■ 서울대학교 2017학년도 기출문제

[문제 1]

수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자. $a_n = (2+\sqrt{5})^n \ (n=1, 2, 3, \cdots)$

논제 1. 다음 조건을 만족하는 실수 r이 단 하나 존재함을 보이시오.

모든 자연수 n에 대하여 $a_n + r^n$은 짝수인 정수이다.

논제 2. 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하는 경우 그 극한값을 구하시오.

$$\left\{\cos\left(a_n\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

[풀 이]

논제 1. 일단 $n=1$이면 $2+\sqrt{5}+r=$(짝수)가 될 수 있는 r은 $2k-\sqrt{5}$ 형태이다.
$n=2$이면 $(2+\sqrt{5})^2+r^2=$(짝수)이고 이를 정리하면 $r^2=(2m-1)-4\sqrt{5}$이다. $n=1$일 때 만족하는 $r=2k-\sqrt{5}$를 제곱하면 $4k^2+5-4k\sqrt{5}$이고 $4k^2+5-4k\sqrt{5}=(2m-1)-4\sqrt{5}$를 만족하는 k의 값은 1로 유일하다. 따라서 $n=1, 2$일 때 조건을 만족하는 $r=2-\sqrt{5}$이다.
이제 모든 자연수 n에 대하여 성립하는 것을 보이도록 하자.
$(2+\sqrt{5})^n = {}_nC_0 2^n + {}_nC_1 2^{n-1}\sqrt{5} + {}_nC_2 2^{n-2}(\sqrt{5})^2 + \cdots$이고
$(2-\sqrt{5})^n = {}_nC_0 2^n - {}_nC_1 2^{n-1}\sqrt{5} + {}_nC_2 2^{n-2}(\sqrt{5})^2 + \cdots$이므로 두 식을 더하면

$$(2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n = 2\left\{{}_nC_0 2^n + {}_nC_2 2^{n-2}(\sqrt{5})^2 + {}_nC_4 2^{n-4}(\sqrt{5})^4 + \cdots\right\} = 2\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} {}_nC_{2i} \cdot 2^{n-2i} \cdot 5^i \text{이다.}$$

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $(2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n$은 짝수이다. 따라서 $r=2-\sqrt{5}$이다.
논제 2. 논제 1에 의하여 $(2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n = 2k$라 할 수 있는데 $0 < |2-\sqrt{5}| < 1$이므로 $(2-\sqrt{5})^n$의 극한값은 0이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}(2+\sqrt{5})^n = \lim_{n\to\infty}(2m-(2-\sqrt{5})^n) = 2m$이다.

$f(x)=\cos x$는 연속함수이므로 $\lim_{n\to\infty}\cos a_n = \cos\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$이 성립한다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\cos\left(a_n\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\lim_{n\to\infty} a_n\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2m\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$이다.

[문제 2]

함수 $f(x)$는 집합 $\{x \mid x \ge 0\}$에서 정의된 연속함수이며 $f(0)=0$을 만족한다. 0 이상의 실수 x에 대하여 함수 f의 $\{t \mid 0 \le t \le x\}$에서의 최솟값을 $f_0(x)$라고 하자. 또 정의역이 $\{x \mid x \ge 0\}$인 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자. $g(x) = f(x) - f_0(x)$

예를 들어, $f(x) = -\sin(2\pi x)$이면, $f_0\left(\frac{1}{2}\right) = -1$이고 $g\left(\frac{1}{2}\right) = 1$이다.

논제 1. 함수 $f(x) = -\sin(2\pi x)$에 대하여 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=0, x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

논제 2. 함수 $f(x) = \begin{cases} -x+2k & (3k \le x \le 3k+2) \\ x-4k-4 & (3k+2 \le x \le 3k+3) \end{cases}$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$에 대하여 함숫값 $g(2017)$과 정적분 $\int_0^{2017} g(x)\,dx$의 값을 구하시오.

논제 3. 정의역의 모든 x에 대하여 $g(x)=x$인 함수 $f(x)$를 모두 구하시오.

