

2020 학년도

수리 *농술* 나침반

XII





...일러두기

- ☒ 수리논술나침반 XII는 수리논술나침반 시리즈의 12번째 책으로 대입 수리논술을 준비하는 2021학년도 수험생 및 수학교사들을 위하여 수학교사 동아리 ‘부산수학 나침반’에서 만들고 부산시교육청에서 발간하는 수리논술 관련 책자입니다.
- ☒ 이 교재는 2019학년도에 치러진 전국 각 대학의 모의 논술과 실제 입시(2020 대입)에 출제된 수시 논술 기출문제 위주로 만들어진 책자입니다.
- ☒ 교재는 각 대학별 모의와 수시 순으로 묶였으며, 각 대학별 모의 논술과 수시 논술은 다음의 순서로 구성되어 있습니다.
 1. 기출문제 : 2020 대입 전국대학 모의와 수시 논술 기출문제
 2. 풀어보기 : 해당 대학의 논술 기출문제와 유사한 문제로서 주로 전국 모의고사나 수능에 나왔던 문제 또는 EBS에 있는 문제 위주로 발췌하여 학생들이 어려운 논술의 답안을 작성하기 전에 기본연습을 할 수 있도록 준비하였습니다.
- ☒ 논술 기출문제는 아니지만, 서울대학교 일반전형을 준비하는 학생들을 위하여 2019년도 치러진 서울대학교 일반전형(2020 대입) 면접문제와 예시답안을 마지막에 수록하였습니다.

Contents

01. 경북대학교(자연계열 I) 모의	1
02. 경북대학교(자연계열 II) 모의	14
03. 경북대학교(자연계열 I) 수시	25
04. 경북대학교(자연계열 II) 수시	39
05. 경희대학교(자연계) 모의	54
06. 경희대학교(의학계) 모의	62
07. 경희대학교(자연계 I) 수시	71
08. 경희대학교(자연계 II) 수시	79
09. 경희대학교(의학계) 수시	87
10. 부산대학교(자연계열) 모의	95
11. 부산대학교(의학계열) 모의	103
12. 부산대학교(자연계열) 수시	115
13. 부산대학교(의학계열) 수시	125
14. 서강대학교 수시	139
15. 서울과학기술대학교 모의	153
16. 서울과학기술대학교(오전) 수시	164
17. 서울과학기술대학교(오후) 수시	173
18. 서울시립대학교 모의	182
19. 서울시립대학교 수시	194
20. 성균관대학교 모의	203
21. 성균관대학교(자연 I) 수시	217

Contents

22. 성균관대학교(자연Ⅱ) 수시	226
23. 연세대학교(오전) 수시	235
24. 연세대학교(오후) 수시	243
25. 이화여자대학교(자연계열Ⅰ) 모의	253
26. 이화여자대학교(자연계열Ⅱ) 모의	265
27. 이화여자대학교(자연계열Ⅰ) 수시	279
28. 이화여자대학교(자연계열Ⅱ) 수시	290
29. 인하대학교 모의	295
30. 인하대학교(오전) 수시	308
31. 인하대학교(오후) 수시	320
32. 중앙대학교 모의	329
33. 중앙대학교(자연계열Ⅰ) 수시	338
34. 중앙대학교(자연계열Ⅱ) 수시	347
35. 한양대학교 모의(1차)	356
36. 한양대학교 모의(2차)	364
37. 한양대학교(오전) 수시	373
38. 한양대학교(오후Ⅰ) 수시	382
39. 한양대학교(오후Ⅱ) 수시	389
40. 한양대학교(의학계) 수시	398
41. 서울대학교(면접) 수시	407



01

경북대학교(자연계열 I) 모의1)

...



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
경우의 수, 확률밀도함수, 조건부 확률, 이항분포, 함수의 증가감소, 중간값 정리, 쌍곡선의 방정식	3개 영역 등급 합 8 이내 (단, 전자공학부 모바일공학전공은 2개 영역(수학/과탐) 등급 합 3 이내)	수학 3문항	100분

[문항 1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) (1) 서로 다른 n 개에서 r ($0 < r \leq n$) 개를 택하는 순열의 수는

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$$

이다.

(2) 서로 다른 n 개에서 r ($0 \leq r \leq n$) 개를 택하는 조합의 수는

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

이다. (단, ${}_nC_0 = 1$ 이다.)

(나) 연속확률변수 X 가 $a \leq X \leq b$ 에 속하는 모든 실수의 값을 가질 때, 함수 $f(x)$ 가 다음의 조건을 만족하면 $f(x)$ 를 X 의 확률밀도함수라고 한다.

(1) $f(x) \geq 0$ (단, $a \leq x \leq b$)

(2) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이다.

(3) $P(\alpha \leq X \leq \beta)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$ 로 둘러싸인 부분의 넓이다.

(다) 확률이 0이 아닌 사건 A 에 대하여 사건 A 가 일어났다고 가정할 때, 사건 B 가 일어날 확률을 사건 A 가 일어났을 때의 사건 B 의 조건부확률이라 하고, 기호 $P(B|A)$ 로 나타내며 다음이 성립한다.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (P(A) \neq 0)$$



(라) 확률변수 X 가 이항분포 $B(n, p)$ 를 따를 때, 확률변수 X 의 기댓값과 분산은 각각 np , $np(1-p)$ 이다.

