■ 서울대학교 2014학년도 기출문제

[문제 1]

$y=x^2+1$의 그래프 위의 점들 중 x축 위의 점 $(a,0)$과 가장 가까운 점을 (b,b^2+1)이라고 하자. (단, $a>0$) 다음 물음에 답하여라.

논제 1. a를 b의 함수로 나타내어라.

논제 2. 위와 같은 a,b에 대하여, $(0,1)$에서 (b,b^2+1)까지의 그래프 위의 점들과 $(a,0)$을 선분으로 연결하여 얻은 영역을 D라 할 때, 영역 D의 넓이를 b의 함수로 나타내어라.

논제 3. 영역 D의 넓이가 1이 되는 b의 개수를 구하여라.

[풀 이]

논제 1. (b,b^2+1)에서 접선에 수직인 직선이 $(a,0)$를 지나면 된다. 접선에 수직인 직선의 방정식을 구하면 $y-(b^2+1)=-\frac{1}{2b}(x-b)$이고 $(a,0)$을 대입하면 $-b^2-1=-\frac{1}{2b}(a-b)$이고 정리하면 $a=2b^3+3b$이다.

논제 2. 영역 D의 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^b (x^2+1)\,dx+\frac{1}{2}(a-b)(b^2+1)-\frac{1}{2}a=b^5+\frac{4}{3}b^3+\frac{1}{2}b$이다.

논제 3. $f(b)=b^5+\frac{4}{3}b^3+\frac{1}{2}b$라고 하면 $f'(b)=5b^4+4b^2+\frac{1}{2}>0$이므로 연속함수이고 증가함수이다. 또한 $f(0)=0,\ f(1)>1$이므로 $f(b)=1$을 만족하는 b의 개수는 1개이다.

[문제 2]

이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{pmatrix}$와 $B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -\frac{3}{2} & 2\end{pmatrix}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

논제 1. $S_n=E+B+B^2+\cdots+B^{2n-1}$일 때, S_n의 $(1,1)$ 성분을 구하여라. (단, n은 자연수, E는 단위행렬)

논제 2. $D_n=A^n+A^{n-1}B+A^{n-2}B^2+\cdots+B^n$이라고 하자. ($n$은 자연수)
$n\to\infty$일 때 D_n의 $(1,1)$ 성분의 극한이 존재하는가?

[풀 이]

논제 1. 직접 계산 또는 케일리-해밀턴 정리에 의하여 $A^2=E,\ B^2=-\frac{1}{2}E$가 성립한다.

$S_n=E+B+B^2+\cdots+B^{2n-1}$

$=E+B-\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}B+\left(-\frac{1}{2}\right)^2E+\left(-\frac{1}{2}\right)^2B+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}E+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}B$

$=\dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}(E+B)=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}(E+B)$

따라서 S_n의 $(1,1)$ 성분은 $\frac{2}{3}\left\{-1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$이다.

논제 2. (1) $n=2k$인 경우

$D_n=A^n+A^{n-1}B+A^{n-2}B^2+\cdots+B^n$

$=E+AB-\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}AB+\left(-\frac{1}{2}\right)^2E+\left(-\frac{1}{2}\right)^2AB+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}E+\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}AB+\left(-\frac{1}{2}\right)^kE$

이를 정리하면 $\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right\}E+\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\right\}AB$이다. $AB=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$이므로 AB는 $(1,1)$ 성분에 영향을 미치지 않는다. 따라서 $(1,1)$ 성분은 $\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right\}$이고 $n\to\infty$이면 $k\to\infty$이므로 극한값은 $\frac{2}{3}$이다.

(2) $n=2k-1$인 경우

$D_n=A^n+A^{n-1}B+A^{n-2}B^2+\cdots+B^n$

$=A+B-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B+\left(-\frac{1}{2}\right)^2A+\left(-\frac{1}{2}\right)^2B+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}A+\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}B$

$=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\right\}(A+B)$

$A+B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ \frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$이므로 $(1,1)$ 성분은 $\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\right\}$이고 $n\to\infty$이면 $k\to\infty$이므로 극한값은 $\frac{2}{3}$이다.

