ 이므로 $\frac{2}{k^2-1}=\frac{1}{3}$ 이다.

$\therefore\ k^2=7$

문제 2

점 $(b, 1)$ 에서의 접선의 방정식은 $bx-4y=a$ 이고, 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{1}{2}x$ 이다.

그러므로 접선의 기울기는 $\frac{b}{4}$ 이고 점근선의 기울기는 $\pm\frac{1}{2}$ 이다.

그런데 $b>0$ 이고 접선과 점근선이 수직이므로 점근선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

$\frac{1}{2}\times\frac{b}{4}=-\frac{b}{8}=-1$ 에서 $b=8$ 이다.

또, 점 $(8, 1)$ 이 쌍곡선 위의 점이므로 $8^2-4\times1^2=a$ 이다.

$\therefore\ a+b=68$

문제 3

매년 초에 적립하는 금액의 2025 년 1 월 초까지의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다. 2005 년부터 적립한 금액을 연이율 5% , 1 년마다의 복리로 계산할 때, 2025 년 1 월 초에 받게 될 적립금의 원리합계는

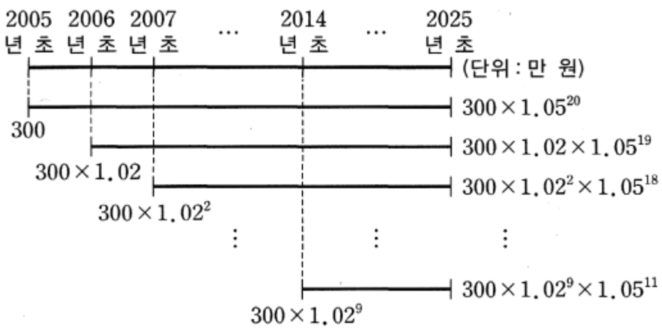
$$300\times1.05^{20}+300\times1.02\times1.05^{19}+300\times1.02^2\times1.05^{18}+\cdots+300\times1.02^9\times1.05^{11}$$

$$=300\times1.05^{20}\times\left\{1+\left(\frac{1.02}{1.05}\right)^1+\left(\frac{1.02}{1.05}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1.02}{1.05}\right)^9\right\}$$

$$= \frac{300 \times 1.05^{20} \times \left\{1 - \left(\frac{1.02}{1.05}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{1.02}{1.05}} = \frac{300 \times 2.65 \times (1 - 0.75)}{\frac{0.03}{1.05}}$$

$$= 100 \times 105 \times 2.65 \times 0.25 = 6956.25(\text{만 원})$$

이다. 따라서 만 원 미만을 버리면 구하는 적립금의 원리합계는 6956만 원이다.



문제 4

포물선 $y^2 = -4x$ 의 초점의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이므로 점 A 에서 포물선 $y^2 = -4x$ 에 그은 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y = mx - \frac{1}{m} \qquad \cdots ㉠$$

이다.

직선 ㉠이 점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$ 를 지나므로

$$2 = 3m - \frac{1}{m},\ 3m^2 - 2m - 1 = 0$$

이다.

$\therefore\ m = -\frac{1}{3}$ 또는 $m = 1$

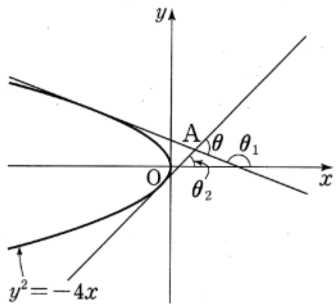
따라서 점 A 에서 포물선에 그은 접선은 2 개 존재하고 두 접선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{3}x + 3 \qquad \cdots ㉡$$

$$y = x - 1 \qquad \cdots ㉢$$

이다.

그림과 같이 두 직선 ㉡, ㉢이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2 라 하면



$\tan\theta_1 = -\dfrac{1}{3}$, $\tan\theta_2 = 1$ 이고 두 접선이 이루는 예각의 크기 θ 는 $\theta = \pi - (\theta_1 - \theta_2)$ 이므로

$$\tan\theta = \tan(\pi + \theta_2 - \theta_1) = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \tan\theta_1}$$

$$= \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 + 1 \times \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$$

이다.

문제 5

$S_1 = \pi - 4 \times \dfrac{1}{2} \times 1^2 \times \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$

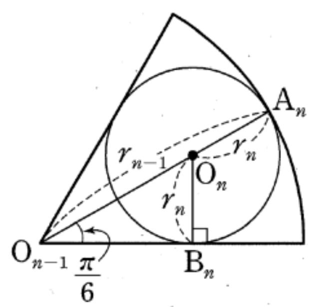
$n \geq 2$ 일 때, [그림]에서 제일 작은 원의 중심을 O_n, 반지름의 길이를 r_n 이라 하자. 그림에서

$r_{n-1} = \overline{O_{n-1}A_n} = \overline{O_{n-1}O_n} + \overline{O_nA_n}$

$= \dfrac{\overline{O_nB_n}}{\sin\frac{\pi}{6}} + \overline{O_nA_n}$

$= 2r_n + r_n$ 이다.

$\therefore\ r_n = \dfrac{1}{3} r_{n-1}\ (n \geq 2),\ r_1 = 1$



따라서 [그림]에서 제일 작은 원의 개수는 4^{n-1}, 반지름의 길이는 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ 이므로

$$S_n = S_1 + 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times S_1 + \cdots + 4^{n-1} \times \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}^2 \times S_1$$

$$= S_1 + \frac{4}{9} \times S_1 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \times S_1$$

이다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}\pi$$

논제 1-1

$x^2 = 4\cdot\frac{a}{4}y$ 이므로 초점의 좌표는 $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ 이고, 준선의 방정식은 $y = -\frac{1}{4a}$ 이다.

기울기가 m 인 접선의 방정식은 $y = mx - \frac{1}{4a}m^2$ 이다. 정리하면 $m^2 - 4axm + 4ay = 0$ 이다.

두 접선의 기울기를 m_1, m_2 라 하면 두 접선이 서로 수직이므로 $m_1 m_2 = 4ay = -1$ 이다.

그러므로 $y = -\frac{1}{4a}$ 이다. 즉, 점 P 는 항상 준선 위에 있고, P 의 자취를 나타내는 방정식은 $y = -\frac{1}{4a}$ 이다.

(다른 풀이)

$y = ax^2$ 를 고치면 $x^2 = 4\times\frac{1}{4a}y$ 이므로 초점의 좌표는 $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ 이다.

S 밖의 점 P 에서 그은 두 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2 라 하면 두 접선이 수직으로 만나므로 $m_1 m_2 = -1$ 이다.

그리고 두 접선의 방정식은 $y = m_1 x - m_1^2\frac{1}{4a}$, $y = m_2 x - m_2^2\frac{1}{4a}$ 이다.

이 방정식을 x에 관하여 풀면,

$$x = \frac{y}{m_1} + \frac{m_1}{4a},\ x = \frac{y}{m_1} + \frac{m_1}{4a}$$

이고 이 접선의 교점을 구하면,

$$\frac{y}{m_1} + \frac{m_1}{4a} = \frac{y}{m_2} + \frac{m_2}{4a}$$

이다.

이를 정리하면

$$\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)y = (m_2 - m_1)\frac{1}{4a},\ \frac{m_2 - m_1}{m_1 m_2}y = \frac{m_2 - m_1}{4a}$$

즉, $y = -\frac{1}{4a}$ 이다.

그러므로 교점의 자취의 방정식은 주어진 포물선의 준선이 된다.

논제 1-2

기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 이므로 $y-mx=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 이다. 양변을 제곱하면 $y^2-2xym+x^2m^2=a^2m^2+b^2$ 이고, 이 식을 정리하면

$$(x^2-a^2)m^2-2xym+y^2-b^2=0$$

이다.

접선의 두 기울기를 m_1, m_2 라 하면 $m_1 \cdot m_2=-1$ 이므로 $m_1 \cdot m_2=\dfrac{y^2-b^2}{x^2-a^2}=-1$ 이다.

이 식을 정리하면 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 이다.

즉, 점 P의 자취는 중심이 원점이고 반지름이 $\sqrt{a^2+b^2}$ 인 원이고, 방정식은 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 이다.

논제 1-3

S밖의 점 $\mathrm{P}(x,y)$에서 기울기가 각각 m_1, m_2이고 두 접선이 수직이 되도록 S에 접선을 그은 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ 이고 이 방정식을 m에 관한 방정식으로 볼 때, $m_{1,} m_2$는 이 방정식의 근이 된다. 이 방정식을 제곱한 후 m에 관하여 정리하면

$$(y-mx)^2=\left(\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}\right)^2$$

$$y^2-2mxy+m^2x^2=a^2m^2-b^2$$

$$(a^2-x^2)m^2+2xym-b^2-y^2=0$$

이 되고 이 방정식의 두 근이 m_1, m_2 이므로,

근과 계수와의 관계에 의하여 $m_1m_2=\dfrac{-b^2-y^2}{a^2-x^2}=-1$ 을 얻는다.

이 식을 정리하면

$$x^2+y^2=a^2-b^2 \quad \cdots ㉠$$

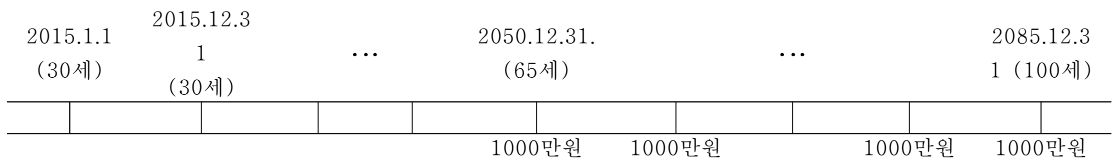
이다.

i) $0<a<b$ 이면 ㉠을 만족하는 $(x,\ y)$는 존재하지 않는다.

ii) $0<a=b$ 이면 ㉠을 만족하는 $(x,\ y)$는 원점이 되고 원점에서는 S에 접선을 그을 수 없으므로 점 P의 자취의 방정식은 없다.

iii) $0<b<a$ 이면 ㉠을 만족하는 $(x,\ y)$는 $x^2+y^2=a^2-b^2$ 이다. (단, 이 원과 점근선과의 교점인 $\left(\pm a\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}},\ \pm b\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}\right)$ 은 제외)

논제 2-1



65세 연말의 1000 만원은 2015.1.1 현재 가치로는 $1000\cdot\left(\frac{1}{1.05}\right)^{36}$ (만원) 이다.

66세 연말의 1000 만원은 2015.1.1 현재 가치로는 $1000\cdot\left(\frac{1}{1.05}\right)^{37}$ (만원) 이다.

⋮

그러므로 퇴직금 수령액 합계의 2015 년 1 월 1일 현재 가치는

$$1000\left(\frac{1}{1.05}\right)^{36}+1000\left(\frac{1}{1.05}\right)^{37}+\cdots+1000\left(\frac{1}{1.05}\right)^{71}$$
$$=\frac{1000\cdot 1.05^{-36}\left(1-1.05^{-36}\right)}{1-\dfrac{1}{1.05}}\approx 21\times 1000\times 0.17\times 0.83=2963.1\,(\text{만원})$$

이다.

논제 2-2

300 만원씩 35 회 넣은 적립금 합계의 2015.1.1 의 현재가치는

$$300\left(\frac{1}{1.05}\right)+300\left(\frac{1}{1.05}\right)^{2}+\cdots+300\left(\frac{1}{1.05}\right)^{35} \qquad (\text{만원})$$
$$=\frac{300\cdot\dfrac{1}{1.05}\left\{1-\left(\dfrac{1}{1.05}\right)^{35}\right\}}{1-\dfrac{1}{1.05}}\approx 21\times 300\times 0.95\times 0.82=4907.7\ (\text{만원})$$

이다. 그러므로 논제 2-1에 제시된 김이화 과장의 퇴직금을 충당하기에 충분하다.

논제 2-3

먼저 적립금의 현재가치의 기댓값을 구해보자.

30 세 연말에 납입하는 적립금의 기댓값은 $\frac{95}{100}K$ 이고 현재가치는

$$\frac{95}{100}K\frac{1}{1.05}$$

이다. 30 세 연말부터 매년 말 납입하는 적립금의 기댓값이

$$\frac{95}{100}K,\ \left(\frac{95}{100}\right)^2K,\ \cdots,\ \left(\frac{95}{100}\right)^{35}K$$

이므로 적립금의 현재가치의 기댓값은 각각

$$\frac{95}{100}\cdot\frac{1}{1.05}K\ ,\ \left(\frac{95}{100}\right)^2\left(\frac{1}{1.05}\right)^2K\ ,\ \cdots,\ \left(\frac{95}{100}\right)^{35}\left(\frac{1}{1.05}\right)^{35}K$$

이다. 즉,

$$\left(\frac{95}{105}\right)K,\ \left(\frac{95}{105}\right)^2K,\ \cdots,\ \left(\frac{95}{105}\right)^{35}K$$

이므로 적립금 총액의 현재가치의 기댓값은

$$\frac{\frac{95}{105}K\left\{1-\left(\frac{95}{105}\right)^{35}\right\}}{1-\frac{95}{105}}=K\times0.90\times(1-0.030)\times10.5=9.1655K\ \cdots ㉠$$

이다. 또한 65세부터 매년 말에 받는 퇴직금의 기댓값은 각각

$$\left(\frac{95}{100}\right)^{36}1000,\ \left(\frac{95}{100}\right)^{37}1000,\ \cdots\ ,\ \left(\frac{95}{100}\right)^{71}1000$$

이므로, 퇴직금의 현재가치의 기댓값은

$$\left(\frac{95}{100}\right)^{36}\left(\frac{1}{1.05}\right)^{36}1000,\ \left(\frac{95}{100}\right)^{37}\left(\frac{1}{1.05}\right)^{37}1000,\ \cdots\ ,\ \left(\frac{95}{100}\right)^{71}\left(\frac{1}{1.05}\right)^{71}1000$$

이다. 즉,

$$\left(\frac{95}{105}\right)^{36}1000,\ \left(\frac{95}{105}\right)^{37}1000,\ \cdots\ ,\ \left(\frac{95}{105}\right)^{71}1000$$

이므로 퇴직금 총액의 현재가치의 기댓값은

$$\frac{1000\times\left(\frac{95}{105}\right)^{36}\left\{1-\left(\frac{95}{105}\right)^{36}\right\}}{1-\frac{95}{105}}=1000\times0.030\times0.90\times(1-0.027)\times10.5=275.8455\ \cdots ㉡$$

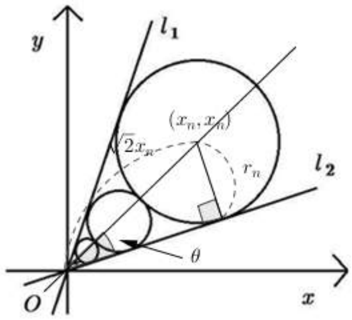
이다. 여기서 ㉠과 ㉡의 값이 같아야 하므로

$$K=\frac{275.8455}{9.1665}=30.0927$$

이다. 그러므로 약 30만원이다.

논제 3-1

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ 에서 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 를 생각하고, 두 직선 $l_1 : y=\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}x$ 와 $l_2 : y=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}x$ 에서 $y=x$ 와 직선 l_1 사이의 각, $y=x$ 와 직선 l_2 사이의 각은 모두 θ 이다. 즉, $y=x$ 에 대하여 대칭이다.



원 C_n 의 중심은 항상 직선 $y=x$ 위에 있고, 원의 중심의 좌표는 (x_n, x_n) 이므로

$$\sin\theta = \frac{r_n}{\sqrt{2}\,x_n}$$

이다. 그러므로 $x_n = y_n = \dfrac{r_n}{\sqrt{2}\sin\theta}$ 이다.

(다른 풀이)

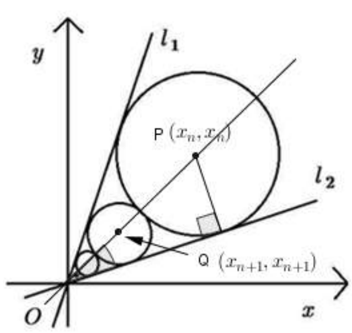
두 직선의 기울기의 곱이 1 이므로 두 직선은 $y=x$ 에 대칭이다. 즉, 원 C_n 의 중심은 항상 직선 $y=x$ 위에 있고, 원의 중심의 좌표는 (x_n, x_n) 이다.

원 C_n 의 중심 (x_n, x_n) 에서 직선 $l_1 : y=\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}x$ 까지의 거리가 반지름 r_n 이므로

$$r_n = \frac{|(1+\tan\theta)x_n + (\tan\theta-1)x_n|}{\sqrt{(1+\tan\theta)^2+(\tan\theta-1)^2}} = \frac{|2\tan\theta\, x_n|}{\sqrt{2(1+\tan^2\theta)}} = \frac{\sqrt{2}\tan\theta\, x_n}{\sec\theta} = \sqrt{2}\sin\theta\, x_n$$

이다. 그러므로 $x_n = y_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\theta}r_n$ 이다.

논제 3-2



그림에서 PQ 의 길이는 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}(x_n - x_{n+1}) = r_n + r_{n+1}$ 이다.

논제 3−1에서 $x_n=\dfrac{r_n}{\sqrt{2}\sin\theta}$ 이므로

$$\sqrt{2}\left(\frac{r_n}{\sqrt{2}\sin\theta}-\frac{r_{n+1}}{\sqrt{2}\sin\theta}\right)=r_n+r_{n+1}$$

이고, 이를 정리하면

$$\frac{r_{n+1}}{r_n}=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

이다.

논제 3−3

수열 $\{r_n\}$는 첫 항이 2015 이고 공비가 $r=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{n}2\pi r_n=2\pi\frac{2015\left(1-\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^n\right)}{1-\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=2015\pi\frac{(1+\sin\theta)\left(1-\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^n\right)}{\sin\theta}$$

논제 3−4

수열 $\{r_n\}$은 첫 항이 1 이고 공비가 $r=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$ 이므로 $r_n=\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{n-1}$ 이다.

또한,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{r_nr_{n+1}}}{\sqrt{r_n}+\sqrt{r_{n+1}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2r_n\sqrt{r}}{\sqrt{r_n}(1+\sqrt{r})}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{r}}{1+\sqrt{r}}\sqrt{r_n}$$

$$=\frac{2\sqrt{r}}{1+\sqrt{r}}\cdot\frac{1}{1-\sqrt{r}}=\frac{2\sqrt{r}}{1-r}=\frac{2\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}}{1-\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\frac{1}{\tan\theta}$$

이다. 그러므로

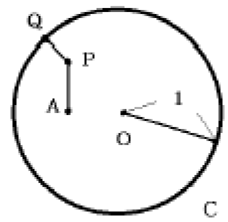
$$\lim_{\theta\to+0}\theta\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{r_nr_{n+1}}}{\sqrt{r_n}+\sqrt{r_{n+1}}}\right)=\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta}{\tan\theta}=1$$

이다.

29 이화여자대학교 수시 일반전형 자연계열 Ⅰ

※ 다음을 읽고 논제에 답하시오.

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원 C의 내부에 주어진 한 점 A와 중심 O사이의 거리는 $\overline{\mathrm{AO}} = a\,(0 < a < 1)$이다. 임의의 점 P에 대하여 원 C 위의 점들 중 P와 가장 가까운 점을 Q라 할 때 아래 물음에 답하시오. [30점]



논제 1-1

점 P가 원 C의 내부에 있고 양수 b에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} - \overline{\mathrm{PQ}} = b$를 만족할 때 점 P의 자취를 구하시오.

논제 1-2

점 P가 $\overline{\mathrm{AP}} - \overline{\mathrm{PQ}} = b\,(0 < b \le 1 - a)$를 만족한다. 점 P의 자취로 둘러싸인 부분의 면적을 a와 b로 나타내고, 주어진 b의 범위에서 면적의 최댓값을 구하시오.

※ 다음을 읽고 논제에 답하시오.

모든 항이 0보다 크거나 같은 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 < 1$이고 다음 점화식을 만족할 때 아래 물음에 답하시오. [30점]

$$\text{모든 자연수 } n\text{에 대하여 } a_{n+1}^2 = \frac{1 + a_n}{2}$$

논제 2-1

모든 자연수 n에 대하여 $a_n < 1$임을 보이시오.

논제 2-2

모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$임을 보이시오.

논제 2-3

$a_1 = \cos\theta \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$를 만족할 때 일반항 a_n을 θ로 나타내시오.

논제 2-4

수열 $\{a_n\}$이 수렴함을 보이고, 그 극한값을 구하시오.

※ 다음을 읽고 논제에 답하시오.

함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1로 주어진 삼차함수이고 다음 조건을 만족할 때 아래 물음에 답하시오. [40점]

[가] 함수 $f(x)$가 극댓값 3과 극솟값 1을 가진다.
[나] 함수 $f(x)-(x+2)$가 서로 다른 세 근 $-\alpha$, β, α를 가지고 다음을 만족한다.

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \{f(x)-(x+2)\}\,dx = 0 \quad (-\alpha < \beta < \alpha)$$

논제 3-1

조건 [나]의 삼차함수 $f(x)-(x+2)$가 원점 $(0,0)$을 변곡점으로 가짐을 보이시오.

논제 3-2

임의의 삼차함수 $g(x)$가 원점 $(0,0)$을 변곡점으로 가지면 그래프 $(x, g(x))$가 원점 $(0,0)$에 대하여 대칭임을 보이시오.

논제 3-3

위의 조건 [가], [나]를 모두 만족하는 삼차함수 $f(x)$를 구하시오.

배경지식 쌓기

1. 삼차함수의 변곡점

삼차함수의 그래프는 변곡점에 대하여 점대칭이다.

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 변곡점에 대하여 점대칭이다.

(증명) 변곡점을 원점으로 이동한 후 기함수임을 증명한다.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$의 변곡점을 $(p,\ f(p))$이라 하면

$$3ap+b=0,\ f(p)=ap^3+bp^2+cp+d$$

변곡점이 원점$(0,\ 0)$에 오도록 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$의 그래프를 x축 방향으로 $-p$만큼, y축 방향으로 $-f(p)$만큼 평행이동하면

$y=ax^3+(3ap^2+2bp+c)x$이므로 기함수가 된다.

[참고] $f(-x)=f(x)$: 우함수 (y축 대칭)

$f(-x)=-f(x)$: 기함수 (원점 대칭)

$f(a-x)=f(a+x)$: $x=a$에 대하여 대칭

$f(a-x)+f(a+x)=2b$: 점 $(a,\ b)$에 대하여 점대칭

2. 주기함수 및 선대칭과 점대칭 함수

가. $f(A)=f(B)$꼴 일 때,

1) $A-B$가 상수이면 함수 $f(x)$는 주기가 $|A-B|$인 주기함수이다.

① $f(x)=f(x+a)$: 주기가 a 인 함수

② $f(x+a)=f(x+b)$: 주기가 $|b-a|$인 함수

2) $A+B$가 상수이면 함수 $f(x)$는 직선 $x=\dfrac{A+B}{2}$에 대칭인 선대칭함수이다.

① $f(x)=f(-x)$: y축$(x=0)$에 대하여 선대칭(우함수)

② $f(a-x)=f(a+x)$: $x=a$ 에 대하여 선대칭

③ $f(a-x)=f(b+x)$: $x=\dfrac{a+b}{2}$에 대하여 선대칭

나. $f(A)=-f(B)+C$ 꼴 일 때,

: $A+B$가 상수이면 함수 $f(x)$는 점$\left(\dfrac{A+B}{2},\ \dfrac{C}{2}\right)$에 대하여 점대칭이다.

① $f(-x)=-f(x)$: $(0,\ 0)$에 대한 점대칭(기함수)

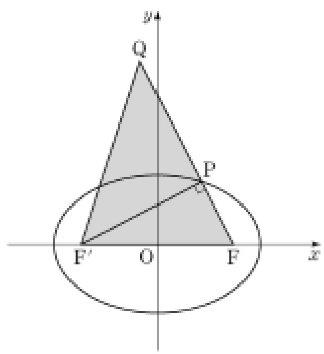
② $f(a-x)=-f(b+x)$: $\left(\dfrac{a+b}{2},\ 0\right)$에 대한 점대칭

③ $f(a-x)=-f(b+x)+c$: $\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{c}{2}\right)$에 대한 점대칭

풀어보기

문제 1

타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F$'$이라 하자. 이 타원 위의 점 P를 $\angle \mathrm{FPF'}=\frac{\pi}{2}$가 되도록 제 1사분면에서 잡고, 선분 FP의 연장선 위에 y좌표가 양수인 점 Q를 $\overline{\mathrm{FQ}}=6$이 되도록 잡는다. 삼각형 QF$'$F의 넓이를 구하시오. [4점] (2014년 대수능)



문제 2

중심이 $(0,3)$이고 반지름의 길이가 5인 원이 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 이 원과 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$이 만나는 점 중 한 점을 P라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BP}}$의 값은? [4점] (2014년 10월 전국연합)

① $\frac{41}{4}$　② $\frac{21}{2}$　③ $\frac{43}{4}$　④ 11　⑤ $\frac{45}{4}$

문제 3

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = -\dfrac{4}{9}$ 이고,

$$2^n a_{n+1} - 2^{n+1} a_n = n \quad (n \ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

주어진 식 $2^n a_{n+1} - 2^{n+1} a_n = n$의 양변을 2^{2n+1}으로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{n}{2^{2n+1}} \quad (n \ge 1)$$

이므로 $n \ge 2$인 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k+1}} \quad \cdots\cdots (*)$$

이다. 한편

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k+1}} = \frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k}} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \cdots + \frac{n-1}{4^{n-1}}\right) - \left(\frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^3} + \cdots + \frac{n-1}{4^n}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4^k} - \frac{\boxed{(가)}}{4^n}\right)$$

이므로 (*)에 의하여

$$a_n = \boxed{(나)} + \frac{2^{n+1}}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4^k} - \frac{\boxed{(가)}}{4^n}\right)$$

$$= -\frac{3n+1}{9 \cdot 2^{n-1}} \quad (n \ge 2)$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(10) \times g(5)$의 값은?[4점] (2012년 9월 모의평가)

① -64　② -56　③ -48　④ -40　⑤ -32

문제 4

연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x)=f(x)$
(나) $f(x+2)=f(x)$
(다) $\int_{-1}^{1}(x+2)^2 f(x)\,dx=50$, $\int_{-1}^{1}x^2 f(x)\,dx=2$

$\int_{-3}^{3}x^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점] (2014년 7월 전국연합)

문제 5

3 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=x^n e^{-x}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?(2015학년도 9월 모의평가)

<보 기>

ㄱ. $f\left(\frac{n}{2}\right)=f'\left(\frac{n}{2}\right)$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. 점 $(0,0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예시답안

풀어보기

문제 1

$\overline{\mathrm{FP}}=a$, $\overline{\mathrm{F'P}}=b$라 하자. 타원의 장축의 길이가 6이므로 타원의 정의에 의해

$a+b=6\cdots$ ㉠

주어진 타원의 두 초점 사이의 거리는 $2\times\sqrt{9-4}=2\sqrt{5}$ 이므로 직각삼각형 FPF′ 에서 $a^2+b^2=(2\sqrt{5})^2=20\cdots$ ㉡

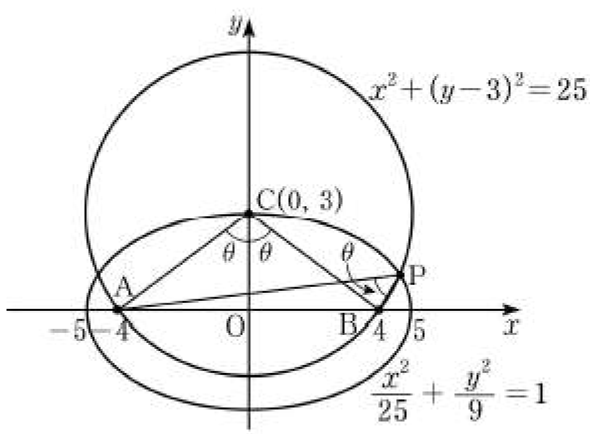
㉠, ㉡에서

$a=2,\ b=4\ (\because b>a)$

$\angle\mathrm{F'FP}=\theta$라 하면 $\sin\theta=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 이므로 삼각형 QF′F의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FF'}}\times\overline{\mathrm{QF}}\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times6\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=12$

문제 2



$x^2+(y-3)^2=5^2$에서 $y=0$일 때, $x=4$ 또는 $x=-4$

따라서 원이 x축과 만나는 두 점의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(-4,0)$, $\mathrm{B}(4,0)$으로 놓을 수 있다.

그런데 이 두 점은 타원의 초점이고 점 P는 타원 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=10\ \cdots$ ㉠

삼각형 APB에서 $\angle\mathrm{APB}=\theta$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^{\,2}+\overline{\mathrm{BP}}^{\,2}-2\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\cos\theta=8^2\ \cdots$ ㉡

각 ∠APB는 호 AB의 원주각이고, 원의 중심을 C(0,3)이라 하면 각 ∠ACB는 호 AB의 중심각이다.

따라서 $\angle \mathrm{ACB} = 2\theta$에서 $\angle \mathrm{OCA} = \angle \mathrm{APB} = \theta$

이때 $\overline{\mathrm{AC}} = 5, \overline{\mathrm{OC}} = 3$이므로 $\cos\theta = \frac{3}{5}$ … ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{BP}} = \frac{45}{4}$

문제 3

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k+1}} = \frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k}} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k}}\right) = \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\cdots+\frac{n-1}{4^{n-1}}\right)-\left(\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\cdots+\frac{n-1}{4^n}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}-\frac{n-1}{4^n}\right) = \frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{n-1}{4^n}\right)$$

이때, $\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k+1}}$의 양변에 2^n을 곱하면

$$a_n = 2^{n-1}a_1 + 2^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k+1}} = 2^{n-1}a_1 + \frac{2^{n+1}}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{n-1}{4^n}\right)$$

$$= 2^{n-1}\left(-\frac{4}{9}\right) + \frac{2^{n+1}}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{n-1}{4^n}\right) = -\frac{2^{n+1}}{9} + \frac{2^{n+1}}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{n-1}{4^n}\right)$$

따라서, $f(n) = n-1$, $g(n) = -\frac{2^{n+1}}{9}$이므로

$$f(10)\times g(5) = 9\times\left(-\frac{2^6}{9}\right) = -64$$

문제 4

$$\int_{-3}^{3}x^2f(x)dx = \int_{-3}^{-1}x^2f(x)dx + \int_{-1}^{1}x^2f(x)dx + \int_{1}^{3}x^2f(x)dx = 2\int_{1}^{3}x^2f(x)dx + 2$$

$$= 2\int_{-1}^{1}(x+2)^2f(x+2)dx + 2 = 2\int_{-1}^{1}(x+2)^2f(x)dx + 2 = 102$$

문제 5

ㄱ. $f(x) = x^n e^{-x}$에서

$f\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-\frac{n}{2}}$ … ㉠

또, $f'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$이므로

$f'\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} \times e^{-\frac{n}{2}} \times \frac{n}{2} = \left(\frac{n}{2}\right)^n \times e^{-\frac{n}{2}}$ … ㉡

㉠과 ㉡에서

$f\left(\frac{n}{2}\right) = f'\left(\frac{n}{2}\right)$ (참)

ㄴ. $f'(x) = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$이므로

$f'(x) = 0$에서 $x = n$

또, $0 < x < n$일 때, $f'(x) > 0$이고 $x > n$일 때, $f'(x) < 0$이므로 함수 $f(x)$는 $x = n$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. $f'(x) = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$에서

$f''(x) = x^{n-2}e^{-x}(x^2 - 2nx + n^2 - n)$

$n = 4$일 때, $f''(x) = x^2e^{-x}(x^2 - 8x + 12)$이므로 $f''(0) = 0$이지만 x의 값이 0보다 작은 값에서 0보다 큰 값으로 변할 때, $f''(x)$의 부호가 변하지 않는다.

그러므로 점 $(0,0)$이 곡선 $y = f(x)$의 변곡점이라 할 수 없다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

논제 1-1

(대학발표 예시답안)

점 P가 원 C의 내부의 점이므로 $\overline{OP} = \overline{OQ} - \overline{PQ} = 1 - \overline{PQ}$이다. 점 P는 $\overline{AP} - \overline{PQ} = b$를 만족하므로 $\overline{AP} + \overline{OP} = b + 1$이 된다. 따라서 점 P의 자취는 점 A와 점 O를 초점으로 하고 장축의 길이가 $b+1$인 타원 중 원 C의 내부에 포함되는 부분이다.

논제 1-2

(대학발표 예시답안)

점 A와 점 O를 초점으로 하고 장축의 길이가 $b+1$인 타원상의 점 중 점 O에서 가장 멀리 떨어진 점 P_0은 타원의 중심으로부터 장축의 길이의 절반만큼 떨어진 점이다. 따라서 점 O에서 P_0까지의 거리는 $\overline{AO}$의 거리의 절반과 장축의 길이의 절반의 합이다. $b \leq 1 - a$이므로

$$\overline{OP_0} = \frac{a}{2} + \frac{b+1}{2} \leq \frac{a}{2} + \frac{2-a}{2} = 1$$

이 되어 타원 전체가 원 C의 내부에 포함되는 것을 알 수 있다.

단축의 길이가 $2\sqrt{\left(\frac{b+1}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(b+1)^2-a^2}$ 이므로 자취(타원)로 둘러싸인 면적은 $\frac{\pi}{4}(b+1)\sqrt{(b+1)^2-a^2}$ 이다.

면적이 b에 대해 증가함수이므로 주어진 구간 $0<b\le 1-a$에서 $b=1-a$일 때 최대이다. 따라서 면적의 최댓값은 $\frac{\pi}{2}(2-a)\sqrt{1-a}$ 이다.

논제 2-1

(대학발표 예시답안)

모든 자연수 n에 대하여 $a_n<1$임을 보이기 위해 수학적 귀납법을 이용한다.
$n=1$일 때, $0\le a_1<1$은 만족함이 주어졌고, $n=k$일 때, $a_k<1$가 성립한다고 하자.
그러면 $1+a_k<1+1=2$이고 $\frac{1+a_k}{2}=a_{k+1}^2<1$이 성립하므로 $a_{k+1}=\sqrt{a_{k+1}^2}<1$이다. 그러므로 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<1$이 성립한다.

