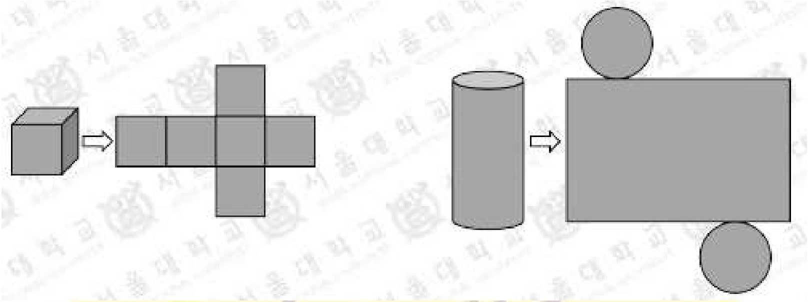
■ 서울대학교 2015학년도 기출문제

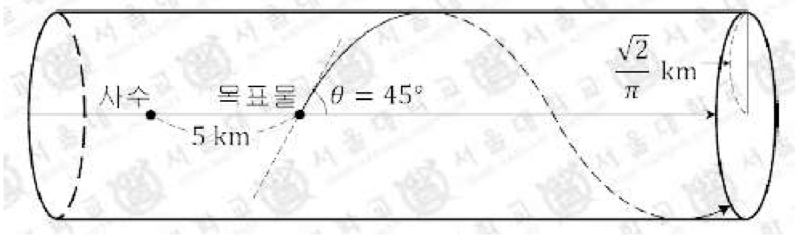
[문제 1]

입체도형의 전개도는 입체도형을 한 평면 위에 펼쳐 놓은 것이다. 입체도형을 다룰 때 그 전개도를 생각하면 삼차원 공간 대신 이차원 평면 위에서 생각할 수 있으므로 편리하다. 예를 들어 정육면체의 전개도는 정사각형을 여섯 개 붙인 것이고, 높이가 유한한 원기둥의 전개도는 직사각형의 마주보는 두 변에 원을 하나씩 붙인 것이다.



논제 1. 좌표평면 위를 분당 $1km$의 속력으로 일정한 방향으로 달려가는 목표물을 분당 $2km$의 속력으로 날아가는 탄환으로 맞히는 사격 시합이 있다고 하자. 사수가 원점에 있다고 하고 시각 $t=0$에서 목표물의 위치벡터를 $\vec{x} \neq \vec{0}$, 속도벡터는 $\vec{u}$라고 하자. 또 벡터 $\vec{x}$의 크기를 a라 하고, $\vec{x}$와 $\vec{u}$ 사이의 각을 θ라고 하자. 사수가 쏜 탄환이 목표물을 시각 $t=0$으로부터 4분 이내에 맞힐 수 있을 조건을 a와 θ에 대한 식으로 나타내시오. (단, 사수, 목표물, 탄환의 크기는 무시한다. 또한 발포는 $t \geq 0$인 임의의 시각에 가능하다.)

논제 2. 사수와 목표물이 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{\pi}km$인 무한한 원기둥 표면에 있다고 하자. 사수가 쏘는 탄환과 목표물은 모두 원기둥의 표면을 따라서만 움직일 수 있다. 시각 $t=0$에서 사수와 목표물은 다음 그림과 같이 중심축과 평행한 직선 위에 있고, 사수와 목표물 사이의 거리는 $5km$라고 하자. 목표물은 분당 $1km$의 속력으로 항상 중심축과 $\theta=45^\circ$의 각도를 유지 하면서 그림과 같이 움직이고 있고, 사수가 쏘는 탄환도 분당 $2km$의 속력으로 항상 중심축과 일정한 각도를 유지하면서 움직인다. 이때 사수가 쏜 탄환이 목표물을 시각 $t=0$으로부터 4분 이내에 맞힐 수 있겠는가? 그 이유를 설명하시오. (단, 사수, 목표물, 탄환의 크기는 무시한다. 또한 발포는 $t \geq 0$인 임의의 시각에 가능하다.)



