■ 서울대학교 2018학년도 기출문제

[문제 1]

집합 $A=\{\sqrt{3},\ -\sqrt{3}\}$, $B=\{b\,|\,b$는 $-5\le b\le 5$인 정수$\}$에 대하여 좌표평면 위의 직선들이 아래와 같이 주어져 있다. $ax+y+b=0\ (a\in A,\ b\in B)$

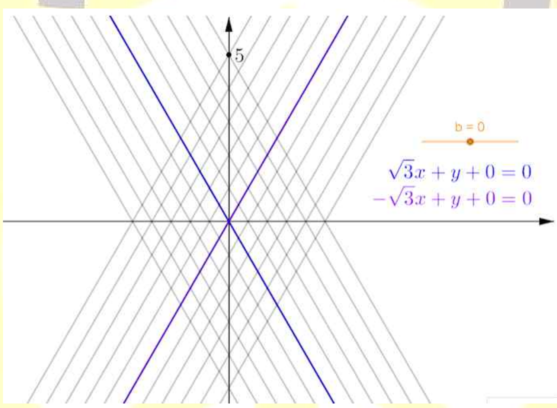
논제 1. 위의 직선들은 평면을 몇 개의 영역으로 나누는가?

논제 2. 두 점 $P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)$에 대하여 부등식 $(ax_1+y_1+b)(ax_2+y_2+b)<0$을 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 $n(P,\ Q)$라고 하자. (단, $a\in A,\ b\in B$) 원점 $O(0,\ 0)$에 대하여 $n(P,\ O)\le 1$을 만족하는 점 P의 집합을 좌표평면 위에 표시하고, 그 넓이를 구하시오.

논제 3. 원점 O에서 거리가 r인 적어도 하나의 점 P에 대하여 $n(P,\ O)\ge 3$이 성립하기 위한 r의 범위를 구하시오.

[풀 이]

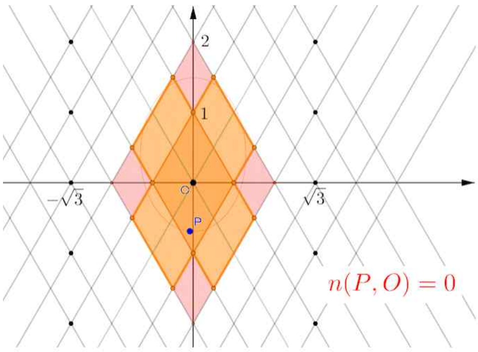
논제 1. $y=-ax-b$이므로 기울기는 $\pm\sqrt{3}$이고 y절편이 $-5,\ -4,\ \cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 4,\ 5$인 직선들이다. 직선의 개수는 총 22개이다. 이 직선들은 좌표평면에 표현하면 아래 그림과 같다.



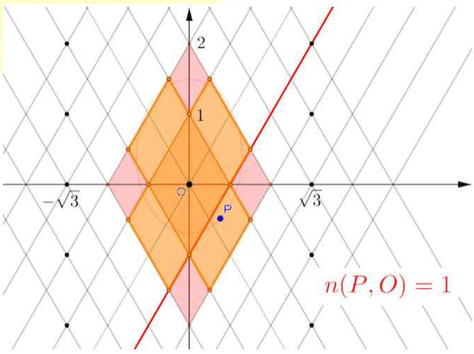
그림에서 보듯이 두 쌍의 평행선으로 만들어지는 마름모가 $10\times 10=100$개가 있고 한 쌍의 평행선과 다른 직선으로 만들어지는 영역이 $10\times 4=40$개가 있고 상하좌우에 두 개의 직선으로 둘러싸인 영역 4개가 있다. 따라서 144개이다.

논제 2. $(ax_1+y_1+b)(ax_2+y_2+b)<0$의 의미는 두 점 사이를 지나는 직선을 의미한다. 그리고 이 직선은 하나의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대응이 된다.

$n(P,\ O)\le 1$인 경우는 $n(P,\ O)=0$과 $n(P,\ O)=1$인 경우로 나눌 수 있다.