[문제 3]

수지가 다음과 같은 동전 던지기 게임을 한다. 이 때 앞면이나 뒷면이 나올 확률은 같다.

(가) 하나의 게임은 동전을 한 번 던지는 것으로 이루어지며, 수지는 파란 구슬 100개, 빨간 구슬 100개와 점수 1점을 가지고 게임을 시작한다.

(나) 첫 번째부터 열 번째 게임까지는 동전을 던져 앞면이 나오는 경우에는 가지고 있는 점수가 3배가 되고 파란 구슬을 2개 받고 빨간 구슬을 1개 빼앗기며, 뒷면이 나오는 경우에는 가지고 있는 점수가 2배가 되고 파란 구슬을 1개 받고 빨간 구슬을 2개 빼앗긴다.

(다) 열한 번째부터 스무 번째 게임까지는 동전을 던져 앞면이 나오는 경우에는 가지고 있는 점수가 4배가 되고 파란 구슬을 1개 빼앗기며, 뒷면이 나오는 경우에는 점수는 그대로이고 빨간 구슬을 1개 빼앗긴다.

논제 1. 처음 10게임 후 가지고 있는 구슬의 개수가 202개일 확률을 구하여라.

논제 2. 20게임 후 나올 수 있는 각 경우의 점수를 모두 더한 값을 구하여라.

논제 3. 20게임 후 파란 구슬이 a개, 빨간 구슬이 b개 나올 수 있는 (a,b)의 조건을 구하여라.

논제 4. 20게임 후 파란 구슬이 110개, 빨간 구슬이 80개가 되는 경우의 점수를 모두 더한 값을 구하여라.

[풀 이]

논제 1. 첫 번째부터 열 번째 게임까지 앞면이 나온 횟수를 x, 열한 번째부터 스무 번째 게임까지 앞면이 나온 횟수를 y라 하자. (단, $x=0,1,\cdots,10$, $y=0,1,\cdots,10$)

앞면이 나오면 구슬은 한 개가 증가하고 뒷면이 나오면 한 개가 감소하므로 구슬의 증가분은 $x+(-1)(10-x)$가 된다. 구슬이 202개가 된다는 것은 2개가 늘어난 것을 의미하므로 $x+(-1)(10-x)=2$를 계산하면 $x=6$이 된다. 즉 앞면이 6번 나올 확률이 된다. 따라서 ${}_{10}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$이다.

논제 2. 20게임 후 점수를 식으로 나타내면 $3^x\cdot 2^{10-x}\cdot 4^y$가 된다.

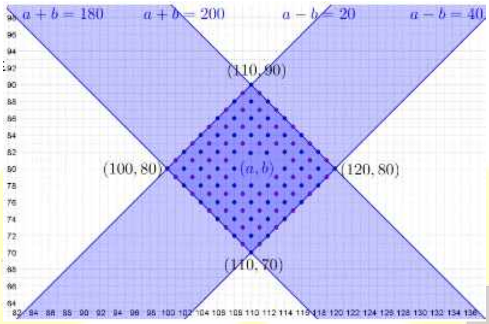
$\sum_{y=0}^{10}\sum_{x=0}^{10}{}_{10}C_x\,{}_{10}C_y 3^x\cdot 2^{10-x}\cdot 4^y=\sum_{y=0}^{10}{}_{10}C_y4^y\left(\sum_{x=0}^{10}{}_{10}C_x 3^x\cdot 2^{10-x}\right)$

$=\sum_{y=0}^{10}{}_{10}C_y4^y\cdot 5^{10}=5^{10}\sum_{y=0}^{10}{}_{10}C_y4^y\cdot 1^{10-y}=5^{10}\cdot 5^{10}=5^{20}$이다.