(다른 풀이)

만약 어떤 자연수 n에 대하여 $a_n=\sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}}\ge 1$이 성립한다고 가정하면 $\frac{1+a_{n-1}}{2}\ge 1$이므로 $a_{n-1}\ge 1$도 성립하여, 이 과정을 반복하면 a_1도 1보다 같거나 크게 된다. 하지만 조건에 $a_1<1$로 주어졌으므로 위의 가정은 모순이다. 따라서 $a_n>1$인 자연수 n은 존재할 수 없다.

논제 2-2

(대학발표 예시답안)

(1)에 의해 $a_n<1$이므로 $2a_n<a_n+1<2$이고 $a_n<\frac{a_n+1}{2}=a_{n+1}^2<1$이다.

$0<a_{n+1}<1$이기 때문에 $a_{n+1}^2<a_{n+1}$이 참이어서 $a_n<\frac{a_n+1}{2}=a_{n+1}^2<a_{n+1}$이 성립한다.

논제 2-3

(대학발표 예시답안)

초항 a_1이 $\cos\theta$로 주어지면 삼각함수의 반각공식에 의해

$a_2^2 = \frac{1+a_1}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2}$ 이고 $a_2 = \pm\cos\frac{\theta}{2}$ 이다. 한편 $a_n \geq 0$ 이고 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 이므로 $\cos\frac{\theta}{2} \geq 0$ 이고 $a_2 = \cos\frac{\theta}{2}$ 이다. 그러므로 지금부터 $a_n = \cos\frac{\theta}{2^{n-1}}$ 임을 수학적 귀납법에 의해 보이자.

$n = k$일 때, $a_k = \cos\frac{\theta}{2^{k-1}}$ 가 만족한다고 하자.

그러면 $a_{k+1}^2 = \frac{1+a_k}{2} = \frac{1+\cos\frac{\theta}{2^{k-1}}}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2^k}$ 이고

$a_{k+1} \geq 0$ 이므로 $a_{k+1} = \cos\frac{\theta}{2^k}$ 이다.

그러므로 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = \cos\frac{\theta}{2^{n-1}}$ 이 성립한다.

논제 2-4

(대학발표 예시답안)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) = \cos 0 = 1$$

논제 3-1

(대학발표 예시답안)

함수 $f(x)-(x+2)$가 $\alpha, \beta, -\alpha$를 근으로 가지고 최고차항의 계수가 1이므로
$f(x)-(x+2) = (x-\alpha)(x-\beta)(x+\alpha)$ 라고 두고

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}(x-\alpha)(x-\beta)(x+\alpha)\,dx = 0$$

을 계산하면 $\beta = 0$을 얻는다. 함수 $f(x)-(x+2) = (x-\alpha)x(x+\alpha)$ 을 두 번 미분하여 변곡점 $(0,0)$을 가짐을 알 수 있다.

(다른 풀이) 함수 $f(x)-(x+2)$ 을 $(x-\alpha)(x-\beta)(x+\alpha)$ 라고 두면 $x = \frac{\beta}{3}$ 에서 변곡점을 가짐을 알 수 있다. 조건 $\int_{-\alpha}^{\alpha}(x-\alpha)(x-\beta)(x+\alpha)\,dx = 0$ 을 계산하면 $\beta = 0$을 얻는다. 따라서 함수 $f(x)-(x+2)$ 은 변곡점 $(0,0)$ 을 가진다.

논제 3-2

(대학발표 예시답안)

점대칭과 변곡점의 성질이 평행이동에 대하여 보존되므로 (p,q)를 원점 $(0,0)$로 생각할 수 있다. 임의의 삼차함수 $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 원점 $(0,0)$에 변곡점을 가지면 $b=0=d$이므로 함수 $g(x)$은 $g(-x)=-g(x)$을 만족한다. 함수 $g(x)$의 그래프 $(x,g(x))$은 원점 대칭 변환에 대하여 $(-x,g(-x))=(-x,-g(x))$를 만족하므로 원점 대칭이다.

(다른 풀이) 그래프 $(x,g(x))$가 점 (p,q)에 대칭임을 보이기 위하여 $g(2p-x)=2q-g(x)$을 보인다. 삼차함수 $g(x)$가 (p,q)에 변곡점을 가지므로 $g''(x)=c_1(x-p)$라고 두고 $(x-p)$에 대하여 두 번 적분하면

$g(x)=\frac{c_1}{6}(x-p)^3+c_2(x-p)+q$를 얻는다. 이제

$$g(2p-x)=\frac{c_1}{6}(p-x)^3+c_2(p-x)+q=-g(x)+2q$$

이므로 그래프 $(x,g(x))$가 점 (p,q)에 대칭이다.

논제 3-3

(대학발표 예시답안)

$((f(x)-(x+2))''=f''(x)$이므로 $f(x)-(x+2)$와 $f(x)$가 모두 $x=\beta=0$에서 변곡점을 가진다. <논제 3-2>에 따라 삼차함수 $f(x)$가 변곡점에 대칭이므로 함수$f(x)$의 변곡점은 $\frac{3+1}{2}=2$을 함숫값으로 하므로 $f(0)=2$이다. 삼차함수 $f(x)$가 변곡점 $(0,2)$에 대하여 대칭이므로 $x=a$와 $x=-a$에서 극솟값과 극댓값을 갖는다고 할 때 $f(-a)=3, f(a)=1$이다. $f''(x)=6x$이고, $f'(a)=f'(a)=0$에서 $f'(x)=3(x^2-a^2)$이고, $f(0)=2$이므로 $f(x)=x^3-3a^2x+2$이다.

$f(a)=1$을 풀면 $a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$을 얻는다.

따라서 $f(x)=x^3-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}x+2$이다.

30 이화여자대학교 수시 일반전형 자연계열 II

※ 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = \frac{3}{2}$이고 다음의 점화식을 만족할 때 아래 물음에 답하시오.[40점]

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 3}{2 - 3a_n}$

논제 1-1

$\tan\theta = \frac{3}{2}\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$일 때, 일반항 a_n을 θ로 나타내시오.

논제 1-2

모든 자연수 n에 대하여 a_n이 0이 아닌 유리수임을 보이시오. (힌트: n이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 생각해 보시오.)

논제 1-3

서로 다른 자연수 n과 m에 대하여 $a_n \neq a_m$임을 보이시오.

배경지식 쌓기

1. 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음의 두 가지 사실을 보이면 된다.

(ⅰ) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면
$n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

이와 같은 방법으로 명제 $p(n)$이 성립함을 증명하는 것을 수학적 귀납법이라 한다.

2. 삼각함수 공식

배각의 공식

(1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

(2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

(3) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

반각의 공식

(1) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

(2) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

(3) $\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

3배각의 공식

(1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

(2) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

(3) $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

풀어보기

문제 1

$0 \le x \le \pi$일 때, 삼각방정식

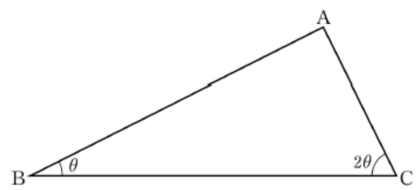
$$\sin x = \sin 2x$$

의 모든 해의 합은? [3점] (2014년 9월 모의평가)

① π ② $\frac{7}{6}\pi$ ③ $\frac{5}{4}\pi$ ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

문제 2

그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=1$이고 $\angle\mathrm{ABC}=\theta$, $\angle\mathrm{ACB}=2\theta$인 삼각형 ABC가 있다. 다음은 $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}=a$라 할 때, $\cos\theta$를 a에 대한 식으로 나타내는 과정이다.



삼각형 ABC에서

$$\frac{1}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin 2\theta}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\theta}$$

이므로 $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}=\frac{\sin\theta\times(\text{가})}{\sin 3\theta}$ 이다.

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(2\theta+\theta)\\ &= \sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta\\ &= 2\sin\theta\cos^2\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta\\ &= 3\sin\theta-4\sin^3\theta\end{aligned}$$

이므로 $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}=a$에서

$$a=\frac{(\text{가})}{3-4\sin^2\theta}=\frac{1}{(\text{나})}$$

이다. 따라서

$$\cos\theta=(\text{다})$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta), g(\theta), h(a)$라 할 때, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)+g\left(\frac{\pi}{6}\right)+h(2)$의 값은? [3점] (2014년 10월 전국연합)

예시답안

풀어보기

문제 1

$\sin x = \sin 2x$ 에서 $\sin x = 2\sin x \cos x$

$\sin x(2\cos - 1) = 0 \quad \therefore \sin x = 0$ 또는 $\cos x = \frac{1}{2}$

따라서, $0 \le x \le \pi$ 에서 해를 구하면

$x = 0$ 또는 $x = \pi$ 또는 $x = \frac{\pi}{3}$ 그러므로 모든 해의 합은 $\frac{4}{3}\pi$ 이다.

문제 2

삼각형 ABC에서

$\frac{1}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{\overline{AB}}{\sin 2\theta} = \frac{\overline{AC}}{\sin\theta}$ 이므로

$\overline{AB} + \overline{AC} = \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin 3\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta}{\sin 3\theta} = \frac{\sin\theta(2\cos\theta + 1)}{\sin 3\theta}$

이때 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ 이므로

$\overline{AB} + \overline{AC} = a$ 에서

$a = \frac{\sin\theta(2\cos\theta + 1)}{\sin\theta(3 - 4\sin^2\theta)} = \frac{2\cos\theta + 1}{3 - 4\sin^2\theta} = \frac{2\cos\theta + 1}{4\cos^2\theta - 1} = \frac{1}{2\cos\theta - 1}$

따라서 $\cos\theta = \frac{a+1}{2a}$ 이다. 위의 과정에서

$f(\theta) = 2\cos\theta + 1,\ g(\theta) = 2\cos\theta - 1,\ h(a) = \frac{a+1}{2a}$ 이므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) + g\left(\frac{\pi}{6}\right) + h(2) = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1) + \frac{3}{4} = 2\sqrt{3} + \frac{3}{4}$

논제 1-1

(대학발표 예시답안)

수학적 귀납법을 이용하여 $a_n = \tan n\theta$ 임을 보이자.

$n = 1$ 일 때, $a_1 = \tan\theta = \frac{3}{2}$ 이므로 성립한다.

$n = k$ 일 때, $a_k = \tan k\theta$ 라고 가정하자. 그러면

$$a_{k+1} = \frac{2a_k + 3}{2 - 3a_k} = \frac{\frac{2a_k + 3}{2}}{\frac{2 - 3a_k}{2}} = \frac{a_k + \frac{3}{2}}{1 - \frac{3}{2}a_k} = \frac{\tan k\theta + \tan\theta}{1 - \tan k\theta \cdot \tan\theta} = \tan(k+1)\theta \text{ 이다.}$$

논제 1-2

(대학발표 예시답안)

$n=1$일 때, $a_1=\dfrac{3}{2}$은 유리수이므로 성립한다.

$n=k$일 때, a_k가 유리수라고 가정하자. 그러면 $2a_k+3$와 $2-3a_k$는 유리수이다.

따라서 $a_{k+1}=\dfrac{2a_k+3}{2-3a_k}$도 유리수이다.

그러므로 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대해 a_n은 유리수이다.

이제 a_n이 0이 아님을 보이자.

1) n이 홀수일 때

$n=2k+1$일 때 $a_n=a_{2k+1}=\dfrac{2a_{2k}+3}{2-3a_{2k}}=\dfrac{2\tan 2k\theta+3}{2-3\tan 2k\theta}=0$이 성립한다고 가정하자.

$\Leftrightarrow 2\tan 2k\theta+3=0 \Leftrightarrow \tan 2k\theta=-\dfrac{3}{2}$

따라서 tan 함수의 배각공식에 의해

$\Leftrightarrow -\dfrac{3}{2}=\tan 2k\theta=\dfrac{2\tan k\theta}{1-\tan^2 k\theta}=\dfrac{2a_k}{1-a_k^2} \Leftrightarrow 3a_k^2-4a_k-3=0 \Leftrightarrow a_k=\dfrac{2\pm\sqrt{13}}{3}$

하지만 모든 a_k는 유리수이므로 $n=2k+1$일 때 $a_n\neq 0$이다.

2) n이 짝수일 때

자연수 n을 소인수분해하면 자연수 k와 l이 존재하여 $n=2^k(2l-1)$로 표현할 수 있다. 짝수 $n=2^k(2l-1)$에 대하여 tan 함수의 배각공식을 활용하면

$$a_n=a_{2^k(2l-1)}=\tan 2^k(2l-1)\theta=\tan 2\cdot 2^{k-1}(2l-1)\theta=\frac{2\tan 2^{k-1}(2l-1)\theta}{1-\tan^2 2^{k-1}(2l-1)\theta}=\frac{2a_{\frac{n}{2}}}{1-a_{\frac{n}{2}}^2}$$

이다. 따라서 $a_n\neq 0$이기 위한 필요충분조건은 $a_{\frac{n}{2}}\neq 0$이다. 그러므로 위의 과정을 $n=2^k(2l-1)$에서 $\dfrac{n}{2^k}=2l-1$이 될 때까지 k번 반복하면

$$a_n\neq 0 \Leftrightarrow a_{2^k(2l-1)}\neq 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow a_{2(2l-1)}\neq 0 \Leftrightarrow a_{2l-1}\neq 0$$

을 얻는다. 그러면 $2l-1$은 홀수이고 $a_{2l-1}\neq 0$이므로 모든 짝수 $n=2^k(2l-1)$에 대해서도 $a_n\neq 0$이다.

그러므로 1)과 2)에 의해 모든 자연수 n에 대해 $a_n\neq 0$이 성립한다.

논제 1-3

(대학발표 예시답안)

$n \neq m$이므로 적당한 자연수 k에 대해 $m = n + k$이다.

그러면 tan 함수의 합과 차의 공식에 의해

$$a_m - a_n = \tan m\theta - \tan n\theta = \tan(n+k)\theta - \tan n\theta$$

$$= \frac{\tan n\theta + \tan k\theta}{1 - \tan n\theta \tan k\theta} - \tan n\theta$$

$$= \frac{\tan n\theta + \tan k\theta - \tan n\theta + \tan^2 n\theta \tan k\theta}{1 - \tan n\theta \tan k\theta}$$

$$= \frac{\tan k\theta + \tan^2 n\theta \tan k\theta}{1 - \tan n\theta \tan k\theta}$$

$$= \frac{\tan k\theta (1 + \tan^2 n\theta)}{1 - \tan n\theta \tan k\theta}$$ 이다.

<논제 1-2>에서 $\tan k\theta \neq 0$였고 $1 + \tan^2 n\theta > 1$이 성립하므로

$$a_m - a_n = \frac{\tan k\theta (1 + \tan^2 n\theta)}{1 - \tan n\theta \tan k\theta} \neq 0$$ 이다.

따라서 서로 다른 자연수 n과 m에 대하여 $a_n \neq a_m$이다.

31 인하대학교 모의 [30)]

문제 1 (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 두 함수 $f : X \to Y$와 $g : Y \to Z$ 가 주어졌을 때, 집합 X의 임의의 원소 x에 대하여 함숫값 $f(x)$는 집합 Y의 원소이다. 또한 집합 Y의 원소 $f(x)$에 대하여 함숫값 $g(f(x))$는 집합 Z의 원소이다. 이때 집합 X의 임의의 원소 x에 집합 Z의 원소 $g(f(x))$를 대응시켜 X를 정의역, Y를 공역으로 하는 새로운 함수를 얻을 수 있다. 이렇게 얻은 함수를 두 함수 f와 g의 합성함수라 하고, 기호 $g \circ f : X \to Z$ 또는 $y = g(f(x))$로 나타낸다.

(나) 함수 $f(x)$에서 x가 a보다 작은 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서 $f(x)$의 좌극한이라고 하며, $\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha$와 같이 나타낸다. 또, x가 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, x의 값이 일정한 값 β에 한없이 가까워지면 β를 $x=a$에서 $f(x)$의 우극한이라고 하며, $\lim_{x \to a+0} f(x) = \beta$와 같이 나타낸다. 우극한과 좌극한이 모두 존재하더라도 그 값이 서로 같지 않으면, 즉 $\lim_{x \to a+0} f(x) \neq \lim_{x \to a+0} f(x)$이면 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$는 존재하지 않는다.

(다) 함수$y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+h$까지 변할 때, 극한값 $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재하면, 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 하며, 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수라 하고, 이를 기호로 $f'(a)$와 같이 나타낸다.

(※) 다음과 같이 함수 $y=f(x)$가 실수 전체의 집합에서 정의되어 있다.

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x \geq 1) \\ x^2 & (-1 \leq x < 1) \\ 2x-1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

논제 1-1

합성함수 $g = f \circ f$의 그래프의 개형을 그리고, 미분가능하지 않은 점을 모두 구하시오. (10점)

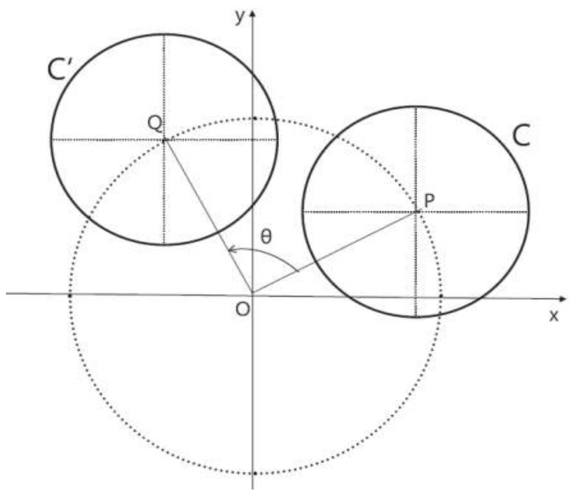
논제 1-2

조건 $a_1 = k$와 점화식 $a_{n+1} = f(a_n)$ $(n \geq 1)$으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$이 극한값을 가질 k의 범위를 구하시오. (15점)

30) 인하대학교 입학처

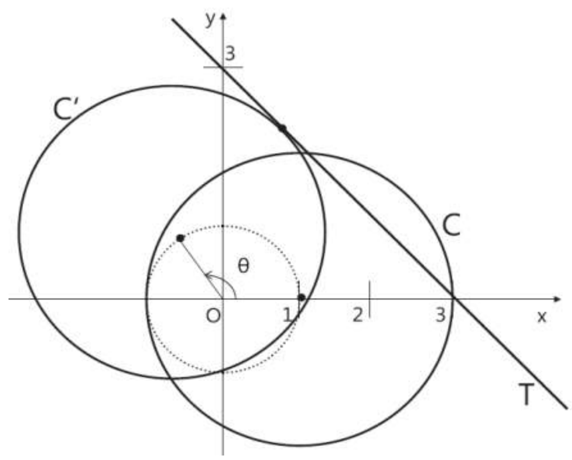
문제 2 (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

좌표평면 위에 주어진 원 C를 원점을 중심으로 각 θ 만큼 회전시키면 반지름은 변하지 않고 원 C의 중심 P 가 원점을 중심으로 각 θ 만큼 회전된 점 Q 를 중심으로 갖는 원 C' 이 된다.



논제 2-1

방정식 $(x-1)^2+y^2=4$ 로 주어지는 원을 C, 방정식 $x+y=3$ 으로 주어지는 직선을 T라고 하자. 원 C를 원점을 중심으로 각 $\theta\,(0 \le \theta \le \pi)$ 만큼 회전 변환시킨 도형을 C' 이라고 할 때, T와 C' 가 한 점에서 만나게 되는 θ 의 값에 대하여, $\cos\theta$ 의 값을 구하시오. (15점)



논제 2-2

방정식 $(x-1)^2+y^2=1$ 으로 주어지는 원을 K라 하고, $(\pm r,\ \pm r)$ 을 꼭짓점으로 갖는 정사각형을 S라 할 때, K를 원점을 중심으로 임의의 각으로 회전시킨 도형과 S의 교점의 개수가 항상 2 이하가 되도록 하는 r 의 범위를 구하시오. (10점)

문제 3 (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) (적분과 미분의 관계) 함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (a \le x \le b)$$

는 $[a, b]$ 에서 연속이고 (a, b) 에서 미분가능하며 $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ 이다. 즉,

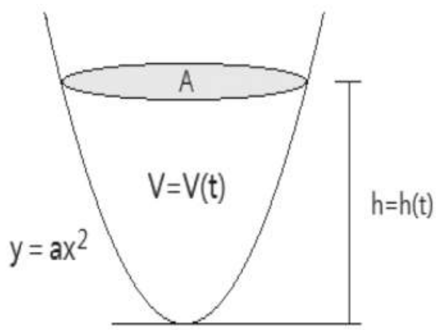
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dt = f(x) \quad (a \le x \le b)$$

(나) 미분가능한 두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 에 대하여 합성함수 $y = f(g(x))$ 도 미분가능하며, 그 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad y' = f'(g(x))g'(x)$$

이다.

(※) 양의 상수 a 에 대해 $-\sqrt{\frac{10}{a}} \le x \le \sqrt{\frac{10}{a}}$ 에서 정의된 포물선 $y = ax^2$ 을 y 축 둘레로 회전하여 얻은 포물면 모양의 빈 그릇이 있다.



논제 3-1

이 그릇에 물이 가득 채워졌을 때 물의 부피를 구하시오. (5점)

논제 3-2

$t=0$ 일 때 이 그릇에 물을 붓기 시작하였다. 시각 t 에서 수면의 높이를 $h=h(t)$ 라 하고, 그릇에 담긴 물의 부피를 $V=V(t)$ 라 할 때 V가 미분가능하고 항상 $\frac{d}{dt}V(t)=b$ (b는 양의 상수)가 되도록 물을 붓는다. $t=c$ 일 때 그릇에 물이 가득 채워진다고 하고 h가 t에 관해서 미분가능하다고 가정할 때 $\lim_{t \to c-0} \frac{d}{dt}h(t)$ 를 구하시오. (10점)

논제 3-3

이 그릇에 물이 가득 담겨 있는데, 수면의 넓이에 비례하는 양의 물이 증발하여 물의 부피가 점점 작아진다. 시각 t 에서 그릇에 담긴 물의 부피를 $V=V(t)$ 라 하고, 수면의 높이를 $h=h(t)$ 라 하면 수면의 넓이는 $A=A(h)=A(h(t))$ 로 표현된다. 그러면 상수 $k>0$ 에 대해 $\frac{d}{dt}V(t)=-kA$ 가 성립한다.

이 그릇의 물이 완전히 말라버릴 때 까지 시간이 얼마나 걸리는가? (단, $V=V(t)$ 와 $h=h(t)$ 가 미분가능하고 $A=A(h(t))$ 는 연속이라 가정한다.) (10점)

문제 4 (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표공간에서 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$와 $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (\text{단, } x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2,\ z_1 \neq z_2)$$

혹은 적당한 매개변수 t에 대해

$$C(t)=(1-t)A+tB=((1-t)x_1+tx_2,\ (1-t)y_1+ty_2,\ (1-t)z_1+tz_2)$$

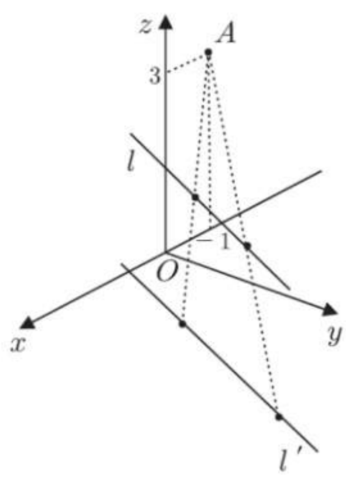
로 표현된다.

(나) 좌표공간에서 yz평면의 서로 다른 두 점 $\mathrm{P}(0, p_1, p_2)$와 $\mathrm{Q}(0, q_1, q_2)$를 연결하는 선분 위의 점 $(0, y, z)$는 $ay+bz=c$ (a, b, c는 상수)을 만족한다. 그리고 xy평면의 점은 $(X, Y, 0)$으로, xy평면의 직선은 X, Y의 일차식으로 각각 표현된다.

(※) 좌표공간의 점 $\mathrm{A}(-1, 0, 3)$에서 밝게 빛나는 작은 전구가 있다.

논제 4-1

점 $\mathrm{A}(-1, 0, 3)$ 위치에 있는 전구에 의해 방정식 $x=0,\ ay+bz=c$으로 주어지는 직선 l의 xy평면에 생기는 그림자(직선 l')의 방정식을 구하시오. (10점)



논제 4-2

yz평면에서 점 $(0, 1, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(0, 2, 1)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형이 있다. 점 $\mathrm{A}(-1, 0, 3)$ 위치에 있는 전에 의해 이 정사각형의 그림자가 xy평면에 생길 때, 그림자의 넓이를 구하시오. (15점)

배경지식 쌓기

1. 회전체의 부피

(가) x 축을 회전축으로 하는 회전체

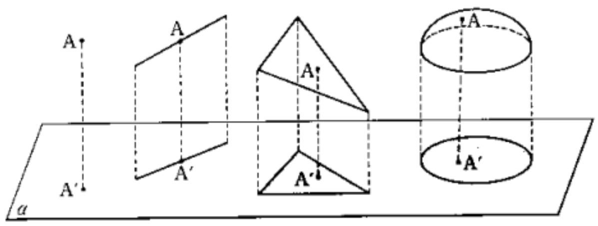
곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 부분을 x 축을 둘레로 회전하여 생기는 회전체의 부피 V는 $V=\int_a^b \pi y^2 dx=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$ 이다.

(나) y 축을 회전축으로 하는 회전체

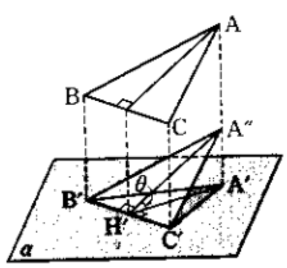
곡선 $x=g(y)$ 와 y 축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$ 로 둘러싸인 부분을 y 축을 둘레로 회전하여 생기는 회전체의 부피 V는 $V=\int_c^d \pi x^2 dy=\pi\int_c^d \{g(y)\}^2 dy$ 이다.

2. 정사영

평면 α 위에 있지 않는 점 A에서 평면 α 에 내린 수선의 발 A′을 점 A의 평면 α 위로의 정사영이라 한다. 일반적으로 공간도형 F의 각 점에서 평면 α 에 내린 수선의 발이 그리는 평면도형 F′은 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이다.



(정리) $\triangle$ABC 의 평면 α 위로의 정사영 $\triangle A'B'C'$ 이라 하고 $\triangle$ABC 를 품는 평면과 α 가 이루는 각을 θ 라 할 때, $\triangle$ABC, $\triangle A'B'C'$ 의 넓이를 각각 S, S' 이라 하면 $S'=S\cos\theta$ 이다. (단, $\overline{BC}\,/\!/\,\alpha$ 이다.)



풀어보기

문제 1

최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 2$ 일 때, $g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x < 1) \\ f(2-x) & (1 \le x < 2) \end{cases}$ 이다.
> (나) 모든 실수 x 에 대하여 $g(x+2) = g(x)$ 이다.
> (다) 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$g(6) - g(3) = \dfrac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) (2014년 10월 전국연합)

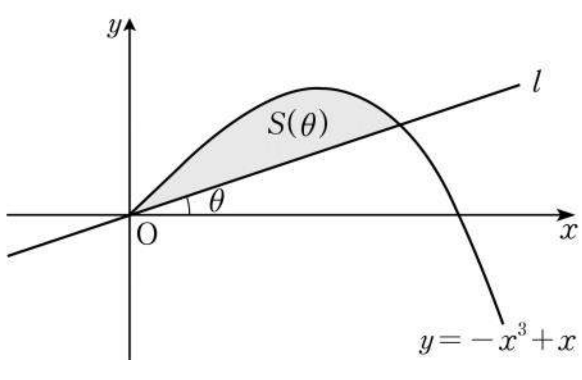
문제 2

좌표평면에서 행렬 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 로 나타내어지는 일차변환에 의하여

원 $C : (x-k)^2 + (y-k)^2 = k^2$ 이 원 C' 으로 옮겨진다. C' 이 원 C 의 중심을 지날 때, 상수 k 의 값을 구하시오. (단, $k > 1$) (2014년 4월 전국연합)

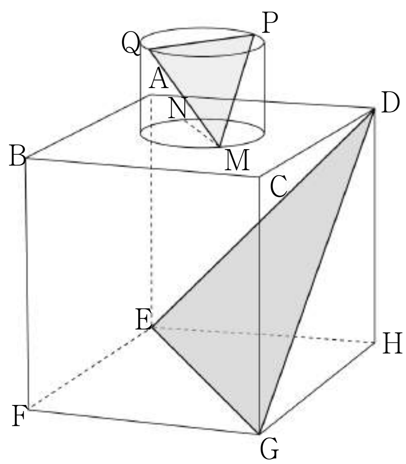
문제 3

그림과 같이 원점을 지나고 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\theta \left(0 \le \theta < \dfrac{\pi}{4}\right)$ 인 직선을 l 이라 하자. 곡선 $y = -x^3 + x \ (x \ge 0)$ 과 직선 l 로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4} - 0} \frac{S(\theta)}{\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)^2}$ 의 값을 구하시오. (2014년 10월 전국연합)



문제 4

한 변의 길이가 4인 정육면체 $ABCD-EFGH$ 와 밑면의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이고 높이가 2 인 원기둥이 있다. 그림과 같이 이 원기둥의 밑면이 평면 ABCD 에 포함되고 사각형 ABCD 의 두 대각선의 교점과 원기둥의 밑면의 중심이 일치하도록 하였다. 평면 ABCD 에 포함되어 있는 원기둥의 밑면을 α , 다른 밑면을 β 라 하자. 평면 AEGC 가 밑면 α 와 만나서 생기는 선분을 $\overline{MN}$, 평면 BFHD 가 밑면 β 와 만나서 생기는 선분을 $\overline{PQ}$ 라 할 때, 삼각형 MPQ 의 평면 DEG 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{b}{a}\sqrt{3}$ 이다. a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, a , b 는 서로소인 자연수이다.)
(2014년 7월 전국연합)



문제 5

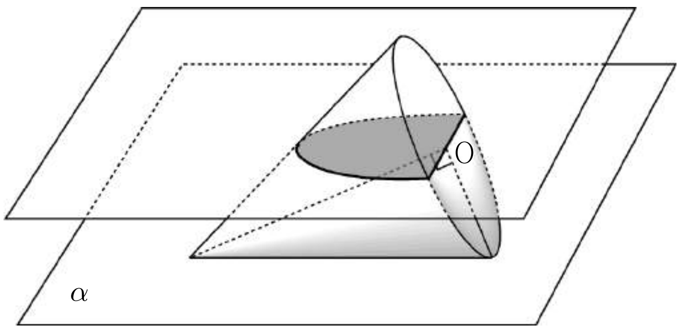
좌표평면에서 두 일차변환 f 와 g 를 나타내는 행렬이 각각

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

일 때, 일차변환 $(f \circ g)^{-1}$ 에 의하여 점 $(5, 5\sqrt{3})$ 이 점 $(\sqrt{3}, 1)$ 로 옮겨진다. 이때, 두 상수 k 와 θ 에 대하여 $\frac{k\pi}{\theta}$ 의 값을 구하시오. (단, $k>0$ 이고, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 이다.)
(2013년 4월 전국연합)

문제 6

반지름의 길이가 1, 중심이 O인 원을 밑면으로 하고 높이가 $2\sqrt{2}$인 원뿔이 평면 α 위에 놓여있다.(단, 원뿔의 한 모선이 평면 α에 포함된다.) 그림과 같이 원뿔을 평면 α와 평행하고 원뿔의 밑면의 중심 O를 지나는 평면으로 자를 때 생기는 단면의 일부분은 포물선이다. 이때 단면의 넓이를 구하시오. (2013년 7월 전국연합)



예시답안

풀어보기

문제 1

함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $g'(1)=\lim_{x\to 1-0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

이고 $\lim_{x\to 1-0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$ 이다. (가)에서 $1<x<2$ 일 때,

$g(x)=f(2-x)$ 이므로

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{f(2-x)-f(1)}{x-1}=-\lim_{x\to 1+0}\frac{f(2-x)-f(1)}{(2-x)-1}=-f'(1)$$

이다. 즉, $f'(1)=-f'(1)$ 에서 $f'(1)=0$ …㉠. 또, 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능

하므로 $g'(0)=\lim_{x\to -0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$ 이다.

$-1<x<0$ 일 때, $1<x+2<2$이고 $g(x)=g(x+2)=f(2-(x+2))=f(-x)$ 이므로

$$\lim_{x\to -0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{f(-x)-f(0)}{x}=-\lim_{x\to -0}\frac{f(-x)-f(0)}{(-x)-0}=-f'(0)$$

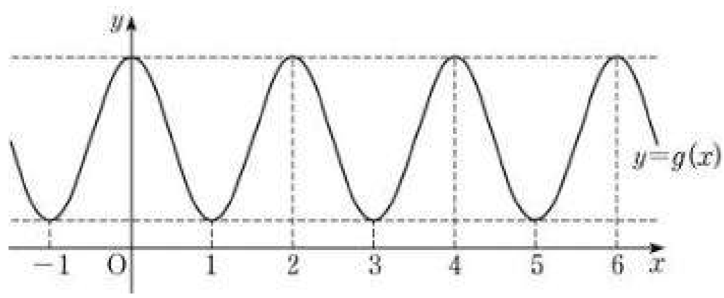
이다. 즉, $f'(0)=-f'(0)$ 에서 $f'(0)=0$ …㉡

㉠, ㉡에서 $f'(x)=3x(x-1)=3x^2-3x$ 이므로 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+C$ (C 는 적분상수)

함수 $g(x)$ 는 주기가 2 인 주기함수이므로

$$g(6)-g(3)=g(0)-g(1)=f(0)-f(1)=C-\left(1-\frac{3}{2}+C\right)=\frac{1}{2}$$

따라서 $p+q=2+1=3$ 이다.