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하십시오.

[1-1] A, B, C, D, E, F, F, O, O, O의 문자가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 문자 O가 적힌 어떤 카드도 서로 이웃하지 않을 확률을 구하십시오. (30점)

[1-2] 연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위가 $-2 \leq X \leq 1$ 이고 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = 3a \left(1 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}|x| \right) \quad (-2 \leq x \leq 1)$$

이다. 다음 물음에 답하십시오. (단, a 는 상수이다.)

(1) 상수 a 와 $P(-1 \leq X \leq 0)$ 의 값을 각각 구하십시오. (30점)

(2) $P(c \leq X \leq c+1)$ 은 $c = \alpha$ 일 때, 최댓값 β 를 갖는다. α 와 β 의 값을 각각 구하십시오. (단, $-1 \leq c \leq 0$) (30점)

[1-3] 스마트폰을 생산하는 한 기업이 2개의 생산 공장 A, B를 가지고 있다. 이 기업이 만드는 스마트폰 중 60%는 공장 A에서 만들어지고 나머지는 공장 B에서 만들어진다. 이 기업에서 생산한 스마트폰이 공장 A에서 만들어졌다고 할 때, 그 제품이 불량품일 확률은 5%이고, 공장 B에서 만들어졌다고 할 때, 그 제품이 불량품일 확률은 10%이다. 이 기업에서 생산한 200개의 스마트폰 중에서 불량품의 개수를 확률변수 X 라 할 때, X 의 기댓값을 구하십시오. (30점)



[문항 2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $g(x)$ 가 구간 I 에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여

$$x_1 < x_2 \text{ 일 때 } g(x_1) < g(x_2)$$

이면, 함수 $g(x)$ 는 구간 I 에서 증가한다고 한다. 또

$$x_1 < x_2 \text{ 일 때 } g(x_1) > g(x_2)$$

이면, 함수 $g(x)$ 는 구간 I 에서 감소한다고 한다.

(나) 함수 $g(x)$ 가 구간 I 에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x 에 대하여

(1) $g'(x) > 0$ 이면 $g(x)$ 는 구간 I 에서 증가한다.

(2) $g'(x) < 0$ 이면 $g(x)$ 는 구간 I 에서 감소한다.

단, 역은 성립하지 않는다.

(다) 함수 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $g(a) \neq g(b)$ 이면, $g(a)$ 와 $g(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k 에 대하여

$$g(c) = k$$

인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

0이 아닌 실수 a 에 대하여

$$f(x) = \frac{1}{2a}x^2 + (a-1)x + a-1$$

의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

[2-1] 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 0일 때, a 의 값을 구하시오. (20점)

[2-2] 함수 $F(x)$ 가 실수 전체에서 증가하도록 하는 a 의 값의 범위는 $\alpha \leq a \leq \beta$ 이다. $\beta - \alpha$ 의 최댓값을 구하시오. (40점)

[2-3] 다음 조건을 만족시키는 실수 a 가 열린구간 $(2, 3)$ 에 적어도 하나 존재함을 증명하시오. (50점)

< 조 건 >

(i) 함수 $F(x)$ 는 어떤 구간 (b, c) 에서 감소하고 구간 $(-\infty, b)$ 와 (c, ∞) 에서 증가한다.

(ii) $c - b = 9.7$



[문항 3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$ 의 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad y' = f'(g(x))g'(x)$$

이다.

(나) (1) 두 초점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ 으로부터의 거리의 차가 $2a$ ($c > a > 0$) 인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } b^2 = c^2 - a^2)$$

이다. 이때, 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a$ 이다.

(2) 두 초점 $F(0, c)$, $F'(0, -c)$ 로부터의 거리의 차가 $2b$ ($c > b > 0$) 인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (\text{단, } a^2 = c^2 - b^2)$$

이다. 이때, 쌍곡선의 주축의 길이는 $2b$ 이다.

실수 a, b, c ($a \neq 0$) 에 대하여 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 이고 $H: y^2 = e^{-f(x)} \frac{d^2}{dx^2} e^{f(x)}$ 은 쌍곡선이
다. 다음 물음에 답하시오.

[3-1] 쌍곡선 H 를 $Ax^2 + By^2 + Cx + D = 0$ 으로 표현할 때, $\frac{A}{B} = -4a^2$ 임을 증명하시오.

(20점)

[3-2] 다음 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b) 가 나타내는 영역의 넓이를 구하시오.

(30점)

— < 조 건 > —

(i) 쌍곡선 H 는 직선 $x=1$ 과 많아야 한 점에서 만난다.

(ii) 쌍곡선 H 는 직선 $y = x + \frac{b}{2a}$ 와 만나지 않는다.

(iii) 쌍곡선 H 의 주축의 길이는 4 이하이다.



[3-3] 쌍곡선 H 의 두 초점이 x 축 위에 있을 때, 두 초점을 각각 $F(\alpha, 0)$, $F'(\beta, 0)$ ($\alpha > \beta$)라 하자.