[그림 1]



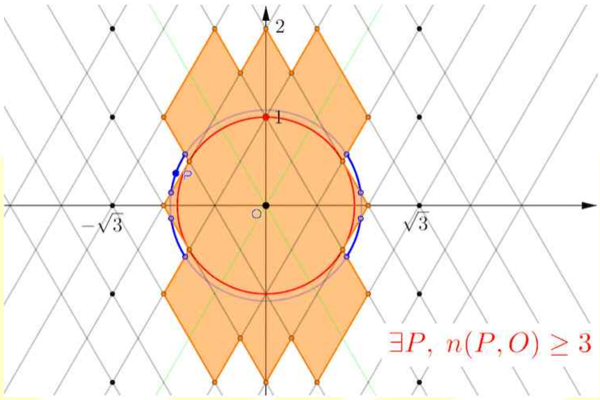
[그림 2]

[그림 1]의 $y=\sqrt{3}x+1,\ y=\sqrt{3}x-1,\ y=-\sqrt{3}x+1,\ y=-\sqrt{3}x-1$인 네 개의 직선으로 둘러싸인 영역에 점 P가 있으면 원점과 P 사이를 지나는 직선이 없다. 따라서 $n(P,\ O)=0$이다.

[그림 2]에서 1사분면에서 $y=-\sqrt{3}x+1, y=-\sqrt{3}x+2, y=\sqrt{3}x+1, y=\sqrt{3}x+2$로 둘러싸인 영역에 점 P가 있으면 원점과 P 사이를 지나는 직선은 $y=-\sqrt{3}x+1$ 밖에 없다. 따라서 $n(P, O)=1$이다.
이 영역을 x축 대칭, y축 대칭, 원점 대칭을 시킨 영역도 $n(P, O)=1$이다.

따라서 구하는 영역의 넓이는 $S=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot1=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$이다.

논제 3. 아래 그림에서 색칠한 다각형의 내부(경계 포함)에 점 P가 있으면 원점과 점 P 사이에는 3개 미만의 직선이 존재한다. 따라서 이 다각형의 외부에 있으면 원점과 점 P 사이에는 3개 이상의 직선이 있다. 두 영역의 경계에 있는 점들 중 원점으로부터 가장 가까운 점은 거리가 1이므로 $r>1$이면 된다.



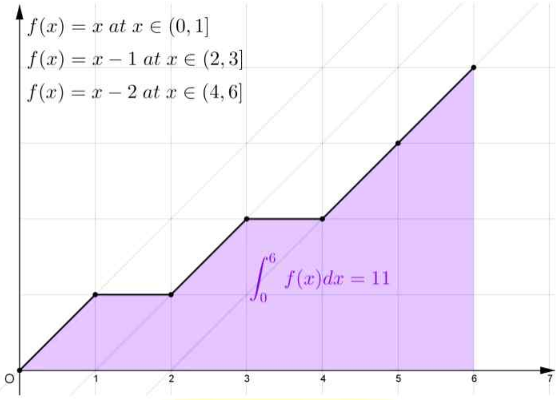
[문제 2]
동전을 n번 던지는 시행을 통해, 정의역이 $[0, n]$인 함수 f를 다음과 같이 정의한다.
(1) $f(0)=0$
(2) $k=1, 2, \cdots, n$일 때, 구간 $(k-1, k]$에서

$$f(x)=\begin{cases} x-k+1+f(k-1) & (k\text{번째 시행에서 앞면이 나오는 경우}) \\ f(k-1) & (k\text{번째 시행에서 뒷면이 나오는 경우}) \end{cases}$$

함수 f의 정적분 $\int_0^n f(x)dx$의 값을 확률변수 X라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

논제 1. $n=6$일 때, 동전이 앞면, 뒷면, 앞면, 뒷면, 앞면, 앞면의 순서로 나온 경우 확률변수 X의 값을 구하시오.
논제 2. 확률변수 X가 가질 수 있는 값의 집합을 S_n이라고 할 때 S_n과 S_{n+1} 사이에 다음 관계 $S_{n+1}=S_n\cup\left\{s+\frac{2n+1}{2}\,\middle|\, s\in S_n\right\}$가 성립함을 보이고, S_6의 원소의 개수를 구하시오.
논제 3. 확률변수 X의 기댓값을 E_n이라고 할 때 E_{11}의 값을 구하시오.

[풀 이]
논제 1. 각 구간별로 함수를 구하면 $(0, 1]$에서 $f(x)=x$, $(1, 2]$에서 $f(x)=f(1)=1$, $(2, 3]$에서 $f(x)=x-1$, $(3, 4]$에서 $f(x)=2$, $(4, 6]$에서 $f(x)=x-2$이다. 이 결과를 그래프로 나타내면 아래 그림과 같다. 그림에서 넓이를 구하면 11이다.