논제 4. 정의역의 모든 x에 대하여 $g(x)=x$인 함수 $f(x)$는 $f(x)=x$ 밖에 없음을 보이시오.

[풀 이]

논제 1. $f_0(x)=\begin{cases}-\sin(2\pi x) & \left(0\le x\le \frac{1}{4}\right)\\ -1 & \left(\frac{1}{4}\le x\le 1\right)\end{cases}$이고 $g(x)=\begin{cases}0 & \left(0\le x\le \frac{1}{4}\right)\\ 1-\sin(2\pi x) & \left(\frac{1}{4}\le x\le 1\right)\end{cases}$이다.

따라서 $\int_0^1 g(x)\,dx=\int_{\frac{1}{4}}^1 (1-\sin(2\pi x))\,dx=\left[x+\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x)\right]_{\frac{1}{4}}^1=\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}$

논제 2. 추론을 하기 위해서 그래프를 그려 $f_0(x)$와 $g(x)$를 구하면 다음 표와 같다.

구간	$f(x)$	$f_0(x)$	$g(x)$
$0\le x\le 1$	$-x$	$-x$	0
$1\le x\le 2$	$-x$	$-x$	0
$2\le x\le 3$	$x-4$	-2	$x-2$
$3\le x\le 4$	$-x+2$	-2	$-x+4$
$4\le x\le 5$	$-x+2$	$-x+2$	0
$5\le x\le 6$	$x-8$	-3	$x-5$
$6\le x\le 7$	$-x+4$	-3	$-x+7$
$7\le x\le 8$	$-x+4$	$-x+4$	0
$8\le x\le 9$	$x-12$	-4	$x-8$
$9\le x\le 10$	$-x+6$	-4	$-x+10$

이를 정리하면 $f_0(x)=\begin{cases}-x & (0\le x\le 1)\\ -x+2k & (3k+1\le x\le 3k+2)\\ -k-2 & (3k+2\le x\le 3k+4)\end{cases}$이고 $g(x)=\begin{cases}0 & (0\le x\le 1)\\ 0 & (3k+1\le x\le 3k+2)\\ x-3k-2 & (3k+2\le x\le 3k+3)\\ -x+3k+4 & (3k+3\le x\le 3k+4)\end{cases}$이다. $\int_{3k+1}^{3k+4} g(x)\,dx=1$이고 $2017=3\times 672+1$이므로 $\int_0^{2017} g(x)\,dx=1\times 672=672$이다.

논제 3. 정의에 의하여 $g(x)=x$인 조건은 $f(x)=f_0(x)+x$이고 $f_0(0)=0$이다.

(1) $f(x)$가 증가함수이면 구간 $[0,x]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f_0(x)=f(0)=0$이다. 따라서 이때 만족하는 함수 $f(x)$는 $f(x)=x$이다.

(2) 함수 $f(x)$가 감소함수이면 $[0,x]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f_0(x)=f(x)$이고 이때 $g(x)=0$이다.

(3) 만약 함수 $f(x)$가 처음에는 증가하다가 $x=a$에서부터 감소한다면 $a<x<a+h$인 구간에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f_0(x)=f(0)=0$이면 이때 만족하는 함수 $f(x)$는 $f(x)=x$가 되어서 감소한다는 조건에 위배된다. 따라서 함수 $f(x)$는 처음에 증가하다가 중간에 감소할 수는 없다.

따라서 만족하는 함수 $f(x)=x$뿐이다.

[문제 3]

논제 1. 9개의 좌석이 일렬로 배치되어 있는 롤러코스터에 3명의 학생을 다음의 조건을 만족하도록 태우는 경우의 수를 구하여라.

연이은 두 좌석에 학생이 앉은 경우에는 앞좌석에 앉은 학생의 키가 더 작다.

단, 3명이 모두 탑승하며, 어느 두 명의 학생도 키가 같지 않다고 가정한다.