문제 2

주어진 일차변환은 원점을 닮음의 중심으로 하고 닮음비가 k 인 닮음변환이므로 원 C의 중심 (k, k) 는 점 (k^2, k^2) 으로 옮겨지고, 원 C의 반지름의 길이 k 는 k^2 이 된다.

$$C' : (x-k^2)^2 + (y-k^2)^2 = k^4$$

C' 이 C의 중심 (k, k)를 지나므로

$$(k-k^2)^2 + (k-k^2)^2 = k^4$$

$$k^2(k^2-4k+2)=0$$

$$k = 2+\sqrt{2} \quad (\because\ k>1)$$

따라서 k의 값은 $2+\sqrt{2}$ 이다.

문제 3

직선 l의 방정식은 $y=(\tan\theta)x$ 이므로 $-x^3+x=(\tan\theta)x$ 에서 $x(x^2+\tan\theta-1)=0$ 이다. $x \geq 0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{1-\tan\theta}$ 이다. 따라서 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S(\theta) = \int_0^{\sqrt{1-\tan\theta}} \{(-x^3+x)-(\tan\theta)x\}\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}(1-\tan\theta)x^2\right]_0^{\sqrt{1-\tan\theta}}$$

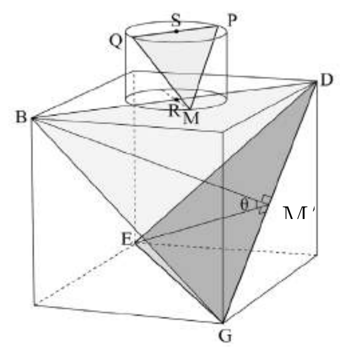
$$= \frac{1}{4}(1-\tan\theta)^2$$

이므로 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{S(\theta)}{\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)^2} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{1}{4}\left(\frac{\tan\theta-1}{\theta-\frac{\pi}{4}}\right)^2$ 이다. $f(\theta)=\tan\theta$ 라 하면 $f'(\theta)=\sec^2\theta$,

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ 이므로 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\tan\theta-1}{\theta-\frac{\pi}{4}} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{f(\theta)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\theta-\frac{\pi}{4}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$ 이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{S(\theta)}{\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\left(f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \frac{1}{4}\times 2^2 = 1$ 이다.

문제 4



원기둥의 밑면 α, β의 중심을 각각 R, S 라 하자.

$\overline{\mathrm{PQ}} /\!/ \overline{\mathrm{DB}}$ 이고, $\overline{\mathrm{SM}} /\!/ \overline{\mathrm{RG}}$ 이므로 평면 MPQ 와 평면 GDB 는 평행하다. 삼각형 GDB 와 삼각형 DEG 는 모두 정삼각형이고 두 삼각형이 만나서 생기는 선분은 $\overline{\mathrm{DG}}$ 이다. 선분 DG 의 중점을 M′이라 하고 $\theta=\angle\mathrm{BM'E}$ 라 하면 $\overline{\mathrm{BM'}}=\overline{\mathrm{EM'}}=2\sqrt{6}$, $\overline{\mathrm{BE}}=4\sqrt{2}$ 이므로, 삼각형 BM′E 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \cos(\angle\mathrm{BM'E}) = \frac{24+24-32}{2\cdot 2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}} = \frac{1}{3}\text{로}$$

삼각형 MPQ 의 넓이 S는 $S=\dfrac{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{2}=2\sqrt{3}$ 이므로 삼각형 MPQ 의 평면 DEG 위로의 정사영의 넓이는 $S\cos\theta=2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 이고 $a=3$, $b=2$ 이다.

따라서 $a^2+b^2=13$ 이다.

문제 5

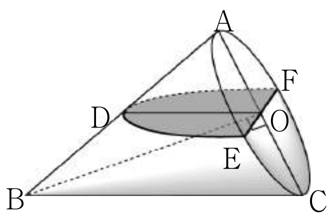
일차변환 $(f\circ g)^{-1}$ 의 역변환이 $f\circ g$ 이므로 일차변환 $f\circ g$ 에 의하여 점 $\left(\sqrt{3},1\right)$ 이 점 $\left(5,5\sqrt{3}\right)$ 으로 옮겨진다.

$$\begin{pmatrix}5\\5\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$$

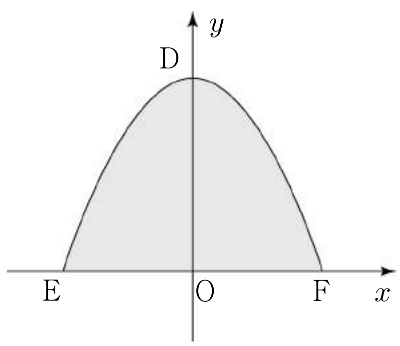
점 $\left(\sqrt{3},1\right)$ 을 원점을 중심으로 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 만큼 회전변환시킨 점을 다시 원점을 닮음의 중심으로 하고 닮음비가 $k=5$ 인 닮음변환에 의하여 옮긴 점이 $\left(5,5\sqrt{3}\right)$ 이다.

따라서 $\dfrac{k\pi}{\theta}=30$ 이다.

문제 6



삼각형 ABC 에 대하여 $\overline{BC}=3$ 이고 $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{DO}$, $\overline{OA}=\overline{OC}$ 이므로 삼각형의 중점연결 정리에 의하여 $\overline{DO}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{3}{2}$ 이다. 좌표평면에 포물선을 나타내면



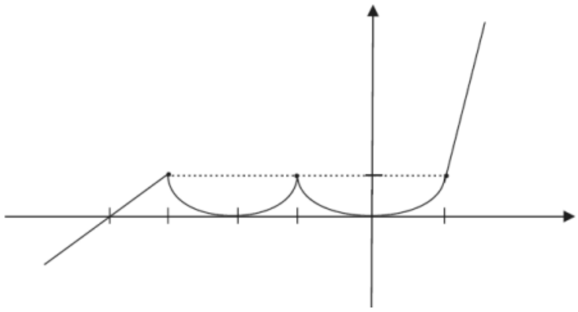
이 포물선은 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ 을 꼭짓점으로 하고 $(1,0)$ 을 지나므로, 포물선의 방정식은 $y=-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}$ 이다.

따라서 구하고자 하는 단면의 넓이는 $S=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}\right)dx=2$ 이다.

논제 1-1

(대학발표 예시답안)

$$g(x)=\begin{cases} x+4 & (x<-3) \\ (x+2)^2 & (-3\le x<-1) \\ x^4 & (-1\le x<1) \\ 4x-3 & (x\ge 1) \end{cases}$$



그림에서 $x=1$ 에서는 $g(x)$ 의 좌우미분계수가 같으므로 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다. 미분가능하지 않은 점은 $x=-3,\ -1$ 두 개이다.

논제 1-2

(대학발표 예시답안)

(i) $k<-1$ 인 경우 : $a_n<-1$ 이면 $a_{n+1}=a_n+2$ 이므로, 수열 $\{a_n\}$ 에서 $-1<a_m<1$ 인 m 이 존재한다. 그러면 $n>m$ 인 n 에 대하여 $a_{n+1}=a_n^2$ 이므로 $a_n=a_m^{2^{n-m}}$ 은 0 ($-1<a_m<1$ 인 경우) 또는 1 ($a_m=-1$ 인 경우)로 수렴한다.

(ii) $-1<k<1$ 인 경우 : $a_n=k^{2^{n-1}}$ 은 0 으로 수렴한다.

(iii) $k=-1$ 또는 $k=1$ 인 경우 : $a_n=1\ (n\ge 2)$ 이다. 따라서 수렴한다.

(iv) $k>1$ 인 경우 : $a_{n+1}\equiv 2a_n-1$ 이고, $a_n=1+(k-1)2^{n-1}$ 이므로 발산한다.

따라서 수열 $\{a_n\}$ 이 극한값을 가질 k 의 범위는 $k\le -1$ 이다.

논제 2-1

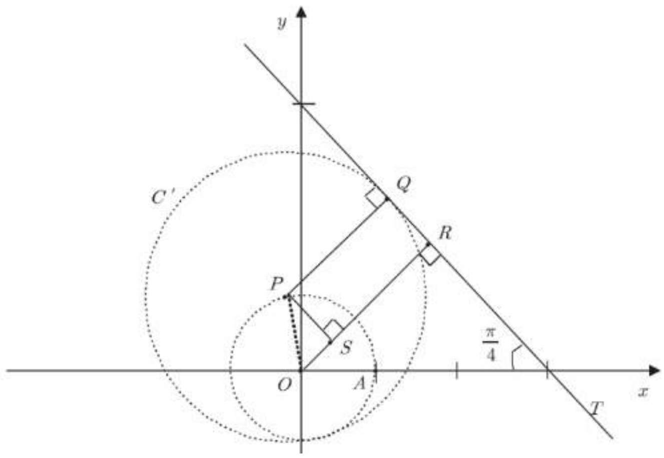
(대학발표 예시답안)

아래 그림과 같이 회전이동한 원 C' 은 중심이 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ 이고 반지름이 $\overline{\mathrm{PQ}}=2$ 인 원이다. 이 원이 직선 T에 접할 때 위 그림에서 $\overline{\mathrm{OR}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $\angle\mathrm{POS}=\theta-\dfrac{\pi}{4}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{OS}}=\cos(\angle\mathrm{POS})=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{\sqrt{2}}-2$$

이다. 따라서

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right)= \cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2\right)^2}=\frac{3}{2}-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-15+12\sqrt{2}}$$



(대학발표 예시답안 별해)

위의 그림과 같이 회전이동한 원 C'은 중심이 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$이고 반지름이 $\overline{\mathrm{PQ}}=2$인 원이다. 중심 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$에서 직선 $T : x+y-3=0$까지의 거리 $\dfrac{|\cos\theta+\sin\theta-3|}{\sqrt{2}}$가 2 이어야 하므로,

$$\cos\theta+\sin\theta=3-2\sqrt{2}$$

이다. 이때, 좌변은 $\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$와 같으므로, $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-2+\frac{3}{\sqrt{2}}$ 이다.

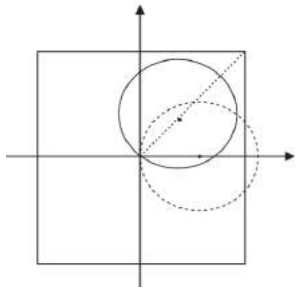
따라서,

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right)= \cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2\right)^2}=\frac{3}{2}-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-15+12\sqrt{2}}$$

논제 2-2

(대학발표 예시답안)

주어진 원을 45° 회전한 원 C가 S와 만나는 점의 개수를 생각해보자.



(1) $0<r<\sqrt{2}$ 이면 C와 S의 윗변과 오른쪽 변과 각각 한 번씩 만난다. 그런데 이 범위에서 특히 $1<r<\sqrt{2}$ 인 경우, 원 K에는 원점과의 거리가 S의 꼭짓점에서 원점까지의 거리와 같은 점 P 가 존재한다. 즉, $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2}r$ 인 점 $\mathrm{P}\in K$가 존재한다. 이때, P 가 S의 꼭짓점에 오도록 K를 적당히 회전하면, 회전한 원과 S는 세 점에서 만난다. 왜냐하면, 회전한 원의 중심은 S의 내부에 위치하기 때문이다.
(2) $r=\sqrt{2}$ 인 경우에도 C와 S는 S의 꼭짓점 $(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$을 포함해서 3 개의 점에서 만난다.

(3) $\sqrt{2}<r<1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 이면 C와 S는 S의 윗변과 오른쪽 변에서 각각 2 번씩 총 4 번 만난다.

(4) $r=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 이면, C와 S는 윗변과 오른쪽 변과 각각 한 점에서 접한다.

(5) $r>1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 이면, C와 S는 만나지 않는다.

따라서 문제의 조건을 만족하려면 $r\geq 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $0<r\leq 1$ 이어야 한다. 이제 $r\geq 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 인 경우 K를 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ 만큼 회전시키면, 정사각형의 윗변, 아랫변과는 만나지 않고, 오른쪽 변과 기껏해야 두 점에서 만나므로, S와의 교점은 2 개 이하이다. 마찬가지로 모든 θ 값에 대하여 같은 논리로 $S\cap K$의 교점은 2 개 이하이다.
같은 방법으로, $0<r\leq 1$ 인 경우 주어진 원 K를 회전시켰을 때, S와 만나는 점들은 원 K에서 $x\leq 1$ 인 부분(반원)이 회전하여 만나는 점들과 같다. K를 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ 만큼 회전시키면, S의 윗변과 한 점에서 만나고 S의 아랫변 또는 오른쪽 변과 한 점에서 만난다. 이 경우 $S\cap K$는 2 개의 점이며, 같은 논리에 의해 모든 θ 값에 대하여 $S\cap K$는 2 개의 점이다. 따라서 구하는 답은 $r\geq 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 그리고 $0<r\leq 1$ 이다.
(참고) r을 실수 범위에서 풀이한 학생의 경우는 범위를 $0<|r|\leq 1$, 그리고 $|r|\geq 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 로 구하면 된다. $r=0$ 은 정사각형이 만들어지지 않으므로 답에서 배제한다.

논제 3-1

(대학발표 예시답안)
회전체의 부피 공식에 의해 빈 그릇에 물이 가득 채워질 때 물의 부피는 다음과 같다.

$$V=\pi\int_{0}^{10}\frac{y}{a}dy=\frac{50\pi}{a}$$

논제 3-2

(대학발표 예시답안)

시각 t 일 때 그릇 안의 물은 $0 \le y \le h = h(t)$ 인 영역에 위치하고, $V(t) = \pi \int_0^{h(t)} \frac{y}{a} dy = \frac{\pi}{2a}(h(t))^2$ 이다. 양변을 h 로 미분하면 $b = V'(t) = \frac{\pi}{a} h(t) h'(t)$ 이다. 따라서 $0 < t < c$ 일 때 $h'(t) = \frac{ab}{\pi h(t)}$ 이다. $h(c) = 10$ 이므로 $\lim_{t \to c-0} h'(t) = \frac{ab}{10\pi}$ 이다.

(대학발표 예시답안 별해)

시각 t 일 때 그릇 안의 물은 $0 \le y \le h = h(t)$ 인 영역에 위치하고, $V(t) = \pi \int_0^h \frac{y}{a} dy$ 이다. 양변을 h 로 미분하면 $\frac{dV}{dh} = \frac{\pi h}{a}$ 이다. $\frac{dV}{dt} = b$ 이므로 $\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV}\frac{dV}{dt} = \frac{ab}{\pi h}$ 이다. $h(c) = 10$ 이므로 $\lim_{t \to c-0} h'(t) = \frac{ab}{10\pi}$ 이다.

논제 3-3

(대학발표 예시답안)

시각 t 일 때 그릇 안의 물은 $0 \le y \le h(t)$ 인 영역에 위치하고, $V(t) = \int_0^{h(t)} A(y) dy$ 이다. $F(s) = \int_0^s A(y) dy$ 라 두면 $V(t) = F(h(t))$ 이다. $F'(s) = A(s)$ 이므로

$$V'(t) = F'(h(t))h'(t) = A(h(t))h'(t)$$

이다. $V'(t) = -kA(h(t))$ 라는 가정에 의해 $h'(t) = -k$ 이다. $h(0) = 10$ 이므로 $h(t) = 10 - kt$ 이다. 따라서 $t = \frac{10}{k}$ 일 때 물이 완전히 말라버린다.

(대학발표 예시답안 별해)

$h = ax^2$ 로부터 수면의 반지름 $x = x(t) = \sqrt{\frac{h}{a}}$ 을 얻는다.

$A = A(h) = \pi x^2 = \frac{\pi h}{a}$ 이므로 가정에 의해 $V'(t) = -\frac{kpi}{a} h(t)$ $\cdots$ (1) 이다.

한편, 그릇의 물은 $0 \le y \le h(t)$ 인 영역에 존재하므로

$$V(t) = \int_0^{h(t)} A(y) dy = \int_0^{h(t)} \frac{\pi y}{a} dy = \frac{\pi}{2a}\{h(t)\}^2$$

이다. 양변을 미분하면 $V'(t) = \frac{\pi}{a} h(t) h'(t)$ $\cdots$ (2) 이다. (1) 과 (2) 로부터 $h'(t) = -k$ 이다. $h(0) = 10$ 이므로 $h(t) = 10 - kt$ 이다. 그러므로 $t = \frac{10}{k}$ 일 때 물이 완전히 말라버린다.

논제 4-1

(대학발표 예시답안)

직선 l 위의 임의의 한 점 B$(0,\ y,\ z)$에 대해 두 점 A와 B를 잇는 직선은 제시문 (가)에 의해

$$C(t)=(1-t)A+tB=(t-1,\ ty,\ 3+t(z-3))$$

이다. $C(t)$가 xy평면과 만날 때 $C(t)$의 z좌표는 0이므로 $t=\dfrac{3}{3-z}$ 이다.$(z\neq 3)$.

따라서 $C(t)$와 xy평면의 교점을 $(X,\ Y,\ 0)$라 하면 $X=\dfrac{z}{3-z}$ 이고 $Y=\dfrac{3y}{3-z}$ 이다.

그러므로 $y=\dfrac{Y}{X+1},\ z=\dfrac{3X}{X+1}$ 이다. $y=\dfrac{Y}{X+1},\ z=\dfrac{3X}{X+1}$ 를 $ay+bz=c$에 대입하면 $c=ay+bz=\dfrac{aY+3bX}{X+1}$ 이므로 양변에 $X+1$을 곱하면 $X,\ Y$의 일차식, 즉 직선 l의 그림자 (l')은 $(3b-c)X+aY=c$으로 주어진다.

논제 4-2

(대학발표 예시답안)

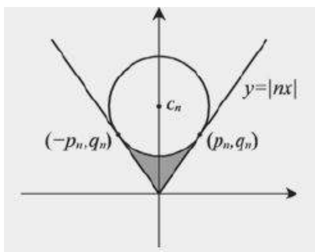
주어진 정사각형의 그림자는 정사각형의 각 변의 그림자를 네 변으로 하는 사각형으로 둘러싸인 영역이다. (4-1)의 풀이에 의해 점 $(0,\ y,\ z)$의 그림자는 $\left(\dfrac{z}{3-z},\ \dfrac{3y}{3-z}\right)$이다. 그러므로 네 점 P$(0,\ 1,\ 1)$, Q$(0,\ 1,\ 2)$, R$(0,\ 2,\ 2)$, S$(0,\ 2,\ 1)$의 그림자는 차례로 P$'\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ 0\right)$, Q$'(2,\ 3,\ 0)$, R$'(2,\ 6,\ 0)$, S$'\left(\dfrac{1}{2},\ 3,\ 0\right)$이다. 주어진 정사각형의 그림자는 P$'$, Q$'$, R$'$, S$'$을 꼭짓점으로 하는 사다리꼴 영역이다. 그림자를 시계 방향으로 90° 회전하면 윗변의 길이는 $\dfrac{3}{2}$, 아랫변의 길이는 3, 높이는 $\dfrac{3}{2}$ 이므로 구하려는 넓이는 $\dfrac{27}{8}$ 이다.

32 중앙대학교 모의

문제 1 단판으로 승부를 가리지만, 무승부일 경우 재시합을 하는 운동 경기가 있다. A 팀이 B 팀에 승리할 확률은 p, 패할 확률은 q, 무승부일 확률은 r 이라고 한다. 단, $p>0$, $q>0$, $r>0$, $p+q+r=1$ 이다. 계속 무승부가 되어 총 경기 횟수가 10 경기가 될 때까지 승부가 나지 않을 경우 동전던지기로 승부를 결정한다고 할 때, 두 팀이 치르게 될 경기 횟수의 기댓값을 r 에 대한 식으로 나타내시오. (20점)

문제 2 다음 제시문 (가)~(다)를 읽고 문항에 답하시오.

(가) $y=|nx|$ 의 그래프에 중심이 $(0,\ c_n)$ 이고 반지름이 $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ 인 원이 아래의 그림과 같이 접하고 있다. 두 접점을 각각 $(p_n,\ q_n)$, $(-p_n,\ q_n)$ 이라 하자. 단. n 은 양의 정수이다.



(나) 점 $(x_0,\ y_0)$ 와 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d 는 다음과 같다.

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(다) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 이 성립한다.

문제 2-1 제시문 (가)에 주어진 c_n 과 p_n 의 값을 각각 n 에 대한 식으로 나타내시오. (10점)

문제 2-2 제시문 (가)의 그림과 같이 $y=|nx|$ 와 원에 의해 둘러싸인 영역의 넓이를 A_n 이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. (10점)

문제 3 다음 제시문 (가)~(다)를 읽고 문항에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 다음을 만족한다.

$$\int_{1}^{2x-1}\{2f(t)+f(-t)\}dt = -8x^3+20x^2+22x-34$$

(나) 함수 $g(x)$ 가 구간 $[a,\ b]$ 에서 연속일 때, 다음을 만족한다.

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} g(t)dt = g(x) \quad (\text{단, } a \le x \le b)$$

(다) 두 함수 $y=g(u)$, $u=h(x)$ 가 미분가능할 때, 합성함수 $y=g(h(x))$ 의 도함수는 아래와 같다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=g'(h(x))\cdot h'(x)$$

문제 3-1 제시문 (가)에 주어진 함수 $2f(x)+f(-x)$ 를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. (10점)

문제 3-2 $x>0$ 일 때, $x+\dfrac{2}{x}$ 가 취할 수 있는 값의 범위와 $f(x+\dfrac{2}{x})$ 의 최댓값을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. (20점)

배경지식 쌓기

1. 정적분과 미분의 관계

a, b, c, d 가 상수이고, 연속함수인 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면 다음이 성립한다.

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$

(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{ax+b}^{cx+d} f(t)dt = cf(cx+d) - af(ax+b)$

2. 부분적분법

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능하고 $f'(x), g'(x)$ 가 연속일 때,

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

피적분함수가 두 함수의 곱의 꼴일 경우, 주어진 피적분함수를 $f(x)g'(x)$ 라 할 때, $f'(x)g(x)$ 를 적분하는 것이 더욱 쉽다면 부분적분법을 적용한다. 대체로 $g'(x)$ 로 놓아 적분하게 될 함수를 먼저 결정하고 다른 하나를 미분하게 될 함수 $f(x)$ 로 놓게 되며 $g'(x)$ 로 결정하는 우선순위는 다음과 같다.

지수함수 → 삼각함수 → 다항함수 → 로그함수

풀어보기

문제 1

연속함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = \frac{\pi}{2}\int_1^{x+1} f(t)dt$$

이다. $f(1)=1$ 일 때, $\pi^2\displaystyle\int_0^1 xf(x+1)dx$ 의 값은? (2014학년도 대수능)

문제 2

좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 기울기가 n 이고 y 절편이 양수인 직선이 원 $x^2+y^2=n^2$ 에 접할 때, 이 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{P}_n, \mathrm{Q}_n$ 이라 하자. $l_n = \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$ 이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{2n^2}$ 의 값은? (2011학년도 대수능 9월 모의)

읽기자료

기댓값[31]

다른 수학지식과 마찬가지로 확률 영역도 변화하고 발전하면서 하나의 학문 영역으로 정립되어 왔다. 확률론은 20세기 초까지 라플라스(Laplace:1749~1827)의 고전적 확률의 정의를 사용하였지만, 이 정의는 일어날 가능성, 즉 결과로 나올 가능성이 모두 같은 것으로 간주하는 표본공간에서 정의된 확률이기 때문에 조건을 만족하지 않는 상황에서는 확률을 계산할 수가 없다.

예를 들어 바구니 (가)에는 검은 공(B) 2 개와 흰 공(W) 1 개가 들어있고, 바구니 (나)에는 검은 공(B) 1 개와 흰 공(W) 1 개가 들어있다. 동전을 던져 앞면이 나오면 바구니 (가)에서 공 한 개를 꺼내고, 뒷면이 나오면 바구니 (나)에서 공 한 개를 꺼낼 때, 흰 공이 나올 확률을 구하지 않고 고전적 확률의 정의를 사용한다면 다음과 같은 직관적 모순에 빠질 수도 있다. 라플라스의 고전적 정의를 사용하여 확률을 계산할 때, 확률의 분모에 해당하는 모든 경우의 수는 문제 상황에서 직관적으로 다음과 같이 구할 수 있다. 동전을 던져서 앞면이 나오면 검은 공(B) 2 개와 흰 공(W) 1 개가 들어있는 바구니 (가)에서 공 한 개를 꺼내고, 뒷면이 나오면 공(B) 1 개와 흰 공(W) 1 개가 들어있는 바구니 (나)에서 공 한 개를 꺼내는 시행이다. 가능한 모든 경우의 수의 집합을 S라 하면,

$$S=\{(\text{앞면}, \mathrm{B}), (\text{앞면}, \mathrm{B}), (\text{앞면}, \mathrm{W}), (\text{뒷면}, \mathrm{B}), (\text{뒷면}, \mathrm{W})\}$$

이고, $n(S)=5$ 이다. 이때 흰 공이 나올 경우의 수의 집합을 A 라 하면,

$$A=\{(\text{앞면}, \mathrm{W}), (\text{뒷면}, \mathrm{W})\}$$

이고, $n(A)=2$ 이다. 따라서 흰 공이 나올 확률 $P(A)=\frac{2}{5}$ 이다. 하지만 이 풀이는 잘못된 풀이이고, 올바른 해답은 다음과 같다.

바구니 (가)에서 흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ 이고, 바구니 (나)에서 흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 이다. 따라서, 흰 공이 나올 확률은 $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$ 이다.

이처럼 제한적이고 모호했던 확률 영역의 지식들이 공리적 방법에 의한 새로운 논리 구조로 확립되기까지는 확률 연구의 직접적인 동기가 되는 17세기 초 페르마(Fermat:1601~1665)와 파스칼(Pascal:1623~1662)의 연구에서 상당 부분을 차지하는 기대금액, 다시 말해 기댓값에 관한 해법으로부터 1933년 콜모고로프(Kolmogorov:1903~1987)의 공리적 확률의 정의에 이르기까지 400년 이상이 걸렸다. 이러한 확률의 역사에서 중요한 의의를 지녔던 내용인 기댓값은 초기에 어떻게 다루어졌을까?

---

31) '기댓값에 대한 역사적 고찰, 대전송촌고등학교 이종학' 한국수학사학회지 제23권 제3호(2010년 8월)

중세시대에 행해졌던 내기도박은 확률론에 관한 연구를 가져오는 계기가 되었고, 17세기 초 도박판의 상금을 분배하는 분배문제의 해결을 위해 Fermat와 Pascal이 주고받은 문서에 나타난 기대금액, 즉 기댓값이 확률론 연구의 직접적인 동기가 되었다. (프랑스의 귀족 드 메레(de Mere)가 우연게임에 대한 2개의 문제를 Pascal에게 보냈다. 첫 번째 문제는 “2개의 주사위를 던져서 적어도 한번 이상 $(6,6)$이 나올 가능성이 $\frac{1}{2}$보다 크려면 최소한 몇 번을 던져야 하는가?”이고, 두 번째 문제는 상금의 분배 문제이다.) 1500년 경 이탈리아 수학자들은 어떤 예측이 가능한 상황에서 수학적으로 공평한 분배의 방법을 찾기 위해 노력했지만, 그 당시에는 확률 이론에 대해 자세히 알지 못했기 때문에 공평한 분배에 대한 올바른 해법을 제시하지는 못했다.

기댓값이라는 용어를 최초로 사용한 사람은 호이겐스(Christian Huygens:1629~1695)로 그는 1657년에 그 당시 확률 이론의 지침서가 되는 ‘우연게임에 관한 추론’을 출판하였는데, 이 논문에서 그가 주장한 기댓값의 의미를 유추해 볼 수 있다. 그는 어떤 게임에 참가한 참가자들은 누구든지 게임에서 돈을 잃고 싶어하지 않을 것이므로 공정한 게임에서는 모두가 같은 기회를 얻을 수 있다는 개념인 게임의 공정성을 염두에 두고, 기댓값 개념을 발전시켜 나갔다. 기댓값에 대한 그의 기본적인 사고는 각 참가자가 게임에서 이기거나 질 가능성이 동등하다고 가정하면서 같은 양의 돈 n만큼을 내고 참여하는 우연 게임의 한 형태인 복권의 추첨이었다. 동등한 가능성을 갖는 복권 추첨에서 게임의 가치로 표현되는 참가자의 기댓값은 참가자가 게임에 참여하기 위해 내야 하는 참가자마다의 판돈으로 정의된다. 이를 통해 동등한 기회를 갖는 유한 명의 참가자가 복권 추첨을 한다면, 이 게임에서의 기댓값은 상금의 산술평균과 같게 되고, 그가 주장한 게임의 가치에 대한 의미는 지금의 기댓값 정의와 같다는 것을 알 수 있다.

오늘날 우리가 사용하는 기댓값의 의미는 몽모르(Pierre Raymond de Montmort:1678~1719)에 의해 완성되었다고 할 수 있다. 그가 저술한 ‘우연게임의 분석에 관한 에세이’에서 그는 어떤 게임에서 이길 확률을 p, 전체 판돈을 S라고 했을 때, 참가자의 기댓값을 $e=pS$라고 정의하였고, S를 얻을 기회가 m번이고, 아무것도 얻지 못할 기회가 n번일 때, 참가자의 기댓값 $e=\frac{m\times S+n\times 0}{m+n}$이라고 주장하였다. 또한 어떤 게임에서 참가자들이 게임에 참가하기 위해서 제공한 참가금의 비가 그 참가자들의 기댓값의 비와 같을 때, 그 게임은 공정하다고 하면서 기댓값에서 판돈을 뺀 만큼을 참가자들이 가지게 될 이익으로 보았다.

이처럼 기댓값을 확률론의 핵심적인 내용 중 하나이지만 비교적 단순하게 취급되어 온 것이 사실이다. 특히 학교수학에서 일반적으로 기댓값 개념을 다룰 때, 몇 가지 예를 통해 기댓값을 단편적으로 이해한 후 바로 응용문제의 풀이를 시작함으로 인해 기댓값의 정확한 의미를 이해하기 어렵다. 이에 확률개념의 기원인 여러 가지 우연 게임과 함께 기댓값과 관련이 있는 공정한 분배의 의미가 발달되어온 역사를 살펴보면서 기댓값의 개념과 그 변화에 기여한 여러 역사적 사건들이 갖는 의의와 기댓값의 의미를 재조명해 볼 필요가 있겠다.

예시답안

풀어보기

문제 1

$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{x+1}f(t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)$ 이므로

$f(x+1)=\frac{2}{\pi}f'(x)$ 가 성립한다.

그러므로, $\pi^2\int_{0}^{1}xf(x+1)dx=\pi^2\int_{0}^{1}\left\{x\times\frac{2}{\pi}f'(x)\right\}dx=2\pi\int_{0}^{1}xf'(x)dx$ 이다.

부분적분법을 이용하여 위 식을 정리하면,

$$\int_{0}^{1}xf'(x)dx=[xf(x)]_0^1-\int_{0}^{1}f(x)dx=f(1)-\int_{0}^{1}f(x)dx$$

한편, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $f(1)=1$ 에서 $f(-1)=-1$ 이 성립하고, $f(-1)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{0}f(t)dt=-\frac{\pi}{2}\int_{0}^{1}f(t)dt$. 즉, $\int_{0}^{1}f(t)dt=\frac{2}{\pi}$ 이 성립한다.

따라서 $\pi^2\int_{0}^{1}xf(x+1)dx=2\pi\times\left\{f(1)-\int_{0}^{1}f(x)dx\right\}=2(\pi-2)$ 이다.

문제 2

원 $x^2+y^2=n^2$ 에 접하면서 기울기가 n 이고 y 절편이 양수인 직선의 방정식은 $y=nx+n\sqrt{n^2+1}$.

$\mathrm{P}_n=(-\sqrt{n^2+1},0)$, $\mathrm{Q}_n=(0,n\sqrt{n^2+1})$ 이므로,

$$l_n=\sqrt{(n^2+1)+n^2(n^2+1)}=\sqrt{(n^2+1)^2}=n^2+1$$

그러므로, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2}=\frac{1}{2}$ 이다.

대학출제 문제 1

(대학발표 예시답안)

확률변수 X의 확률분포는 다음과 같다.

X	1	2	3	$\cdots$	10
$P(X=x)$	$p+q$	$r(p+q)$	$r^2(p+q)$		$r^{10}(p+q)+r^{10}$

$$E(X) = 1\cdot(p+q)+2\cdot r\cdot(p+q)+3\cdot r^2\cdot(p+q)+\ \cdots\ +9\cdot r^8\cdot(p+q)+10\cdot\{r^9\cdot(p+q)+r^{10}\}$$
$$= (p+q)\cdot\{1+2\cdot r+3\cdot r^2+\ \cdots\ +10\cdot r^9\}+10\cdot r^{10}$$
$$= (p+q)\cdot S+10\cdot r^{10}$$

여기서 $S = 1+2\cdot r+3\cdot r^2+\ \cdots\ +10\cdot r^9$ 로 정의하면

$(1-r)\cdot S = 1+r+r^2+\ \cdots\ +r^9-10\cdot r^{10} = \dfrac{1-r^{10}}{1-r} - 10\cdot r^{10}$

$p+q+r=1$의 조건으로부터 $(1-r)\cdot S = (p+q)\cdot S$이기 때문에 $E(X)$는 다음과 같다.

$$E(X) = \frac{1-r^{10}}{1-r}$$

대학출제 문제 2-1

(대학발표 예시답안)

제시문 (나)에 주어진 공식으로부터 $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} = \dfrac{c_n}{\sqrt{n^2+1}}$ 을 얻을 수 있으므로,

$c_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{n+\dfrac{1}{n}}$ 이다. 두 점 $(0,\ c_n)$과 $(p_n,\ q_n)$을 지나는 직선은 $y=nx$와 직교하므로 $n\cdot\dfrac{c_n-q_n}{-p_n} = n\cdot\dfrac{c_n-np_n}{-p_n}=-1$ 이고,

식을 정리하면 $p_n = \dfrac{c_n}{n+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{\dfrac{1}{2}\sqrt{n+\dfrac{1}{n}}}{n+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{1}{2\sqrt{n+\dfrac{1}{n}}}$ 이다.

대학출제 문제 2-2

(대학발표 예시답안)

원점과 두 점 $(0,\ c_n), (p_n,\ q_n)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 a_n이라 하고, 이 삼각형과 내접원 내부의 교집합이 이루는 부채꼴의 넓이를 b_n이라 하면 $A_n = 2(a_n-b_n)$ 이다.