(1) 쌍곡선 H 위의 점 Q 에서 x 축에 내린 수선의 발을 S 라 하자. 점 Q 의 x 좌표가 α 보다 클 때

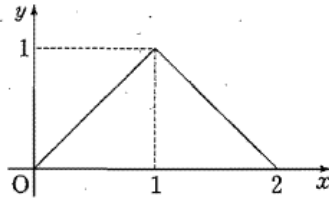
$$\overline{FQ} - \overline{FS} \sqrt{1+4a^2} = |2a|^p$$

이다. p 의 값을 구하시오. (40점)

(2) $(\alpha - \beta)^2$ 의 값이 최소가 될 때, a 의 값을 구하시오. (30점)



문제1. 연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq 2$ 이고, X 의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.



확률 $P\left(a \leq X \leq a + \frac{1}{2}\right)$ 의 값이 최대가 되도록 하는 상수 a 의 값은?

(2010. 9월 평가원)

- ① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

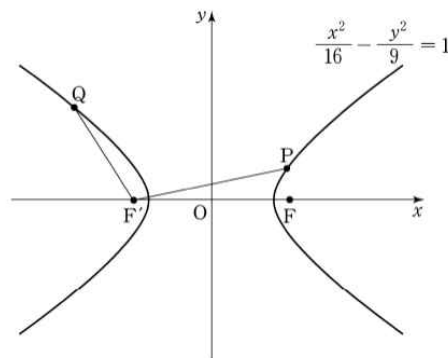
문제2. 사차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가

$$f'(x) = (x+1)(x^2 + ax + b)$$

이다. 함수 $y=f(x)$ 가 구간 $(-\infty, 0)$ 에서 감소하고 구간 $(2, \infty)$ 에서 증가하도록 하는 실수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 에 대하여, $a^2 + b^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. $M+m$ 의 값은? (2013. 9월 평가원)

- ① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{43}{8}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{45}{8}$ ⑤ $\frac{23}{4}$

문제3. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점을 F, F' 이라 하자. 제 1사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P 와 제 2사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 Q 에 대하여 $\overline{PF'} - \overline{QF'} = 3$ 일 때, $\overline{QF} - \overline{PF}$ 의 값을 구하시오. (2008. 대수능)





풀어보기(문제1) 정답 ④

확률 $P\left(a \leq X \leq a + \frac{1}{2}\right)$ 의 값이 최대가 되려면 구간 $a \leq x \leq a + \frac{1}{2}$ 안에 1이 포함되어 있어야 하므로 $\frac{1}{2} < a < 1$ 인 경우를 생각한다.

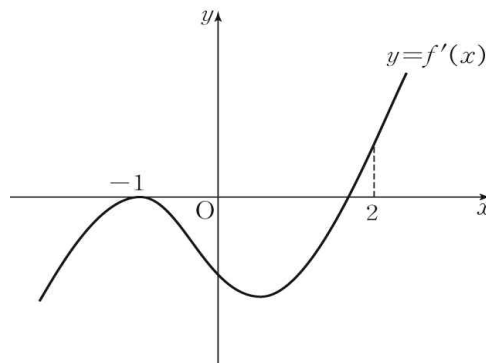
$\frac{1}{2} < a < 1$ 일 때 $1 < a + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} P\left(a \leq X \leq a + \frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{2}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{3-2a}{2}\right)^2 \\ &= -a^2 + \frac{3}{2}a - \frac{1}{8} \\ &= -\left(a - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} \end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{3}{4}$ 일 때 확률 $P\left(a \leq X \leq a + \frac{1}{2}\right)$ 의 값이 최대이다.

풀어보기(문제2) 정답 ③

사차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 $f'(x) = (x+1)(x^2+ax+b)$ 이고 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, 0)$ 에서 감소, 구간 $(2, \infty)$ 에서 증가하므로 $y = f'(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



즉, $f'(x)$ 은 $(x+1)^2$ 을 인수로 가지므로 x^2+ax+b 는 $(x+1)$ 을 인수로 갖는다. 따라서

$$(-1)^2 - a + b = 0 \quad \therefore b = a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

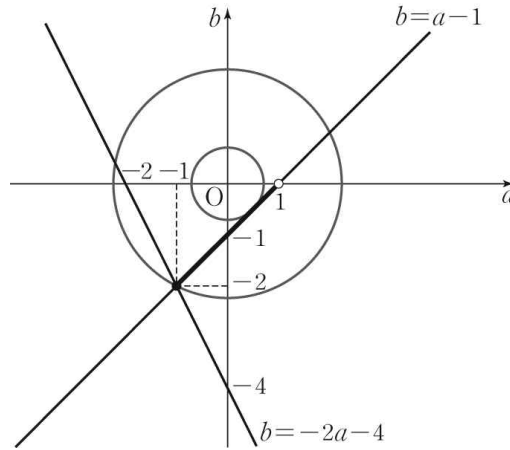
또한 $f'(0) \leq 0$, $f'(2) \geq 0$ 이므로

$$f'(0) = b \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$f'(2) = 3(4+2a+b) \geq 0 \quad \therefore b \geq -2a-4 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$



따라서 ㉠, ㉡, ㉢을 만족시키는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때, $a^2 + b^2 = r^2$ 이라 하면 $a^2 + b^2 = r^2$ 과 $b = a - 1$ 이 접할 때 r^2 이 최소이고, $a^2 + b^2 = r^2$ 이 점 $(-1, -2)$ 를 지날 때 r^2 이 최대이다. 따라서

$$M = (-1)^2 + (-2)^2 = 5,$$

$$m = \left(\frac{|0 - 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

그러므로 $M + m = 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$ 이다.