논제 2. m이 n보다 큰 자연수일 때, m개의 좌석이 일렬로 배치되어 있는 롤러코스터에 n명의 학생을 논제 1에서의 조건을 만족하도록 태우는 경우의 수를 구하시오. 단, n명이 모두 탑승하며, 어느 두 명의 학생도 키가 같지 않다고 가정한다.

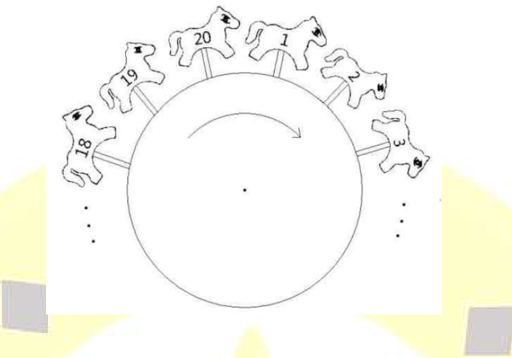
논제 3. 시계 방향으로 도는 회전목마가 있고, 이 회전목마에는 20개의 목마가 회전 방향으로 머리를

향하고 있다. 각 목마에는 시계 방향으로 1번부터 20번가지의 번호가 매겨져 있다. 다섯 쌍의 부부가 아래의 조건을 만족하면서 회전목마에 타는 경우의 수를 구하시오. 단, 열 명 모두가 탑승하며, 한 목마에는 한 명씩만 탄다.

(가) 부부인 남녀가 탄 목마 번호의 합은 21이다.

(나) 연이은 목마에 탄 두 명의 성별이 다른 경우, 여자의 앞에 남자가 탄다.

(다) 연이은 목마에 탄 두 명이 남자인 경우, 키 큰 사람이 탄 목마 앞에 키 작은 사람이 탄다. 단, 어느 두 남자의 키도 같지 않다고 가정한다.



[풀 이]

논제 1. 세 명의 학생을 A, B, C라 하고 A가 가장 작고 C가 가장 크다고 가정하자. 구하고자 하는 경우의 수는 다음 3가지로 나눌 수 있다.

(1) 세 명 모두 이웃하지 않은 경우

A 앞에 빈 좌석의 개수를 x, A와 B 사이에 빈 좌석의 개수를 y, B와 C 사이에 빈 좌석의 개수를 z, C 뒤에 빈 좌석의 개수를 w라 하자. 그러면 $x+y+z+w=6, x \geq 0, y \geq 1, z \geq 1, w \geq 0$을 만족한다. $y'=y-1, z'=z-1$이라 하면 $x+y'+z'+w=4$가 되어서 경우의 수는 ${}_4H_4={}_7C_4=35$이고 3개의 좌석에 A, B, C를 앉게 하는 방법의 수는 $3!$이다. 따라서 $35\times 3!=210$이다.

(2) 두 명만 이웃하는 경우

세 명 중에서 2명이 이웃하는 경우가 3가지이고 두 명과 한 명이 앞뒤로 서는 경우가 2이므로 경우의 수는 6가지이다.

6가지 중에서 AB가 이웃하고 C가 떨어져 있는 경우의 수를 구하도록 하자.

AB 앞에 빈 좌석의 수를 x, AB와 C 사이에 있는 빈 좌석의 수를 y, C 뒤에 빈 좌석의 수를 z라 하면 $x+y+z=6, x \geq 0, y \geq 1, z \geq 0$을 만족한다.

$y'=y-1$이라 하면 $x+y'+z=5$이므로 ${}_3H_5={}_7C_5=21$이다.

따라서 $6\times 21=126$이다.

(3) 세 명 모두 이웃하는 경우

ABC 앞에 빈 좌석의 수를 x, 뒤에 빈 좌석의 수를 y라 하면 $x+y=6, x \geq 0, y \geq 0$이므로 ${}_2H_6={}_7C_6=7$이다.

따라서 (1), (2), (3)에 의해서 $210+126+7=343$이다.