$a_n = \dfrac{1}{2}c_np_n = \dfrac{1}{8}$ 이고 내접원의 반지름은 0으로 수렴한다. $b_n\to 0$ 이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n = \dfrac{1}{4}$ 이다.

대학출제 문제 3-1

(대학발표 예시답안)

$2f(t)+f(-t)$ 의 원시함수를 $F(t)$ 라 하면 다음을 만족한다.

$$F(2x-1)-F(1) = -8x^3+20x^2+22x-34$$

양변을 미분하여 $2F'(2x-1) = -24x^2+40x+22$ 를 얻는다.

$F'(2x-1) = -3(2x-1)^2+4(2x-1)+18$ 이므로

$2f(x)+f(-x) = F'(x) = -3x^2+4x+18$ 이다.

대학출제 문제 3-2

(대학발표 예시답안)

$2f(x)+f(-x) = -3x^2+4x+18$ 에 x 대신 $-x$ 를 대입하여 또 하나의 식 $2f(-x)+f(x) = -3x^2-4x+18$ 를 얻는다. 두 식을 연립하여 $f(x) = -x^2+4x+6$ 을 얻는다.

$x>0$ 일 때, $x+\dfrac{2}{x} \geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{2}{x}} = 2\sqrt{2}$ 이다. $f(x)$ 는 대칭축이 $x=2$ 이고 위로 볼록한 이차함수의 그래프를 가지므로 $f\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$ 는 $x+\dfrac{2}{x} = 2\sqrt{2}$ 일 때, 최댓값 $-2+8\sqrt{2}$ 를 가진다.

(대학발표 예시답안 별해)

$2f(x)+f(-x) = -3x^2+4x+18$ 에 x 대신 $-x$ 를 대입하여 또 하나의 식 $2f(-x)+f(x) = -3x^2-4x+18$ 를 얻는다. 두 식을 연립하여 $f(x) = -x^2+4x+6$ 을 얻는다. $f'(x) = -2x+4$ 이므로

$\left[f\left(x+\dfrac{2}{x}\right)\right]' = f'\left(x+\dfrac{2}{x}\right)\cdot\left(x+\dfrac{2}{x}\right)' = \left\{-2\left(x+\dfrac{2}{x}\right)+4\right\}\cdot\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)$ 이다.

모든 $x>0$ 에 대하여 $x+\dfrac{2}{x} \neq 2$ 이므로 $\left[f\left(x+\dfrac{2}{x}\right)\right]' = 0$ 을 만족하는 x 는 $1-\dfrac{2}{x^2} = 0$ 의 근이다. $1-\dfrac{2}{x^2}=0$ 과 $x>0$ 으로부터 $x=\sqrt{2}$ 를 얻을 수 있고, 이때 $f\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$ 는 최댓값 $-2+8\sqrt{2}$ 를 가진다.

33 중앙대학교 수시

문제 1

공과 주사위를 이용하여 상금이 결정되는 게임이 있다. 바구니 안에 1~6까지 번호가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 바구니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낸 후, 주사위를 던져서 4 이하의 눈이 나오면 꺼낸 공의 번호에 1000원을 곱한 금액을 상금으로 받으며, 주사위를 던져서 5 또는 6의 눈이 나오면 바구니에서 꺼낸 공의 번호에 관계없이 2000원을 상금으로 받는다. 특별히 주사위의 눈이 공의 번호와 일치할 경우, 상금은 두 배가 된다. 이 게임에서 상금의 기댓값을 구하시오. [20점]

문제 2 다음 제시문 (가)-(다)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 다항식 A를 다항식 $B(B\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$A=BQ+R$ (단, R의 차수는 B의 차수보다 낮다.)

의 꼴로 나타낼 수 있다.

(나) x에 대한 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ (단, $g(x)\neq 0$)에 대해 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 꼴로 나타내어지는 식을 유리식이라 한다. 특히, $g(x)=1$이면 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 다항식이다.

예를 들어, 아래의 식은 모두 유리식이다.

$$\frac{5x-2}{2x^2-3x+4},\ \frac{2x^3+3}{-2x^2+5x+3},\ 2x^3+5x^2-8$$

(다) $C\neq D$일 때, $\dfrac{1}{CD}=\dfrac{1}{D-C}\left(\dfrac{1}{C}-\dfrac{1}{D}\right)$이 성립한다.

문제 2-1

다항식 $x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x^2+x+1$을 $(x+1)^3$으로 나눈 나머지를 $a(x+1)^2+b(x+1)+c$라 할 때, 계수 a, b, c를 각각 구하시오. [10점]

문제 2-2

$\displaystyle\int \frac{10x+p}{x^2(x+1)^2}dx$가 x에 대한 유리식이 되도록 상수 p를 정하시오. [10점]

문제 3 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

아래 왼쪽 그림에서 원을 포함하는 평면 m 과 이 평면의 x 축을 공유하는 평면 n 이 있고, 두 평면이 이루는 각이 α 이다. 평면 m 위의 원을 평면 n 위에 정사영하면 타원이 되고, 이 타원의 넓이는 원의 넓이에 $\cos\alpha$ 를 곱한 것과 같다.

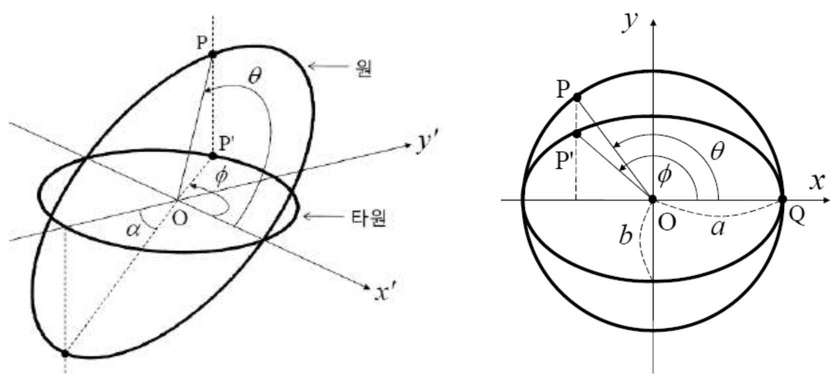
평면 m 위에 반지름이 a 이며, 중심이 원점인 원이 있을 때, 이 원 위의 점 P 의 좌표 (x, y) 는 다음과 같다.

$$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

여기서 θ 는 원점과 점 P 를 연결한 선이 x 축과 이루는 양의 각도이다. 이 원을 평면 n 위에 정사영하면 장축의 길이가 $2a$ 이고, 단축의 길이가 $2b$ 인 타원이 된다. 이때 $\cos\alpha = \dfrac{b}{a}$ 이다. 원 위의 점 P 는 타원 위의 점 P$'$ 로 정사영 되고, 타원을 포함하는 평면 n 의 좌표계에서 P$'$ 의 좌표 (x', y') 는 다음과 같다.

$$x' = a\cos\theta,\ y' = b\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

평면 m 위의 좌표계와 평면 n 위의 좌표계를 일치시켜 타원과 원의 관계를 나타내면 아래 오른쪽 그림과 같다.



문제 3-1

제시문에서 ϕ 는 선분 OP$'$ 이 x 축과 이루는 양의 각도이다. 제시문에 근거하여 P$'$ 의 좌표 $(x', y') = (a\cos\theta, b\sin\theta)$ 를 $\tan\phi$ 로 나타내시오. 단, $0 \le \phi < \dfrac{\pi}{2}$ 이다. [10점]

문제 3-2

제시문에 주어진 타원의 장축의 길이가 $2\sqrt{3}$, 단축의 길이가 2 , $\phi = \dfrac{\pi}{4}$ 일 때, 제시문에 근거하여 부채꼴 OQP$'$의 면적을 구하시오. [20점]

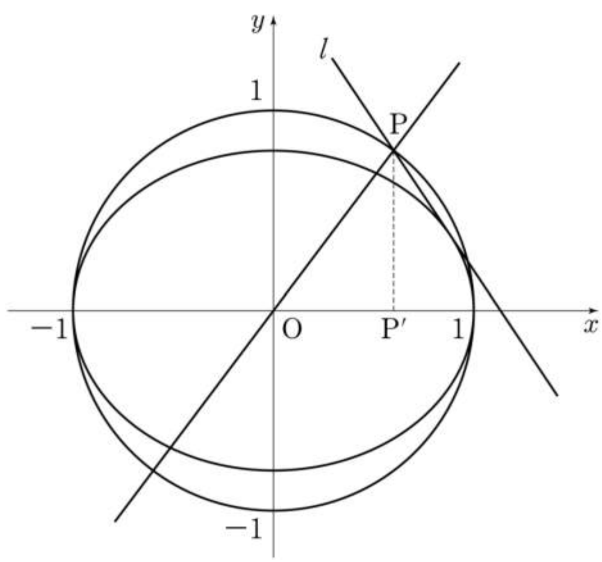
풀어보기

문제 1

그림과 같이 숫자 1 ,2 ,3 이 각각 하나씩 적혀 있는 흰 공 3 개와 검은 공 3 개가 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자의 최솟값을 확률변수 X라 하자. X의 평균이 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p , q 는 서로소인 자연수이다.) (2010년 3월 전국연합)

문제 2

그림과 같이 좌표평면에서 원점 O 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1 인 원 위의 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 P′이라 하자. 점 P 을 초점으로 하고, x 축 위에 있는 원의 지름을 장축으로 하는 타원에 대하여 점 P 에서 타원에 그은 접선 l의 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 일 때, 직선 OP 의 기울기는? (2014년 대수능 예비시행)



① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{17}{12}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

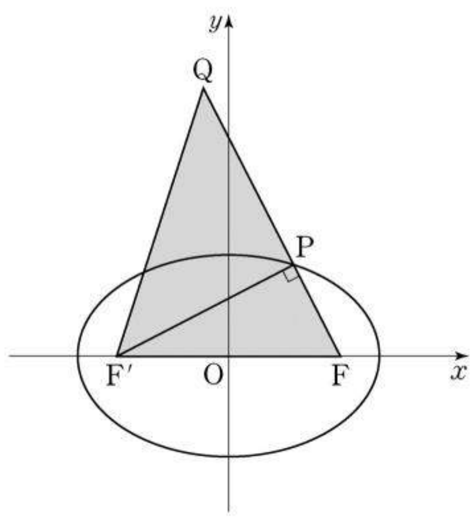
문제 3

중심이 $(0, 3)$ 이고 반지름의 길이가 5 인 원이 x 축과 만나는 두 점을 각각 A , B 라 하자. 이 원과 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 이 만나는 점 중 한 점을 P 라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BP}}$ 의 값은? (2014년 10월 전국연합)

① $\frac{41}{4}$ ② $\frac{21}{2}$ ③ $\frac{43}{4}$ ④ 11 ⑤ $\frac{45}{4}$

문제 4

타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 의 두 초점 중 x 좌표가 양수인 점을 F , 음수인 점을 F′ 이라 하자. 이 타원 위의 점 P 를 $\angle\mathrm{FPF'}=\frac{\pi}{2}$ 가 되도록 제 1 사분면에서 잡고, 선분 FP 의 연장선 위에 y 좌표가 양수인 점 Q 를 $\overline{\mathrm{FQ}}=6$ 이 되도록 잡는다. 삼각형 QF′F 의 넓이를 구하시오. (2014년 대수능)



예시답안

풀어보기

문제 1

꺼낸 2 개의 공에 적혀 있는 숫자 중에서 최솟값이 $k\,(k=1,\ 2,\ 3\,)$가 되는 경우의 수는 k 이상의 숫자 중에서 2 개의 숫자를 뽑는 경우의 수에서 k 보다 큰 숫자 중에서 2 개의 숫자를 뽑는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2-{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2-{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$$

따라서 확률변수 X 의 평균은 $1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{15}=\frac{22}{15}$ 이다.

$\therefore\ p+q=15+22=37$

문제 2

$\mathrm{P}'(c,\ 0)$, 단축의 길이를 $2b$ 라 하면 타원은 $x^2+\frac{y^2}{b^2}=1\ (1^2-b^2=c^2\,)$의 기울기 $m=-\frac{3}{2}$ 인 접선 l 은 $y=-\frac{3}{2}x\pm\sqrt{\frac{9}{4}+b^2}$ 이다. 그림과 같은 제 1 사분면을 지나는 l 위의 점 $\mathrm{P}\left(c,\ \sqrt{1-c^2}\right)\,(0<c<1\,)$를 대입하면

$$\sqrt{1-c^2}=-\frac{3}{2}c+\sqrt{\frac{9}{4}+1-c^2}\quad(\because\ 1^2-c^2=b^2\,)$$

$\sqrt{1-c^2}+\frac{3}{2}c=\sqrt{\frac{13}{4}-c^2}$ 을 양변 제곱하여 정리한 $3(c^2-1)=4c\sqrt{1-c^2}$ 을 다시 양변을 제곱하여 정리하면 $25c^4-34c^2+9=0$ 이고, $(25c^2-9)(c^2-1)=0$ 에서

$$\therefore\ c=\pm\frac{3}{5}\ \text{ 또는 }\ c=\pm1$$

$0<c<1$ 이므로 $c=\frac{3}{5}$, $P\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{OP}}\ \text{의 기울기는}\ \frac{4}{3}$$

문제 3

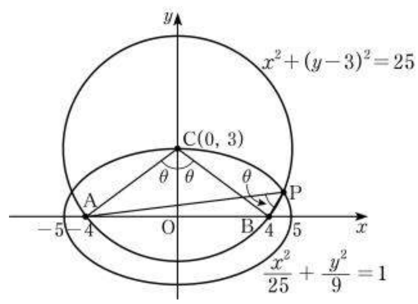
$x^2+(y-3)^2=5^2$ 에서 $y=0$ 일 때, $x=4$ 또는 $x=-4$. 따라서 원이 x 축과 만나는 두 점의 좌표는 각각 $A(-4,0)$, $B(4,0)$ 으로 놓을 수 있다. 그런데 이 두 점은 타원의 초점이고 점 P 는 타원 위의 점이므로 $\overline{AP}+\overline{BP}=10$ ⋯ ㉠

삼각형 APB 에서 $\angle APB=\theta$ 라 하면 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2-2\times\overline{AP}\times\overline{BP}\times\cos\theta=8^2$ ⋯ ㉡

각 $\angle APB$ 는 호 AB 의 원주각이고, 원의 중심을 $C(0,3)$ 이라 하면 각 $\angle ACB$ 는 호 AB 의 중심각이다. 따라서 $\angle ACB=2\theta$ 에서 $\angle OCA=\angle APB=\theta$

이때 $\overline{AC}=5$, $\overline{OC}=3$ 이므로 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\overline{AP}\times\overline{BP}=\dfrac{45}{4}$ 이다.



문제 4

$\overline{F'P}=x$ 라 하면 타원의 장축의 길이가 6 이므로 타원의 정의에 의해 $\overline{FP}=6-x$ 이다.

$\overline{FF'}=2\sqrt{5}$ 이므로 삼각형 FPF' 에서 피타고라스의 정리에 의해

$x^2+(6-x)^2=20$

$x^2-6x+8=0$

$\therefore x=4$ ($\because$ 점 P 가 제1 사분면에 위치)

따라서 삼각형 $QF'F$ 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{FQ}\times\overline{F'P}=\dfrac{1}{2}\times6\times4=12$ 이다.

대학출제 문제 1

공	주	상금	공	주	상금	공	주	상금	공	주	상금	공	주	상금	공	주	상금
1	1	2	2	1	2	3	1	3	4	1	4	5	1	5	6	1	6
	2	1		2	4		2	3		2	4		2	5		2	6
	3	1		3	2		3	6		3	4		3	5		3	6
	4	1		4	2		4	3		4	8		4	5		4	6
	5	2		5	2		5	2		5	2		5	4		5	2
	6	2		6	2		6	2		6	2		6	2		6	4

상금에 대한 확률분포표를 만들면

X	1000	2000	3000	4000	5000	6000	8000
$P(X)$	$\frac{3}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

이므로 상금의 기댓값은

$$E(X)=1000\times\frac{1\times3+2\times14+3\times3+4\times6+5\times4+6\times5+8\times1}{36}=1000\times\frac{122}{36}=\frac{30500}{9}$$

이다.

대학출제 문제 2-1

$x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x^2+x+1=(x+1)(x^9+x^7+x^5+x^3+x)+1$

$=(x+1)\{(x+1)(x^8-x^7+2x^5-2x^5+3x^4-3x^3+4x^2-4x+4)-5\}+1$

$=(x+1)[(x+1)\{(x+1)Q(x)+24\}-5]+1$

$=(x+1)^3Q(x)+24(x+1)^2-5(x+1)+1$

그러므로 $a=24$, $b=-5$, $c=1$ 이다.

대학출제 문제 2-2

$\frac{10x+p}{x^2(x+1)^2}$ 이 분자가 상수항이고 분모가 완전제곱식인 분수의 합으로 나타낼 수 있을 때만 $\int\frac{10x+p}{x^2(x+1)^2}dx$ 이 유리식이 될 수 있다. 그러므로

$$\frac{10x+p}{x^2(x+1)^2}=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(x+1)^2}=\frac{(a+b)x^2+2ax+a}{x^2(x+1)^2}$$

이고 $a=5$, $b=-5$ 이다. 따라서 $p=5$ 이다.

대학출제 문제 3-1

$\tan\theta=\frac{a}{b}\tan\phi$ 이고 $0\le\phi<\frac{\pi}{2}$ 이므로

$\cos\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2\tan^2\phi}}$, $\sin\theta=\frac{a\tan\phi}{\sqrt{a^2+b^2\tan^2\phi}}$

이다. 따라서 $(x', y')=\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2\tan^2\phi}}, \frac{ab\tan\phi}{\sqrt{a^2+b^2\tan^2\phi}}\right)$ 이다.

대학출제 문제 3-2

$a=\sqrt{3}$, $b=1$ 이다. $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{1}\tan\frac{\pi}{4}=\sqrt{3}$ 이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 이다. 따라서

부채꼴 OQP$'$의 면적은 원에서 부채꼴 OQP 의 면적에 $\cos\alpha=\frac{b}{a}$ 를 곱하면 된다.

따라서 부채꼴 OQP$'$ 의 면적은 $\frac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ 이다.

34 한양대학교 모의(1차) [32)]

문제 1 함수 $y=x^n$ (n 은 정수), $y=x^r$ (r 은 유리수), $y=x^r$ (r 는 실수)의 도함수를 구하는 과정에 대한 물음에 제시문을 읽고 답하시오.(50점)

(가) 다항식 $P(x)$ 에 대하여 $P(a)=0$ 이면 $P(x)=(x-a)Q(x)$ 인 다항식 $Q(x)$ 가 존재하며, 다항함수는 도함수가 존재하며 연속이다.
(나) 함수 $f(x)$가 $x=a$ 에서 미분가능하고 함수 $g(x)$ 가 $x=f(a)$ 에서 미분가능 할 때, 합성함수 $g(f(x))$ 의 $x=a$ 에서 미분계수는 $g'(f(a))f'(a)$ 이다.
(다) 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 함수 $f(x)g(x)$ 의 $x=a$ 에서 미분계수는 $f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ 이다.
(라) 양수 c 에 대하여 $e^{\ln c}=c$ 이다.

1. 자연수 n 과 실수 a 에 대하여 $P(x)=x^n-a^n$ 라 할 때, $P(x)=(x-a)Q(x)$ 인 다항식 $Q(x)$ 가 존재함을 설명하고 다항식 $Q(x)$ 를 구하는 방법을 설명하시오.
이를 이용하여 다항함수 $f(x)=x^n$ 의 $x=a$ 에서 미분계수를 구하시오.

2. 양수 a, 자연수 n, 정수 k 에 대하여, 함수 $h(x)=x^{\frac{n+k}{n}}$ 의 $x=a$ 에서 미분계수를 $n+k\geq 0$ 인 경우와 $n+k<0$ 인 경우로 나누어서 제시문 (가), (나), (다)를 이용하여 구하시오.

3. 양수 a, 자연수 n, 정수 k 에 대하여, 함수 $h(x)=x^{\frac{n+k}{n}}$ 에 대하여 $x=a$ 에서 미분계수를 제시문 (가), (나), (라)를 이용하여 구하시오.

4. 양수 a 와 유리수 r 에 대하여 $h(x)=x^r$ 의 $x=a$ 에서 미분계수를 구하는 방법을 위의 결과의 관점에서 설명하고, 양수 a 와 유리수가 아닌 실수 r 에 대하여 $h(x)=x^r$ 의 $x=a$ 에서 미분계수를 구할 수 있는지를 위의 결과의 관점에서 설명하시오.

32) 2014학년도 한양대학교 입학처

문제 2 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

> 한없이 넓은 초원이 있다고 가정하자. 이 초원 위에 10㎞의 거리를 두고 A 마을과 B마을이 있다. 한 사람이 A 마을을 출발해서 B 마을로 가는 도중에 초원의 한 곳에 보물을 숨겼다고 하자. 초원엔 별다른 장애물이 없고 이 사람이 이동하는 속력은 시속 5㎞로 일정하다. 또한 보물을 숨기는 데 걸리는 시간은 무시할 수 있을 만큼 작다고 가정하자.

1. 이 사람이 B 마을에 도착하기까지 걸린 시간이 t 시간 $(t>2)$ 일 때 보물이 숨겨져 있을 가능성이 있는 지역의 모양은 어떻게 되는가?

2. 이 사람이 B 마을에 도착하기까지 걸린 시간이 t 시간일 때, 보물이 숨겨져 있을 가능성이 있는 지역의 넓이를 $A(t)$ 라 하자. t 가 한없이 커질 때 $\dfrac{A(t)}{t^2}$ 은 어떤 수에 한없이 가까워지겠는가?

3. 이 사람이 4 시간 만에 B 마을에 도착했다면 보물이 숨겨져 있을 가능성이 있는 지역의 넓이는 얼마나 되겠는가?

배경지식 쌓기

1. 미분계수의 정의

함수 $y=f(x)$ 에 대하여 x 의 값이 a 에서 $a+\Delta x$ 까지 변할 때의 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

에서 Δx 가 0 에 한없이 가까워질 때의 극한값

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다고 하며, 이 극한값을 함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 순간변화율 또는 미분계수라고 하고, 기호로 $f'(a)$ 와 같이 나타낸다.

2. 미분법의 공식

가. 기본공식

[공식1]

(1) $f(x)=c$(상수) 이면 $\Rightarrow f'(x)=0$

(2) $y=x^n$ (n은 유리수)이면 $\Rightarrow y'=nx^{n-1}$

(3) $y=cf(x)$(c는 상수)이면 $\Rightarrow y'=cf'(x)$

(4) $y=f(x)\pm g(x)$이면 $\Rightarrow y'=f'(x)\pm g'(x)$(복호 동순)

(5) $y=f(x)g(x)$이면 $\Rightarrow y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

나. 몫의 미분법

[공식2]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 도함수가 존재할 때,

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x)\neq 0) \Rightarrow y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

특히, $y=\dfrac{1}{g(x)}\ (g(x)\neq 0) \Rightarrow y'=\dfrac{-g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

다. 합성함수의 미분법

[공식3]

$y=f(u)$, $u=g(x)$ 가 미분가능할 때,

$y=f(u)$, $u=g(x)$이면 $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

즉 $y=f(g(x)) \Rightarrow y'=f'(g(x))g'(x)$

풀어보기

문제 1

실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)f(y)+4f(x)+4f(y)+12$ (나) $f(\ln 2)=0$, $f'(0)=2$

이때, $f'(\ln 2)$의 값을 구하시오. (2011년 3월 전국연합)

문제 2

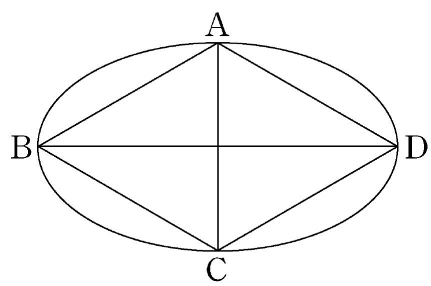
함수 $f(x)=x^2(x-2)^2$이 있다. $0 \le x \le 2$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) \le f'(t)(x-t)+f(t)$$

를 만족시키는 실수 t의 집합은 $\{t \mid p \le t \le q\}$이다. $36pq$의 값을 구하시오.
(2012년 3월 전국연합)

문제 3

한 변의 길이가 10인 마름모 ABCD에 대하여 대각선 BD를 장축으로 하고, 대각선 AC를 단축으로 하는 타원의 두 초점 사이의 거리가 $10\sqrt{2}$이다. 마름모 ABCD의 넓이는? (2011년 대수능)



① $55\sqrt{3}$ ② $65\sqrt{2}$ ③ $50\sqrt{3}$ ④ $45\sqrt{3}$ ⑤ $45\sqrt{2}$

문제 4

원 $(x-6)^2+(y-5)^2=36$과 x축의 두 교점을 초점으로 하고, 원의 중심을 지나는 타원의 장축의 길이를 구하시오. (2012년 7월 전국연합)

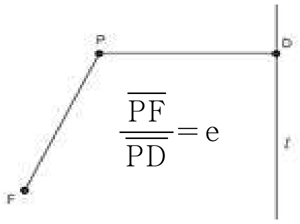
읽기자료

이심률에 의한 원뿔곡선

1. 이심률의 정의

이차곡선 위의 임의의 점에서 정점(초점)까지의 거리와 정직선(준선)까지의 거리의 비는 일정하다. 이 때, 일정한 비의 값을 이심률(e)이라고 한다.

아래 그림과 같이 정점 F와 정직선 l까지의 거리의 비가 이심률이다.



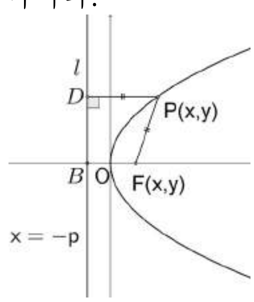
2. 이심률에 의한 이차곡선의 분류

$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PD}}=e:1$ 이 되는 점 P의 자취의 방정식을 구해보면 $\overline{\mathrm{FB}}\perp l$이라 하고, 선분 BF를 $1:e$로 내분하는 점 A를 원점, 직선 BF를 x축으로 하는 직교축을 정하고, $\overline{\mathrm{BA}}=p$ 라 하면, F의 좌표는 $(ep, 0)$이다.

$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PD}}=e:1$, $\overline{\mathrm{PF}}^2=e^2\overline{\mathrm{PD}}^2$, $(x-ep)^2+y^2=e^2(x+p)^2$

$(1-e^2)x^2+y^2-2ep(1+e)x=0$ …… ①

①식이 기본이 되는 자취의 방정식이다.



가. $e=1$인 경우 : 포물선 $y^2=4px$ – **일치하다**(parabole)

나. $0<e<1$인 경우 : 타원 – **부족하다**(ellipsis),

$\dfrac{ep}{1-e}=a$, $a^2(1-e^2)=b^2$ 이고 $c^2=a^2-b^2$ 이라 할 때 ①식을 정리하면 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$인 타원이 된다. 이 타원의 초점은 $\mathrm{F}(-c, 0)$, $\mathrm{F}'(c, 0)$을 초점으로 하고, 직선 $x=-\dfrac{a}{e}$, $x=\dfrac{a}{e}$ 를 각각 초점 F′,F 에 대응하는 준선, $e=\dfrac{c}{a}$를 이심률로 하는 타원이다.

다. $e>1$인 경우 : 쌍곡선 – **남다**(hyperbole)

$\dfrac{ep}{1-e}=a, a^2(e^2-1)=b^2$ 이고 $c^2=a^2+b^2$이라 할 때 ①식을 정리하면 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$인 쌍곡선이 된다. 이 쌍곡선의 초점은 $\mathrm{F}(-c, 0)$, $\mathrm{F}'(c, 0)$을 초점으로 하고, 직선 $x=-\dfrac{a}{e}$, $x=\dfrac{a}{e}$ 를 각각 초점 F′,F 에 대응하는 준선, $e=\dfrac{c}{a}$를 이심률로 하는 타원이다.

*** 이심률은 이차곡선의 모양을 결정한다.**

예시답안

풀어보기

문제 1

$y=0$ 을 대입하면

$f(x)=f(x)f(0)+4f(x)+4f(0)+12$

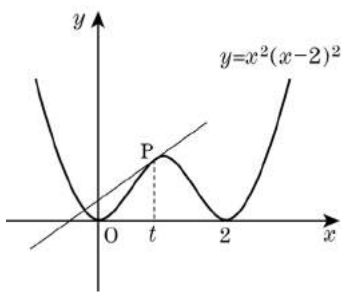
$\{f(x)+4\}\{f(0)+3\}=0$

$f(0)=-3$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)f(h)+4f(x)+4f(h)+12-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)f(h)+3f(x)+4f(h)+12}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)+4\}\{f(h)+3\}}{h}$$
$$=\{f(x)+4\}\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3}{h}=\{f(x)+4\}\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=\{f(x)+4\}f'(0)=2\{f(x)+4\}$$

$\therefore f'(\ln2)=2\{f(\ln2)+4\}=8$

문제 2



직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 는 곡선 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ 에서의 접선이므로 접선이 주어진 곡선의 위쪽에 놓이려면 접점은 곡선이 위로 볼록한 부분의 점이다.

그런데 위로 볼록한 부분에 있는 점에서의 접선 중에는 구간 $[0,2]$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프 아래쪽을 지나는 직선이 생길 수 있다.

그러므로 원점에서 그은 접선의 접점과 점 $(2,0)$ 에서 그은 접선의 접점의 x 좌표를 조사하면 된다.

$y=x^2(x-2)^2$ 에서 $y'=2x(x-2)^2+2x^2(x-2)=4x(x-1)(x-2)$

점 $(a,\ f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 $y-a^2(a-2)^2=4a(a-1)(a-2)(x-a)$

$x=0,\ y=0$ 을 대입하면

$-a^2(a-2)^2=-4a^2(a-1)(a-2)$

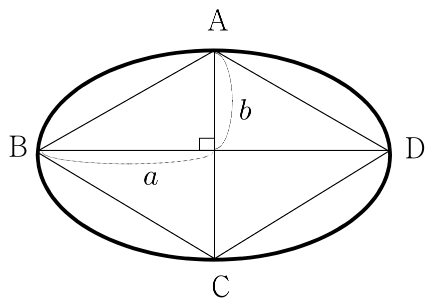
$\therefore\ a=\dfrac{2}{3}$

한편 곡선 $y=x^2(x-2)^2$ 은 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이므로 점 $(2,0)$ 에서 그은 접선의 접점의 x 좌표를 b 라 하면 $\frac{2}{3}+b=2$ 에서 $b=\frac{4}{3}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 실수 t의 값의 범위는 $\frac{2}{3}\le t\le\frac{4}{3}$ 이다.

$\therefore\ 36pq=36\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}=32$

문제 3

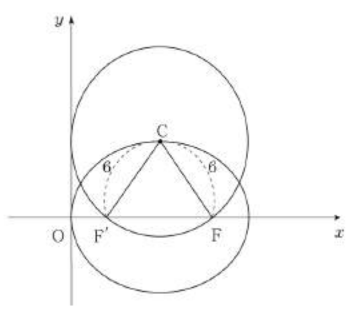


마름모 ABCD 에 대하여 대각선 BD 의 길이를 $2a$, 대각선 AC 의 길이를 $2b$ 라 하면 마름모의 한 변의 길이가 10 이므로

$$a^2+b^2=10^2 \cdots\cdots ㉠$$

이 성립한다.

문제 4



원 $(x-6)^2+(y-5)^2=36$ 의 중심을 C , 타원의 초점을 각각 F , F′ 이라 하면 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{F'C}}+\overline{\mathrm{CF}}=12$ 이다.

대학출제 문제 1-1

(대학발표 예시답안)

$P(a)=a^n-a^n=0$ 이므로 $P(x)=(x-a)Q(x)$가 성립하는 다항식 $Q(x)$ 가 존재하고 $Q(x)=\sum_{j=0}^{n-1}a_jx^j$ 라 두고 $P(x)=(x-a)Q(x)$ 의 양변의 계수를 비교하면

$Q(x) = a^{n-1} + a^{n-2}x + \cdots + ax^{n-2} + x^{n-1}$ 이다.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(a^{n-1} + a^{n-2}x + \cdots + x^{n-1})}{x-a} = na^{n-1}$$

이다.

대학출제 문제 1-2

(대학발표 예시답안)

$g(x) = x^n$ 이라 두자

(가) $n+k \geq 0$ 인 경우

$g(h(x)) = x^{n+k}$ 이고 양변을 $x=a$ 에서 미분하면,

$g'(h(a))h'(a) = (n+k)a^{n+k-1}$ 이고 $g'(h(a)) = nh(a)^{n-1} = na^{\frac{(n+k)(n-1)}{n}}$ 이다.

따라서 $h'(a) = \frac{n+k}{n} a^{n+k-1-\frac{(n+k)(n-1)}{n}} = \frac{n+k}{n} a^{\frac{k}{n}}$ 이다.

(나) $n+k < 0$ 인 경우 $-m = n+k$

$g(h(x)) = x^{n+k} = x^{-m}$ 이고 따라서 $x^m g(h(x)) = 1$ 이고 양변을 $x=a$ 에서 미분하면,

$ma^{m-2}g(h(a)) + a^m g'(h(a))h'(a) = 0$ 이고 $g'(h(a)) = nh(a)^{n-1} = na^{\frac{-m(n-1)}{n}}$ 이다.

따라서 $h'(a) = -\frac{ma^{m-1}g(h(a))}{a^m g'(h(a))} = -\frac{m}{n} a^{n+k-1+\frac{m(n-1)}{n}} = \frac{n+k}{n} a^{\frac{k}{n}}$ 이다.

대학출제 문제 1-3

(대학발표 예시답안)

$h(x) = e^{\ln h(x)} = e^{\frac{n+k}{n} \ln x}$ 이므로 $h'(x) = e^{\frac{n+k}{n} \ln x} \frac{n+k}{n} \frac{1}{x} = \frac{n+k}{n} x^{\frac{n+k}{n} - 1}$ 이다.

따라서 $h'(a) = \frac{n+k}{n} a^{\frac{k}{n}}$ 이다.