논제 3. 20게임 후 파란 구슬의 개수는 $100+2x+(10-x)-y=x-y+110$,
빨간 구슬의 개수는 $100-x-2(10-x)-(10-y)=x+y+70$이다.

연립방정식 $x-y+110=a, x+y+70=b$를 풀면 $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-90, y=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+20$

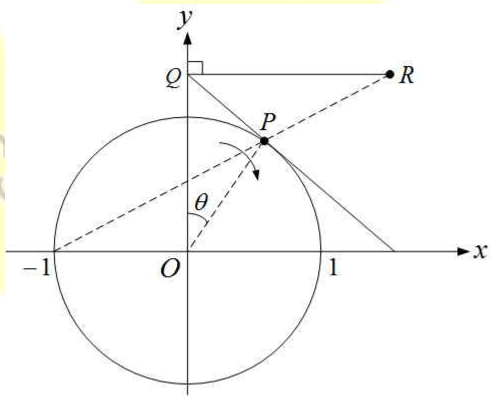
자연수 조건을 만족하려면 a와 b의 합과 차가 짝수여야 하므로 a와 b 모두 홀수이거나 모두 짝수이면 된다. 따라서 $0 \le \frac{a+b}{2}-90 \le 10, 0 \le 20-\frac{a-b}{2} \le 10$을 만족하는 모두 짝수이거나 홀수인 수들이다. 정리하면 $180 \le a+b \le 200, 20 \le a-b \le 40$이다.



논제 4. $a=110, b=80$이므로 논제 3의 결과에 대입하면 $x=y=5$이다.
따라서 점수는 ${}_{10}C_5\,{}_{10}C_5 3^5 \cdot 2^5 \cdot 4^5 = 252^2 \cdot 24^2$이 된다.

[문제 4]

아래 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있는 점 P가 점 $(0,1)$을 출발하여 원호를 따라 시계방향으로 점 $(1,0)$을 향해 움직인다. 점 P에서 원의 접선이 y축과 만나는 점을 Q라고 하자. 점 Q를 지나며 x축에 평행한 직선과 점 $(-1,0)$과 점 P를 지나는 직선이 만나는 점을 R이라고 하자. 이때, R의 자취에 대하여 다음 물음에 답하여라.



논제 1. $\angle POQ$를 θ라고 할 때, 점 $R(x,y)$의 자취를 θ에 관한 함수로 나타내어라.
즉 $x=g(\theta), y=h(\theta)$ $\left(0 \le \theta < \frac{\pi}{2}\right)$의 꼴로 나타내어라.

논제 2. 점 $R(x,y)$의 자취의 방정식을 $y=f(x)$의 꼴로 나타내어라.

논제 3. 논제 2에서 구한 함수 $y=f(x)$의 최솟값과 그 그래프의 변곡점을 구하고, 그래프의 개형을 그려라.

[풀 이]

논제 1. 점 P의 x좌표는 $x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$, y좌표는 $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

따라서 $P(\sin\theta, \cos\theta)$이다. 점 P에서 원의 접선은 $\sin\theta x+\cos\theta y=1$이고 $Q\left(0, \dfrac{1}{\cos\theta}\right)$이다.

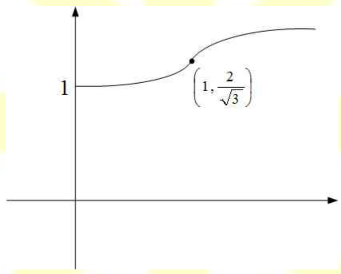
점 P와 $(-1, 0)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}(x+1)$인데 $y=\dfrac{1}{\cos\theta}$를 대입하면 $\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}(x+1)$이고 이를 정리하면 $x=\dfrac{\sin\theta}{1-\sin\theta}$이다. 따라서 $R\left(\dfrac{\sin\theta}{1-\sin\theta}, \dfrac{1}{\cos\theta}\right)$이다.