논제 2. 일반적인 경우인 논제 2를 풀기 위해서 논제 1을 다른 식으로 풀어보도록 하자.

빈 좌석이 6개가 되므로 6개 사이에 있는 7개의 공간을 생각하자. 각 공간을 ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦이라 하면 구하는 경우의 수는 중복을 허락해서 3개의 공간을 선택하는 방법이 된다.

(1) 세 명 모두 이웃하지 않은 경우는 서로 다른 3개의 공간을 선택하는 경우인데 예를 들어 ①, ②, ③을 뽑는 경우는 A, B, C를 일렬로 배열하는 방법의 수 6개와 ①, ②, ③을 일렬로 배열하는 방법의 수 6개가 일치한다.

(2) 두 명만 이웃하는 경우는 한 개의 공간을 두 번 선택하고 다른 공간을 선택하는 경우인데 예를 들어 ①, ①, ②를 뽑는 경우는 논제 1에서처럼 세 명 중에서 한 명을 따로 빼는 방법의 수 3개와 ①, ①, ②를 일렬로 배열하는 방법의 수 3개가 일치한다.

(3) 세 명 모두 이웃하는 경우는 한 개의 공간을 세 번 선택하는 경우인데 이 경우의 수는 1가지이고 A, B, C를 키 순서대로 배열하는 경우의 수 1가지와 일치한다.
따라서 전체 경우의 수는 $7^3=(9-3+1)^3=343$이다.
일반화하면 n명의 학생이 앉을 수 있는 곳은 빈 좌석 $m-n$개 사이의 공간이므로 $m-n+1$개의 공간이 있고 어디에 앉더라도 키 순서는 자동으로 정렬이 되니까 서로 다른 n명의 학생이 각각 앉을 수 있는 빈 공간은 $m-n+1$개씩이다. 따라서 $(m-n+1)^n$이 정답이다.
논제 3. 조건 (가)를 보면 부부가 탄 목마 번호의 합은 21이므로 남편의 자리가 결정되면 아내의 자리는 자동으로 결정된다. 즉 1에서 10까지 목마에 부부 중 한 명이 타면 11에서 20까지 목마에 타는 사람이 결정된다. 그런데 1번 목마에 여자가 앉으면 20번에 남자가 앉아야 하는데 이는 조건 (나)를 위반하게 된다. 따라서 1번 목마에는 남자가 앉아야 한다. 또한 10번 자리에 남자가 앉으면 11번에 여자가 앉게 되므로 조건 (나)를 위반하게 된다. 따라서 10번 목마에는 여자가 앉아야 한다. 또한 1부터 10까지에서 다섯 명의 사람이 타야하고 11에서 20까지 다섯 명의 사람이 타야 한다.
1번에서 10번 사이에 다섯 명이 들어가므로 다섯 개의 목마는 빈 목마가 된다. 빈 목마를 □로 표시하면 다섯 개의 □ 사이에 아래 그림과 같이 여섯 개의 공간이 생기게 된다.

(1번) □ □ □ □ □ (10번)

남자의 수를 x, 여자의 수를 y라 하면 $x+y=5$이고 남자는 10번 목마에 못 앉고 여자는 1번 목마에 못 앉는다. 따라서 남자와 여자 모두 5군데 위치 중 한 군데를 선택하게 된다. 따라서 경우의 수는 $5^x \times 5^y = 5^{x+y}=5^5$이다. 그리고 $x+y=5$에서 $0 \le x \le 5$이므로 ${}_5C_0+{}_5C_1+{}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5=2^5$이다. 따라서 전체 경우의 수는 $5^5 \times 2^5 = 10^5$이다.