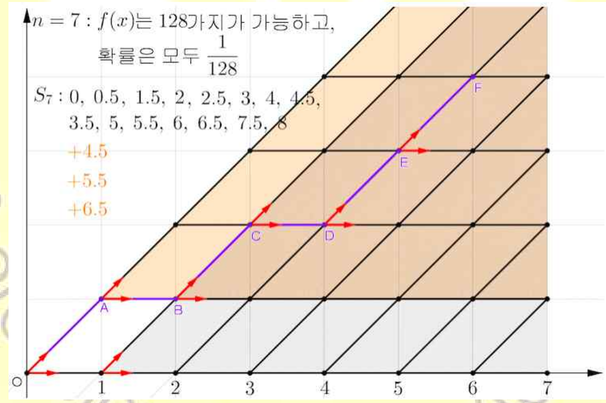


논제 2. 주어진 함수 $f(x)$를 해석하면 다음과 같다.

$f(x)=x-(k-1)+f(k-1)$은 $(k-1,\,f(k-1))$을 지나는 기울기가 1인 직선이고 $f(x)=f(k-1)$은 $(k-1,\,f(k-1))$을 지나는 기울기가 0인 직선이다. 따라서 $f(x)$의 그래프는 앞면이 나오면 45° 오른쪽으로 한 칸 올라가고, 뒷면이 나오면 길이가 1만큼 $f(k-1)$을 유지하면 된다.

따라서 $n=1$일 때는 두 종류의 함수가 가능하고, $n=2$일 때는 네 종류의 함수가 가능하여 정의역이 $[0,\,n]$인 경우는 2^n개의 함수가 가능하다. 그리고 각각의 함수가 만들어질 확률은 $\frac{1}{2^n}$이다.

정적분의 범위는 모두 뒷면이 나온 경우인 0부터 모두 앞면이 나온 경우인 $\frac{1}{2}\cdot 2^n$ 사이가 된다.



규칙성을 파악하기 위하여 $S_1,\,S_2$를 구하도록 하자. 위 그림에서 $S_1=\left\{0,\,\frac{1}{2}\right\},\ S_2=\left\{0,\,\frac{1}{2},\,\frac{3}{2},\,2\right\}$이다.

S_2의 원소는 S_1의 원소도 가지고 각각의 값에 $\frac{3}{2}$을 더한 값을 원소로 가지고 있다는 것을 발견할 수 있다. S_2의 원소 중 $0,\,\frac{1}{2}$인 경우는 첫 번째에 뒷면이 나온 경우이고 이는 S_1의 두 경우를 x축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동하면 일치한다. 이 경우 x축과 둘러싸인 넓이는 같으므로 $0,\,\frac{1}{2}$가 S_2의 원소가 되는 것이다.

$\frac{3}{2},\,2$의 경우는 첫 번째에 앞면이 나온 경우인데 S_1의 두 경우를 x축의 양의 방향으로 1만큼, y축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동하면 일치한다. 이 경우 x축과 둘러싸인 넓이는 각각의 경우에 대하여 직각이등변삼각형과 정사각형 한 개가 더해지므로 $0+\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{3}{2}$가 S_2의 원소가 되는 것이다.

이를 일반화하면 S_{n+1}의 원소 2^{n+1}개 중에서 첫 번째가 뒷면이 나온 경우(2^n)는 S_n의 각 경우를 x축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동한 경우이고 첫 번째가 앞면이 나온 경우(2^n)는 S_n의 각 경우를 x축

의 양의 방향으로 1만큼, y축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동한 경우이므로 각각의 값에 직각이등변 삼각형 한 개와 n개의 정사각형 넓이가 더해진다. 따라서 $n+\frac{1}{2}=\frac{2n+1}{2}$가 더해진다.