$x=g(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{1-\sin\theta}, y=h(\theta)=\dfrac{1}{\cos\theta}$이다. (단, $x \ge 0, y \ge 1$)

논제 2. 논제 1의 결과를 정리하면 $\sin\theta=\dfrac{x}{1+x}, \cos\theta=\dfrac{1}{y}$이다. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 이 식에 대입하면 $\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{x^2}{(1+x)^2}=1$이다. 이를 정리하면 $y=f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{1+2x}}$이다.

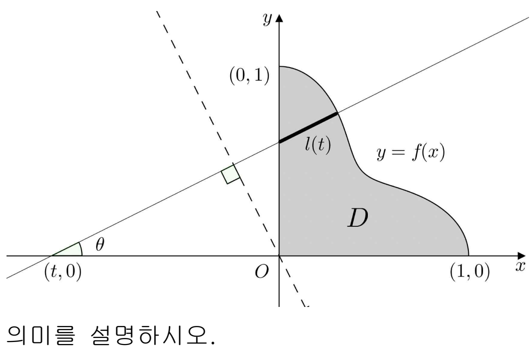
논제 3. $f'(x)=\dfrac{\sqrt{1+2x}-(1+x)\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}}{1+2x}=\dfrac{x}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}}\ge 0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다. 따라서 $x=0$에서 최솟값 $f(0)=1$을 갖는다.

$f''(x)=\dfrac{(1+2x)^{\frac{3}{2}}-x\cdot\dfrac{3}{2}\cdot 2\sqrt{1+2x}}{(1+2x)^3}=\dfrac{\sqrt{1+2x}(1-x)}{(1+2x)^3}$이므로 $x=1$ 즉 $\left(1, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$이 변곡점이고 $0\le x<1$일 때 아래로 볼록, $x>1$일 때 위로 볼록이다.



[문제 5]
구간 $[0, 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$는 $f(0)=1, f(1)=0$을 만족하는 감소함수이다. 좌표평면의 부분집합 $D=\{(x, y)|0\le x\le 1, 0\le y\le f(x)\}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

논제 1. $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 점 $(t, 0)$을 지나고 기울기가 $\tan\theta$인 직선과 영역 D의 공통부분의 길이를 $l(t)$라 하고, $S(\theta)=\displaystyle\int_{-\cot\theta}^{1} l(t)\,dt$라 하자.



(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} S(\theta)$의 기하학적 의미를 설명하시오.

(2) $S(\theta)$와 D의 넓이와의 관계를 구하시오.
논제 2. 함수 $f(x)$와 영역 D가 위의 조건을 모두 만족하고, D를 x축 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피가 y축 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피와 같다고 하자.
(1) 위 조건을 만족하는 함수 $f(x)$의 예를 들어보시오.
(2) 위 조건을 모두 만족하는 함수 $f(x)$가 구간 $(0,1)$에서 두 번 미분가능하다고 할 때, $\int_0^1 (f(x)-x)^2 dx$ 의 값을 구하시오.

(3) (2)의 조건을 모두 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 (f(x))^2 dx$ 의 값이 최대가 되도록 하는 함수 $f(x)$를 모두 구하시오.