풀어보기(문제3) 정답 13

쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 주축의 길이는 $2 \times 4 = 8$ 이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = \overline{QF} - \overline{QF'} = 8$$

이다.

$$\overline{PF'} = \overline{PF} + 8 \quad \dots \text{㉠}$$

$$\overline{QF'} = \overline{QF} - 8 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠-㉡에서 $\overline{PF'} - \overline{QF'} = \overline{PF} - \overline{QF} + 16$ 이고 $\overline{PF'} - \overline{QF'} = 3$ 이므로 $\overline{QF} - \overline{PF} = 16 - 3 = 13$ 이다.



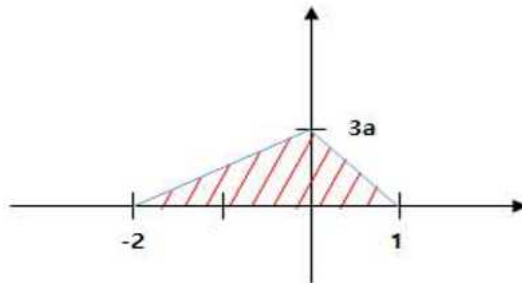
[문항1] 대학발표 예시답안

[1-1] O가 서로 이웃하지 않는 경우는 A, B, C, D, E, F, F 7개의 문자를 나열하고 그 사이 또는 양 끝인 8곳 중에서 3개를 선택하여 O를 넣으면 된다. 전체 경우의 수는 $\frac{10!}{3!2!}$ 이고 O가 서로 이웃하지 않는 경우는 $\frac{7!}{2!} \times {}_8C_3$ 이다.

따라서 그 확률은 $\frac{\frac{7!}{2!} \times {}_8C_3}{\frac{10!}{3!2!}} = \frac{7}{15}$ 이다.

[1-2]

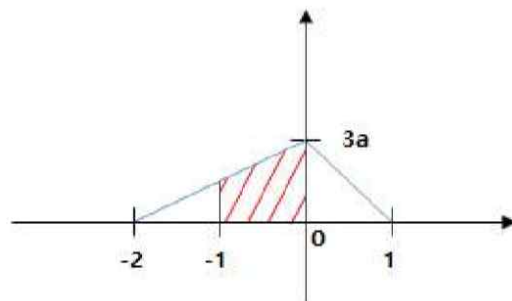
- (1) 함수 $f(x)$ 가 연속확률변수 X 의 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, 직선 $x=-2$, $x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이다. 즉 이 부분은 아래 그림과 같이 높이가 $3a$ 이고 밑변의 길이가 3인 삼각형이다. 따라서 $3a \times 3 \times \frac{1}{2} = 1$ 을 만족하므로 $a = \frac{2}{9}$ 이다.



$P(-1 \leq X \leq 0)$ 의 값은 아래의 표시된 부분의 넓이와 같고 이 넓이는 전체 넓이 1에서 양쪽의 삼각형 넓이를 빼면 된다. 양쪽 삼각형 넓이 중 왼쪽 삼각형의 넓이는

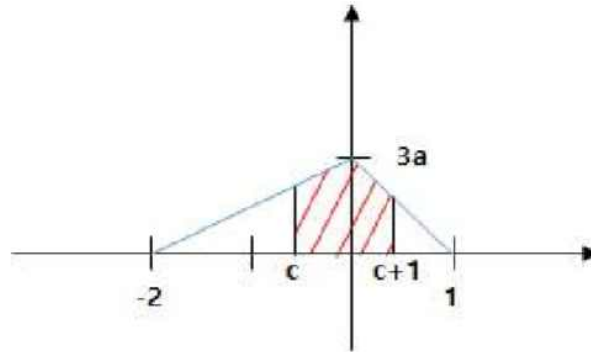
$1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ 이고 오른쪽 삼각형의 넓이는 $1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ 이므로

$P(-1 \leq X \leq 0)$ 는 $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ 이다.





- (2) $P(c \leq X \leq c+1)$ 의 값은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, 직선 $x=c$, 직선 $x=c+1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 아래의 그림에서 빗금 친 부분의 넓이가 된다. 단, $-1 \leq c \leq 0$ 이다. 그리고 빗금 친 부분의 넓이는 전체 넓이 1에서 양쪽의 삼각형의 넓이를 빼면 된다.



양쪽 삼각형의 넓이 중 왼쪽 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (c+2) \times \left(\frac{1}{3}c + \frac{2}{3} \right) = \frac{(c+2)^2}{6}$$

이고, 오른쪽 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (-c) \times \left(-\frac{2}{3}(c+1) + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3}c^2$$

이므로

$$P(c \leq X \leq c+1) = 1 - \frac{(c+2)^2}{6} - \frac{c^2}{3} = -\frac{1}{2} \left(c + \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{5}{9}$$

이다. $c = -\frac{2}{3}$ 일 때, $P(c \leq X \leq c+1)$ 의 최댓값은 $\frac{5}{9}$ 이다. 따라서 $\alpha = -\frac{2}{3}$ 이고 $\beta = \frac{5}{9}$ 이다.

