■ 서울대학교 2016학년도 기출문제

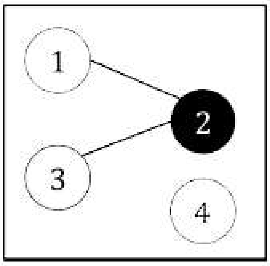
[문제 1]

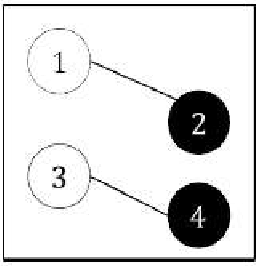
1부터 n까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 n개의 공과, k개의 줄이 있다. (단, 줄은 구분하지 않는다.) 각각의 공을 검정색 또는 흰색으로 색칠하고 줄을 모두 이용하여 아래의 조건을 만족하도록 공들을 연결하는 경우의 수를 $a_{n,k}$라고 하자.

(1) 각각의 줄은 서로 다른 색깔의 한 쌍의 공만 연결한다.

(2) 한 쌍의 공 사이에는 기껏해야 한 개의 줄만 연결된다.

예를 들어, $n=4, k=2$일 때는 아래와 같은 경우를 포함한다.





논제 1. 경우의 수 $a_{n,k}$를 구하는 식을 찾으시오.

논제 2. 논제 1에서 구한 $a_{n,k}$개의 경우 중에서, 어떠한 공에서 출발해도 적절한 줄들을 따라가면 다른 모든 공에 도착할 수 있는 경우의 수를 $b_{n,k}$라고 하자. 이 때, $b_{6,6}$을 구하시오.

[풀 이]

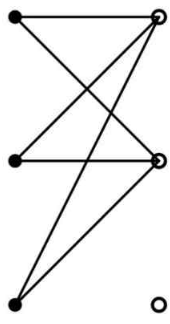
논제 1. 이를 직접 구하기는 힘들고 기본적으로 여러 명의 남자와 여러 명의 여자 사이에 대응관계라는 것을 파악하는 것이 중요하다. 대응을 위해서 남자의 수를 r이라 하면 x축에 $1, 2, \cdots, r$을 잡고 y축에 $1, 2, \cdots, n-r$을 잡아서 $r(n-r) \ge k$개의 격자점을 생각하도록 하자. $r(n-r)$개의 격자점 중에서 어떤 하나의 격자점 (m, l) $(1 \le m \le r, 1 \le l \le n-r)$을 선택하는 것은 m번 흰 공과 l번 검은 공을 연결한 것으로 대응될 수 있다. 즉 $r(n-r)$개의 격자점에서 k개의 격자점을 선택하는 방법의 수이다.

따라서 $a_{n,k} = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \times {}_{r(n-r)}C_k$이다.

논제 2. 일단 $a_{6,6} = \sum_{r=0}^{6} {}_6C_r \times {}_{r(6-r)}C_6 = {}_6C_2 \times {}_8C_6 + {}_6C_3 \times {}_9C_6 + {}_6C_4 \times {}_8C_6 = 2520$이다. $r(6-r) \ge 6$를 만족해야 하므로 $r=2, 3, 4$이다. 즉 흰 공의 개수는 2, 3, 4개만이 가능하다.

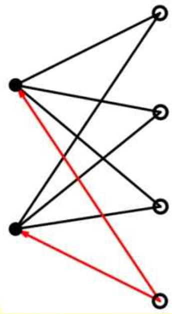
(1) $r=3$인 경우

먼저 검은 공 3개를 선택하는 경우의 수 ${}_6C_3$과 떨어진 공이 흰 공인 경우와 검은 공인 경우 2가지, 마지막으로 세 개의 공에서 떨어진 공을 선택하는 경우의 수 ${}_3C_1$를 곱하면 ${}_6C_3 \times 2 \times {}_3C_1 = 120$이다.



(2) $r=2$인 경우

먼저 검은 공 4개를 선택하는 경우의 수 ${}_6C_2$와 네 개의 공에서 떨어진 공을 선택하는 경우의 수 ${}_4C_1$을 곱하면 ${}_6C_2 \times {}_4C_1 = 60$이다.



(3) $r=4$인 경우
$r=2$인 경우와 마찬가지로 60가지이다.
따라서 $b_{6,6} = 2520 - 120 - 60 - 60 = 2280$