논제 3. 논제 2에서, 목표물이 달려가는 방향과 중심축 사이의 각도 θ에 따라서 사수가 쏜 탄환이 목표물을 4분 이내에 맞힐 수도 있고, 그렇지 않을 수도 있다. 탄환이 목표물을 맞힐 수 있을 $\cos\theta$의 범위를 구하시오.

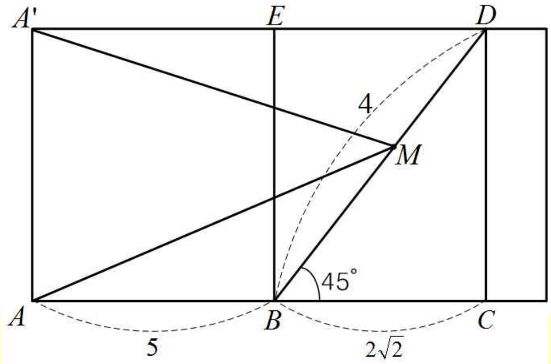
[풀 이]

논제 1. 목표물이 움직이는 경로를 $\vec{x}+\vec{u}$라고 하면 $|\vec{x}|=a, |\vec{u}|=t$이고 탄환의 경로를 $\vec{v}$라 하면 $|\vec{v}|=2t$이다. 두 벡터가 이루는 삼각형에서 $\vec{x}$와 $\vec{u}$가 이루는 각의 크기는 $\pi-\theta$이므로 제 2코사인법

칙을 사용하면 $|\vec{v}|^2=|\vec{x}|^2+|\vec{u}|^2-2|\vec{x}||\vec{u}|\cos(\pi-\theta)$이다. 이를 정리하면 $f(t)=3t^2-2at\cos\theta-a^2=0$인데 $0\le t\le 4$인 근을 가져야 하므로 $f(0)<0$이므로 $f(4)\ge 0$을 만족해야 한다.

$f(4)=48-8a\cos\theta-a^2\ge 0$이므로 $a^2+8a\cos\theta\le 48$이다.

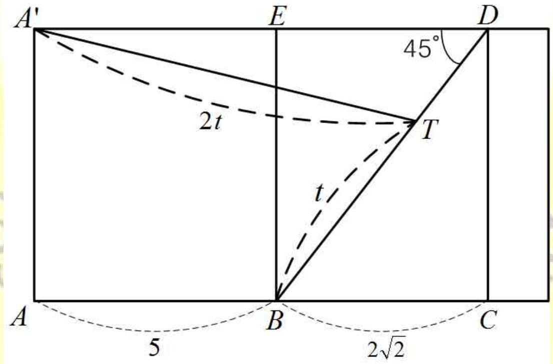
논제 2. 아래 그림에서 $\overline{AM}=\overline{AM'}$이므로 두 가지 경우로 나누어서 생각하자.



(1) $0\le t\le 2$인 경우 목표물은 $\overline{BM}$ 위에 있고 $\overline{AM}^2=(5+\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2$이므로 $\overline{AM}>4$이다. 따라서 맞출 수 없다.

(2) $2<t\le 4$이면 목표물은 $\overline{MD}$ 위에 있고 사수는 A'에 있으며 탄환이 날아가는 거리는 4와 8 사이이다. $\overline{A'D}=5+2\sqrt{2}<8$이므로 목표물을 맞힐 수 있다. 정확한 시간은 아래 그림을 이용하여 다음과 같은 식을 계산하면 구할 수 있다.

$(2t)^2=(5+2\sqrt{2})^2+(4-t)^2-2(5+2\sqrt{2})(4-t)\cos\frac{\pi}{4}$



논제 3. 목표물이 θ의 각으로 날아간다고 하자. 탄환과 목표물이 만나는 점을 P라고 하면 삼각형 ABP에서 제 2코사인 법칙을 적용하면 $4t^2=t^2+25-2\cdot 5t\cos(\pi-\theta)$이다. 이를 정리하면 $f(t)=3t^2-10\cos\theta t-25=0$인데 4분 이내에 맞출 수 있으려면 $f(4)\ge 0$의 조건을 만족해야 한다. $f(4)=23-40\cos\theta\ge 0$으로부터 $\cos\theta\le\frac{23}{40}$이다. 즉 $\cos\theta\le\frac{23}{40}$이면 4분 이내에 맞출 수 있고 $\cos\theta>\frac{23}{40}$이면 맞출 수 없다.