대학출제 문제 1-4

(대학발표 예시답안)

유리수 r 에 대하여 모든 유리수는 $\frac{m}{n}((m,n) = 1, n > 0)$ 로 나타낼 수 있고 $m - n = k$ 라 두면 $r = \frac{n+k}{n}$ 이므로 (2)와 (3)의 관점에서 $x=a$ 에서 미분계수를 구하면 $h'(a) = ra^{r-1}$ 인 것을 알 수 있다.

유리수가 아닌 실수 r에 대하여는 (2)의 방법을 적용하여 풀 수 없고 (3)의 방법을 풀면 $h(x) = e^{\ln h(x)} = e^{r \ln x}$ 이므로 $h'(x) = e^{r \ln x} r \frac{1}{x} = rx^{r-1}$ 이다. 따라서 $h'(a) = ra^{r-1}$ 이다.

대학출제 문제 2-1

(대학발표 예시답안)

A 마을과 B 마을을 초점으로 하고 두 마을까지의 거리의 합이 $5t$ 인 지점들로 이루어지는 타원을 생각하자. 타원의 안쪽에 있는 지역은 이 사람이 t 시간 안에 들렀다가 B 마을에 도착하는 것이 가능하고 이 타원의 밖에 있는 지역은 t 시간 안에 도달했다가 여행을 마칠 수 없다. 따라서 A 마을과 B 마을을 초점으로 하고 이 두 마을까지의 거리의 합이 $5t$ 인 타원의 안쪽이다.

대학출제 문제 2-2

(대학발표 예시답안)

문항 1의 타원은 t 가 커질수록 중심이 두 마을의 중간지점을 중심으로 하고 반지름이 $\frac{5}{2}t$ 인 원과 비슷해지므로 $\mathrm{A}(t) \approx \pi\left(\frac{5}{2}t\right)^2$ 이다. $\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{A}(t)}{t^2} = \frac{25}{4}\pi$

대학출제 문제 2-3

(대학발표 예시답안)

초점 사이의 거리가 $10\,\mathrm{km}$, 장축이 $20\,\mathrm{km}$ 타원의 넓이이다. 이것을 $\frac{1}{5}$로 축소한 타원으로 생각해보자.

xy 평면에서 초점 $(-1,0),(1,0)$, $2d=4$ 인 타원의 식은 $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3}=1$ 이다.

곡선 $y=\sqrt{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$, $0 \le x \le 2$ 와 x축 사이의 넓이 A를 4 배한 것이 이 타원의 넓이이다.

$A=\sqrt{3}\int_0^2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx$ 이다. $x=2\sin\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 로 치환하면,

$dx=2\cos\theta$ 이므로 $A=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta\,d\theta = \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos\theta)\,d\theta = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

따라서 이 타원의 넓이는 $2\sqrt{3}$이고 보물이 숨겨져 있을 가능성이 있는 지역의 넓이는 $50\sqrt{3}\pi\,\mathrm{km}^2$ 이다.

35 한양대학교 erica 모의(1차)

문제 1 다음 제시문 (가)~(다)를 읽고 물음에 답하시오.

(가) 계단을 한 번에 두 계단 혹은 한 계단을 오를 수 있다고 하자. 10개의 계단을 연속적으로 두 계단 씩 3번 오른 후 나머지 4개의 계단을 연속적으로 한 계단 씩 4번 사용하여 오르는 방법은 다음과 같은 처음 3개의 항이 2이고 나머지 4개의 항이 1인 길이가 7인 수열과 자연스럽게 대응할 수 있다.

$$2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$$

따라서 10개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 오르는 방법의 수는 세 개의 2와 네 개의 1로 이루어진 길이가 7인 수열의 개수와 같다.

(나) n개의 2와 m개의 1로 이루어진 길이가 $n+m$인 수열의 개수는 다음과 같다.

$$_{n+m}C_n = {}_{n+m}C_m = \frac{(n+m)!}{n!m!}$$

(다) 모 집합 U의 원소의 개수가 n이고 U의 부분집합 A의 원소의 개수가 m일 때, A의 여집합 A^C의 원소의 개수는 $n-m$이다.

문제 1-1

10개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 오를 때, 아홉 번째 계단을 밟고 오르는 경우의 수를 구하여라. [10점]

문제 1-2

10개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 오를 때, 네 번째 계단을 밟지 <u>않고</u> 오르는 경우의 수를 구하여라. [10점]

문제 1-3

10개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 오를 때, 여섯 번째 계단을 (반드시) 밟고 오르는 경우의 수를 구하여라. [10점]

문제 2 다음 제시문 (가)~(다)를 읽고 물음에 답하시오.

(가) x에 대한 다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어 떨어지기 위한 필요충분 조건은 $f(a)=0$, $f'(a)=0$이다.
(나) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고 그 구간에서 항상 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 단조증가한다.
(다) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ (\text{단, } a<c<b)$$

인 c가 적어도 하나 존재한다.

문제 2-1

n을 자연수라고 할 때, 다항식 $f(x)=a_n x^{n+1}+b_n x^n+1$이 $(x-1)^2$으로 나누어 떨어지도록 a_n, b_n을 구하여라. [10점]

문제 2-2

함수 $f(x)=(x+2)e^{-x}$의 도함수 $f'(x)$는 $x>0$에서 단조 증가하는 것을 보이고, 이를 이용하여 $0<a<b$일 때 $-(a+1)e^{-a}<\dfrac{(b+2)e^{-b}-(a+2)e^{-a}}{b-a}<-(b+1)e^{-b}$가 성립함을 증명하여라. [10점]

문제 2-3

함수 $f(x)=\dfrac{3}{2}x(1-x)$라 하고 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=\dfrac{1}{2}$, $a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$이고, $\dfrac{1}{3}<a_n<\dfrac{1}{2}$ $(n\geq 2)$이 만족될 때, $\dfrac{3a_{n+1}-1}{3a_n-1}<\dfrac{1}{2}$임을 보여라. [15점]

문제 3 다음 제시문 (가)~(다)를 읽고 물음에 답하시오.

(가) 정사각행렬 D에 대하여 $DX=E$ 또는 $XD=E$를 만족하는 정사각행렬 X가 존재하면, X는 D의 역행렬 $D^{-1}=X$이다. (단, E는 D와 같은 꼴인 단위행렬이다.)

(나) 2×1행렬 $A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$에 대하여 A^*를 1×2행렬 $A^*=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$라 정의한다. $A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$일 때 행렬 곱셈의 정의에 의해 $AB^*=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{pmatrix}$이고 $A^*B=a_1b_1+a_2b_2$이다.

(다) 행렬 $A=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$(단, $pq\neq0$, $p^2+q^2=1$)에 대하여 좌표평면에서 행렬 $E+AA^*$으로 나타내어지는 일차변환을 f라 하자. 일차변환 f에 의하여 자기 자신으로 옮겨지는 좌표평면위의 직선 l이 존재한다.

문제 3-1

제시문 (나)에서 $B^*A\neq-1$일 때,

행렬 $E+AB^*$의 역행렬이 $(E+AB^*)^{-1}=E-\dfrac{AB^*}{B^*A+1}$임을 보이시오. [10점]

문제 3-2

제시문 (다)에서 일차변환 f에 의하여 직선 $l : x+ky=0$이 서로 같은 직선 l로 옮겨질 때, k의 값을 구하시오. (단, $k\neq0$) [15점]

문제 3-3

제시문 (다)의 일차변환 f와 행렬 $C=\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}$으로 나타내어지는 일차변환 g에 의하여 합성변환 $g\circ f$가 원 $x^2+y^2=1$을 도형 G로 옮길 때, G의 방정식을 구하시오. [10점]

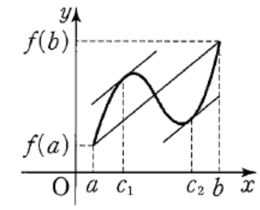
배경지식 쌓기

1. 평균값 정리

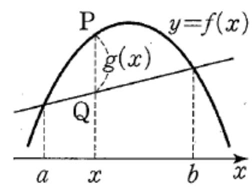
함수 $y=f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,\ b]$ 에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$ 에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

가 되는 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.



[참고] 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,.\ b]$ 에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$ 에서 미분가능할 때, 함수 $g(x)$ 를 다음과 같이 정하면 $g(x)$ 는 롤의 정리를 만족한다.



$g(x)=$(점 P의 y좌표)$-$(점 Q의 y좌표)

$$=f(x)-\left\{f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right\}$$

이때, $g(x)$ 는 $g(a)=g(b)=0$ 이므로 롤의 정리를 만족한다.

따라서, $g'(c)=0$ 인 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재하므로 평균값의 정리가 유도된다.

2. 일차변환과 행렬

일반적으로 변환 $f:(x,y)\rightarrow(x',y')$ 이 $\begin{cases}x'=ax+by\\ y'=cx+dy\end{cases}$ (단, a,b,c,d 는 상수)와 같은 꼴로 표현될 때, 이 변환을 일차변환이라 하고 이 식을 일차변환 f 의 변환식이라고 한다.

특히, 변환 f 를 행렬로 나타내면 $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ 와 같이 나타낼 수 있고 행렬 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 를 일차변환을 나타내는 행렬 또는 일차변환 f 의 행렬이라고 한다.

$$\begin{cases}x'=ax+by\\ y'=cx+dy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

[참고] 점 (x,y) 와 2×1 행렬 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ 는 동일하게 사용할 수 있다.

풀어보기

문제 1

서로 다른 두 실수 α, β가 사차방정식 $f(x)=0$의 근일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2010년 6월 평가원)

< 보 기 >

ㄱ. $f'(\alpha)=0$이면 다항식 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어 떨어진다.
ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.
ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 2

모든 성분의 합이 24인 이차정사각행렬 A가 $2A^2-A=2E$를 만족시킬 때, 행렬 $2A-E$의 역행렬의 모든 성분의 합을 구하시오. (2010년 6월 평가원)

문제 3

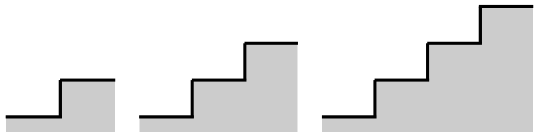
좌표평면에서 일차변환 f를 나타내는 행렬이 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$일 때, f에 의하여 직선 $x+2y=0$이 옮겨지는 직선의 방정식은? (2012년 9월 평가원)

① $2x+y=0$　② $2x+3y=0$　③ $3x+2y=0$
④ $2x+5y=0$　⑤ $5x+2y=0$

읽기자료

n개의 계단을 오르는 방법의 수

한 걸음에 한 계단 또는 두 계단만 오를 수 있다고 가정하자. n개의 계단을 오르는 방법의 수를 a_n이라고 할 때, a_n을 구해보자.



(ⅰ) 우선, 몇 개의 계단이 있을 경우 귀납적으로 구해보자.

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ a_4=5,\ \cdots\cdots$

이를 통해 $a_5=8, a_6=13,\ \ldots\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ 임을 추정할 수 있다.

(ⅱ) 이제 일반적으로 a_n을 구해보자.

$(n+2)$ 개의 계단을 오르는 방법의 수는 다음 두 가지 경우로 나누어 생각해볼 수 있다. 먼저 한걸음에 1계단 또는 2계단만을 오를 수 있으므로, 1계단을 먼저 오른 경우와 2계단을 먼저 오른 경우로 나눌 수 있다.

(ㄱ) 먼저 1계단을 오른 경우는 $(n+1)$개의 계단을 더 올라야 하므로 이때 경우의 수는 a_{n+1}이고,

(ㄴ) 2계단을 먼저 오른 경우는 n개의 계단을 더 올라야 하므로 이때 경우의 수는 a_n이다.

따라서 n개의 계단을 오르는 경우의 수 a_n은 다음과 같은 점화관계를 가지게 된다.

$$a_1=1, a_2=2\ ,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

위 식을 $a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n)$ 꼴로 변형한다고 가정하면 $p+q=1,\ pq=-1$ 이다.

즉, p와 q는 방정식 $x^2-x-1=0$ 의 두 근이다.

편의상 $p>q$ 라 하면 $p=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 이다.

$a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n)$에서 $\{a_{n+1}-pa_n\}$ 은 첫째항 $a_2-pa_1=1-p=q$, 공비 q인 등비수열이므로 일반항은

$$a_{n+1}-pa_n=q^n \cdots ①$$

한편, $a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n)$는 $a_{n+2}-qa_{n+1}=p(a_{n+1}-qa_n)$꼴로도 변형할 수 있다.

그러면 $\{a_{n+1}-qa_n\}$ 은 첫째항 $a_2-qa_1=1-q=p$, 공비 p 인 등비수열이므로 일반항은

$$a_{n+1}-qa_n=p^n \cdots ②$$

②−① 하면 $(p-q)a_n=p^n-q^n$

따라서 $a_n=\dfrac{p^n-q^n}{p-q}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ 이다.

예시답안

풀어보기

문제 1

ㄱ. $f'(\alpha)=0$이 되려면 $f(x)=(x-\alpha)^2(ax^2+bx+c)$의 형태이어야 하므로 $f(x)$가 $(x-\alpha)^2$으로 나누어 떨어진다. (참)

ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면

(ⅰ) $f'(\alpha)=0$ 이고 $f'(\beta)\neq 0$일 때 $f(x)=(x-\alpha)^2(ax^2+bx+c)$

(ⅱ) $f'(\alpha)\neq 0$ 이고 $f'(\beta)=0$일 때 $f(x)=(x-\beta)^2(ax^2+bx+c)$

(ⅲ) $f'(\alpha)=0$ 이고 $f'(\beta)=0$일 때 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$의 그래프를 그려보면 허근이 없다 (참)

ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0$이면 $f'(\alpha)$와 $f'(\beta)$의 부호가 같다.
사차식 $f(x)$의 두 해의 기울기의 부호가 같으려면 그래프를 그려보면 서로 다른 네 실근을 갖는다.

문제 2

$(2A-E)A=2E$이므로 $(2A-E)^{-1}=\dfrac{1}{2}A$

$\dfrac{1}{2}A$의 모든 성분의 합은 12이다.

문제 3

일차변환 f에 의하여 점 (x, y)가 (x', y')으로 옮겨진다고 하면

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ -3x-y \end{pmatrix}$

$x'=x, y'=-3x-y$

$\therefore x=x', y=-3x'-y'$ …㉠

㉠을 $x+2y=0$에 대입하면

$x'+2(-3x'-y')=0$

$5x'+2y'=0 \quad \therefore 5x+2y=0$

대학출제 문제 1-1

(대학발표 예시답안)

10개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 오를 때, 아홉 번째 계단을 (반드시) 밟고 오르려면 처음 아홉 개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단씩 3번 사용하여 오르고 나머지 한 계단을 한 번에 올라야 한다. 따라서 제시문 (가)와 (나)를 참조하면 구하는 경우의 수는 다음과 같다.

$${}_6C_3\times{}_1C_1=\frac{6!}{3!3!}\times\frac{1!}{1!1!}=20$$

대학출제 문제 1-2

(대학발표 예시답안)

10개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 오를 때, 네 번째 계단을 (반드시) 밟지 않고 오르려면 처음 세 개의 계단을 오른 후, 한 번에 두 계단 이용하여 다섯 번째 계단에 오르고 나머지 다섯 계단을 올라야 한다.

이의 경우는 처음 세 개의 계단을 두 계단 씩 1번 그리고 한 계단 씩 1번 사용하여 오르고 마지막 다섯 계단을 두 계단 씩 1번 그리고 한 계단 씩 3번 사용하여 오르는 경우와 처음 세 개의 계단을 한 계단 씩 3번 사용하여 오르고 마지막 다섯 계단을 두 계단 씩 2번 그리고 한 계단 씩 1번 오르는 경우의 합이 된다.

따라서 제시문 (가)와 (나)를 참조하면 구하는 경우의 수는 다음과 같다.

$$ {}_2C_1 \times {}_4C_1 + {}_3C_3 \times {}_3C_1 = 8 + 3 = 11 $$

대학출제 문제 1-3

(대학발표 예시답안)

10개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 오를 때, 여섯 번째 계단을 (반드시) 밟고 오르려면 처음 여섯 개의 계단을 오른 후 나머지 네 계단을 올라가야 한다.

이의 경우는 처음 여섯 개의 계단을 두 계단 씩 3번 사용하여 오른 후 나머지 네 개의 계단을 한 계단 씩 4번 사용하여 오르는 경우, 처음 여섯 개의 계단을 두 계단 씩 2번 그리고 한 계단 씩 2번 사용하여 오른 후 나머지 네 개의 계단을 두 계단 씩 1번 그리고 한 계단 씩 2번 사용하여 오르는 경우, 그리고 처음 여섯 개의 계단을 두 계단 씩 1번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 오른 후 나머지 네 개의 계단을 두 계단 씩 2번 사용하여 오르는 경우의 합이 된다.

따라서 제시문 (가)와 (나)를 참조하면 구하는 경우의 수는 다음과 같다.

$$ {}_3C_3 \times {}_4C_4 + {}_4C_2 \times {}_3C_1 + {}_5C_1 \times {}_2C_2 = 1 + 18 + 5 = 24 $$

(대학발표 예시답안 별해)

10개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 오를 때, 여섯 번째 계단을 (반드시) 밟고 오르는 경우의 수는 대칭성에 의해 10개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 내려올 때, 네 번째 계단을 (반드시) 밟고 내려오는 경우의 수와 같다.

이는 제시문 (다)의 여집합의 성질을 이용하고 [문제 1-2] 그리고 제시문 (가)를 이용하면 구하는 경우의 수는 다음과 같다.

$$ {}_7C_3 - 11 = \frac{7!}{4!3!} - 11 = 24 $$

대학출제 문제 2-1

(대학발표 예시답안)

$f(x)=a_nx^{n+1}+b_nx^n+1$에서 $f'(x)=(n+1)a_nx^n+nb_nx^{n-1}$이다.

$f(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지기 위한 조건은 제시문 (가)에서

$f(1)=a_n+b_n+1=0$이고 $f'(1)=(n+1)a_n+nb_n=0$이다.

이들을 풀면 $a_n=n,\ b_n=-n-1$이다.

대학출제 문제 2-2

(대학발표 예시답안)

$f'(x)=-xe^{-x}-e^{-x}=-(x+1)e^{-x}$이고 $f''(x)=xe^{-x}$이다. $x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 제시문 (나)에 의하여 $f'(x)$는 단조증가한다.

$f(x)$에 대해 제시문 (다)에 의하여

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 $a<c<b$가 반드시 적어도 하나 존재한다.

또한 $f'(x)$가 단조증가하므로 $f'(a)<f'(c)<f'(b)$이다.

따라서 $-(a+1)e^{-a}<\dfrac{(b+2)e^{-b}-(a+2)e^{-a}}{b-a}<-(b+1)e^{-b}$이다.

대학출제 문제 2-3

(대학발표 예시답안)

$\dfrac{1}{3}<a_n<\dfrac{1}{2}$, $f(x)=\dfrac{3}{2}x(1-x)$이므로 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$이다.

제시문 (다)에 의하여

$\dfrac{f(a_n)-\frac{1}{3}}{a_n-\frac{1}{3}}=f'(c)$, $\dfrac{1}{3}<c<a_n$을 만족하는 c가 존재한다.

$f'(x)=\dfrac{3}{2}-3x$이고 $f'(c)<f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$이므로 $\dfrac{3a_{n+1}-1}{3a_n-1}<\dfrac{1}{2}$이 된다.

대학출제 문제 3-1

(대학발표 예시답안)

$$(E+AB^*)\left(E-\frac{AB^*}{B^*A+1}\right)=E+AB^*-\left(\frac{1}{B^*A+1}\right)AB^*-\left(\frac{1}{B^*A+1}\right)AB^*AB^*$$

$$=E+\left(1-\frac{1}{B^*A+1}\right)AB^*-\frac{B^*A}{B^*A+1}AB^*=E+\left(1-\frac{1+B^*A}{B^*A+1}\right)AB^*=E$$

따라서 제시문 (가)에 의하여 $(E+AB^*)^{-1}=E-\dfrac{AB^*}{B^*A+1}$이다.

대학출제 문제 3-2

(대학발표 예시답안)

일차변환 f에 의하여 직선 l 위의 점 (x, y)가 점 (x', y')로 옮겨진다고 하면

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (E+AA^*)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+p^2 & pq \\ pq & 1+q^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+p^2)x+pqy \\ pqx+(1+q^2)y \end{pmatrix}$이다.

따라서 $\begin{cases} x' = (1+p^2)x+pqy \\ y' = pqx+(1+q^2)y \end{cases}$

직선 l이 변환 f에 의하여 변하지 않으므로 $x'+ky'=0$이고

$\{(1+p^2)x+pqy\}+k\{pqx+(1+q^2)y\}=0$ 또는 $\{(1+p^2)+kpq\}x+\{k(1+q^2)+pq\}y=0$

위 직선이 직선 l과 일치하려면

$$(1+p^2)+kpq = \frac{k(1+q^2)+pq}{k}$$

를 만족해야 한다. 위 식을 정리하면 $pqk^2+(p^2-q^2)k-pq=0$을 얻을 수 있다. 인수분해하면 $(kp-q)(kq+p)=0$이므로 $k=\frac{q}{p}$ 또는 $k=-\frac{p}{q}$이다.

대학출제 문제 3-3

(대학발표 예시답안)

합성변환 $g \circ f$에 의하여 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 (x, y)가 점 (x', y')으로 옮겨진다고 하면,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C(E+AA^*)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$AA^*=p^2+q^2=1$이므로 C의 역행렬이 존재하고, 문제 3-1에 의하여

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (E+AA^*)^{-1}C^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(E-\frac{1}{2}AA^*\right)^{-1}C^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+q^2 & -pq \\ -pq & 1+p^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p & -2q \\ q & 2p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

따라서 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(px'-2qy') \\ y = \frac{1}{2}(qx'+2py') \end{cases}$

이것을 $x^2+y^2=1$에 대입하여 정리하면

$$\frac{1}{4}(p^2+q^2)(x')^2+(p^2+q^2)(y')^2=1$$

이다. 그러므로 도형 G의 방정식은 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$이다.

36 한양대학교 erica 모의(2차)

문제 1 다음 제시문 (가)~(다)를 읽고 물음에 답하시오.

(가) 자연수들로 이루어진 집합 U의 각 원소는 $2, 3, 5$중 적어도 1개 이상의 수로 나누어 떨어진다. U의 원소 중 2의 배수들의 집합을 A, 3의 배수들의 집합을 B, 5의 배수들의 집합을 C라 하자.

(나) $n(X)$가 집합 X의 원소의 개수를 나타낸다고 할 때, $n(A)=19$, $n(B)=18$, $n(C)=21$이다. 또 $2, 3, 5$ 중 적어도 2개 이상의 수로 나누어 떨어지는 U의 원소의 개수는 23이다. 그리고 $2, 3, 5$ 모두로 나누어 떨어지는 U의 원소의 개수는 5이다.

(다) 집합 X, Y, Z에 대해서 다음이 성립한다.

(i) $n(X\cup Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cap Y)$

$n(Y\cup Z)=n(Y)+n(Z)-n(Y\cap Z)$

$n(Z\cup X)=n(Z)+n(X)-n(Z\cap X)$

(ii)

$n(X\cup Y\cup Z)=n(X)+n(Y)+n(Y)-n(X\cap Y)-n(Y\cap Z)-n(Z\cap X)+n(X\cap Y\cap Z)$

문제 1-1

집합 U의 원소의 개수를 구하시오. [10점]

문제 1-2

$2n(A\cap B)=n(A\cap C)+n(B\cap C)$라 할 때, $n(A\cup B)$의 값을 구하시오. [10점]

문제 1-3

$n(A\cap B)+1=n(C\cap A)$, $n(A\cap B)-1=n(B\cap C)$라 할 때, $n\left(A\cap(B\cup C)^C\right)$의 값을 구하시오. (단, X^C는 집합 X의 여집합을 나타낸다.) [10점]

문제 2 다음 제시문 (가)~(나)를 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표평면 위의 직선 $l : ax+by+c=0$에 수직인 법선벡터는 $\vec{n}=(a, b)$이다.
(나) 좌표평면 위의 한 점 $P(x_1, y_1)$과 직선 $l : ax+by+c=0\ (a^2+b^2=1)$에 대하여 $d_{l,\,P}=ax_1+by_1+c$라 하자.

문제 2-1

좌표평면 위의 두 점 $P(2, 1)$, $Q(-2, 3)$이 직선 l에 대하여 대칭일 때, 직선 l의 방정식을 구하시오. [10점]

문제 2-2

제시문 (가)를 이용하여 좌표평면 위의 한 점 $P(x_1, y_1)$과 직선 $l : ax+by+c=0$ $(a^2+b^2=1)$ 사이의 거리가 $|d_{l,\,P}|$임을 보이시오. [15점]

문제 2-3

좌표평면 위의 세 점 $P(3, 2)$, $Q(-2, 1)$, $R(0, -1)$에 대하여 $d_{l,\,P}+d_{l,\,Q}+d_{l,\,R}=0$이 되도록 하는 직선 $l : ax+by=0\ (a^2+b^2=1)$의 방정식을 구하시오. [10점]

문제 3 다음 제시문 (가)~(다)를 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(t)$가 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고 $t=g(x)$가 미분가능한 함수일 때, $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$이면 $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(g(x))g'(x)dx$이다.

(나) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고, 그의 도함수들이 연속일 때, 등식 $\int_{a}^{b} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_{a}^{b} f(x)g'(x)dx$가 성립한다.

(다) $y=f(x)$는 $x \geq 0$에서 정의되고 $f(0)=0$, $f'(x)>0$을 만족하는 함수이다. $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 등식 $\int_{0}^{a} g(y)dy = ag(a) - \int_{0}^{g(a)} f(x)dx$가 성립한다. (단, $a>0$)

문제 3-1

함수 $f(x)$가 $0 \leq x \leq 1$에서 연속일 때, 제시문 (가)와 $\sin(\pi - x)=\sin x$임을 이용하여 $\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$가 성립함을 보이시오. [10점]

문제 3-2

$y=f(x)$의 역함수를 $x=g(y)$라 할 때, $\int_{a}^{b} f(x)dx = bf(b)-af(a)-\int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy$가 성립함을 보이시오. [10점]

문제 3-3

$F(t)=\int_{0}^{t} \ln(1+\sqrt{x})dx - at\ (t \geq 0)$라 할 때, 제시문 (다)를 이용하여 $F(t)$의 최솟값을 구하시오. [15점]

배경지식 쌓기

1. 정적분으로 나타내어진 함수의 미분

연속함수 $f(x)$에 대하여

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+a} f(t)\,dt = f(x+a)-f(x)$ (단, a는 상수)

[참고] $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라 하면

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\} = F'(x) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\{F(x+a)-F(x)\} = F'(x+a)-F'(x) = f(x+a)-f(x)$$

2. 정적분의 치환적분법

구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g'(t))g'(t)dt$$

[참고] 부정적분 $\int f(x)dx$의 치환적분법에서 $x=g(t)$로 놓으면

$\int f(x)dx = \int f(g'(t))g'(t)dt$ 이다. 이때 $F(x) = \int f(x)dx$라고 하면

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ ⋯⋯ ㉠

또한, $x=g(t)$가 미분가능하고, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$라 하면

$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(g'(t))g'(t)dt = [F(g(t))]_\alpha^\beta = F(g(\beta))-F(g(\alpha)) = F(b)-F(a)$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g'(t))g'(t)dt$

3. 정적분의 부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

풀어보기

문제 1

ABO식 혈액형에는 A, B, O 세 가지의 유전자가 있고, 이들이 만드는 대립유전자형은 AA, AO, BB, BO, AB, OO의 여섯 가지가 있다. 모든 사람은 이 중 한 가지의 대립유전자형을 가지며 AA, BB, OO를 순종인 대립유전자형, AO, BO, AB를 잡종인 대립유전자형이라 한다. 어느 학급 학생 40명 중 유전자 A, B, O를 가지고 있는 학생이 각각 18, 16, 27명일 때, 이 학급에서 순종인 대립유전자형을 가진 학생 수는?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

문제 2

실수 전제의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이고, $f(a)=0$, $\int_{2a}^{4a} f(x)dx = k$ $(a>0,\ 0<k<1)$ 일 때, $\int_{a}^{2a} \frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$의 값을 k로 나타낸 것은? (2010년 대수능)

① $\frac{k^2}{4}$ ② $\frac{k^2}{2}$ ③ k^2 ④ k ⑤ $2k$

문제 3

함수 $f(x)=\sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{g'(x)}dx$의 값을 구하시오. (2014년 EBS 수능특강 적분과 통계)

문제 4

$0 \le x \le \frac{\pi}{3}$에서 함수 $f(x)=\tan x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} g(x)dx + \int_{g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}^{g(\sqrt{3})} \tan x\,dx$의 값은? (2013년 EBS 수능완성 적분과 통계)

① $\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$ ② $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$ ④ $\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{18}\pi$

예시답안

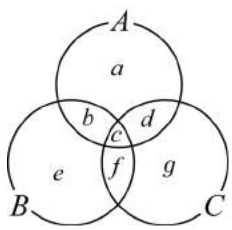
풀어보기

문제 1

유전자 A, B, O를 가진 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하고, 학생 전체의 집합을 U라고 하면 $n(A)=18$, $n(B)=16$, $n(C)=27$, $n(U)=40$이다.
합집합의 원소의 개수에서
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$A\cup B\cup C=U$이고, $A\cap B\cap C=\varnothing$이므로
$40=18+16+27-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+0$
$\therefore\ n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=21$
그런데 $A\cap B$, $B\cap C$, $C\cap A$는 대립유전자형이 각각 AB, BO, AO인 학생의 집합이므로 잡종인 대립유전자형을 가진 학생 수는 21명이다.
따라서 순종인 대립유전자형을 가진 학생 수는
$40-21=19$(명)이다.

(다른 풀이)

유전자 A, B, O를 가진 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하고, 학생 전체의 집합을 U라고 하면
$A\cup B\cup C=U$이고, $A\cap B\cap C=\varnothing$이다.



위의 벤 다이어그램에서 $c=0$
$a+b+d=18$ …… ㉠
$b+e+f=16$ …… ㉡
$d+f+g=27$ …… ㉢
㉠+㉡+㉢을 하면
$a+2b+2d+e+2f+g=61$ …… ㉣
전체 학생 수가 40(명)이므로
$a+b+d+e+f+g=40$ …… ㉤
㉣−㉤을 하면
$b+d+f=61-40=21$
$\therefore\ a+e+g=40-21=19$
따라서 순종인 대립유전자형을 가진 학생 수는 19(명)이다.

문제 2

조건에서 $f(a)=0$이고 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이므로 $f(2a)=2f(a)f'(a)=0$ 또한 $f(4a)=2f(2a)f'(2a)=0$이다.

$$\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx=\int_a^{2a}x^{-2}\{f(x)\}^2dx=[-x^{-1}\{f(x)\}^2]_a^{2a}-\int_a^{2a}-x^{-1}\cdot 2f(x)f'(x)dx$$

$$=0+\int_a^{2a}x^{-1}\cdot 2f(x)f'(x)dx=\int_a^{2a}\frac{2f(x)f'(x)}{x}dx=\int_a^{2a}\frac{f(2x)}{x}dx$$

여기서 $2x=t$로 치환하면 $2dx=dt \Leftrightarrow dx=\frac{1}{2}dt$

$\begin{cases} x=a \rightarrow t=2a \\ x=20 \rightarrow t=4a \end{cases}$로 변환되므로

$$=\int_{2a}^{4a}\frac{1}{2}\frac{f(t)}{\frac{1}{2}t}dt=\int_{2a}^{4a}\frac{f(t)}{t}dt=k$$

문제 3

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$이면 $g(y)=x$
$g(f(x))=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(f(x))f'(x)=1$

$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}=\frac{1}{g'(y)}=\cos x$$

$y=\sin x$에서 $\frac{dy}{dx}=\cos x$이고, $y=\frac{1}{2}$이면 $x=\frac{\pi}{6}$, $y=1$이면 $x=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{g'(x)}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{g'(y)}dy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f'(x)\cos x\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$$

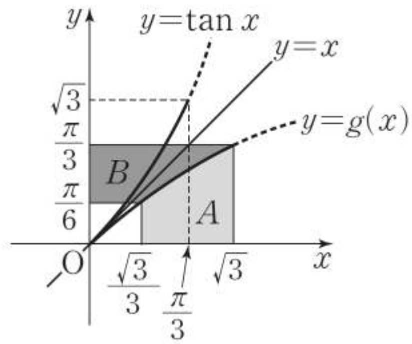
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{4}+0\right)-\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

문제 4

$0\le x\le\frac{\pi}{3}$에서 $f(\frac{\pi}{3})=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $f(\frac{\pi}{6})=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이고, 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$, $g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$

그림과 같이 $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}g(x)dx$는 영역 A의 넓이이고, $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\tan x dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x dx$는 영역 B의 넓이와 같다. 따라서 구하는 값은 두 영역 A와 B의 넓이의 합과 같으므로

$$\sqrt{3}\times\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\pi}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{18}\pi$$



대학출제 문제 1-1

(대학발표 예시답안)

제시문(나)에 의해서

$n(A)=19$, $n(B)=18$, $n(C)=21$, $n(A\cap B\cap C)=5$,

$n((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A))=23$

임을 알 수 있다. 또한 제시문 (다)의 (ii)에 의해서

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

한편, $X=A\cap B$, $Y=B\cap C$, $Z=C\cap A$라 놓고, (다)의 (ii)를 적용하면

$$\begin{aligned} n((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)) &= n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-n((A\cap B)\cap(B\cap C)) \\ &\quad -n((B\cap C)\cap(C\cap A))-n((C\cap A)\cap(A\cap B)) \\ &\quad +n((A\cap B)\cap(B\cap C)\cap(C\cap A)) \end{aligned}$$

여기서

$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap(B\cap C)=(B\cap C)\cap(C\cap A)=(C\cap A)\cap(A\cap B)=(A\cap B)\cap(B\cap C)\cap(C\cap A)$

이므로

$n((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A))=n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-2n(A\cap B\cap C)$

따라서 $n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=23+10=33$이다. 그러므로

$n(A\cup B\cup C)=19+18+21-33+5=30$

이므로 집합 U의 원소의 개수는 30이다.