- [1-3] 불량품이 뽑히는 사건을 E , 생산된 스마트폰이 A 공장일 사건을 A , 생산된 스마트폰이 B 공장일 사건을 B 라 하자.

$$P(E) = P(A \cap E) \cup P(B \cap E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B)$$

이므로 이 기업에서 생산된 스마트폰 중 임의로 추출한 제품이 불량품일 확률 p 는 $p = 0.6 \times 0.05 + 0.4 \times 0.1 = 0.07$ 이다.

그리고 이 기업에서 생산된 제품 중에서 임의로 200개를 추출하였을 때, 이 제품 중 불량품의 개수를 확률변수 X 라 하자. 확률변수 X 는 이항분포 $B(200, 0.07)$ 을 따른다. 따라서 불량품의 개수의 기댓값은

$$np = 200 \times 0.07 = 14$$

이다.



[문항2] 대학발표 예시답안

[2-1] 이차함수 $f(x)$ 가 최댓값 0을 가지므로 최고차항의 계수는 $\frac{1}{2a}$ 은 음수이고 $f(x)$ 의 판별식은 0이다. 즉,

$$a < 0, \quad D = (a-1)^2 - \frac{4}{2a}(a-1) = \frac{(a+1)(a-1)(a-2)}{a} = 0$$

이다. 따라서 $a = -1$ 이다.

[2-2] $a < 0$ 인 경우, 이차함수 $f(x)$ 는 반드시 어떤 구간에서 음수 값을 갖는다. 따라서 제시문 (나)에 의해 $F(x)$ 는 이 구간에서 감소함을 알 수 있다.

$a > 0$ 이므로 삼차함수 $F(x)$ 가 실수 전체에서 증가하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

모든 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 위 조건을 만족시키기 위한 필요충분조건은

$$D = \frac{(a+1)(a-1)(a-2)}{a} \leq 0$$

이다. 부등식 $a > 0$ 을 동시에 만족시키는 최대 범위는 $1 \leq a \leq 2$ 이다. 따라서 $\beta - \alpha$ 의 최댓값은 1이다.

[2-3] $a \in (2, 3)$ 인 경우 $f(x)$ 의 판별식 D 는 양수이므로 이차방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근

$$x_1 = \frac{-(a-1) - \sqrt{\frac{(a+1)(a-1)(a-2)}{a}}}{\frac{1}{a}}, \quad x_2 = \frac{-(a-1) + \sqrt{\frac{(a+1)(a-1)(a-2)}{a}}}{\frac{1}{a}}$$

를 갖는다. 또한 $x_1 = b$, $x_2 = c$ 라 하면 함수 $F(x)$ 는 구간 (b, c) 에서 감소하고 구간 $(-\infty, b)$ 와 (c, ∞) 에서 증가하므로 조건 (i)를 만족한다. 조건 (ii)는 다음과 같다.

$$2\sqrt{(a+1)a(a-1)(a-2)} = c - b = \frac{97}{10}, \quad \text{즉} \quad (a+1)a(a-1)(a-2) = \left(\frac{97}{10}\right)^2 = \frac{9409}{400}$$

이다. 이제 $g(a) = (a+1)a(a-1)(a-2)$ 라 하자. 그러면 함수 $g(a)$ 는 실수 전체에서 연속이고 $g(2) = 0 < \frac{9409}{400} < \frac{9600}{400} = 24 = g(3)$ 이므로 제시문 (다)에 의해 등식

$g(a) = \frac{9409}{400}$ 를 만족시키는 실수 a 가 구간 $(2, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다. 따라서 주어진 조건을 만족하는 실수 a 가 구간 $(2, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.



(나침반 풀이)

$a \in (2, 3)$ 인 경우 조건 (i)가 성립할 필요충분조건은 이차방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근이 b, c 인 경우이다. 근과 계수와의 관계에 의해

$$b+c = -2a(a-1), \quad bc = 2a(a-1)$$

이다. 따라서

$$(c-b)^2 = (b+c)^2 - 4bc = 4a(a-1)(a+1)(a-2)$$

이다.

$g(a) = 4a(a-1)(a+1)(a-2)$ 라 하자. 그러면 함수 $g(a)$ 는 실수 전체에서 연속이고

$$g(2) = 0 < 9.7^2 < 96 = g(3)$$

이므로 제시문 (다)에 의해 등식 $g(a) = 9.7^2$ 를 만족시키는 실수 a 가 구간 $(2, 3)$ 에 적어도 하나 존재하고 $c-b > 0$ 이므로 이 실수 a 에 대하여 $c-b = 9.7$ 이 된다.

따라서 주어진 조건을 만족하는 실수 a 가 구간 $(2, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

[문항3] 대학발표 예시답안

[3-1] $e^{-f(x)} \frac{d^2}{dx^2} e^{f(x)} = (2ax+b)^2 + 2a$ 이므로 $y^2 = (2ax+b)^2 + 2a$ 이다. $y^2 = (2ax+b)^2 + 2a$ 를

$Ax^2 + By^2 + Cx + D = 0$ 로 표현하면 $4a^2x^2 - y^2 + 4abx + b^2 + 2a = 0$ 이다.

$A = 4a^2, B = -1$ 이므로 $\frac{A}{B} = -4a^2$ 이다.