[문제 2]

상품 생산, 판매 과정에서 생산자는 제조비용을 최소화하고 판매이익을 최대화하고자 한다. 그러나 유용 가능한 재료, 자본 등이 제한되어 있으므로 조건이 주어진 상황에서 비용과 이익의 최적화를 하게 된다. 이를 수학적으로 구현하는 방법 중 하나는 주어진 조건 하에서의 이익이나 비용 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제로 표현하는 것이다.

다음 문제에서는 제한 조건이 주어진 상황에서 함수의 최솟값과 최댓값을 구하고자 한다.

논제 1. 조건 $xy=1$을 만족하는 양수 x와 y에 대하여 $\frac{1}{2}(ax+by)$의 최댓값과 최솟값이 존재하는지 밝히고, 존재하면 값을 구하시오. (단, a, b는 양수)

논제 2. $t \geq 10$일 때, $(x-t)^2+(y-t)^2+(z-t)^2=1$을 만족하는 실수 x, y, z에 대하여 $\frac{x+2y+3z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$의 최댓값 $f(t)$를 구하시오. 이때 $\lim_{t\to\infty} f(t)$를 구하시오.

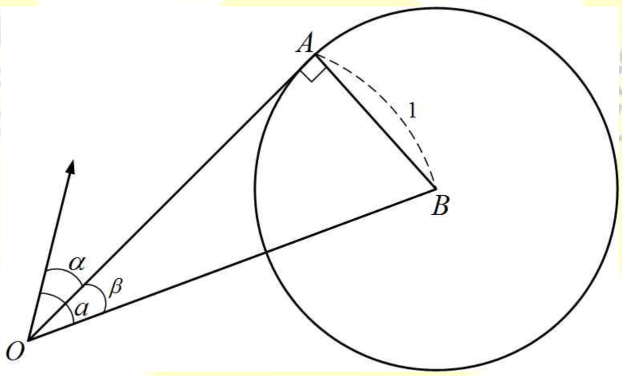
[풀 이]

논제 1. 산술기하평균 부등식을 사용하면 $\frac{1}{2}(ax+by) \geq \sqrt{axby}=\sqrt{abxy}=\sqrt{ab}$에서 $x=\sqrt{\frac{b}{a}}, y=\sqrt{\frac{a}{b}}$일 때, 최솟값 $\sqrt{ab}$를 가진다. $x\to 0+0$이면 $y\to\infty$ 또는 $y\to 0+0$이면 $x\to\infty$이므로 최댓값을 존재하지 않는다.

논제 2. $\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(1, 2, 3)$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}=(t, t, t)$, $\vec{x}=\overrightarrow{OP}=(x, y, z)$, $\vec{a}$와 $\vec{x}$가 이루는 각을 θ라 하면 $\frac{x+2y+3z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{|\vec{x}|}=|\vec{a}|\cos\theta=\sqrt{14}\cos\theta$이다.

이 값이 최대가 되려면 $\vec{a}$와 $\vec{x}$가 이루는 각이 최소일 때이므로 $\overline{OP}$는 구에 접하고 $\angle AOB=\alpha$, $\angle POB=\beta$, $\angle AOP=\theta$라 하면 $\theta=\alpha-\beta$이고, $\triangle BOP$는 직각삼각형이므로 $\overline{OB}=\sqrt{3}t, \overline{PB}=1, \overline{OP}=\sqrt{3t^2-1}$에서 $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{3}t}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{3t^2-1}}{\sqrt{3}t}$이다.

$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{t+2t+3t}{\sqrt{14}\sqrt{3}t}=\frac{6}{\sqrt{42}}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{42}}$이다.



$\therefore f(t)=\sqrt{14}\cos\theta=\sqrt{14}\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{14}\left(\frac{6}{\sqrt{42}}\cdot\frac{\sqrt{3t^2-1}}{\sqrt{3}t}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{42}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}t}\right)$

$\lim_{t\to\infty} f(t)=2\sqrt{3}$이다.