■ 서울대학교 2019학년도 기출문제

[문제 1]

좌표평면 위에 다음과 같은 영역 S, T가 있다.

$$S=\{(x,y)\,|\,|y|>x^2\},\quad T=\{(x,y)\,|\,0<|y|<|x|\}$$

그리고 주어진 점 (x,y)에 대하여 다음 시행 (P)와 시행(Q)를 생각해 보자.

시행 (P) : (1) 0이 아닌 정수 m을 하나 선택한다.

(2) (x,y)를 $(x^2+2my,\ y)$로 바꾼다.

시행 (Q) : (1) 0이 아닌 정수 n을 하나 선택한다.

(2) (x,y)를 $(\sqrt{|x|},\ y+2nx)$로 바꾼다.

논제 1. 영역 S에 속하는 점 (x,y)에 대하여 시행 (P)를 행하여 얻어지는 점은 항상 영역 T에 속하게 됨을 보이시오.

논제 2. 점 (x,y)에서 시작하여 시행 (Q)와 시행 (P)를 번갈아가면서 적용하되 반드시 첫 번째 시행은 (Q)이도록 한다. 만약 한 번 이상의 시행 이후 다시 시작점 (x,y)로 돌아올 수 있으면, 점 (x,y)를 '되돌이점'이라고 부르자.

예 1 : 점 $(0,0)$은 되돌이점이다. $(0,0)\rightarrow(0,0)$ ($n=1$을 선택하여 시행 (Q)를 행한다)

예 2 : 점 $(1,2)$는 되돌이점이다.

$(1,2)$ $\rightarrow(1,0)$ ($n=-1$을 선택하여 시행 (Q)를 행한다)

$\rightarrow(1,0)$ ($m=1$을 선택하여 시행 (P)를 행한다)$\rightarrow(1,2)$ ($n=1$을 선택하여 시행 (Q)를 행한다)

점 $(1,0)$은 되돌이점인지 판정하고, 그 이유를 설명하시오.

[풀 이]

논제 1. 영역 S에 속하는 점 (x,y)는 $|y|>x^2$을 만족하는 점이다. 시행 P를 통해 이 점 (x,y)를 $(x^2+2my,\ y)$로 바꾸면 영역 T에 속한다. 영역 T에 속하는 점 (x,y)는 $0<|y|<|x|$를 만족하는 점이다.

그렇다면 $|y|>x^2$을 만족하는 점이 $0<|y|<|x^2+2my|$를 만족해야 한다. $|y|>x^2$을 만족하는 점은 $x^2\geq 0$이므로 $|y|$가 0이 될 수 없다. 따라서 $0<|y|$는 성립하므로 $|y|<|x^2+2my|$만 증명하면 된다.

$|y|>x^2 \Rightarrow |x^2+2my|^2-y^2>0$ (단 m은 0이 아닌 정수)

위 식이 성립함을 보여야 한다.

$|x^2+2my|^2-|y|^2=(x^2+2my+y)(x^2+2my-y)=(x^2+(2m+1)y)(x^2+(2m-1)y)$

$2m+1$과 $2m-1$은 연속하는 두 홀수이며, m은 0이 아니므로 두 홀수의 부호는 같다.

그렇다면 $(2m+1)y$와 $(2m-1)y$의 부호도 같다.

경우를 나누어 $|y|>x^2$을 적용하여 $x^2+(2m+1)y$의 부호와 $x^2+(2m-1)y$의 부호가 같고 0이 될 수 없음을 확인하자. 이것이 맞다면 $|y|>x^2 \Rightarrow |x^2+2my|^2-y^2>0$ 이 식의 부등식이 성립한다.

(1) $y>0,\ 2m\pm1>0 : (2m\pm1)y>0 \Rightarrow x^2+(2m\pm1)y>0$

(2) $y>0,\ 2m\pm1<0 : y>x^2 \Rightarrow (2m\pm1)y<(2m\pm1)x^2 \Rightarrow x^2+(2m\pm1)y<x^2+(2m\pm1)x^2$

$=(2m+2)x^2,\ 2mx^2\leq 0$

(1)의 경우 당연히 두 식의 부호가 양수이므로 곱은 양수이다.

(2)의 경우는 정수 m이 음의 정수일 때이므로 두 식의 부호는 모두 음수이다. 따라서 곱은 양수이다.

(3) $y<0,\ 2m\pm1>0 : y<-x^2 \Rightarrow (2m\pm1)y<-(2m\pm1)x^2 \Rightarrow x^2+(2m\pm1)y<x^2-(2m\pm1)x^2$

$=-2mx^2,\ -(2m-2)x^2\leq 0$

(4) $y<0,\ 2m\pm1<0 : y<-x^2 \Rightarrow (2m\pm1)y>-(2m\pm1)x^2 \Rightarrow x^2+(2m\pm1)y>x^2-(2m\pm1)x^2$

$=-2mx^2,\ -(2m-2)x^2\geq 0$

이상 네 경우 모두 두 식의 부호가 같고 따라서 곱은 양수이다. 이 문제의 핵심은 m이 0이 아닌 정수에 있다는 점이다. 이상으로 영역 S에 속하는 모든 점은 시행 P에 의하여 영역 T에 속하게 된다.