[3-2] 쌍곡선 H 가 직선 $x=1$ 과 만나지 않기 위해 $a < 0$ 이고 쌍곡선 H 의 방정식은

$$\frac{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}{-\frac{1}{2a}} - \frac{y^2}{-2a} = 1$$

이다. 쌍곡선 H 의 두 꼭짓점의 x 좌표가 $-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{1}{2a}}$ 이므로

직선 $x=1$ 과 $\frac{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}{-\frac{1}{2a}} - \frac{y^2}{-2a} = 1$ 이 만나지 않기 위해서

$$-\frac{b}{2a} - \sqrt{-\frac{1}{2a}} < 1 < -\frac{b}{2a} + \sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

이고 이를 정리하면

$$-2a - \sqrt{-2a} < b < -2a + \sqrt{-2a}$$

이다.

점근선이 $y = \pm 2a\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ 이므로 직선 $y = x + \frac{b}{2a}$ 와 쌍곡선이 만나지 않기 위해



$-\frac{1}{2} \leq a < 0$ 이어야 한다.

주축의 길이는 $2\sqrt{-\frac{1}{2a}}$ 이므로 이 값이 4 이하이기 위해서는 $a \leq -\frac{1}{8}$ 이다.

따라서 구하는 영역의 넓이는

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{8}} (-2a + \sqrt{-2a}) da - \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{8}} (-2a - \sqrt{-2a}) da = \frac{7}{12}$$

이다.

[3-3]

(1) 두 삼각형 $\triangle F'SQ$ 와 $\triangle FSQ$ 에서 피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{F'Q}^2 - \overline{F'S}^2 = \overline{FQ}^2 - \overline{FS}^2 \quad \dots (*)$$

이다. 쌍곡선의 정의에 의해

$$\overline{F'Q} = \overline{FQ} + 2\sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

이고, 쌍곡선의 초점의 성질로부터

$$\overline{F'S} - \overline{FS} = 2\sqrt{\frac{-1-4a^2}{2a}}, \quad \overline{F'S} = \overline{FS} + 2\sqrt{\frac{-1-4a^2}{2a}}$$

이다. 이를 (*) 식에 대입하면

$$-\sqrt{\frac{-1-4a^2}{2a}} \overline{FS} + \sqrt{-\frac{1}{2a}} \overline{FQ} = -2a$$

이므로 $-\sqrt{1+4a^2} \overline{FS} + \overline{FQ} = (-2a)^{\frac{3}{2}}$ 이다. 따라서 $p = \frac{3}{2}$ 이다.

(2) $\alpha = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{-1-4a^2}{2a}}, \beta = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{-1-4a^2}{2a}}$ 이므로 $(\alpha - \beta)^2 = -8a - \frac{2}{a}$ 이고

산술기하평균에 의해 $(\alpha - \beta)^2 \geq 2\sqrt{(-8a)\left(-\frac{2}{a}\right)} = 2\sqrt{16} = 8$ 이 된다.

따라서 $a = -\frac{1}{2}$ 일 때 $(\alpha - \beta)^2$ 가 최솟값을 갖는다.



02

경북대학교(자연계열 II) 모의2)



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
정적분의 성질, 자연수의 거듭제곱의 합, 치환적분법, 정적분의 정의, 원의 방정식, 이동거리, 이계도함수, 물의 정리, 미분가능성과 연속	의예과, 치의예과는 국어, 수학, 영어, 탐구(1과목) 4개 영역 등급 합이 5이내, 한국사 4등급 이내 수의예과는 3개 영역 등급 합이 6이내, 한국사 4이내	수학 3문항 내외	100분

[문항 1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$(1) \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \text{ (단, } k \text{ 는 상수)}$$

$$(2) \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$(3) \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

(4) 실수 c 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에 포함될 때,

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \text{ 이다.}$$

$$(나) (1) 1+2+3+\cdots+n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2) 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(다) 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여, 미분가능한 함수 $x=g(t)$ 의 도함수 $g'(t)$ 가 닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 연속이고 $a=g(\alpha), b=g(\beta)$ 이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt \text{ 이다.}$$

(라) 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

이다. (단, $\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a+k\Delta x$)



※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

함수 $f(x) = |\pi \sin(\pi x)|$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[1-1] 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = f(x+k)$$

임을 증명하시오. (단, k 는 정수이다.) (20점)

[1-2] $\sum_{j=0}^9 \int_0^{2j+1} 2xf(x)dx$ 의 값을 구하시오. (30점)

[1-3] 음이 아닌 모든 정수 k 에 대하여

$$\int_{k^2}^{(k+1)^2} 2xf(x)dx = a + bk + ck^2 + dk^3$$

을 만족시키는 상수 a, b, c, d 의 값을 각각 구하시오. (30점)

[1-4] 일반항이 $a_n = \frac{1}{n^4} \int_0^{n^2} 2xf(x)dx$ 인 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값을 구하시오. (40점)





[문항 2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 반지름의 길이가 r 이고 중심이 (a, b) 인 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \text{ 이다.}$$

(나)

(1) 부등식 $x^2 + y^2 < r^2$ 의 영역은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 의 내부이다.

(2) 부등식 $x^2 + y^2 > r^2$ 의 영역은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 의 외부이다.