[문제 4]
좌표평면 위의 점 $P_1(a_1, b_1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $P_2(a_2, b_2)$, 점 $P_1(a_1, b_1)$을 x축의 방향으로 실수 k만큼 평행이동한 점을 $P_3(a_3, b_3)$라고 하자. 점 $P_1(a_1, b_1), P_2(a_2, b_2), P_3(a_3, b_3)$의 좌표를 각각 일차항의 계수와 상수항으로 갖는 세 개의 이차방정식

(1) $x^2+a_1x+b_1=0$

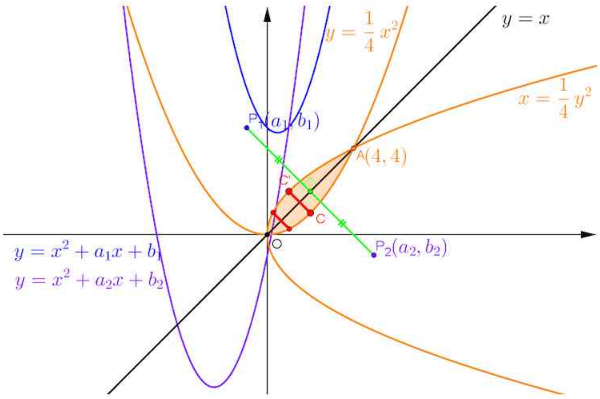
(2) $x^2+a_2x+b_2=0$

(3) $x^2+a_3x+b_3=0$

에 대하여 다음 물음에 답하여라.

논제 1. 좌표평면에서 점 $P_1(a_1, b_1)$이 움직임에 따라 방정식 (1), (2)는 서로 다른 두 실근을 가질 수도 있고 갖지 않을 수도 있다. 점 $P_1(a_1, b_1)$이 (1)과 (2) 중 어느 하나의 방정식도 서로 다른 두 실근을 갖지 않도록 하는 영역에서 움직일 때, 두 점 $P_1(a_1, b_1), P_2(a_2, b_2)$ 사이의 거리의 최댓값을 구하시오.
논제 2. 좌표평면 위의 모든 점 $P_1(a_1, b_1)$에 대하여 (1), (2), (3) 중 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖기 위한 k의 값의 범위를 구하시오.

[풀 이]
논제 1. 점 P_2는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 $a_2=b_1, b_2=a_1$이다.
어느 하나의 방정식도 서로 다른 두 실근을 갖지 않는 조건은 두 방정식이 중근 또는 허근을 갖는 경우이다. $D_1=a_1^2-4b_1 \le 0, D_2=a_2^2-4b_2 \le 0$
따라서 $a_1^2-4b_1 \le 0, b_1^2-4a_1 \le 0$이다.
$a_1=x, b_1=y$라 하면 구하는 영역은 $\left\{(x, y) \,\middle|\, y \ge \frac{1}{4}x^2, x \ge \frac{1}{4}y^2\right\}$



그림에서 보듯이 두 점 사이의 거리가 최대가 되는 경우는 두 곡선 모두 접선의 기울기가 1인 경우이다. $y=\frac{1}{4}x^2$에서 $y'=\frac{1}{2}x=1$에서 $x=2$이다. 따라서 $C(2,1)$, $C'(1,2)$이므로 거리의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다.

논제 2. 논제 1과 마찬가지로 점 P_2는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 $a_2=b_1$, $b_2=a_1$이다. 또한 P_3는 $a_3=a_1+k$, $b_3=b_1$이다. 각각의 방정식이 실근을 갖기 위한 조건은

$D_1=a_1^2-4b_1\geq 0$, $D_2=a_2^2-4b_2\geq 0$, $D_3=a_3^2-4b_3\geq 0$이다. $a_1=x$, $b_1=y$라 하면 적어도 하나의 방정식이 실근을 갖는 범위는 아래 집합에서 나오는 세 개의 부등식의 합집합이 전체 평면이 되어야 한다.

$$\left\{(x,y)\ \middle|\ y\leq\frac{1}{4}x^2,\ x\leq\frac{1}{4}y^2,\ y\leq\frac{1}{4}(x+k)^2\right\}$$

두 개의 부등식 $y\leq\frac{1}{4}x^2$, $x\leq\frac{1}{4}y^2$의 합집합은 논제 1에서 구한 부분을 제외한 부분이다. 따라서 $y\leq\frac{1}{4}(x+k)^2$을 나타내는 영역이 논제 1에서 구한 부분을 포함해야 한다.