논제 2. 점 (x, y)를 $(\sqrt{|x|}, y+2nx)$로 바꾸는 것이 시행 Q이다. n은 m과 마찬가지로 0이 아닌 정수이다. 시행 Q부터 시작하여 시행 Q, 시행 P를 번갈아가면서 시행하여 되돌이점이 되는지를 살펴야한다. 가령 $(0,0)$은 굳이 예 1에서와 같이 $n=1$이 아니더라도 적당한 0 아닌 정수 n을 선택하여 시행 Q 한 번 만에 $(0,0)$이 되므로 $(0,0)$은 되돌이점이다.

예 2에서 점 $(1,2)$의 경우 $n=-1$을 선택하여 시행 Q를 행하면 $(1,0)$이 되고 계속하여 $m=1$을 선택하여 시행 P를 행하면 $(1,0)$이 되고 그 다음은 시행 Q차례이다.

$n=1$을 선택하면 처음 시작점인 $(1,2)$로 되돌아간다. 따라서 점$(1,2)$은 되돌이점이다.

점 $(1,0)$이 되돌이점인지 판정하고 그 이유를 설명해보자.

$(1,0) \to (1,2) \to (5,2) \to (\sqrt{5}, 10) \to (-15, 10) \to (\sqrt{15}, -20) \to (-25, -20) \to \cdots\cdots$

$(1,0) \to (1, 2n) \to (1+4mn, 2n) \to (\sqrt{|1+4mn|}, 2n+2n'(1+4mn))$

시행 Q를 행한 후의 점이 $|y| > x^2$을 만족하면 시행 P를 행한 후 $0<|y|<|x|$를 만족하는 점이 된다. 그렇다면 시행 P를 행한 후의 점의 y좌표는 0이 될 수 없다.

점 $(1,0)$에서 시작해서 최초의 시행 Q를 행한 후의 점 $(1,2n)$은 항상 $|y| > x^2$을 만족한다. 그렇다면 시행 P를 행한 후에 이 점은 $0<|y|<|x|$를 만족한다. y좌표는 0이 아니다.

이 조건에서 시행 Q를 행한 후의 점이 항상 $|y| > x^2$을 만족한다면, 확실히 시행 P를 행한 후의 점의 y좌표는 0으로 되돌아 갈 수 없으므로, 되돌이점이 되려면 시행 Q를 행한 후의 점의 y좌표가 0이 되어야 한다. 그런데, 시행 Q를 행한 후의 점이 $|y| > x^2$를 만족한다고 가정했으므로 이때 y좌표가 0이 될 수 없다. 그렇다면 '이 조건에서 시행 Q를 행한 후의 점이 항상 $|y| > x^2$을 만족한다'는 가정이 성립한다면 점 $(1,0)$은 되돌이점이 될 수 없다.

시행 $Q: (x, y) \to (\sqrt{|x|}, y+2nx)$

$|y+2nx| > |x|$

$\therefore 0<|y|<|x| \Rightarrow |y+2nx|^2 - |x|^2 > 0$

$|y+2nx|^2 - |x|^2 = (y+2nx+x)(y+2nx-x) = (y+(2n+1)x)(y+(2n-1)x)$

n이 0이 아닌 정수이므로 연속하는 두 홀수 $2n+1$과 $2n-1$의 부호가 같고, (x, y)가 몇 사분면에 있는지 총 8가지 경우로 나누어 생각해야 한다.

(1) $x>0, y>0, 2n\pm1>0$인 경우, 두 식 $y+(2n+1)x, y+(2n-1)x$ 모두 양수이므로 곱이 양수이다.

(2) $x<0, y<0, 2n\pm1>0$인 경우, 두 식 모두 음수이므로 곱은 양수이다. 따라서 부등식이 성립한다.

(3) $x>0, y>0, 2n\pm1<0 : y<x \Rightarrow (2n\pm1)y > (2n\pm1)x$

$\Rightarrow y+(2n\pm1)x < y+(2n\pm1)y = (2n+2)y,\ 2ny<0$

(4) $x<0, y<0, 2n\pm1>0 : y>x \Rightarrow (2n\pm1)y > (2n\pm1)x$

$\Rightarrow y+(2n\pm1)x < y+(2n\pm1)y = (2n+2)y,\ 2ny<0$

(5) $x>0, y<0, 2n\pm1>0 : y>-x \Rightarrow -(2n\pm1)y < (2n\pm1)x$

$\Rightarrow y+(2n\pm1)x > y-(2n\pm1)y = -2ny,\ -(2n-2)y>0$

(6) $x<0, y<0, 2n\pm1<0 : y>x \Rightarrow (2n\pm1)y < (2n\pm1)x$

$\Rightarrow y+(2n\pm1)x > y+(2n\pm1)y = (2n+2)y,\ 2ny>0$