(다) 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 로 주어질 때, $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 P 의 이동거리 s 는

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \text{ 이다.}$$

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

좌표평면에서 중심이 원점 O 이고 반지름의 길이가 4인 원을 C 라 하자. 두 점 $Q_1(2, 0)$, $Q_2(8, 0)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[2-1] 다음 조건을 만족시키는 점 A 가 나타내는 부분을 영역 F_1 이라 하자.

<조건>

중심이 A 인 원이 점 Q_1 을 내부에 포함하고 원 C 의 내부에 있다.

영역 F_1 의 경계선 위에 있는 점의 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점을 모두 구하시오.

(50점)

[2-2] 다음 조건을 만족시키는 점 B 가 나타내는 부분을 영역 F_2 라 하자.

<조건>

중심이 B 인 원이 점 Q_2 을 내부에 포함하고 원 C 의 외부에 있다.

원점을 지나면서 기울기가 0 이상이고 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하인 임의의 직선이 영역 F_2 의 경계선과 만나는 점을 P_2 라 하자. 선분 $\overline{OP_2}$ 와 문제 [2-1]에서 정의한 영역 F_1 의 경계선이 만나는 점을 P_1 이라 할 때,

$$\overline{Q_1P_1} : \overline{Q_2P_2} = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$$

를 만족하는 선분 $\overline{P_1P_2}$ 위의 점 P 가 그리는 곡선의 길이를 구하시오. (60점)



[문항 3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 미분가능할 때, $f'(x)$ 의 도함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dx}f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

이를 함수 $f(x)$ 의 이계도함수라 하고, 이것을 기호 $f''(x)$ 와 같이 나타낸다.

(나) 최고차항의 계수가 1인 이차다항식 $p(x)$ 의 근이 α, β 일 때,

$$p(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$$

이다.

(다) 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a, b) 에서 미분가능할 때, $f(a) = f(b)$ 이면

$$f'(c) = 0$$

인 c 가 열린 구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

(라) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 두 함수 $f(x), h(x)$ 와 세 실수 a, b, c ($a < b < c$)에 대하여, 다음 물음에 답하시오.

[3-1]

(1) 세 점 $(a, f(a)), (b, 0), (c, 0)$ 은 이차함수 $y = q_1(x)$ 의 그래프 위의 점일 때

$$q_1(x) = \frac{f(a)(x-b)(x-c)}{(a + \textcircled{1}b)(\textcircled{2}a + \textcircled{3}c)}$$

이다. ①, ②, ③에 알맞은 값을 각각 구하시오. (15점)

(2) 세 점 $(a, 0), (b, f(b)), (c, 0)$ 은 이차함수 $y = q_2(x)$ 의 그래프 위의 점일 때

$$q_2(x) = \frac{f(b)(x-c)(x-a)}{(a + \textcircled{4}b)(\textcircled{5}b + \textcircled{6}c)}$$

이다. ④, ⑤, ⑥에 알맞은 값을 각각 구하시오. (15점)



[3-2] 함수 $h(x)$ 가 $h(a)=h(b)=h(c)$ 을 만족시킬 때,

$$h''(d)=0$$

인 실수 d 가 열린 구간 (a, c) 에 적어도 하나 존재함을 증명하시오. (40점)

[3-3] 등식

$$\frac{\left(\frac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)}{c-a}=\frac{f''(d)}{2}$$

를 만족시키는 실수 d 가 열린 구간 (a, c) 에 적어도 하나 존재함을 증명하시오.

(50점)





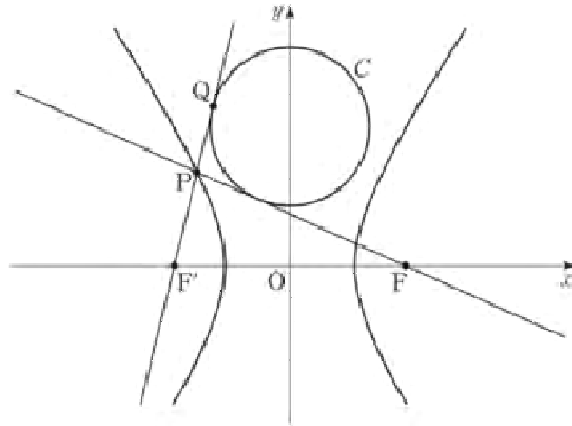
문제1. $x > 0$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가 모든 양수 x 에 대하여

$$2f(x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

을 만족시킬 때, $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx$ 의 값은? (2019. 대수능)

- ① $\frac{\ln 2}{3} + \frac{1}{2}$ ② $\frac{2\ln 2}{3} + \frac{1}{2}$ ③ $\frac{\ln 2}{3} + 1$ ④ $\frac{2\ln 2}{3} + 1$ ⑤ $\frac{2\ln 2}{3} + \frac{3}{2}$

문제2. 그림과 같이 두 초점이 F, F' 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{17} = 1$ 위의 점 P 에 대하여 직선 FP 과 직선 $F'P$ 에 동시에 접하고 중심이 y 축 위에 있는 원 C 가 있다. 직선 $F'P$ 과 원 C 의 접점 Q 에 대하여 $\overline{F'Q} = 5\sqrt{2}$ 일 때, $\overline{FP}^2 + \overline{F'P}^2$ 의 값을 구하시오.
(단, $\overline{F'P} < \overline{FP}$) (2018. 대수능)



문제3. 함수 $f(x) = \frac{1}{x+3}$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = 2$ 를 만족시키는 실수 a 의 값은? (2018. 6월 평가원)

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2



풀어보기(문제1) 정답 ②

모든 양수 x 에 대해 $2f(x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \dots (1)$ 이고

x 에 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면 $2f\left(\frac{1}{x}\right) + x^2f(x) = x + x^2 \dots (2)$ 이다.