(1) $y\leq\frac{1}{4}(x+k)^2$의 영역이 $(4,4)$를 포함하고 오른쪽 위에 있는 경우이다.

$4\leq\frac{1}{4}(4+k)^2$에서 $k\geq 0$, $k\leq -8$인데 대칭축이 y축 오른쪽에 있어야 하므로 $k\leq -8$이다.

(2) $y=\frac{1}{4}(x+k)^2$이 $x=\frac{1}{4}y^2$과 접하거나 만나지 않는 경우이다.

접하는 경우 각각 미분하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{x+k}{2}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}$이다. $\frac{x+k}{2}=\frac{2}{y}$에서 $x+k=\frac{4}{y}$이다.

이 식을 $y=\frac{1}{4}(x+k)^2$에 대입하면 $y=\frac{4}{y^2}$에서 $y=\sqrt[3]{4}$이고 $x=\frac{1}{4}\sqrt[3]{16}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$이다.

따라서 $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}+k=\frac{4}{\sqrt[3]{4}}=2\sqrt[3]{2}$에서 $k=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$이다. 따라서 $k\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$이다.

최종적으로 구하는 k의 범위는 $k\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, $k\leq -8$이다.

[문제 5]
함수 $f:[0,1]\rightarrow[0,1]$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=4x(1-x)$$

논제 1. 함수 $g:[0,1]\rightarrow[0,1]$를 합성함수 $f\circ f$라고 하자. 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 그리고, $f(p)\neq p$이고 $g(p)=p$가 되는 모든 p의 값을 구하시오.

[풀 이]

$f(x)$는 x절편이 $0, 1$이고 $x=\frac{1}{2}$에서 최댓값 1을 갖는 이차함수이다.

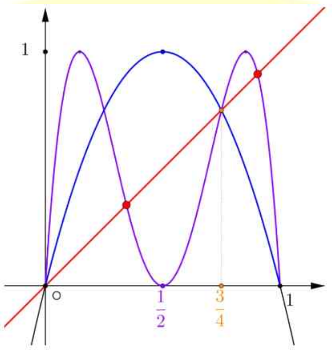
$g(x)=f(f(x))=4f(x)(1-f(x))=16x(1-x)(1-4x(1-x))=16x(1-x)(1-2x)^2$

미분하면 $g'(x)=16(1-x)(1-2x)^2-16x(1-2x)^2+16x(1-x)(-4)(1-2x)=16(1-2x)(1-8x+8x^2)$

$g'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{2}, \frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$이다.

증감표를 통해서 확인하면 $x=\frac{1}{2}$에서 극소이고 $x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$에서 극대가 된다.

$g\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}\right)=1$이고 $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$이다. 따라서 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프의 개형은 아래와 같다.



$f(p)=p$를 풀면 $4p(1-p)=p$에서 $p=0, \frac{3}{4}$

$g(p)=p$를 풀면 $16p(1-p)(1-2p)^2=p$에서 $p=0, \frac{3}{4}, \frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$

따라서 구하고자 하는 p의 값은 $\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$이다.

[문제 6]

서로소인 양의 정수 a와 n이 주어졌다. (단, $n>1$)

계수들이 모두 정수인 다항식 $f(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i x^i=(x+a)^n-(x^n+a^n)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

논제 1. 자연수 k, 소수 p, 그리고 p와 서로소인 자연수 m에 대하여 $n=p^k m$이라고 하자. 단, $k=1$이면 $m>1$이라고 한다. 계수 c_p를 구하고 c_p는 n으로 나누어떨어지지 않음을 보이시오.

논제 2. n을 1보다 큰 임의의 자연수라고 하자. 이때 $f(x)$의 모든 항의 계수 c_i가 n으로 나누어 떨어지면 n이 소수임을 보이시오.