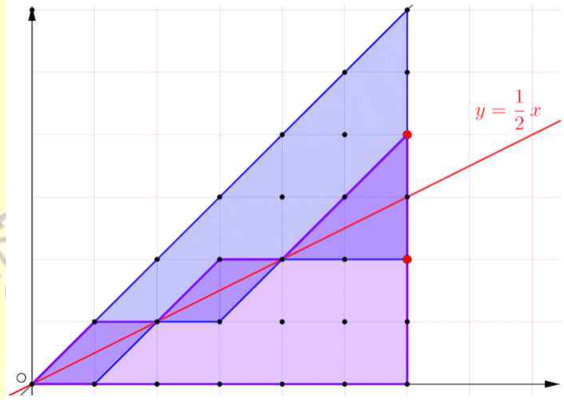
따라서 $S_{n+1}=S_n\cup\left\{s+\frac{2n+1}{2}\ \middle|\ s\in S_n\right\}$가 성립하고 이 관계식을 이용하여 S_6을 구하도록 하자. 먼저 S_3, S_4를 구하면 $S_3=\{0, 0.5, 1.5, 2, 2.5, 3, 4, 4.5\}$, $S_4=\{0, 0.5, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 5.5, 6, 6.5, 7.5, 8\}$이다. 1은 제외하고 0부터 0.5 간격으로 등차수열을 이루면서 $\frac{n^2}{2}$까지 나올 수 있다. 0을 1로 생각하면 경우의 수는 n^2이다.

$n=3$인 경우 $1+2.5=3.5$가 존재하지 않고 $n=4$인 경우 $1+2.5+3.5=7$이 존재하지 않고, $n=5$인 경우 $1+2.5+3.5+4.5=11.5$가 존재하지 않고 $n=6$인 경우 $1+2.5+3.5+4.5+5.5=17$이 존재하지 않는다. S_1에 존재하지 않았던 1 때문에 n^2개에서 1개를 제외한 수 n^2-1이 S_n의 원소의 개수가 된다.

따라서 S_6의 원소의 개수는 35이다.

논제 3. 서로 다른 2^n개의 함수가 만들어지고 $f(x)$의 정적분 값이 확률변수 X이다. X는 최소값 0에서 최댓값 $\frac{2^n}{2}$까지 $n^2-1\ (n\geq 3)$개의 서로 다른 값을 가지는 이산확률변수이다. 하지만 이 분포를 직접 구하는 것은 쉽지 않다. 논제에서 요구하는 것은 기댓값이므로 분포를 구하지 않고 기댓값을 구하는 방법을 생각해보자.

동전을 11번 던지는 시행이면 서로 다른 함수의 개수는 2048개이고, 확률변수가 가지는 값은 120개입니다. 최솟값이 0이고 최댓값이 60.5이므로 이 분포가 30.25에서 대칭이 된다는 것을 설명하도록 하자.



위의 그림은 $n=6$인 경우이고 두 개의 경로는 논제 1에서 앞면, 뒷면, 앞면, 뒷면, 앞면, 앞면인 경우와 반대인 뒷면, 앞면, 뒷면, 앞면, 뒷면, 뒷면인 경우를 그린 것이다. $y=\frac{1}{2}x$를 기준으로 두 경로와 $y=\frac{1}{2}x$로 둘러싸인 면적은 같다. 따라서 두 경로가 x축과 이루는 넓이의 합은 $\frac{6^2}{2}$가 되고 각각의 확률은 같다. 이를 일반화하면 두 경로의 앞면과 뒷면을 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x$를 기준으로 두 경로와 $y=\frac{1}{2}x$로 둘러싸인 면적은 같다. 그래서 두 경로가 x축과 이루는 넓이의 합은 $\frac{n^2}{2}$가 되고 각각의 확률은 같다. 따라서 기댓값은 $\frac{n^2}{4}$가 된다.

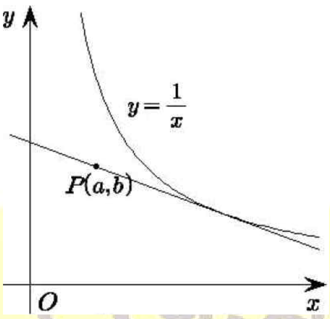
$P(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, 3, \cdots, 11^2-1)$이라 하면 $p_1=p_{120}, p_2=p_{119}, \cdots, p_{60}=p_{61}$이다.