[풀 이]
논제 1. (1) $\theta \to \frac{\pi}{2}-0$이면 $\tan\theta \to \infty$ 이므로 $\cot\theta \to 0$이다. 따라서 $S(\theta)=\int_0^1 l(t)\,dt$ 이 되고 $l(t)$는 x축에 수직인 직선과 영역 D의 공통부분이 되므로 $\int_0^1 f(x)\,dx$ 가 된다.
(2) 정적분의 정의에 의하여 $[-\cot\theta, 1]$을 n등분하고 하나의 소구간의 길이를 Δt라고 하자. 그리고 점선으로 이루어진 축을 s축이라고 하고 이를 새로운 적분축으로 하여 넓이 D를 표현하겠다. 구간은 $[-\cos\theta, \sin\theta]$가 되고 소구간의 길이를 Δs라 하면 그림에서부터 $\Delta s = \sin\theta \Delta t$가 된다. 극한을 취하면 $ds = \sin\theta dt$이다.
$D=\int_{-\cos\theta}^{\sin\theta} l(t)\,ds = \int_{-\cot\theta}^{1} l(t)\,dt \sin\theta = \sin\theta \int_{-\cot\theta}^{1} l(t)\,dt = \sin\theta S(\theta)$가 성립한다.
논제 2. (1) 함수 $f(x)$가 $y=x$에 대칭이면 되므로 예를 들면 $f(x)=-x+1$이 있다.
(2) 두 회전체의 부피가 같으므로 $\pi\int_0^1 y^2 dx = \pi\int_0^1 x^2 dy$ 이다. $y=f(x)$에서 $dy=f'(x)dx$가 성립하므로 $\int_0^1 (f(x))^2 dx = \int_1^0 x^2 f'(x)\,dx$ 인데 우변에서 $u'=f'(x), v=x^2$으로 하여 부분적분을 이용하면 $\int_1^0 x^2 f'(x)\,dx = [x^2 f(x)]_1^0 - \int_1^0 2xf(x)\,dx = \int_0^1 2xf(x)\,dx$ 이다.
따라서 $\int_0^1 (f(x))^2 dx = \int_0^1 2xf(x)\,dx$ 가 성립한다.
$\int_0^1 (f(x)-x)^2 dx = \int_0^1 (f(x))^2 dx - \int_0^1 2xf(x)\,dx + \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ 이다.
(3) $\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 (f(x))^2 dx$ 가 최대가 되는 조건을 찾기 위하여 식을 변형하면
$\int_0^1 \left\{ -\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right\} dx = \frac{1}{4} - \int_0^1 \left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2 dx$ 가 된다.
따라서 $\int_0^1 \left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2 dx$ 가 최소가 되는 $f(x)$를 구하면 된다. $\pi\int_0^1 \left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2 dx$ 의 기하학적 의미를 찾으면 $f(x)$를 $y=\frac{1}{2}$을 회전축으로 한 회전체의 부피를 의미한다. 위 조건을 만족하면서 이 값이 최소가 $f(x)$는 $-x+1$이라고 추측할 수 있다. 이제 이 추측이 맞다는 것을 설명하도록 하자. $\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 (f(x))^2 dx$ 에 $f(x)=1-x$를 대입하여 계산하면 $\frac{1}{6}$이 되므로 $\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 (f(x))^2 dx \le \frac{1}{6}$이 성립하는 것을 증명하면 된다.

$\int_0^1 (f(x)-1+x)^2 dx$ 은 완전제곱식을 적분한 것으로 $\int_0^1 (f(x)-1+x)^2 dx \geq 0$가 성립하고 등호는 $f(x)=1-x$일 때 성립한다. 이제 이 식을 변형하면

$\int_0^1 (f(x)-1+x)^2 dx = \int_0^1 \{(f(x))^2+2xf(x)-2f(x)+(1-x)^2\} dx$ 에서

$\int_0^1 (f(x))^2 dx = \int_0^1 2xf(x)\, dx$ 가 성립하므로 $\int_0^1 \{2(f(x))^2-2f(x)+(1-x)^2\} dx$ 가 된다. 다시 변형하면

$2\int_0^1 \{(f(x))^2-f(x)\} dx + \int_0^1 (1-x)^2 dx = 2\int_0^1 \{(f(x))^2-f(x)\} dx + \frac{1}{3} \geq 0$이 되어서

$\int_0^1 \{(f(x))^2-f(x)\} dx \geq -\frac{1}{6}$ 즉 $\int_0^1 f(x)\, dx - \int_0^1 (f(x))^2 dx \leq \frac{1}{6}$가 성립한다. 단 등호는 $f(x)=1-x$ 일 때 성립한다.