[풀 이]

논제 1. $f(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i x^i=(x+a)^n-(x^n+a^n)=\sum_{i=1}^{n-1} {}_nC_i a^{n-i} x^i$이다.

따라서 $c_i={}_nC_i a^{n-i}$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$, $c_0=c_n=0$이다.

$c_p={}_nC_p a^{n-p}=\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}a^{n-p}=n\cdot\frac{(p^k m-1)(p^k m-2)\cdots(p^k m-p+1)}{p(p-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}a^{n-p}$

$n=p^k m$이고 a와 n은 서로소이므로 a와 p도 서로소이다. 따라서 a^{n-p}는 p로 나누어떨어지지 않는다. 또한 $(p^k m-1)(p^k m-2)\cdots(p^k m-p+1)$에서 $p^k m$에서 1부터 $p-1$까지를 뺀 수이므로 p의 배수가 아

니다. 즉 $(p^k m-1)(p^k m-2)\cdots(p^k m-p+1)$은 p로 나누어떨어지지 않는다.

따라서 $\dfrac{(p^k m-1)(p^k m-2)\cdots(p^k m-p+1)}{p(p-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}a^{n-p}$은 정수가 아니므로 c_p는 n으로 나누어떨어지지 않는다.

논제 2. $c_i={}_nC_i a^{n-i}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i(i-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}a^{n-i}$에서 a와 n은 서로소이므로 a^{n-i}은 n으로 나누어떨어지지 않는다. 따라서 c_i가 n으로 나누어떨어지기 위해서는 ${}_nC_i$가 n의 배수가 되어야 한다.

연속하는 2개의 자연수 곱은 $2\cdot 3, 3\cdot 4, \cdots$처럼 2의 배수가 반드시 존재하고, 연속하는 3개의 자연수 곱은 $2\cdot 3\cdot 4, 3\cdot 4\cdot 5, \cdots$처럼 3의 배수와 2의 배수가 반드시 존재한다. 이를 일반화하면 연속하는 i개의 자연수 곱은 i 이하의 배수가 반드시 존재한다. 따라서 ${}_nC_i$는 자연수이다. 또한 n이 소수이면 n은 $1\le i\le n-1$인 수로 나누어떨어지지 않는다. 따라서 n이 소수이면 ${}_nC_i$는 n을 소인수로 갖게 되고 자연수이므로 n의 배수가 된다.

논제 1에서 n이 소수가 아니면 c_p는 n으로 나누어떨어지지 않다는 결과가 나왔다.

따라서 n이 소수이면 모든 항의 계수는 n의 배수이고, n이 소수가 아닐 때는 p차항의 계수 c_p가 n의 배수가 아니므로 모든 항의 계수가 n으로 나누어떨어지려면 n이 소수가 되어야 한다.

[문제 7]

실수 a에 대하여 다음의 적분을 생각하자.

$$\int_0^1 |x^3+a|\,dx$$

논제 1. 위의 적분값이 최소가 되는 실수 a의 값을 구하시오.

[풀 이]

$$\int_0^1 |x^3+a|\,dx=-\int_0^{-\sqrt[3]{a}}(x^3+a)\,dx+\int_{-\sqrt[3]{a}}^1(x^3+a)\,dx=-\left[\frac{1}{4}x^4+ax\right]_0^{-\sqrt[3]{a}}+\left[\frac{1}{4}x^4+ax\right]_{-\sqrt[3]{a}}^1$$

$$=-\left(\frac{1}{4}a\sqrt[3]{a}-a\sqrt[3]{a}\right)+\left(\frac{1}{4}+a-\frac{1}{4}a\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{a}\right)=\frac{1}{4}+a+\frac{3}{2}a\sqrt[3]{a}$$

미분을 하면 $S'=1+2\sqrt[3]{a}=0$에서 $a=-\dfrac{1}{8}$이다.

증감표를 통해 확인하면 $a=-\dfrac{1}{8}$가 유일한 극소이므로 최소가 된다.