$E_{11}=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_{60}p_{60}+x_{61}p_{61}+\cdots+x_{119}p_{119}+x_{120}p_{120}$

$=(x_1+x_{120})p_1+(x_2+x_{119})p_2+\cdots+(x_{60}+x_{61})p_{60}=60.5(p_1+p_2+\cdots+p_{60})=60.5\times\frac{1}{2}=30.25$

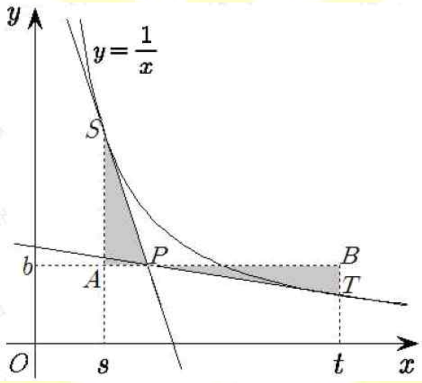
[문제 3]

좌표평면 상의 점 $P(a,b)$에서 정의역이 $\{x\,|\,x>0\}$인 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프에 접선을 그리자.



논제 1. 두 개의 접선을 그릴 수 있는 점 P의 집합에 대해 설명하시오.

논제 2. 점 P에서 두 개의 접선을 그릴 수 있다고 할 때 두 접점을 각각 $S\left(s,\frac{1}{s}\right)$, $T\left(t,\frac{1}{t}\right)$ $(0<s<t)$ 라고 하자. 점 P를 지나면서 x축에 평행한 직선과 각 접점을 지나면서 y축에 평행한 직선이 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 SAP의 넓이와 삼각형 PBT의 넓이의 차를 구하시오.



논제 3. 논제 2에서 그린 두 접선과 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 $I(P)$라고 하자. 이때 $I(P)=\int_s^t\left(\frac{1}{x}-C\right)dx$를 만족하는 상수 C를 a, b를 사용하여 나타내시오.

논제 4. 두 양수 a, b가 $ab=\frac{3}{4}$을 만족할 때, $I(P)$의 값을 구하시오.

[풀 이]

논제 1. $\left(t,\frac{1}{t}\right)$에서 접선의 방정식은 $y-\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}(x-t)$이고 (a,b)를 지나므로 $b-\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}(a-t)$를 만족한다. 식을 정리하면 $bt^2-2t+a=0$인데 두 개의 접선을 그릴 수 있다는 것은 접점의 2개라는 의미이다. 따라서 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

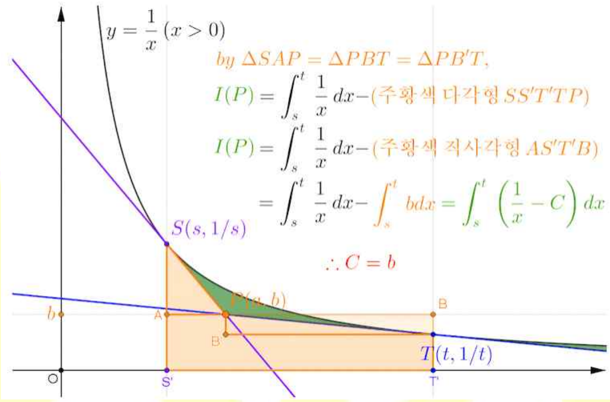
따라서 $D/4=1-ab>0$에서 $b<\frac{1}{a}$이다.

논제 2. 논제 1의 방정식 $bx^2-2x+a=0$의 두 실근이 s, t가 되므로 $s+t=\frac{2}{b}$, $st=\frac{a}{b}$가 성립한다.

삼각형 SAP의 넓이를 S_1이라 하면 $S_1=\frac{1}{2}(a-s)\left(\frac{1}{s}-b\right)$이고 삼각형 PBT의 넓이를 S_2라 하면 $S_2=\frac{1}{2}(t-a)\left(b-\frac{1}{t}\right)$이다. $|S_1-S_2|=\frac{1}{2}\cdot\frac{t-s}{st}(a-bst)$인데 $st=\frac{a}{b}$이므로 $|S_1-S_2|=0$이다.
따라서 $S_1=S_2$가 성립한다.

논제 3. $I(P)=\int_s^t\frac{1}{x}dx-($다각형 $SS'T'TP)$에서 논제 2의 결과를 이용하면

$I(P)=\int_s^t\frac{1}{x}dx-($직사각형 $AS'T'B)=\int_s^t\frac{1}{x}dx-\int_s^t b\,dx=\int_s^t\left(\frac{1}{x}-C\right)dx$이다. 따라서 $C=b$



논제 4. 방정식 $bx^2-2x+a=0$에서 근의 공식으로 $s=\frac{1-\sqrt{1-ab}}{b}, t=\frac{1+\sqrt{1-ab}}{b}$를 구할 수 있다.