대학출제 문제 1-2

(대학발표 예시답안)

제시문 (다)의 (i)에 의해 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이다.

한편 $2n(A\cap B)=n(A\cap C)+n(B\cap C)$이므로

$n(A\cap B)=\dfrac{n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)}{3}$이다.

문제 1-1의 풀이에서 $n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=33$이므로 $n(A\cap B)=11$이다.

따라서 $n(A\cup B)=19+18-11=26$이다.

대학출제 문제 1-3

(대학발표 예시답안)

$A\cap(B\cup C)^C = A\cap((A\cap B)\cup(A\cap C))^C$이고 $A\cap B\subset A$, $A\cap C\subset A$이므로

$$n\left(A\cap(B\cup C)^C\right)=n(A)-n(A\cap B)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

이다. 한편 $n(A\cap B)+1=n(C\cap A)$, $n(A\cap B)-1=n(B\cap C)$이므로
$2\times n(A\cap B)=n(B\cap C)+n(C\cap A)$이다.
따라서 문제 2-2의 풀이에 의해 $n(A\cap B)=11$이고 $n(B\cap C)=10$, $n(C\cap A)=12$이다.
그러므로
$n\left(A\cap(B\cup C)^C\right)=n(A)-n(A\cap B)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)=19-11-12+5=1$이다.

대학출제 문제 2-1

(대학발표 예시답안)

두 점이 직선 l에 대하여 대칭이므로 직선 l은 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$에 수직이고, 두 점 P, Q의 중점 M을 포함한다. $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-4, 2)$이고, 점 M의 좌표는 $\mathrm{M}(0, 2)$이므로 직선 l의 방정식은 $(-4)(x-0)+2(y-2)=0$이고 이를 정리하면 $2x-y+2=0$이다.

대학출제 문제 2-2

(대학발표 예시답안)

점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(x_0, y_0)$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$는 직선 l의 법선벡터 $\vec{n}=(a, b)$에 평행하므로 $\overrightarrow{\mathrm{PH}}=t\vec{n}$ 또는 $(x_1-x_0, y_1-y_0)=t(a, b)$인 실수 t가 존재한다. 따라서 $x_0=x_1-ta$, $y_0=y_1-tb$
한편 점 $\mathrm{H}(x_0, y_0)$는 직선 l 위의 점이므로

$$a(x_1-ta)+b(y_1-tb)+c=0 \text{ 이고 } t=\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}$$

또한 $|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=|t||\vec{n}|$이므로 $a^2+b^2=1$에 대하여 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$과 직선 l사이의 거리는

$$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=|t|=|ax_1+by_1+c|$$

대학출제 문제 2-3

(대학발표 예시답안)

제시문 (나)에 의하여

$$d_{l,\mathrm{P}}+d_{l,\mathrm{Q}}+d_{l,\mathrm{R}}=(3a+2b)+(-2a+b)+(-b)=a+2b$$

따라서 조건 $d_{l,\mathrm{P}}+d_{l,\mathrm{Q}}+d_{l,\mathrm{R}}=0$으로부터 $a=-2b$이다. 한편 $a^2+b^2=1$이므로

$$a=\pm\frac{2}{\sqrt{5}},\ b=\mp\frac{1}{\sqrt{5}}$$

이고 직선의 방정식은 $\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y=0$ 또는 $y=2x$

대학출제 문제 3-1

(대학발표 예시답안)

$x=\pi-t$로 놓으면 $dx=-dt$이므로

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))(-dt)=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt$$

$$=\int_0^{\pi}\pi f(\sin t)dt-\int_0^{\pi}tf(\sin t)dt$$

따라서 $2\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$이므로

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

대학출제 문제 3-2

(대학발표 예시답안)

$\frac{dx}{dy}=g'(y)$이므로

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{f(a)}^{f(b)} yg'(y)dy=[yg(y)]_{f(a)}^{f(b)}-\int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy=bf(b)-af(a)-\int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy$$

대학출제 문제 3-3

(대학발표 예시답안)

$y=\ln(1+\sqrt{x})$라 할 때, $1+\sqrt{x}=e^y$, $x=(e^y-1)^2$이므로 $f(x)=\ln(1+\sqrt{x})$의 역함수는

$$g(x)=(e^x-1)^2$$

이다. 한편 $F(t)=\int_0^t \ln(1+\sqrt{x})dx-at$이므로 $F'(t)=\ln(1+\sqrt{t})-a$이고, $F''(t)>0$이다. 따라서 $t=(e^a-1)^2$일 때, 극소이면서 최소이다.

이때 t값은 $g(a)$와 같으므로 제시문 (다)를 이용하면

$$F(g(a))=\int_0^{g(a)}\ln(1+\sqrt{x})dx-ag(a)=-\int_0^a g(y)dy=-\int_0^a (e^y-1)^2dy$$

$$=-\left[\frac{e^{2y}}{2}-2e^y+y\right]_0^a=-\frac{e^{2a}}{2}+e^{2a}-a-\frac{3}{2}$$

따라서 $F(t)$의 최솟값은 $-\frac{e^{2a}}{2}+e^{2a}-a-\frac{3}{2}$이다.

37 한양대학교 수시 1

문제 1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대하여

$$a_n > 0,\ b_n \neq 0,\ c_n > 0\ (n=1, 2, \cdots)$$

을 만족할 때 A_n, B_n, C_n을 다음과 같이 정의한다.

<가> A_n은 곡선 $y = -x^2 + 2^n a_n$과 x축으로 둘러싸인 부분을 y축을 둘레로 회전시킨 회전체의 부피이다.

<나> B_n은 정적분 $\int_0^1 \left(1 - \dfrac{1}{2^n b_n} \ln(1+x)\right) dx$의 값이다.

<다> C_n은 곡선 $y = c_n 2^{-nx}$과 x축, y축, $x=1$로 둘러싸인 부분을 x축을 둘레로 회전시킨 회전체의 부피이다.

1. 모든 자연수 n에 대하여 $A_n = 2\pi$로 일정할 때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하는지를 보이고, 수렴하면 수렴하는 값을 구하시오.

2. 모든 자연수 n에 대하여 $B_n = 2\pi$로 일정할 때 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하는지를 보이고, 수렴하면 수렴하는 값을 구하시오.

3. 모든 자연수 n에 대하여 $C_n = 2\pi$로 일정할 때 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_n}{\sqrt{n}}$이 수렴하는지를 각각 보이고, 수렴하면 수렴하는 값을 구하시오.

문제 2 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

<가> 두 벡터 $\vec{v}$, $\vec{w}$가 이루는 각을 θ라 할 때, $\vec{v} \cdot \vec{w}$를 다음과 같이 정의한다.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta$$

<나> 두 점 $E_1(1,0)$, $E_2(0,1)$가 나타내는 벡터를 각각 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$라 한다.

<다> 평면 위에서 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{a}$와 $\overrightarrow{e_1}$이 이루는 각은 θ_1이다.
(단, $0 < \theta_1 < \pi$)

<라> $\vec{b} = \vec{a} + \overrightarrow{e_1}$과 $\overrightarrow{e_1}$이 이루는 각은 θ_2이다.

1. 제시문에서 주어진 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$일 때 $\vec{a} \cdot \vec{b}$를 구하시오.

2. 제시문에서 주어진 벡터 $\vec{a}$의 x성분과 y성분을 θ_1과 θ_2를 이용해 나타내시오.
(단, θ_1과 θ_2는 제시문 <다>와 <라>에 주어진 각이다.)

3. 제시문에서 주어진 θ_1과 θ_2에 대하여 부등식

$\sin(\pi - \theta_1) + \sin\theta_2 + \sin(\theta_1 - \theta_2) \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$가 성립함을 보이시오.

배경지식 쌓기

1. 무한 수열의 극한값과 대소관계

>>> 수열의 극한값의 대소 관계
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β는 실수)일 때,
(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$
(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha = \beta$이면
$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

주의) 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_n < b_n$이라고 해서 반드시 $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$이 성립하는 것은 아니다. 예를 들어 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2}{n}$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

2. 무한급수의 수렴과 발산

>>> 무한급수의 수렴과 발산
(1) 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

주의) 위의 (1)의 역은 성립하지 않는다. 즉 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이라고 해서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 반드시 수렴하는 것은 아니다.

3. 평면벡터의 성분

(1) 평면벡터의 성분의 정의

좌표평면의 원점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$의 종점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$의 좌표를 $\vec{a}$의 성분이라 하고 특히 a_1를 $\vec{a}$의 x의 성분, a_2를 $\vec{a}$의 y성분이라 하며 $\vec{a} = (a_1, a_2)$로 나타낸다.

(2) 기본벡터의 정의

원점을 시점으로 하고, x축 위의 점 (1, 0), y축의 점 (0, 1)에 종점을 갖는 벡터를 기본단위벡터 또는 간단히 기본벡터라 하고 각각 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$로 나타낸다.

또 임의의 벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2)$를 기본벡터로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$\vec{a}=(a_1,a_2)=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}$

(3) 성분으로 정의된 평면벡터의 크기와 상등

두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$에 대하여

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$

(2) $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow a_1=b_1,\quad a_2=b_2$

4. 벡터의 내적

(1) 정의

평면 또는 공간에서 $\vec{0}$가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각을 $\theta(0 \le \theta \le \pi)$라 할 때, $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$을 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라 하고, $\vec{a}\cdot\vec{b}$로 나타낸다.

즉 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 이 때, $\vec{a}=\vec{0}$ or $\vec{b}=\vec{0}$이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$로 정의한다.

특히, $\vec{a}=\vec{b}$이면 $\cos\theta=\cos 0^\circ=1$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2$, $|a|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ 가 성립한다.

(2) 내적의 성분 표시

1) 평면벡터의 내적 ; $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ 라 하면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

2) 공간벡터의 내적 ; $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ 일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

【내적의 성분표시 증명】

좌표평면에서 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ 가 이루는 각의 크기를 θ라고 하고, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$인 점 A, B를 잡으면 $A(a_1,\ a_2)$, $B(b_1,\ b_2)$이다.

$\triangle OAB$에 코사인법칙을 쓰면 $\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos\theta$

그런데 $\overline{OA}^2=a_1^2+a_2^2$, $\overline{OB}^2=b_1^2+b_2^2$, $\overline{AB}=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$ 이므로

$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$에서

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2 \qquad \therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

풀어보기

문제 1

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 0이 아닌 실수 α에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=1$이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}2a_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=2$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 2

함수 $f(x)=\sqrt{\cos 2x}\ \left(0\le x<\frac{\pi}{4}\right)$에 대하여 $g(x)=f(x)\cos x$, $h(x)=f(x)\sin x$라 하고, 두 개의 벡터 $\vec{a}=(f(x), g(x))$, $\vec{b}=(g'(x), h'(x))$이 이루는 각을 $\theta\ (0\le\theta<\pi)$라고 두자. 이때 θ를 x에 관해 표현하면?

① $\frac{\pi}{4}+2x$ ② $\frac{\pi}{2}+2x$ ③ $\frac{\pi}{2}+3x$ ④ $\frac{\pi}{2}+4x$ ⑤ $\pi+2x$

읽기자료

무한급수 판정법

1. n번째 항 판정법

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$은 발산한다. (대우명제 : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.)

[증명] 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$이 S로 수렴한다고 하면 $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = S$이다.

$a_n = S_n - S_{n-1}$에서 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$이다.

2. 유계합 판정법(bounded sum test)

양항급수가 수렴하기 위한 필요충분조건은 그의 부분 합이 위로 유계이다.

3. 적분판정법(integral test)

f를 구간 $[1,\infty)$에서 연속이고 양이고 증가하지 않는 함수라 두고 모든 양의 정수 k에 대해서 $a_k = f(k)$로 두자. 이때 무한급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$가 수렴하기 위한 필요충분조건은 이상적분 $\int_1^{\infty} f(x)dx$가 수렴한다.

4. p급수 판정법(p-series test)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$을 p급수라고 한다. 이때

1) $p > 1$이면 p급수는 수렴한다. 2) $p \le 1$이면 p급수는 발산한다.

<양항급수에서 판정법>

5. 보통비교판정법(ordinary comparison test)

$n \ge N$일 때 $0 \le a_n \le b_n$이라고 가정하자.

만일 $\sum b_n$이 수렴하면 $\sum a_n$도 수렴한다. 대우명제를 생각하면 “만일 $\sum a_n$이 발산하면 $\sum b_n$도 발산한다.”라는 결과도 얻을 수 있다.

예) 모든 n에 대하여 $0 \le a_n \le b_n$ 이고 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 가 수렴하는 경우, 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 도 수렴한다.

6. 극한비교판정법(limit comparison test)

$a_n \geq 0,\ b_n > 0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = L$이라고 가정하자.

만일 $0 < L < \infty$이면 $\sum a_n$과 $\sum b_n$은 함께 수렴하든지 발산하든지 한다.

만일 $L = 0$이고 $\sum b_n$이 수렴하면 $\sum a_n$은 수렴한다.

만일 $L = \infty$이면 $\sum b_n$이 발산하면 $\sum a_n$도 발산한다.

예시답안

풀어보기

문제 1

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n=0$

이므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다. (참)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)=\alpha$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n-b_n)-(a_n-1)\}=\sum_{n=1}^{\infty}(1-b_n)=0$

$\sum_{n=1}^{\infty}(1-b_n)=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=1$이다. (참)

ㄷ. (반례) $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $b_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이라 하면 $a_nb_n=3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=3\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=4,\ \sum_{n=1}^{\infty}2a_n=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=4$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}2a_n=4$이지만 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

문제 2

$\vec{a}\cdot\vec{b}=f(x)\times f'(x)$이고

$|\vec{a}|^2=\{f(x)\}^2$, $|\vec{b}|^2=\{f(x)\}^2+\{f'(x)\}^2$, 이므로

$\tan^2\theta=\sec^2\theta-1=\frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}-1=\left\{\frac{f(x)}{f'(x)}\right\}^2$

$\tan\theta=\frac{f(x)}{f'(x)}$ 이다. ($0\le\theta<\pi$에서 $\cos\theta,\tan\theta$의 부호는 $f(x)f'(x)$의 부호와 같다.)

주어진 $f(x)=\sqrt{\cos 2x}$ 일 때 $f'(x)=-\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$ 이므로

$\tan\theta=-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=-\cot 2x=\tan\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$

$0\le x<\frac{\pi}{4}$ 이므로 $\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}+2x<\pi$

$0\le\theta<\pi$이므로 $\theta=\frac{\pi}{2}+2x$ 이다.

대학출제 문제 1-1

$2=\int_0^{2^n a_n}\left(2^n a_n - y\right)dy=\left(2^n a_n\right)^2-\frac{1}{2}\left(2^n a_n\right)^2=\frac{1}{2}\left(2^n a_n\right)^2$ 이므로 $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=2$ 이다.

대학출제 문제 1-2

$2\pi=\int_0^1\left(1-\frac{1}{2^n b_n}\ln(1+x)\right)dx=1-\frac{2\ln 2}{2^n b_n}=1-\frac{\ln 2}{2^{n-1}b_n}$ 이므로 $b_n=\frac{\ln 2}{1-2\pi}\times\frac{1}{2^{n-1}}$ 이고

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\frac{2\ln 2}{1-2\pi}$ 이다.

대학출제 문제 1-3

$2=\int_0^1 y^2 dx=\int_0^1\left(c_n 2^{-nx}\right)^2 dx=c_n^2\left(\frac{4^{-n}}{-n\ln 4}+\frac{1}{n\ln 4}\right)=c_n^2\left(\frac{1-4^{-n}}{n\ln 4}\right)$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} c_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{2\ln 4}\times\sqrt{\frac{n}{1-4^{-n}}}\right\}$ 은 발산하고

$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{2\ln 4}\times\sqrt{\frac{1}{1-4^{-n}}}\right\}$ 은 수렴한다.

대학출제 문제 2-1

$\vec{b}-\vec{a}=\vec{e_1}$ 에서 $|\vec{a}|^2-2(\vec{a}\bullet\vec{b})+|\vec{b}|^2=1$ 이고 $\vec{a}\bullet\vec{b}=1$ 이다.

(다른 풀이1)

<가>에서 $\vec{a}=(p,\ q)$ 라고 하면 $\vec{b}=(p+1,\ q)$ 이다.

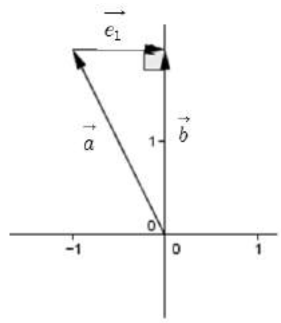
$p^2+q^2=2$, $(p+1)^2+q^2=1$ 이므로 연립해서 풀면 $p=-1,\ q=1$ 이다.

그러므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1,1)\cdot(0,1)=1$ 이다.

(다른 풀이2)

$|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{e_1}|=1$ 이므로 아래 그림과 같은 직각삼각형이다.

그러므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ 이다.



(다른 풀이 3)

세 변의 길이를 알고 있으므로 제2코사인 법칙에 의해 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각θ의 $\cos\theta$의 값은

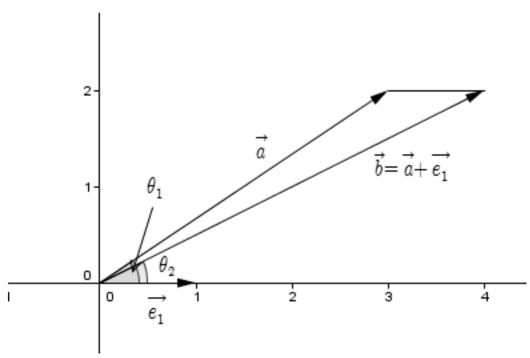
$$\cos\theta = \frac{(\sqrt{2})^2 + 1^2 - 1^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이다. 그러므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \sqrt{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

이다.

대학출제 문제 2-2



$\vec{a}=(x, y)$, $\vec{b}=(x+1, y)$로 두면, $y = x\tan\theta_1 = (x+1)\tan\theta_2$이다.

그러므로 $x = \dfrac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}$, $y = x\tan\theta_1 = \dfrac{\tan\theta_1\tan\theta_2}{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}$이다.

$\vec{a} = \left(\dfrac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}, \dfrac{\tan\theta_1\tan\theta_2}{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}\right)$이다.

(대학발표 예시답안)[33]

사인법칙에 의해 $\dfrac{|\vec{a}|}{\sin\theta_2}=\dfrac{1}{\sin(\theta_1-\theta_2)}=\dfrac{|\vec{b}|}{\sin(\pi-\theta_1)}$ 이고

벡터 $\vec{a}$가 x축 아래에 놓여있는 경우를 고려하면 $\vec{a}$의 x성분은 $\dfrac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1-\theta_2)}\cos\theta_1$ 이고, $\vec{a}$의 y성분은 $\pm\dfrac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1-\theta_2)}\sin\theta_1$ 이다.

대학출제 문제 2-3

$f(x)=\sin x$ ($x\in[0,\ \pi]$)라 하자. 함수 f가 위로 볼록하므로 젠센부등식에 의해
$f(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3)\ge\lambda_1 f(\alpha_1)+\lambda_2 f(\alpha_2)+\lambda_3 f(\alpha_3)$ $(\lambda_1\alpha+\lambda_2+\lambda_3=1)$이 성립한다.

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\dfrac{1}{3}$, $\alpha_1=\pi-\theta_1$, $\alpha_2=\theta_2$, $\alpha_3=\theta_1-\theta_2$ 을 대입하면

$\sin(\pi-\theta_1)+\sin\theta_2+\sin(\theta_1-\theta_2)\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 이다.

(대학발표 예시답안)[34]

$f(\theta)=\sin\theta(0<\theta<\pi)$일 때, $f''(\theta)<0$이다. 따라서 구간 $[0,\pi]$에서 함수 $f(\theta)$는 위로 볼록인 함수이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\theta)+\sin\theta_2+\sin(\theta_1-\theta_2) &\le 2\sin\left(\frac{\pi-\theta_1+\theta_2}{2}\right)+\sin(\theta_1-\theta_2)\\ &=3\left[\frac{2}{3}\sin\left(\frac{\pi-\theta_1+\theta_2}{2}\right)+\frac{1}{3}\sin(\theta_1-\theta_2)\right]\\ &\le 3\sin\left(\frac{2}{3}\times\frac{\pi-\theta_1+\theta_2}{2}+\frac{1}{3}(\theta_1-\theta_2)\right)\\ &=3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

33) 2014학년 한양대학교 입학처
34) 2014학년 한양대학교 입학처

38 한양대학교 수시 2

문제 1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

<가> 좌표평면 위의 일차변환 $h:(x,\ y)\rightarrow(x',\ y')$ 를 나타내는 식이

$$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ 는 상수})$$

로 주어졌을 때, 일차변환 h 를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 이다.

<나> 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 를 원점 O 를 중심으로 각 α 만큼 회전하여 점 $\mathrm{P}'(x', y')$ 로 옮기는 변환을 각 α 만큼 회전하는 회전변환이라 한다. 회전변환은 일차변환이고, 이를 나타내는 대응시키는 회전이동은 일차변환이고, 이를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ 이다. 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 를 원점을 지나는 어떤 직선에 대하여 대칭인 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 로 옮기는 대칭변환도 일차변환이다. 특히 x 축과 y 축에 대한 대칭변환을 나타내는 행렬은 각각 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이다.

1. 다음의 조건 (1)과 (2)를 모두 만족시키는 일차변환에 의해 점 $(3, 2)$ 가 옮겨질 수 있는 점을 모두 구하시오.

(1) 일차변환에 의하여 점 $(2, 1)$ 이 점 $(1, 2)$ 로 옮겨진다.

(2) 일차변환에 의하여 좌표평면 위의 임의의 점 A 가 점 B 로 옮겨질 때, 항상 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$ 가 성립한다.

2. 원점을 지나고 기울기가 $\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma$ 인 세 직선에 대한 대칭변환을 각각 $h_\alpha, h_\beta, h_\gamma$ 라 할 때, 합성변환 $h_\alpha \circ h_\beta$ 와 $h_\alpha \circ h_\beta \circ h_\gamma$ 를 나타내는 행렬을 각각 구하고 어떤 일차변환인지 설명하시오.

3. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=5, a_2=9$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n+1$ 을 만족시키는 수열이다. 원점을 지나고 기울기가 $\tan\dfrac{a_n\pi}{12}$ 인 직선에 대한 대칭변환을 f_n 이라 할 때, 합성변환 $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_{2014}$ 는 어떤 일차변환인지 설명하시오.

문제 2 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

<가> 중간값의 정리는 다음과 같다.
함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $g(a) \neq g(b)$일 때, $g(a)$와 $g(b)$ 사이의 임의의 실수 r에 대하여 $g(c)=r$인 실수 c가 열린 구간 (a, b)에서 적어도 하나 존재한다.

<나> 평균값의 정리는 다음과 같다.
함수 $h(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하면, $\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a}=h'(c)$인 실수 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

<다> 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.
① 함수 $f(x)$는 미분가능하고, 도함수 $f'(x)$가 연속이다.
② $f(0)=0, f(1)=1$이다.

1. 제시문 <다>의 조건과 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)+6xy$를 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하시오.

2. 함수 $f(x)$가 제시문 <다>의 조건을 만족시키면 $\dfrac{1}{f'(c_1)}+\dfrac{1}{f'(c_2)}=2$이고 $0 \le c_1 < c_2 \le 1$인 c_1, c_2가 존재함을 보이시오.

3. 함수 $f(x)$가 제시문 <다>의 조건을 만족시키면, 임의의 자연수 n에 대하여 $\dfrac{1}{f'(c_1)}+\cdots+\dfrac{1}{f'(c_n)}=n$이고 $0 \le c_1 < \cdots < c_n \le 1$인 $c_1, \cdots, c_n$이 존재함을 보이시오.

배경지식 쌓기

1. 합성변환의 성질

세 일차변환 f, g, h 에 대하여 f, g 를 나타내는 행렬을 각각 A, B 라고 할 때

① 합성변환 $g \circ f$ 는 일차변환이다.

② 합성변환 $g \circ f$ 를 나타내는 행렬은 BA 이다.

③ 행렬의 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하지 않는 것처럼$(AB \neq BA)$ 두 일차변환의 합성도 교환법칙이 성립하지 않는다. $(f \circ g \neq g \circ f)$

④ $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

⑤ $e \circ f = f \circ e$ (단, e 는 항등변환이다.)

⑥ 회전변환 f 를 나타내는 행렬이 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 일 때, 일차변환 f 를 n 번 시행하는 변환을 나타내는 행렬은 $A^n = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ 이다.

2. 도함수

미분가능한 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 는

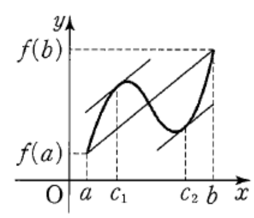
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

3. 평균값의 정리

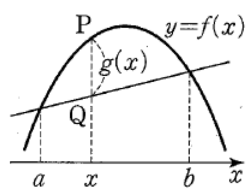
함수 $y = f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$ 에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

가 되는 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.



[참고] 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,.\ b]$ 에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$ 에서 미분가능할 때, 함수 $g(x)$ 를 다음과 같이 정하면 $g(x)$는 롤의 정리를 만족한다.



$$g(x) = (\text{점 P 의 } y\text{좌표}) - (\text{점 Q 의 } y\text{좌표})$$

$$= f(x) - \left\{ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right\}$$

이때, $g(x)$ 는 $g(a) = g(b) = 0$ 이므로 롤의 정리를 만족한다.

따라서, $g'(c) = 0$ 인 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재하므로 평균값의 정리가 유도된다.

풀어보기

문제 1

직선 $y=mx$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각을 θ 라 할 때, 직선 $y=mx$ 에 대한 대칭변환을 나타내는 행렬을 θ 를 사용하여 나타내시오.

문제 2

좌표평면 위의 점 (x, y) 를 x 축에 대하여 대칭이동시키는 일차변환을 f, 원점을 중심으로 $\dfrac{\pi}{3}$ 만큼 회전이동시키는 일차변환을 g 라 하자. 합성변환 h 를 $h=f\circ g\circ f$ 라 할 때, 합성변환 h^{2011} 에 의하여 점 $(2, 2)$ 가 옮겨지는 점은 (a, b) 이다. 이때, a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, $h^1=h$, $h^{n+1}=h^n\circ h$ 이다.)

[2011년 전국연합]

문제 3

실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y)=f(x)f(y)+4f(x)+4f(y)+12$
(나) $f(\ln 2)=0$, $f'(0)=2$

이때, $f'(\ln 2)$ 의 값을 구하시오. [2011년 전국연합]

문제 4

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 가 $f(-1)=-1$, $f(0)=1$, $f(1)=0$ 을 만족시킬 때, 보기에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

[2007년 9월 모평]

[보 기]

ㄱ. $f(a)=\dfrac{1}{2}$ 인 실수 a 가 구간 $(-1, 1)$ 에 두 개 이상 존재 한다.

ㄴ. $f'(b)=-1$ 인 실수 b 가 구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 한 개 존재한다.

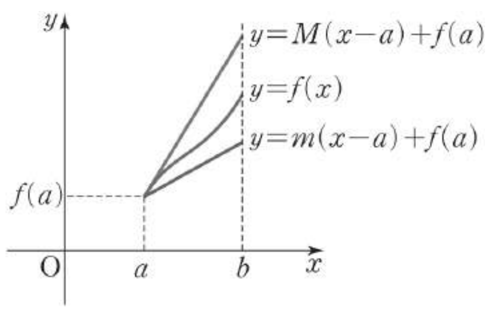
ㄷ. $f''(c)=0$ 인 실수 c 가 구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 한 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

읽기자료

평균값의 정리를 이용한 추측[35)]

위성 신호를 이용하는 내비게이션은 자동차가 터널로 들어가는 경우 위성 신호를 받을 수 없게 되어 작동하지 않는다. 그러나 요즈음은 터널 속에서도 내비게이션이 계속하여 작동하는 경우가 있는데, 그 이유는 자동차의 속도의 범위를 이용하여 현재 위치를 대략적으로 알 수 있기 때문이다. 우리 주변에서 일어나는 현상 중에는 그 현상을 나타내는 정확한 식은 알기 어렵지만 순간변화율의 범위는 알 수 있는 것이 있다. 이러한 경우 평균값 정리를 이용하면 순간변화율의 범위를 구하여 거꾸로 그 현상에 대하여 추측할 수 있다.



함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하다고 하면 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$를 만족하는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다. 이때 열린 구간 $(a,\ b)$의 모든 x에 대하여 $m\le f'(x)\le M$이라 하면 $m\le f'(c)\le M$이므로 $m\le\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\le M$이다. 따라서 $m(b-a)+f(a)\le f(b)\le M(b-a)+f(a)$이다.

일반적으로 $a\le x\le b$인 모든 x에 대하여 $m(x-a)+f(a)\le f(x)\le M(x-a)+f(a)$가 성립한다.

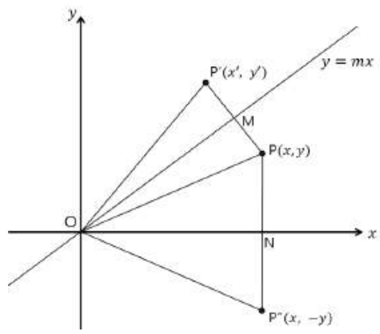
공학을 비롯한 여러 분야에서 미분을 실제로 활용할 때, 함수의 정확한 식이 복잡한 경우에는 정확한 식을 구하지 않고 함숫값을 추측하여 활용하는 경우가 많은데, 그때 평균값 정리가 큰 힘을 발휘한다.

35) 우정호 외 24인, 동아출판, 미적분 I , 2015

예시답안

풀어보기

문제 1



임의의 점 $P(x, y)$ 의 직선 $y=mx$ 에 대한 대칭인 점을 $P'(x, y')$, x 축에 대한 대칭인 점을 P'' 라 하자. 선분 PP' 와 $y=mx$ 의 교점을 M, 선분 PP'' 와 x 축의 교점을 N 이라 하면 $\angle POM = \angle P'OM$, $\angle PON = \angle P''ON$ 이고 $\angle MON = \theta$ 이므로

$$\begin{aligned}\angle P'OP'' &= \angle POM + \angle P'OM + \angle PON + \angle P''ON \\ &= 2(\angle POM + \angle PON) = 2\angle MON = 2\theta\end{aligned}$$

이다. 따라서, $P'(x, y')$ 은 점 $P''(x, -y)$ 를 원점을 중심으로 각 2θ 만큼 회전변환하여 옮겨진 점이다.

$$\therefore \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

그러므로 직선 $y=mx$ 에 대한 대칭변환을 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ 이다.

$\tan\theta = m$이므로 $\quad \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}} \qquad \sin\theta = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}$

$$\therefore \cos 2\theta = \frac{1-m^2}{\sqrt{m^2+1}} \qquad \sin 2\theta = \frac{2m}{\sqrt{m^2+1}}$$

$y=mx$에 대칭인 행렬은 $\begin{pmatrix} \dfrac{1-m^2}{m^2+1} & \dfrac{2m}{m^2+1} \\ \dfrac{2m}{m^2+1} & \dfrac{m^2-1}{m^2+1} \end{pmatrix}$ 이다.

문제 2

일차변환 f, g 를 나타내는 행렬을 각각 A, B 라 하면

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

합성변환 h 를 나타내는 행렬을 C라 하면

$$C=ABA=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ C^6=E$$

이므로

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=C^{2011}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

이고 따라서 $a^2+b^2=8$ 이다.

문제 3

$y=0$ 을 대입하면 $f(x)=f(x)f(0)+4f(x)+4f(0)+12$ 이고 $\{f(x)+4\}\{f(0)+3\}=0$ 이므로 $f(0)=-3$ 이다.

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)f(h)+4f(x)+4f(h)+12-f(x)}{h} \\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(x)f(h)+3f(x)+4f(h)+12}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)+4\}\{f(h)+3\}}{h} \\ &=\{f(x)+4\}\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3}{h}=\{f(x)+4\}\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &=\{f(x)+4\}f'(0)=2\{f(x)+4\} \end{aligned}$$

$$\therefore\ f'(\ln2)=2\{f(\ln2)+4\}=8$$

문제 4

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 미분가능하므로 연속이다.

$f(-1)=-1$, $f(0)=1$ 이므로 중간값의 정리에 의하여 $f(c_1)=\frac{1}{2}$ 인 실수 c_1 이 구간 $(-1,0)$ 에 적어도 한 개 존재한다. 또한, $f(0)=1$, $f(1)=0$ 이므로 $f(c_2)=\frac{1}{2}$ 인 실수 c_2 가 구간 $(0,1)$ 에 적어도 한 개 존재한다.

따라서 $f(a)=\frac{1}{2}$ 인 실수 a 가 구간 $(-1,1)$ 에 적어도 두 개 존재한다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0,1]$ 에서 연속이고 구간 $(0,1)$ 에서 미분가능하다.
이때 $f(0)=1$, $f(1)=0$ 이므로

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=-1$$

따라서 평균값의 정리에 의하여 $f'(b)=-1$ 인 실수 b 가 구간 $(0,1)$ 에 적어도 한 개 존재한다. (참)

ㄷ. [반례] $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$ 이면 $f(-1)=-1$, $f(0)=1$, $f(1)=0$ 이지만

$f'(x)=-3x+\frac{1}{2}$, $f''(x)=-3$ 이므로 $f''(c)=0$ 인 실수 c 는 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

대학출제 문제 1-1

주어진 조건을 만족하는 일차변환은 대칭변환 또는 회전변환이다.

(i) 대칭변환인 경우

직선 $y=x$ 에 대한 대칭변환이므로 주어진 조건을 만족시키는 일차변환을 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 이다.

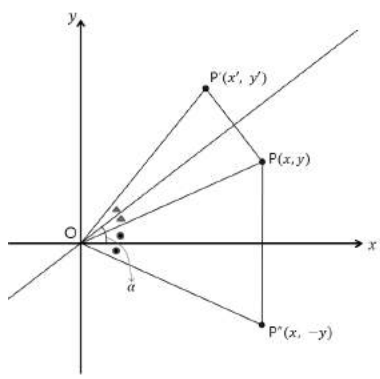
(ii) 회전변환인 경우

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 에서 $\begin{cases} 2\cos\alpha-\sin\alpha=1 \\ 2\sin\alpha+\cos\alpha=2 \end{cases}$ 이므로 연립하면 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ 이다. 따라서 주어진 조건을 만족시키는 일차변환을 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ 이다.

(i), (ii)에 의해 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{17}{5} \end{pmatrix}$ 이므로 점 $(3, 2)$ 가 옮겨지는 점은 $(2, 3)$ 또는 $\left(\frac{6}{5}, \frac{17}{5}\right)$ 이다.

대학출제 문제 1-2

그림과 같이 점 P 를 원점을 지나고 기울기가 $\tan\alpha$ 인 직선에 대하여 대칭이동한 점을 P′, x 축에 대하여 대칭이동한 점을 P″ 라 하자.



이때 점 P″를 원점을 중심으로 각 2α 만큼 회전이동한 점이 점 P′ 이므로 일차변환 h_α 을 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix} \cos2\alpha & -\sin2\alpha \\ \sin2\alpha & \cos2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos2\alpha & \sin2\alpha \\ \sin2\alpha & -\cos2\alpha \end{pmatrix}$$

이고 같은 방법으로 h_β, h_γ 를 나타내는 행렬은 각각

$$\begin{pmatrix} \cos2\beta & \sin2\beta \\ \sin2\beta & -\cos2\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos2\gamma & \sin2\gamma \\ \sin2\gamma & -\cos2\gamma \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 합성변환 $h_\alpha \circ h_\beta$를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 2(\alpha-\beta) & -\sin 2(\alpha-\beta) \\ \sin 2(\alpha-\beta) & \cos 2(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$$

이므로 합성변환 $h_\alpha \circ h_\beta$ 는 각 $2(\alpha-\beta)$ 만큼 회전하는 회전변환이다.

합성변환 $h_\alpha \circ h_\beta \circ h_\gamma$ 를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix} \cos 2(\alpha-\beta) & -\sin 2(\alpha-\beta) \\ \sin 2(\alpha-\beta) & \cos 2(\alpha-\beta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 2(\alpha-\beta+\gamma) & \sin 2(\alpha-\beta+\gamma) \\ \sin 2(\alpha-\beta+\gamma) & -\cos 2(\alpha-\beta+\gamma) \end{pmatrix}$$

이므로 합성변환 $h_\alpha \circ h_\beta \circ h_\gamma$ 는 원점을 지나고 기울기가 $\tan(\alpha-\beta+\gamma)$ 인 직선에 대한 대칭변환이다.

대학출제 문제 1-3

문제 1-2의 풀이 결과에 의해 자연수 n 에 대하여 합성변환 $f_n \circ f_{n+1} \circ f_{n+2}$ 는 원점을 지나고 기울기가

$$\tan\left(\frac{a_n\pi}{12}-\frac{a_{n+1}\pi}{12}+\frac{a_{n+2}\pi}{12}\right)=\tan\left(\frac{(a_n-a_{n+1}+a_{n+2})\pi}{12}\right)=\tan\frac{\pi}{12}$$

인 직선에 대한 대칭변환이다. 따라서 $f_n \circ f_{n+1} \circ f_{n+2}=h_{\frac{\pi}{12}}$ 이고 $h_{\frac{\pi}{12}} \circ h_{\frac{\pi}{12}}$ 는 각 $2\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)=0$ 만큼 회전하는 회전변환 즉, 항등변환이므로

$$\begin{aligned} f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_{2014} &= f_1 \circ (f_2 \circ f_3 \circ f_4) \circ (f_5 \circ f_6 \circ f_7) \circ \cdots \circ (f_{2012} \circ f_{2013} \circ f_{2014}) \\ &= f_1 \circ \left(h_{\frac{\pi}{12}}\right) \circ \left(h_{\frac{\pi}{12}}\right) \circ \cdots \circ \left(h_{\frac{\pi}{12}}\right) = f_1 \circ h_{\frac{\pi}{12}} = h_{\frac{5\pi}{12}} \circ h_{\frac{\pi}{12}} \end{aligned}$$

이고 $h_{\frac{5\pi}{12}} \circ h_{\frac{\pi}{12}}$ 는 각 $\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{3}$ 만큼 회전하는 회전변환이다.

그러므로 합성변환 $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_{2014}$ 는 각 $\frac{\pi}{3}$ 만큼 회전하는 회전변환이다.

대학출제 문제 2-1

도함수의 정의에 의해

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+6xh-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)+6xh}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+6x\right)=f'(0)+6x \end{aligned}$$

이므로

$$f(x) = 3x^2+f'(0)x+C$$

이다. $f(0)=0$ 이므로 $C=0$ 이고, $f(1)=1$ 이므로 $f(1)=3+f'(0)$ 에서 $f'(0)=-2$ 이다. 따라서

$$f(x)=3x^2-2x$$

이다.

대학출제 문제 2–2

함수 $f(x)$ 는 $[0, 1]$ 에서 연속이고 $f(0)=0, f(1)=1$ 이므로 중간값의 정리에 의해 $f(c)=\dfrac{1}{2}$ 인 실수 c 가 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 존재한다.

또한 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[0, c]$ 에서 연속이고 열린 구간 $(0, c)$ 에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의해 $\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}=\dfrac{1}{2c}=f'(c_1)$ 인 실수 c_1 이 0과 c 사이에 존재한다. 마찬가지로 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[c, 1]$ 에서 연속이고 열린 구간 $(c, 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의해

$$\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{1}{2(1-c)}=f'(c_2)$$

인 실수 c_2 가 c 와 1 사이에 존재한다. 따라서

$$\frac{1}{f'(c_1)}+\frac{1}{f'(c_2)}=2$$

이고 $0 \le c_1 < c_2 \le 1$ 이다.

대학출제 문제 2–3

(i) $n=1$ 인 경우

함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의해 $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1=f'(c_1)$ 인 실수 c_1 이 0과 1 사이에 존재한다.

(ii) $n \ge 2$ 인 경우

함수 $f(x)$ 는 $[0, 1]$ 에서 연속이고 $f(0)=0, f(1)=1$ 이므로 중간값의 정리에 의해 $f(x)=\dfrac{k}{n}$ 인 실수 x 가 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나 존재한다.(단, k 는 자연수, $1 \le k \le n-1$). 집합 $A_k=\left\{x \,\middle|\, f(x)=\dfrac{k}{n}\right\}$ 의 원소 중 가장 작은 원소를 a_k 라 하자. 이때 $a_0=1$, $a_n=1$ 이라 하면 $0=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n=1$ 이다.

함수 $f(x)$ 는 닫힌 구간 $[a_{k-1}, a_k]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a_{k-1}, a_k) 에서 미분가능하므로

$$\frac{f(a_k)-f(a_{k-1})}{a_k-a_{k-1}}=\frac{\dfrac{k}{n}-\dfrac{k-1}{n}}{a_k-a_{k-1}}=\frac{1}{n(a_k-a_{k-1})}=f'(c_k)$$

인 실수 c_k 가 a_{k-1} 과 a_k 사이에 존재한다. 따라서

$$\frac{1}{f'(c_1)}+\cdots+\frac{1}{f'(c_n)}=n(a_1-a_0)+n(a_2-a_1)+\cdots+n(a_n-a_{n-1})=n(a_n-a_0)=n$$

이고 $0 \le c_1 < \cdots < c_n \le 1$ 이다.

39 한양대학교 수시 3

문제 1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> 좌표공간에서 중심이 원점이고 반지름이 1 인 구면을 S라 하자.

<나> 좌표공간에서 세 평면 α, β, γ의 방정식이 다음과 같이 주어져 있다.

$$\alpha : z=0,\ \beta : z=\sqrt{3}y,\ \gamma : x=\sqrt{2}y$$

<다> 구면 S와 각각의 평면 α, β, γ의 교선은 원이다. 이를 각각 원 C_1, C_2, C_3이라 하자.

논제 1-1

원 C_2를 경계로 하는 원판을 A라 할 때, 원판 A의 평면 γ위로의 정사영의 넓이를 구하시오.

논제 1-2

원 C_1, C_2의 교점 중 x좌표가 양인 점을 M_1, 원 C_2, C_3의 교점 중 x좌표가 양인 점을 M_2, 원 C_3, C_1의 교점 중 x좌표가 양인 점을 M_3이라 하자. 점 M_1, M_2, M_3을 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz=1$이라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

논제 1-3

반지름이 1 인 구면의 넓이는 4π이다. 세 원 C_1, C_2, C_3은 구면 S를 몇 개의 조각으로 나누고 있는지를 밝히고 이 조각들 중 가장 작은 조각의 넓이를 구하시오.

문제 2 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

모든 양의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 다음과 같이 정의된다.

$$f(x)=\begin{cases}1+\ln x, & 0<x\leq 1\\ 3-2^{x}, & x>1\end{cases}$$

논제 2-1

이차함수 $h(x)=x^2+b$ 의 그래프와 함수 $f(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, b 의 값의 범위를 구하시오.

논제 2-2

이차함수 $h(x)=ax^2+3$ 의 그래프와 함수 $f(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, a 의 값의 범위를 구하시오.

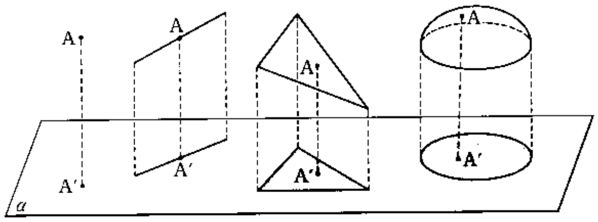
논제 2-3

양의 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)-tx^2$ 의 극댓값을 $g(t)$ 라 할 때, $\lim_{t\to\frac{e}{2}}\frac{g(t)}{2t-e}$ 의 값을 구하시오.

배경지식 쌓기

1. 정사영의 정의

평면 α 위에 있지 않은 **한 점** A 에서 평면 α에 내린 수선의 발을 A′ 이라 할 때, **점 A′ 을 점 A 의 평면 α 위로의 정사영**이라 한다.

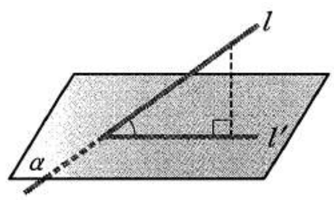


일반적으로 **도형** F 에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영 전체로 이루어진 **도형 F′ 을 도형 F 의 평면 α 위로의 정사영**이라 한다. 이때 평면 α 를 투영면이라고 한다.

2. 정사영의 길이와 넓이

(1) 직선과 평면이 이루는 각

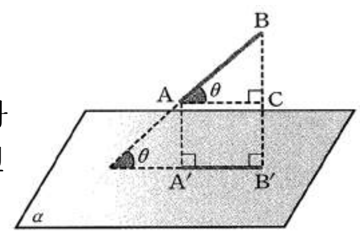
직선 l 과 평면 α 가 한 점에서 만나고 수직이 아닐 때, 직선 l 의 평면 α 위로의 정사영을 직선 l' 이라 하면 두 직선 l 과 l' 이 이루는 각을 직선 l 과 평면 α 가 이루는 각이라 한다. 특히 $l /\!/ \alpha$ 일 때 직선 l 과 평면 α 가 이루는 각의 크기는 $0°$ 이다.



(2) 정사영의 길이

선분 AB 의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′ 이라 하고, 직선 AB 와 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

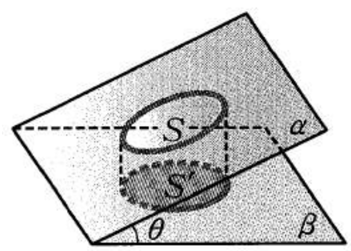
$\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\theta$



(3) 정사영의 넓이

평면 α 위에 있는 도형의 넓이를 S, 이 도형의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 S' 이라 하고, 두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

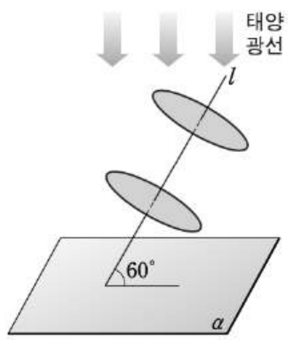
$S' = S\cos\theta$



풀어보기

문제 1

그림과 같이 중심사이의 거리가 $\sqrt{3}$ 이고 반지름의 길이가 1 인 두 원판과 평면 α 가 있다. 각 원판의 중심을 지나는 직선 l 은 두 원판의 면과 각각 수직이고, 평면 α 와 이루는 각의 크기가 60° 이다. 태양관선이 그림과 같이 평면 α 에 수직인 방향으로 비출 때, 두 원판에 의해 평면 α 에 생기는 그림자의 넓이는?(단, 원판의 두께는 무시한다.)
(2011학년도 대수능)



① $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{8}$ ② $\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{1}{8}$ ④ $\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{16}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{4}$

문제 2

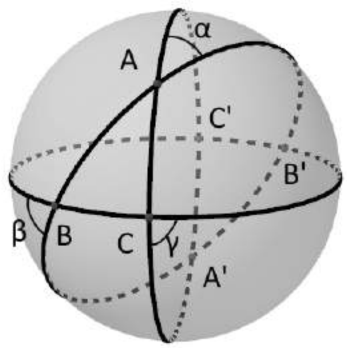
닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2+a$ 의 최댓값을 M, 최솟값은 m 이라 하자. $M+m=20$ 일 때, 상수 a 의 값은?(2013학년도 6월 모의고사)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

읽기자료

오일러의 공식과 구면 기하학[36]

1. 구 위의 구면 삼각형의 넓이는 그 삼각형의 세 각의 합에서 π를 뺀 것에 비례한다.



위 그림에서 생각해 볼 때, α, β, γ의 각을 이루는 점을 각각 A, B, C로 두고 그들의 구의 중심에 대한 대칭 점들을 각각 A', B', C'로 두자. 이때 A와 A'를 잇는, 사이각이 α인 두 개의 반원으로 둘러싸인 구면 돛꼴의 넓이는

$$S\times\frac{\alpha}{2\pi} \quad (S\text{는 구면의 넓이})$$

가 된다. 따라서 우리는 다음의 등식을 얻을 수 있다.

$$S\times\frac{\alpha}{2\pi}=\triangle \mathrm{ABC}+\triangle \mathrm{A'BC},\ S\times\frac{\beta}{2\pi}=\triangle \mathrm{ABC}+\triangle \mathrm{AB'C},\quad S\times\frac{\gamma}{2\pi}=\triangle \mathrm{ABC}+\triangle \mathrm{ABC'}$$

여기서 구면삼각형 A'BC 와 AB'C' 는 원점에 관한 대칭도형이므로 $\triangle \mathrm{A'BC}=\triangle \mathrm{AB'C'}$ 가 된다. 따라서 세 식을 더하면

$$\begin{aligned} S\times\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{2\pi} &= 2\triangle \mathrm{ABC}+(\triangle \mathrm{ABC}+\triangle \mathrm{AB'C'}+\triangle \mathrm{AB'C}+\triangle \mathrm{ABC'}) \\ &= 2\triangle ABC+(\text{반구의 넓이}) \\ &= 2\triangle ABC+\frac{S}{2} \end{aligned}$$

그러므로 $\triangle ABC=S\times\frac{(\alpha+\beta+\gamma-\pi)}{4\pi}$ ……(ㄱ)

가 된다.

36) mathletter12, 2004

2. 구면 n각형의 넓이 P는 $P=S\times\frac{((n\text{각형의 내각의 합})-(n-2)\pi)}{4\pi}$ **$\cdots$(ㄴ)이다.**

이는 구면 n각형을 한 꼭짓점에서의 모든 대각선을 그려 $n-2$개의 구면 삼각형으로 나눌 수 있다. 구면 n각형의 넓이는 이 작은 구면 삼각형들의 넓이를 합한 것이고, 이 구면 삼각형들은 '1'에 의한 식(ㄱ)을 만족하므로 이들을 모두 합하면 (ㄴ)가 됨을 알수 있다.

3. $v-e+f=2$임을 보이자.

임의의 다면체를 그대로 단위원 위로 사영시킨다. 그러면 면의 개수(f), 변(모서리)의 개수(e), 점의 개수(v)는 그대로 유지 되므로 이 단위원 위에 $v-e+f$의 값과 원래 다면체에서 $v-e+f$의 값은 같다. 따라서, 단위원에서 일정하게 $v-e+f=2$라는 것을 보여주면 충분하다.

그렇다면 단위원에서의 각을 위의 그림과 같이 각 변을 지나는 대원들이 이루는 각으로 정의하자. 이때, 구면 위에 사영되어 생긴 다각형들은 C_1, C_2, C_3, ... ,C_k라 두고 C_i는 n_i각형이라고 두자. 그렇다면 단위원 전체의 겉넓이는 '2'에 의해 $\sum_{i=1}^{k}((C_i\text{의 내각의 합})-(n_i-2)\pi))=4\pi$가 된다.

1) 한 점에 붙어 있는 각들을 모두 합하면 2π가 디고 따라서 모든 C_i들의 내각의 합은 $2\pi\times v$가 된다.
2) k는 다각형의 개수이므로 다면체에서 면의 개수($=f$)와 같고 $k=f$이다.
3) $\sum_{i=1}^{k}n_i$는 다각형의 변의 개수를 모두 더한 것인데 하나의 변이 두 다각형에 걸쳐 있으므로 한변이 두 번씩 세어지게 되므로 $\sum_{i=1}^{k}n_i=2e$가 된다.

그러므로

$$\begin{aligned}4\pi &= \sum_{i=1}^{k}((C_i\text{의 내각의 합})-(n_i-2)\pi))\\ &= \sum_{i=1}^{k}(C_i\text{의 내각의 합})-\pi\sum_{i=1}^{k}n_i+\sum_{i=1}^{k}2\pi\\ &= 2\pi v-2\pi e+2\pi f\\ &= 2\pi(v-e+f)\end{aligned}$$

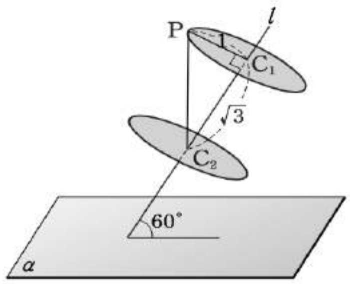
가 성립하고

$v-e+f=2$라는 식을 얻게 된다.

예시답안

풀어보기

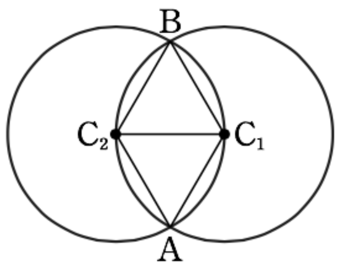
문제 1



위 그림과 같이 각 원판의 중심을 C_1, C_2라 하고, 중심이 C_1인 원판의 둘레 위의 한 점을 P라 하면 삼각형 C_1PC_2에서 $\overline{PC_1}=1$, $\overline{C_1C_2}=\sqrt{3}$이므로 $\angle C_1PC_2=60°$, $\angle PC_2C_1=30°$이다.

선분 PC_2는 태양광선의 방향과 평행하므로 두 원판에 의하여 평면α에 생기는 그림자는 두 원판이 아래 그림과 같이 포개어진 상태에서 태양광선에 의하여 평면 α에 생기는 그림자와 같다. 그림에서 두 호 AC_1B, AC_2B로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$2\times\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\times1^2\times\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$



따라서 포개어진 두 원의 넓이는

$$2\pi-\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

원판을 포함한 평면이 평면 α와 이루는 각의 크기가 30°이므로 구하는 그림자의 넓이는

$$\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\cos30°=\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{4}$$

문제 2

$f(x)=x^3-3x^2+a$, $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$, $f'(x)=0$에서 $x=0$또는 $x=2$
닫힌구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증감표를 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	$a-2$	↘	$a-4$	↗	$a+16$

따라서 닫힌구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면 $M=a+16$, $m=a-4$이다. $M+m=20$이므로 $a+16+a-4=20$, $2a+12=20$, $2a=8$

$\therefore a=4$

대학출제 문제 1

논제 1-1

(대학발표 예시답안)

S 는 중심이 원점이고 반지름이 1인 구이고 α, β, γ는 모두 원점을 지나는 평면이므로, 교선 C_1, C_2, C_3는 각각의 평면 α, β, γ에 놓인 반지름이 1인 원이다. 따라서 원판 A의 넓이는 π이다. 평면 β : $\sqrt{3}y - z = 0$의 법선 벡터는 $(0, \sqrt{3}, -1)$, 평면 γ : $-x + \sqrt{2}z = 0$의 법선 벡터는 $(-1, \sqrt{2}, 0)$로 하고, 두 평면이 이루는 예각을 θ라 하면,

$$\cos\theta = \frac{(0, \sqrt{3}, -1)\cdot(-1, \sqrt{2}, 0)}{|(0, \sqrt{3}, -1)|\,|(-1, \sqrt{2}, 0)|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

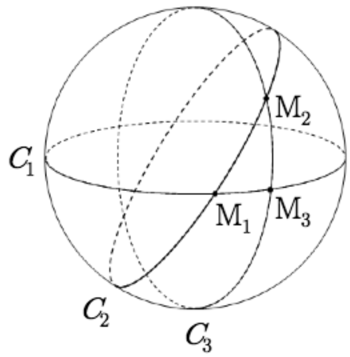
이다. 따라서

$$(\text{원판 } A\text{의 평면 } \gamma\text{위로의 정사영의 넓이}) = (\text{원판 } A\text{의 넓이}) \times \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

논제 1-2

(대학발표 예시답안)

점 M_1을 (x, y, z)라 하면 $x^2+y^2+z^2=1$, $z=0$, $z=\sqrt{3}y$, $x>0$을 만족한다. 따라서 M_1은 $(1, 0, 0)$이고, 같은 방법으로 M_2는 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, M_3는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$이다. <그림1 참조>



[그림 1]

세 점 M_1, M_2, M_3를 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz=1$로 두고 위 좌표들을 대입해 a, b, c를 구하면 평면의 방정식은 $x+(\sqrt{3}-\sqrt{2})y+(\sqrt{2}-1)z=1$이 되고, 따라서 $a+b+c=\sqrt{3}$이다.

논제 1-3

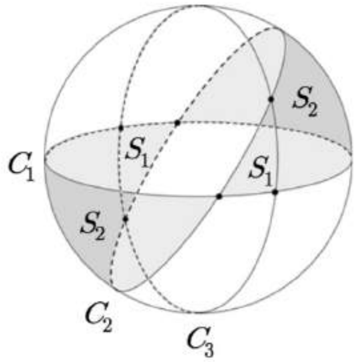
C_1, C_2, C_3는 S를 8개의 구면 삼각형 조각으로 나눈다. 평면 α, β, γ의 법선 벡터를 각각 $(0,\ 0,\ 1)$, $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$, $(-1,\ \sqrt{2},\ 0)$으로 하면 문제 1의 방법을 따라 평면 α, β, 가 이루는 예각은 $\frac{\pi}{3}$, 평면 β, γ가 이루는 예각은 $\frac{\pi}{4}$, 평면 α, γ가 이루는 각은 $\frac{\pi}{2}$이다.

<읽기 자료>에 의해 (세 내각의 합)$-\pi$가 넓이가 된다. 생각할 수 있는 삼각형의 세 내각의 합의 최솟값은 $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{13}{12}\pi$ 이므로

$\frac{13}{12}\pi-\pi=\frac{1}{12}\pi$ 가 가장 작은 조각의 넓이가 된다.

(대학발표 예시답안)

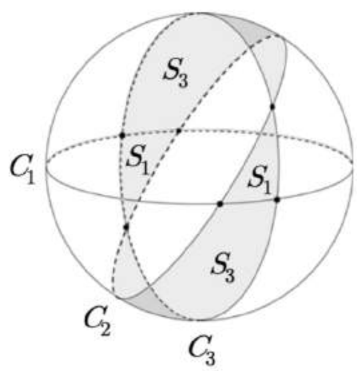
C_1, C_2, C_3는 S를 8개의 조각으로 나눈다. 평면 α, β, γ의 법선 벡터를 각각 $(0,\ 0,\ 1)$, $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$, $(-1,\ \sqrt{2},\ 0)$으로 하면 문제 1의 방법을 따라 평면 α, β, 가 이루는 예각은 $\frac{\pi}{3}$, 평면 β, γ가 이루는 예각은 $\frac{\pi}{4}$, 평면 α, γ 가 이루는 각은 $\frac{\pi}{2}$이다.



[그림 2]

<그림 2> 의 색칠한 부분의 넓이= $2(S_1+S_2)=2\times4\pi\times\dfrac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}=\dfrac{4}{3}\pi$이고, 정리하면

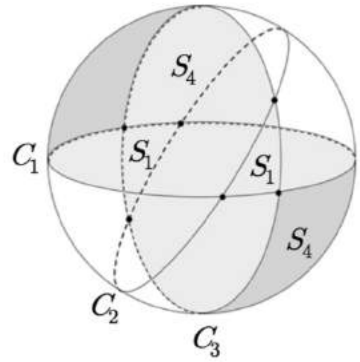
$S_1+S_2=\dfrac{2}{3}\pi\cdots(1)$



[그림 3]

<그림 3> 의 색칠한 부분의 넓이= $2(S_1+S_3)=2\times4\pi\times\dfrac{\frac{\pi}{4}}{2\pi}=\pi$이고, 정리하면

$S_1+S_3=\dfrac{1}{2}\pi\cdots(2)$



[그림 4]

<그림4> 의 색칠한 부분의 넓이= $2(S_1+S_4)=2\times4\pi\times\dfrac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}=2\pi$이고, 정리하면

$$S_1+S_4=\pi\cdots(3)$$

구면의 넓이는 $2S_1+2S_2+2S_3+2S_4=4\pi$이고, 정리하면

$$S_1+S_2+S_3+S_4=2\pi\cdots(4)$$

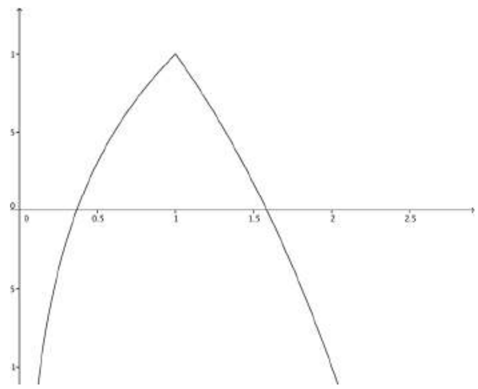
(1), (2), (3), (4) 로부터 $S_1=\dfrac{\pi}{12}$, $S_2=\dfrac{7}{12}\pi$, $S_3=\dfrac{5}{12}\pi$, $S_4=\dfrac{11}{12}\pi$이고, 따라서

가장 작은 조각의 넓이는 $S_1=\dfrac{\pi}{12}$이다.

대학출제 문제 2

논제 2-1

(대학발표 예시답안)



이차함수 $h(x)=x^2+b$는 b값에 의해 y축 방향으로 움직인다.
한 점 $(x_0,\ f(x_0))$에서 만나면(두 곡선이 한 점에서 접하면), 이 때
x_0의 범위는 $0<x_0\le 1$이다.

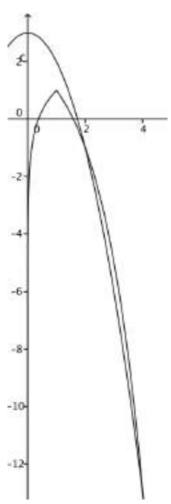
$x=x_0$에서 접선의 기울기가 같아야 하므로 $\dfrac{1}{x_0}=2x_0$이며 $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$이다.

$h(x_0)=\dfrac{1}{2}+b=f(x_0)=1+\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}}=1-\dfrac{1}{2}\ln2$이므로, $b=\dfrac{1}{2}(1-\ln2)$이다.

따라서 $b<\dfrac{1}{2}(1-\ln2)=\dfrac{1}{2}-\ln\sqrt{2}$일 때 두 점에서 만난다.

논제 2-2

(대학발표 예시답안)



이차함수 $h(x)=ax^2+3$은 꼭짓점이 $(0,\ 3)$이고, a에 의해 그래프의 폭이 결정된다. 한 점 $(x_0,\ f(x_0))$에서 만나면, $x_0 \geq 1$이다.

$x=x_0$에서 접선의 기울기가 같아야 하므로 $-\ln 2 \cdot 2^{x_0}=2ax_0$이고,

$h(x_0)=ax_0^2+3=3-2^{x_0}=f(x_0)$이므로 $x_0=\dfrac{2}{\ln 2}>1$이고, $a=-\dfrac{(\ln 2)^2 4^{\frac{1}{\ln 2}}}{4}$이다. 따라서 $a<-\dfrac{(\ln 2)^2 4^{\frac{1}{\ln 2}}}{4}=-\dfrac{(\ln 2)^2 2^{\frac{2}{\ln 2}}}{4}$일 때 두 점에서 만난다.

논제 2-3

(대학발표 예시답안)

$F(x)=f(x)-tx^2$이라 하면 $F'(x)=f'(x)-2tx$이다.

$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x \leq 1) \\ -\ln 2 \cdot 2^x & (x>1) \end{cases}$ 과 $y=2tx$ 의 그래프는 t의 값의 범위에 따라

ⅰ) $0<t\leq \dfrac{1}{2}$인 경우

$x=1$ 의 좌우에서 $F'(x)$의 부호가 양수에서 음수로 변하므로 $F(x)$는 $x=1$에서 극대가 된다.

$$g(t)=F(1)=f(1)-t=1-t$$

ⅱ) $t>\dfrac{1}{2}$이고 $x<1$인 경우

$F(x)=f(x)-tx^2$라 하면 $F'(x)=\dfrac{1}{x}-2tx=0$이고, $x=\dfrac{1}{\sqrt{2t}}<1$

$t>\dfrac{1}{2}$이고, $x>1$인 경우 $F'(x)$는 음수이다. $F(x)$는 $x=1$에서 연속이고 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2t}}$에서 $F'(x)$의 부호가 양수에서 음수로 변하므로 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2t}}<1$에서 극댓값이 있다.

$F\left(\dfrac{1}{\sqrt{2t}}\right)=g(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}(\ln 2t)$ 이다. $g\left(\dfrac{e}{2}\right)=0$이므로

$$\lim_{t\to\frac{e}{2}}\frac{g(t)}{2t-e}=\frac{1}{2}\lim_{t\to\frac{e}{2}}\frac{g(t)-g\left(\frac{e}{2}\right)}{t-\frac{e}{2}}=\frac{1}{2}g'\left(\frac{e}{2}\right)=-\frac{1}{2e}$$

40 홍익대학교 수시 일반전형

문제 1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

좌표평면 위의 직선 ℓ 은 다음과 같이 두 가지 방법으로 표현할 수 있다.
(가) 적당한 상수 a, b, c 에 대해 $\ell : ax+by+c=0$
(나) 적당한 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$ 에 대해 $\ell : \vec{p}=\vec{u}+t\vec{v}$ (t 는 실수)

(가)에서 a, b, c 가 모두 유리수인 식으로 직선 ℓ 을 나타낼 수 있으면 ℓ 을 <u>유리직선</u>이라 부르자. 예를 들면 직선 $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+3\sqrt{2}=0$ 은 $x+y+3=0$ 으로 나타낼 수 있으므로 유리직선이다.

좌표평면에서 좌표가 모두 정수인 점을 <u>격자점</u>이라고 한다. 좌표평면 위의 주어진 직선이 몇 개의 격자점을 지나는지 생각해 보자. 예를 들면 직선 $x-y=0$ 은 무한히 많은 격자점을 지나는 반면, 직선 $x+y-\sqrt{2}=0$ 은 격자점을 하나도 지나지 않음을 알 수 있다.

문제 1-1

두 직선 $4x+3y+\dfrac{7}{3}=0$ 과 $x+\sqrt{2}y+3=0$ 위에 있는 격자점의 개수를 각각 구하고 그 과정을 설명하시오.

문제 1-2

격자점을 하나라도 지나는 유리직선은 무한히 많은 격자점을 지남을 보이시오.

문제 1-3

서로 다른 두 격자점 (x_1, y_1) 과 (x_2, y_2) 를 지나는 직선은 무한히 많은 격자점을 지난다는 것을 보이시오.

문제 1-4

무한히 많은 격자점을 지나는 직선은 유리직선임을 보이시오.

문제 2 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

우리들은 10 진법으로 수를 표시하는 데 익숙하다. 예를 들어 324 란 백의 자리수가 3 , 십의 자리수가 2 , 일의 자리수가 4 인 수로서 $3\times10^2+2\times10^1+4\times10^0$ 로 표현할 수 있다. 10 대신에 2 의 거듭제곱들을 이용하여 수를 표현하는 방법을 이진법이라 부른다. 거듭제곱의 지수를 음수까지 생각하면 소수도 이진법으로 표현할 수 있다. 예를 들어 $5.5=1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0+1\times2^{-1}$ 이므로 5.5 는 이진법으로는 $101.1_{(2)}$ 로 표현된다.

다음과 같이 함수 $T(x)$ 를 $0\le x<1$ 인 실수 x 에 대해 정의한다.

$$T(x)=\begin{cases}2x & \left(0\le x<\frac{1}{2}\right)\\ 2x-1 & \left(\frac{1}{2}\le x<1\right)\end{cases}$$

$k\ge1$ 일 때 함수 $T(x)$ 를 k 번 합성한 함수를 $T^k(x)$ 라고 정의하고 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T^k(x)=T\left(T^{k-1}(x)\right)\ (\text{단, } T^0(x)=x\ )$$

$0\le x<1$ 인 실수 x 에 대해 함수 $D(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$D(x)=\begin{cases}0 & \left(0\le x<\frac{1}{2}\right)\\ 1 & \left(\frac{1}{2}\le x<1\right)\end{cases}$$

$k\ge1$ 일 때 함수 $M_k(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$M_k(x)=D\left(T^{k-1}(x)\right)$$

문제 2-1

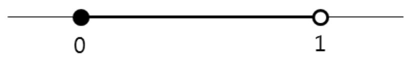
$x=0.110101_{(2)}$ 에 대해서 $T(x)$ 와 $T^2(x)$ 를 이진수로 각각 표현하시오.