$I(P)=\int_s^t\left(\frac{1}{x}-b\right)dx=\Big[\ln x-bx\Big]_s^t=\ln\frac{t}{s}-b(t-s)=\ln\frac{1+\sqrt{1-ab}}{1-\sqrt{1-ab}}-2\sqrt{1-ab}$에서 $ab=\frac{3}{4}$를 대입하면 $I(P)=\ln3-1$이다.

[문제 4]
두 실수 $a, b\ (0<a<b)$에 대하여 곡선 $y=x^3+16$ 위의 점 $(t, t^3+16)\ (a\le t\le b)$에서 접선 l을 그리자. 이때 접선 l과 곡선 $y=x^3+16$ 및 두 직선 $x=a, x=b$로 둘러싸인 도형을 S라고 하자.

논제 1. 접선 l의 방정식이 $y=cx+d$일 때, $x\ge0$이면 $cx+d\le x^3+16$임을 보이시오.
논제 2. 도형 S의 넓이가 최소가 되는 t의 값을 구하고 $b=2a$인 경우 S의 넓이의 최솟값을 a를 사용하여 나타내시오.
논제 3. 논제 2에서 최소넓이를 이루는 접선, x축 및 두 직선 $x=a, x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $T(a, b)$라고 할 때, 다음 급수의 합을 구하시오. $\sum_{k=0}^{\infty}T(2^{-k}, 2^{-k+1})$

[풀 이]
논제 1. $f(x)=x^3+16$이라 하면 $y=cx+d=f'(t)(x-t)+f(t)$이다. $g(x)=f(x)-f'(t)(x-t)-f(t)$라 하고 $x\ge0$에서 $g(x)\ge0$인 것을 보이도록 하자.
$g(x)=(x^3+16)-(3t^2x-2t^3+16)=x^3-3t^2x+2t^3$이고 $g'(x)=3x^2-3t^2=0$에서 $x=t$이다. 증감표를 통해서 확인하면 $x=t$에서 극소이다. 따라서 $x\ge0$에서 $g(x)$는 $x=t$에서 최소가 된다.
$g(t)=t^3-3t^3+2t^3=0$이므로 $x\ge0$에서 $g(x)\ge0$이다. 따라서 $cx+d\le x^3+16$이다.

논제 2. $S=\int_a^b(x^3+16-cx-d)\,dx=\int_a^b(x^3-3t^2x+2t^3)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}t^2x^2+2t^3x\right]_a^b$

$=\dfrac{b^4-a^4}{4}-\dfrac{3}{2}t^2(b^2-a^2)+2t^3(b-a)$이다. t에 대한 함수이므로 $S(t)=\dfrac{b^4-a^4}{4}-\dfrac{3}{2}t^2(b^2-a^2)+2t^3(b-a)$이고 $S'(t)=6(b-a)t^2-3(b^2-a^2)t=0$에서 $t=\dfrac{a+b}{2}$를 얻을 수 있고 이때 최소가 된다.

따라서 넓이는 $S\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=\dfrac{b^4-a^4}{4}-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2(b^2-a^2)+2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3(b-a)$이고 $b=2a$를 대입하면 $S\left(\dfrac{3}{2}a\right)=\dfrac{15}{4}a^4-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{9}{4}a^2\cdot 3a^2+2a\cdot\dfrac{27}{8}a^3=\dfrac{3}{8}a^4$이다.

논제 3. 구하고자 하는 사다리꼴이고 구간 $[a, b]$의 중점 $\dfrac{a+b}{2}$에서의 접선으로 둘러싸인 넓이이므로 밑변이 $b-a$이고 높이가 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$인 직사각형의 넓이와 같다. 따라서 $T(a, b)=(b-a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$이고 $T(2^{-k}, 2^{-k+1})$는 $T(a, 2a)$형태이므로 $T(a, 2a)=\dfrac{27}{8}a^4+16a$이다.

따라서 $T(2^{-k}, 2^{-k+1})=\dfrac{27}{8}\left(\dfrac{1}{16}\right)^k+16\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$이고 $\sum_{k=0}^{\infty}T(2^{-k}, 2^{-k+1})=\dfrac{27}{8}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{16}}+16\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{178}{5}$이다.