문제 2-2

어떤 수 x에 대해 k가 1일 때부터 $M_k(x)$들을 순서대로 나열하면 $1, 0, 1, 1, 0, 1, 1,0, 1, 1, 0, 1, 1, \cdots$ 과 같이 첫 번째 항은 1이고 그 다음 항부터 '$0, 1, 1$'의 패턴이 무한 반복된다. 이때 x를 기약 분수로 나타내시오.

문제 2-3

구간 $A=\{x\in \mathrm{R} \mid 0 \le x < 1\}$을 수직선 위에 나타내면 아래 그림과 같다.



A의 부분집합 $\{x \mid M_1(x)=1\}$과 $\{x \mid M_2(x)=1\}$을 수직선 위에 각각 나타내시오.

문제 2-4

연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=2x$ (단, $0 \le x < 1$)일 때, $\mathrm{P}\left(M_k(X)=1\right)$일 확률을 구하시오.

문제 3 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

홍익이는 비오는 날 길을 걷다가 왜 높은 하늘에서 떨어지는 빗방울을 맞아도 사람이 다치지 않는지 궁금해졌다. 즉, 중력에 의해 빗방울의 속도가 점점 빨라져서 땅에 떨어질 시점에는 매우 큰 속도가 되어야 하는데 왜 실제로는 그렇지 않은지 궁금했다. 조사한 결과 속도가 커지면 공기의 저항력도 커지기 때문이라는 사실을 알게 되었다. 하늘에서 떨어지는 빗방울의 속도 v를 시간 t의 함수로 나타내었을 때, 홍익이는 상황을 단순화하여 $v(t)$가 다음의 운동 방정식을 만족한다고 생각하였다.

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv^2$$

여기에서 양의 상수 m, g, k는 각각 빗방울의 질량, 중력가속도, 공기의 저항 계수를 나타낸다. 홍익이는 운동방정식을 풀기보다 자신이 알고 있는 수열을 이용하여 빗방울의 속도 변화를 나타내 보기로 하였다. 먼저 홍익이는 짧은 시간 간격 Δt 동안에 빗방울의 속도 변화는 대략 일정할 것이라고 가정하고, 초기 $(t=0)$부터 시작하여 일정한 짧은 시간 간격 Δt 후의 빗방울의 속도 $v_0, v_1, v_2, \cdots$는 다음 식을 만족한다고 생각하였다. (즉, v_n은 $t=n\Delta t$일 때의 속도)

$$m\frac{v_{n+1}-v_n}{\Delta t}=mg-kv_n^2 \quad (n \ge 0) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(식 1)}$$

홍익이는 $v_0, v_1, v_2, \cdots$ 의 변화를 살펴보기 위해 (식 1)을 아래의 꼴로 변환하였다.

$$x_{n+1} = a - x_n^2 \quad (n \geq 0) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{(식 2)}$$

(식 2)로 주어지는 수열에 대해서 다음과 같은 사실이 알려져 있다.

(사실)

$-\frac{1}{4} < a < 0$ 이고 초기값이 $-\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 0$ 이면 (식 2)로 주어지는 수열 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 는 증가(즉, $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots$) 하거나 감소 (즉, $x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots$)한다. 두 경우 모두 모든 $n \geq 0$ 에 대해 $-\frac{1}{2} \leq x_n \leq 0$ 이 성립하고, 이 수열은 수렴한다.

문제 3-1

(식 1)을 (식 2)의 꼴로 변환하시오.

문제 3-2

지문의 (사실)을 [문제 3-1]에서 변환한 식에 적용하여 빗방울의 속도가 무한정 커지지 않고 일정한 속도(<u>종단속도</u>)에 이른다는 결론을 내리려 한다.

(a) 지문의 (사실)을 적용하기 위해서는 Δt 를 특정한 값보다 작게 설정해야 한다. 그 값을 상수 m, g, k 와 초기속도 v_0 로 표현하고 그 과정을 기술하시오(단, $v_0 \geq 0$).

(b) 이 때 빗방울의 종단속도를 구하고, 모든 $n \geq 0$ 에 대해 v_n 은 v_0 와 종단속도 사이의 값임을 보이시오.

배경지식 쌓기

1. 직선의 방정식

가. 기울기와 한 점이 주어진 직선의 방정식

1) 기울기가 m, 한 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ 을 지나는 직선의 방정식: $y-y_1=m(x-x_1)$

2) 기울기가 m, y 절편이 b 인 직선의 방정식: $y=mx+b$

나. 서로 다른 두 점이 주어진 직선의 방정식

1) $x_1 \neq x_2$ 인 경우

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \text{ 또는 } y-y_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$$

2) $x_1=x_2$ 인 경우

$$x=x_1 \ (y \text{ 축에 평행한 직선})$$

다. 일반적인 직선의 방정식

$$ax+by+c=0 \ (\text{단, } a \neq 0 \text{ 또는 } b \neq 0)$$

2. 무한급수

가. 무한급수 : 무한수열 $\{a_n\}$ 의 각 항을 차례대로 덧셈 기호(+)를 사용하여 연결 한 식을 무한급수라 하고, 기호로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 같이 나타낸다. 즉,

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

나. 부분합 : 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 을 이 무한급수의 제 n 항까지의 부분합이라고 한다. 즉,

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

다. 무한급수의 합 : 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 부분합으로 이루어진 수열 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 이 일정한 값 S에 수렴할 때, 즉 $\lim_{n\to\infty} S_n=S$ 이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴한다고 한다. 이 때, S를 무한급수의 합이라 하고, 다음과 같이 나타낸다.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=S \text{ 또는 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$$

3. 연속확률변수와 확률밀도함수

가. 연속확률변수 : 어떤 구간에 속하는 모든 실수 값을 취하는 확률변수

나. 확률밀도함수 : 연속확률변수 X가 $\alpha \le x \le \beta$에 속하는 모든 실수 값을 취하고 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$를 X의 확률밀도함수라 한다.

① $f(x) \ge 0$ (단, $\alpha \le x \le \beta$)

② $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 1$

③ $\mathrm{P}(\mathrm{a} \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$ (단, $\alpha \le a \le b \le \beta$)

다. 연속확률변수의 평균(기댓값), 분산, 표준편차

연속확률변수 X가 $\alpha \le x \le \beta$에 속하는 모든 실수 값을 취하고 X의 확률밀도함수가 $f(x)$ 일 때,

① 평균(기댓값) : $\mathrm{E}(X) = m = \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)\,dx$

② 분산 : $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}((X-m)^2) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (x-m)^2 f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x)\,dx - m^2$$

③ 표준편차 : $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$

풀어보기

문제 1

순환소수로 이루어진 수열 a_n 의 각 항이

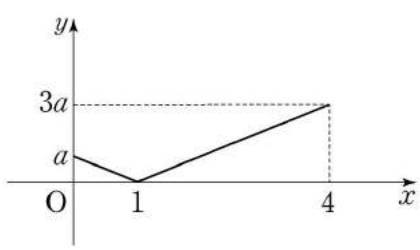
$$a_1 = 0.\dot{1}$$
$$a_2 = 0.\dot{1}\dot{0}$$
$$a_3 = 0.\dot{1}0\dot{0}$$
$$\vdots$$
$$a_n = 0.\underbrace{\dot{1}00\ \cdots\ 0\dot{0}}_{0\text{은 } (n-1)\text{개}}$$
$$\vdots$$

일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$ 의 값은? (2005년 9월 모의평가)

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

문제 2

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 4$ 이고 X의 확률밀도함수의 그래프는 다음과 같다. $100\mathrm{P}(0 \le X \le 2)$ 의 값을 구하시오. (2009년 대수능)



문제 3

자연수 m에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1에 1개, 2열에 2개, 3열에 3개, $\cdots$, m열에 m개 쌓여 있다. 블록의 개수가 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 다음 시행을 반복한다.

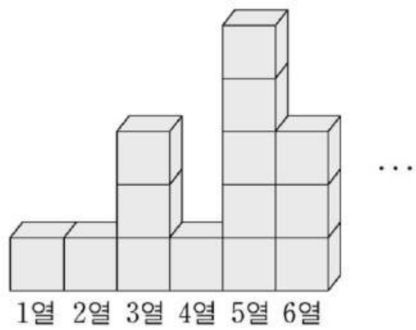
블록의 개수가 짝수인 각 열에 대하여 그 열에 있는 블록의 개수의 $\frac{1}{2}$만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다.

블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1열부터 m열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$이라 하자.
예를 들어, $f(2)=2$, $f(3)=5$, $f(4)=6$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\frac{q}{p}$$

일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

(2011년 대수능)



예시답안

풀어보기

문제 1

답: ②

$a_1 = \dfrac{1}{9}$, $a_2 = \dfrac{10}{99}$, $a_3 = \dfrac{100}{999}$, $\cdots$ 이므로 $\dfrac{1}{a_1} = 9$, $\dfrac{1}{a_2} = \dfrac{99}{10}$, $\dfrac{1}{a_3} = \dfrac{999}{100}$, $\cdots$

따라서 $\dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{9}{10}$, $\dfrac{1}{a_3} - \dfrac{1}{a_2} = \dfrac{9}{100}$, $\cdots$, $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{9}{10^n}$ 이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

문제 2

답: 20

확률밀도함수의 정의에 따라

$\dfrac{1}{2}\times1\times a+\dfrac{1}{2}\times3\times3a=1$ 이므로 $a=\dfrac{1}{5}$

또한 두 점 $(1, 0)$, $\left(4, \dfrac{3}{5}\right)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{5}(x-1)$ 이므로 $x=2$ 에서의 함숫값은 $\dfrac{1}{5}$ 이다.

$\therefore\ \mathrm{P}(0 \le X \le 2)=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5}$

$\therefore\ 100\mathrm{P}(0 \le X \le 2)=100\times\dfrac{1}{5}=20$

문제 3

답: 19

2^{n+1} 열 짜리 블록의 개수는

$$1, 2, 3, 4, \cdots, 2^n, \cdots, 2^{n+1} \qquad \cdots\cdots \ ㉠$$

㉠에서 1 회 시행 후, 홀수는 그대로 두고 짝수는 2 로 나누어 나타내면

$$1, 3, 5, 7, \cdots, (2^{n+1}-1) \qquad \cdots\cdots \ ㉡$$

과

$$1, 2, 3, 4, \cdots, 2^n \qquad \cdots\cdots \ ㉢$$

으로 표시된다.

시행을 모두 마쳤을 때, 남은 블록의 합에 대해 생각해보면

(i) ㉠에서 블록의 개수의 합은 $f(2^{n+1})$

(ii) ㉡에서 블록의 개수의 합은

$$1+3+5+7+\cdots+(2^{n+1}-1)=\frac{2^n(2^{n+1}-1+1)}{2}=2^{2n}=4^n$$

(iii) ㉢에서 블록의 개수의 합은 $f(2^n)$

따라서 $f(2^{n+1})=4^n+f(2^n)$

결국, $f(2^n)=f(2^1)+\sum_{k=1}^{n-1}4^k=2+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}=\frac{4^n+2}{3}$

$\therefore\ \frac{q}{p}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{\frac{4^{n+1}+2}{3}}=\frac{3}{16}$

$\therefore\ p+q=16+3=19$

대학출제 문제 1-1

(대학발표 예시답안)

직선 $4x+3y+\frac{7}{3}=0$ 위의 격자점의 개수는 0 개

이 직선이 격자점 (n, m) 을 지난다면 $\frac{7}{3}=-(4n+3m)$ 이 되어 기약분수 $\frac{7}{3}$ 이 정수라는 결론이 되어 모순이다.

직선 $x+\sqrt{2}y+3=0$ 위의 격자점의 개수는 1 개.

이 직선이 격자점 (n, m) 을 지난다 할 때, $m=0$ 이면 $n=-3$ 이므로 격자점 $(-3, 0)$ 을 지난다. 반면, $m\neq 0$ 이라면 $\sqrt{2}=-\frac{n+3}{m}$ 이 되어 무리수 $\sqrt{2}$ 가 유리수라는 결론이 되어 모순이다.

첫 번째 직선에 대한 다른 풀이

(다른 풀이 1)

첫 번째 직선의 식은 $12x+9y=-7$ 이다. x, y 가 정수인 경우 좌변은 3 의 배수이나 우변은 3 의 배수가 아니므로 모순이다.

(다른 풀이 2)

첫 번째 직선의 식은 $y=-\frac{12x+7}{9}$ 이므로 $12x+7$ 이 9 의 배수인 정수 x 가 이 직선 위의 격자점에 대응된다. $x=3k, 3k+1, 3k+2$ (k 는 정수)일 때 (즉, x 를 3 으로 나눈 나머지가 각각 $0, 1, 2$ 인 경우) $12x+7=36k+7, 36k+19, 36k+31$ 은 9 로 나눈 나머지가 각각 $7, 1, 4$ 이므로 9 의 배수가 될 수 없고 따라서 이 직선은 격자점을 지나지 않는다.

(다른 풀이 3)

(다른 풀이 2)에서와 마찬가지로 $x=-\dfrac{9y+7}{12}$ 에서 y 가 4 로 나누어 $0, 1, 2, 3$ 이 남는 정수일 때, $9y+7$ 은 12 로 나누어 각각 $7, 4, 1, 10$ 이 남는 정수이므로 x 는 정수일 수 없다.

대학출제 문제 1-2

(대학발표 예시답안)

유리직선 $ax+by+c=0$ (상수 a, b, c 는 유리수)이 격자점 (x_0, y_0) 를 지난다 하자. d 를 a, b 의 분모의 (최소)공배수라 하면 임의의 정수 k 에 대해 (x_0+bdk, y_0-adk) 는 격자점이고 $a(x_0+bdk)+b(y_0-adk)+c=ax_0+by_0+c=0$ 이므로 주어진 직선 위에 있다. (참고: 0 의 분모는 1 (또는 임의의 0 이 아닌 정수)로 생각하면 위의 해는 a, b 중 하나가 0 이어도 성립한다.)

(다른 풀이 1)

유리직선 $ax+by+c=0$ (상수 a, b, c 는 유리수)을 나타내는 식의 양변에 a, b, c 의 분모의 (최소)공배수를 곱하면 유리직선은 항상 계수와 상수가 정수인 식으로 나타낼 수 있다. 이제 주어진 유리직선 $ax+by+c=0$ (상수 a, b, c 는 정수)가 격자점 (x_0, y_0) 를 지난다 하자. 임의의 정수 k 에 대해 (x_0+bk, y_0-ak) 는 격자점이고 $a(x_0+bk)+b(y_0-ak)+c=ax_0+by_0+c=0$ 이므로 주어진 직선 위에 있다.

(다른 풀이 2)

유리직선 $a'x+b'y+c'=0$ (상수 a', b', c' 는 유리수)이 y 축과 평행하지 않다면 $b'\neq 0$ 이고 식의 양변을 b' 로 나누고 정리하면 $y=ax+c$ (상수 a, c 는 유리수)로 나타낼 수 있다.

이 유리직선이 격자점 (x_0, y_0) 을 지난다 하자. $a=\dfrac{n}{m}$ (n, m 은 정수)이라면 임의의 정수 k 에 대해 (x_0+mk, y_0+nk) 는 격자점이고 $y_0+nk=\dfrac{n}{m}(x_0+mk)+c$ 이므로 주어진 직선 위에 있다.

위와 마찬가지로 y 축과 평행한 유리직선은 $x=c$ (상수 c 는 유리수)로 나타낼 수 있다. 이 유리직선이 격자점 (x_0, y_0) 을 지난다면, $c=x_0$ 은 정수이고 임의의 정수 k 에 대해 (x_0, k) 는 이 직선 위의 격자점이다.

대학출제 문제 1-3

(대학발표 예시답안)

서로 다른 두 점 $\mathrm{A}=(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}=(x_2, y_2)$를 지나는 직선은 벡터방정식 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (t는 실수)로 나타낼 수 있다. 이때, A, B가 격자점이라면 임의의 정수 k에 대해 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x_1+k(x_2-x_1), y_1+k(y_2-y_1))=((1-k)x_1+kx_2, (1-k)y_1+ky_2)$는 이 직선 위의 격자점이다.

(다른 풀이 1)

직선 $ax+by+c=0$ (a, b, c는 상수)가 서로 다른 두 격자점 $A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$를 지난다 하자. 임의의 정수 k에 대해 격자점 $(x_1+k(x_2-x_1), y_1+k(y_2-y_1))=((1-k)x_1+kx_2, (1-k)y_1+ky_2)$은
$a(1-k)x_1+kx_2+b(1-k)y_1+ky_2+c=(1-k)(ax_1+by_1+c)+k(ax_2+by_2+c)=0$을 만족하므로 주어진 직선 위에 있다.

(다른 풀이 2)

서로 다른 두 점 $\mathrm{A}=(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}=(x_2, y_2)$를 지나는 직선은
식 $(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y+(y_1x_2-x_1y_2)=0$로 나타낼 수 있다. 이때, A, B가 격자점이라면 이 식의 계수와 상수는 모두 정수이고 따라서 이 직선은 유리직선이다.
[문제 1-2]에 의해 적어도 하나의 격자점을 지나는 이 유리직선은 무한히 많은 격자점을 지난다.

(다른 풀이 3)

서로 다른 두 점 $\mathrm{A}=(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}=(x_2, y_2)$를 지나는 직선은 $x_1\neq x_2$일 경우 식 $y-y_1=\left(\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x-x_1)$으로 나타낼 수 있고, $x_1=x_2$일 경우는 식 $x=x_1$으로 나타낼 수 있다. A, B가 격자점이라면 두 경우 모두 식의 계수와 상수는 모두 유리수이고 따라서 이 직선은 유리직선이다. [문제 1-2]에 의해 적어도 하나의 격자점을 지나는 이 유리직선은 무한히 많은 격자점을 지난다.

대학출제 문제 1-4

(대학발표 예시답안)

(위 [문제 1-3]의 다른 풀이 2와 동일) 서로 다른 점 $\mathrm{A}=(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}=(x_2, y_2)$를 지나는 직선은 식 $(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y+(y_1x_2-x_1y_2)=0$로 나타낼 수 있다. 이때, A, B가 격자점이라면 이 식의 계수와 상수는 모두 정수이고 따라서 이 직선은 유리직선이다.

(다른 풀이 1)

(위 [문제 1-3]의 다른 풀이 3과 동일) 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}=(x_1, y_1), \mathrm{B}=(x_2, y_2)$ 를 지나는 직선은 $x_1 \neq x_2$ 일 경우 식 $y-y_1=\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x-x_1)$ 으로 나타낼 수 있고, $x_1=x_2$ 일 경우는 식 $x=x_1$ 으로 나타낼 수 있다. 이때, A, B 가 격자점이라면 두 경우 모두 식의 계수와 상수는 모두 유리수이고 따라서 이 직선은 유리직선이다.

대학출제 문제 2-1

(대학발표 예시답안)

(답안 1) $x=0.110101_{(2)}=\frac{1}{2}+\cdots \geq \frac{1}{2}$

$\therefore\ T(x)=2x-1=1.10101_{(2)}-1=0.10101_{(2)}$

$T(x)=0.10101_{(2)}=\frac{1}{2}+\cdots \geq \frac{1}{2}$

$\therefore\ T^2(x)=2T(x)-1=1.0101_{(2)}-1=0.0101_{(2)}$

(답안 2) $x=0.110101_{(2)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}=\frac{53}{64}\geq \frac{1}{2}$

$\therefore\ T(x)=2x-1=2\times\frac{53}{64}-1=\frac{21}{32}=0.10101_{(2)}$

$T(x)=\frac{21}{32}\geq \frac{1}{2}$

$\therefore\ T^2(x)=2T(x)-1=\frac{5}{16}=0.0101_{(2)}$

(답안 3) 중간 과정을 생략한 경우

$x=0.110101_{(2)}=\frac{53}{64}$ 이므로 $T(x)$ 를 정의된 대로 구해보면,

$T(x)=\frac{21}{32}=0.10101_{(2)}$ 이고, 같은 방식으로 $T^2(x)=\frac{5}{16}=0.0101_{(2)}$ 이다.

대학출제 문제 2-2

(대학발표 예시답안)

101 패턴이 반복되므로

$$x=0.1011011011\cdots_{(2)}=0.101+0.000101+\cdots=(0.101)\times\sum_{k=0}^{\infty}2^{-3k}=\frac{5}{8}\times\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{5}{7}$$

혹은 문제에서 1 다음에 011 이 반복된다고 기술하였으므로

$$x=0.1011011011\cdots_{(2)}=\frac{1}{2}+0.0011011011\cdots_{(2)}=\frac{1}{2}+y$$

$$2\times y=0.011011011\cdots_{(2)}=3\times\sum_{k=1}^{\infty}2^{-3k}=3\times\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{3}{7}\Rightarrow\therefore y=\frac{3}{14}$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}+\frac{3}{14}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$$

위의 과정에서 등비수열을 구하는 방법이 여러 가지 있을 수 있다.

예 1:

$$x=0.1011011011\cdots_{(2)}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\right)+\left(\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}\right)+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^4}+\frac{3}{2^7}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{5}{7}$$

예 2:

$$x=0.1011011011\cdots_{(2)}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^9}+\cdots\right)=\frac{4}{7}+\frac{1}{7}=\frac{5}{7}$$

예 3:

$$x=0.1011011011\cdots_{(2)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\cdots=1-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^8}+\cdots\right)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

예 4:

$$\begin{aligned}x=0.1011011011\cdots_{(2)}&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\cdots\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^8}+\cdots\right)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}\end{aligned}$$

대학출제 문제 2-3

(대학발표 예시답안)

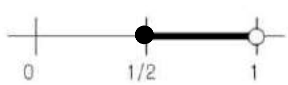
주어진 함수들 D, M_1, M_2 의 정의로부터

$M_1(x)=D(x)=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le x<1$, $M_2(x)=D(T(x))=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le T(x)<1$ 이다.

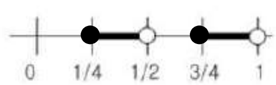
한편 함수 T의 정의로부터 마지막 부등식은 $0\le x<\frac{1}{2}$ 인 x에 대해서는 $\frac{1}{2}\le 2x<1$, $\frac{1}{2}\le x<1$ 인 x 에 대해서는 $\frac{1}{2}\le 2x-1<1$ 로 주어진다. 따라서

$M_2(x)=1\Leftrightarrow\frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{4}\le x<1$ 이다.

아래 그림의 굵게 색칠한 영역:



$\{x : M_1(X)=1\}$



$\{x : M_2(X)=1\}$

대학출제 문제 2-4

(대학발표 예시답안)

[문제 2-3]으로부터 유추하면 구간은 $M_k(X)=1$에 해당하는 집합은 0과 1사이를 2^k 개로 나눈 구간 중 1부터 시작해서 홀수 번째에 해당하는 2^{k-1} 개의 구간이다.

$$\left(\left[\frac{1}{2^k},\frac{2}{2^k}\right),\ \cdots\ ,\left[\frac{2n-1}{2^k},\frac{2n}{2^k}\right),\ \cdots\ ,\left[\frac{2^k-1}{2^k},1\right)\right)$$

그 각각의 구간에 속할 확률은 확률밀도함수를 그 구간에서 적분하면 되고 전체 확률은 그 적분 값을 모두 더하면 되므로 전체 확률은 아래와 같다.

$$\mathrm{P}\left(M_k(X)=1\right)=\sum_{n=1}^{2^{k-1}}\left(\int_{\frac{2n-1}{2^k}}^{\frac{2n}{2^k}}f(x)dx\right)=\sum_{n=1}^{2^{k-1}}\left(\int_{\frac{2n-1}{2^k}}^{\frac{2n}{2^k}}2x\,dx\right) \qquad (가)$$

$$=\sum_{n=1}^{2^{k-1}}\left[x^2\right]_{\frac{2n-1}{2^k}}^{\frac{2n}{2^k}}=\sum_{n=1}^{2^{k-1}}\left\{\left(\frac{2n}{2^k}\right)^2-\left(\frac{2n-1}{2^k}\right)^2\right\} \qquad (나)$$

$$=\sum_{n=1}^{2^{k-1}}\frac{1}{2^{2k}}(4n-1)=\frac{1}{2^{2k}}\left(2\left(2^{k-1}\right)\left(2^{k-1}+1\right)-2^{k-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{2k}}\left(2^{2k-1}+2^{k-1}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{2^k+1}{2^{k+1}}$$

대학출제 문제 3-1

(대학발표 예시답안)

(식 1)은 다음과 같은 과정을 거쳐 (식 2)로 변환될 수 있다.

$$m\frac{v_{n+1}-v_n}{\Delta t}=mg-kv_n^2\ \Rightarrow\ v_{n+1}-v_n=\Delta tg-\frac{k\Delta t}{m}v_n^2\ \Rightarrow\ v_{n+1}=\Delta tg-\frac{k\Delta t}{m}v_n^2+v_n$$

$$\Rightarrow\ v_{n+1}=-\frac{k\Delta t}{m}\left\{v_n^2-\frac{m}{k\Delta t}v_n+\left(\frac{m}{2k\Delta t}\right)^2-\left(\frac{m}{2k\Delta t}\right)^2\right\}+g\Delta t$$

$$\Rightarrow\ v_{n+1}=-\frac{k\Delta t}{m}\left(v_n-\frac{m}{2k\Delta t}\right)^2+\frac{m}{4k\Delta t}+g\Delta t$$

양변에 $-\dfrac{m}{2k\Delta t}$ 을 더하면,

$$v_{n+1}-\frac{m}{2k\Delta t}=-\frac{k\Delta t}{m}\left(v_n-\frac{m}{2k\Delta t}\right)^2-\frac{m}{4k\Delta t}+g\Delta t$$

양변에 $\dfrac{k\Delta t}{m}$ 를 곱하면,

$$\frac{k\Delta t}{m}\left(v_{n+1}-\frac{m}{2k\Delta t}\right)=-\left(\frac{k\Delta t}{m}\right)^2\left(v_n-\frac{m}{2k\Delta t}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{k\Delta t}{m}g\Delta t$$

$x_n=\dfrac{k\Delta t}{m}\left(v_n-\dfrac{m}{2k\Delta t}\right)$, $a=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{gk(\Delta t)^2}{m}$ 으로 놓으면 $x_{n+1}=a-x_n^2$

대학출제 문제 3-2

(대학발표 예시답안)

(a)

[문제 3-1]에서 $x_0 = \frac{k\Delta t}{m}v_0 - \frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{4} + \frac{gk(\Delta t)^2}{m}$ 인 것을 알 때 (사실)에서 주어진 조건을 해석할 수 있는지 묻는 문제이다.

(가) $-\frac{1}{4} \le a \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le \frac{gk(\Delta t)^2}{m} - \frac{1}{4} \le 0 \Leftrightarrow 0 \le \frac{gk(\Delta t)^2}{m} \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 \le (\Delta t)^2 \le \frac{1}{4}\frac{m}{gk}$

(나) $-\frac{1}{2} \le x_0 < 0$

(i) $v_0 = 0$ 이면 $x_0 = -\frac{1}{2}$: 주어진 조건 만족

(ii) $v_0 \neq 0$ 이면 $-\frac{1}{2} \le x_0 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{k\Delta t}{m}v_0 - \frac{1}{2} \le 0 \Leftrightarrow 0 \le \Delta t \le \frac{1}{2}\frac{m}{v_0 k}$

(가)와 (나) 모두 만족해야 하므로

$v_0 = 0$ 이면 $0 \le \Delta t < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}}$

$v_0 \neq 0$ 이면 $0 \le \Delta t \le \min\left(\frac{1}{2}\frac{m}{v_0 k}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}}\right)$

(b)

(가) 종단속도를 해석하는 방법에 따라 여러 가지로 구할 수 있다.

(i) (가속도)=0 , (ii) $\lim_{n\to\infty} v_n = v$, (iii) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 일 때 v_n 의 극한

(i) $m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$ 에서 $\frac{dv}{dt} = 0$ 이므로 $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$

(ii) (식 1)에서 $\lim_{n\to\infty} v_n = v$

$m\frac{v-v}{\Delta t} = mg - kv^2$ 이므로 $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$

(iii) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 이면 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$

$x = \frac{k\Delta t}{m}v - \frac{1}{2}$ 이고 $x \ge -\frac{1}{2}$ 이므로 $v = \left(x + \frac{1}{2}\right)\frac{m}{k\Delta t}$ 에서 $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$

(나)

$x_n = \frac{k\Delta t}{m}\left(v_n - \frac{m}{2k\Delta t}\right) = \frac{k\Delta t}{m}v_0 - \frac{1}{2}$

$$x_{n+1}-x_n=\left(\frac{k\Delta t}{m}v_{n+1}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{k\Delta t}{m}v_n-\frac{1}{2}\right)=\frac{k\Delta t}{m}(v_{n+1}-v_n)$$

$$x_n \le x_{n+1} \Leftrightarrow v_n \le v_{n+1} \quad \left(\because \frac{k\Delta t}{m}>0\right)$$

그러므로 x_n 이 증가하면 v_n 도 증가하고, x_n 이 감소하면 v_n 도 감소한다. 지문에 주어진 (사실)에서 x_n 이 증가하거나 x_n 이 감소한다고 하였으므로, v_n 이 증가하거나 v_n 이 감소한다. 그러므로 v_n 은 v_0 와 종단속도 사이의 값이다.

발간위원

기획

노민구	부산광역시교육청 교육국장
박경옥	부산광역시교육청 중등교육과장
정대호	부산광역시교육청 중등교육과 장학관
양창호	부산광역시교육청 중등교육과 장학사

집필

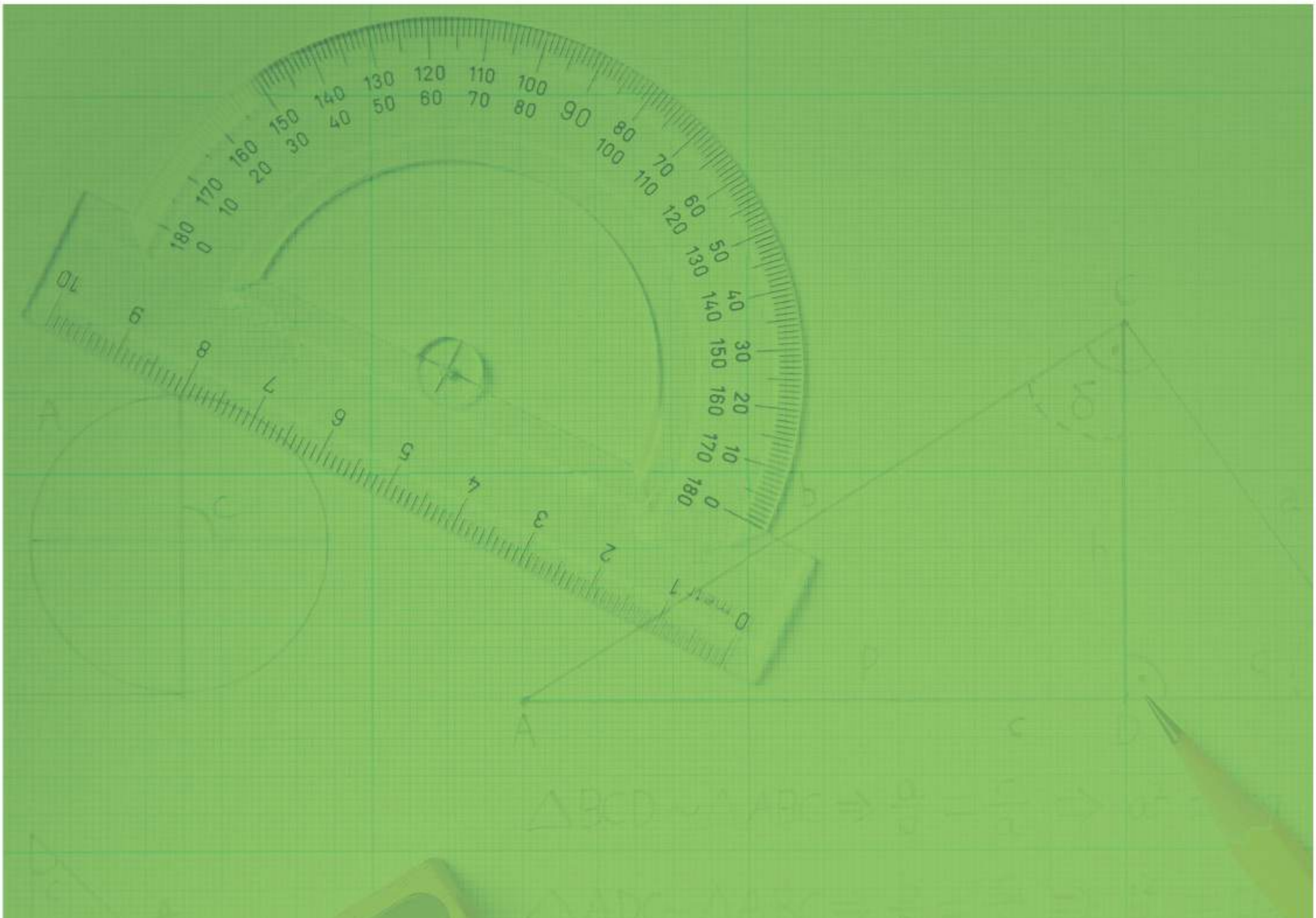
김정수	부산사대부설고등학교
김무진	부산과학고등학교
김태형	부산과학고등학교
김학철	만덕고등학교
김현미	낙동고등학교
박윤효	부산국제고등학교
박철호	금정고등학교
신동연	부산고등학교
원태경	동래고등학교
위성미	부산사대부설고등학교
이재식	동래고등학교
임승윤	금정고등학교
임재석	부산사대부설고등학교
전현수	부산국제외국어고등학교
조동석	부산강서고등학교
조준혁	동천고등학교

수리논술나침반 Ⅶ

인쇄 · 발행일 2015년 6월

편집 · 발행처 부산광역시교육청 중등교육과
(부산광역시 부산진구 화지로 12)

* 이 책 내용의 일부 또는 전체를 변경하거나 복제하여 사용할 수 없습니다.



부산광역시교육청
BUSAN METROPOLITAN CITY OFFICE OF EDUCATION

614-703 부산광역시 부산진구 화지로 12
Tel. 051)860-0315 **Fax.** 051)860-0319
http://www.pen.go.kr/