(1), (2) 두 식을 연립하여 풀면 $f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx &= \left[\frac{1}{3} \ln x - \frac{2}{3x} - \frac{x}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^2 \\ &= \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{2} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

풀어보기(문제2) 정답 116

원의 중심을 $A(0, a)$ 라 하고, 원과 직선 PF 의 접점을 R 라 하자.

$$\overline{PF'} = p, \overline{PQ} = \overline{PR} = q, \overline{RF} = r$$

라 하자.

$$\overline{F'Q} = 5\sqrt{2} \text{ 이므로 } p + q = 5\sqrt{2} \dots\dots \textcircled{㉠}$$

쌍곡선의 주축의 길이가 $2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

이므로 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{PF} - \overline{PF'} = q + r - p = 4\sqrt{2} \dots\dots \textcircled{㉡}$

$\overline{AQ} = \overline{AR}$, $\overline{AF} = \overline{AF'}$ 이고 $\angle AQF' = \angle ARF = 90^\circ$ 이므로 두 삼각형 AQF' 과 직각삼각형 ARF 는 서로 합동이다.

따라서 $\overline{RF} = \overline{QF'}$ 이므로 $r = 5\sqrt{2} \dots\dots \textcircled{㉢}$

$\textcircled{㉢}$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하여 정리하면 $p - q = \sqrt{2} \dots\dots \textcircled{㉣}$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉣}$ 을 연립하면 $p = 3\sqrt{2}$, $q = 2\sqrt{2}$





따라서

$$\overline{FP}^2 + \overline{F'P}^2 = p^2 + (q+r)^2 = (3\sqrt{2})^2 + (7\sqrt{2})^2 = 18 + 98 = 116$$

풀어보기(문제3) 정답 ①

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = f''(a) \text{ 이므로 } f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}, f''(x) = \frac{2}{(x+3)^3} \text{ 이다.}$$

$$\frac{2}{(a+3)^3} = 2 \text{ 에서 } a = -2 \text{ 이다.}$$

[문항1] 대학발표 예시답안

[1-1] 함수 $f(x)$ 의 주기가 1 이므로,

$$\begin{aligned} f(x+k) &= |\pi \sin(\pi(x+k))| = |\pi \sin(\pi x + \pi k)| = |\pi \sin(\pi x + \pi(k-1))| = \cdots \\ &= |\pi \sin(\pi x + \pi)| = |\pi \sin(\pi x)| = f(x) \text{ 이다.} \end{aligned}$$

[다른 풀이]

(1) 함수 $f(x+k)$ 의 그래프는 함수 $f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-k$ 만큼 평행이동시켜서 얻어진다. 이때, 함수 $f(x)$ 의 주기가 1 이므로 두 함수의 그래프가 같음을 알 수 있다. 따라서 $f(x+k) = f(x)$ 이다.

$$\begin{aligned} (2) f(x+k) &= |\pi \sin(\pi(x+k))| = |\pi \sin(\pi x) \cos(\pi k) + \pi \cos(\pi x) \sin(\pi k)| \\ &= |(-1)^k \pi \sin(\pi x)| = |\pi \sin(\pi x)| = f(x) \text{ 이다} \end{aligned}$$

[나침반 다른 풀이] $f(x+k) = |\pi \sin(\pi(x+k))| = |\pi \sin(\pi x + \pi k)|$

$$= \begin{cases} |-\pi \sin \pi x| & (k \text{가 홀수}) \\ |\pi \sin \pi x| & (k \text{가 짝수}) \end{cases} = |\pi \sin \pi x| = f(x)$$

[1-2] $g(k) = \int_0^{2k+1} 2xf(x)dx$ 라 하자. 이때, $t = (2k+1) - x$ 라고 두면 치환적분에 의해서 $g(k)$ 는 다음과 같다.

$$g(k) = - \int_{2k+1}^0 2(2k+1-t)f(2k+1-t)dt$$

한편, 문제 [1-1]에 의하여 위의 식에서 $f(2k+1-t) = f(t)$ 이다. 이를 이용하여 $g(k)$ 를 정리하면 다음과 같다.

$$g(k) = \int_0^{2k+1} 2(2k+1)f(t)dt - \int_0^{2k+1} 2tf(t)dt = \int_0^{2k+1} 2(2k+1)f(t)dt - g(k)$$

위의 식을 $g(k)$ 로 정리하면 다음의 방정식을 얻을 수 있다.



$$g(k) = \int_0^{2k+1} (2k+1)f(t)dt$$

한편, $\int_0^1 f(x)dx = 2$ 이고 함수 $f(x)$ 의 주기가 1 이므로 $\int_0^{2k+1} f(t)dt = 4k+2$ 이고

$$g(k) = 2(2k+1)^2 \text{ 이다.}$$

따라서 $\sum_{k=0}^9 g(k) = 2660$ 이다.

[다른 풀이] 정적분의 구간을 나누어 부분적분법을 이용하여 계산이 가능하나 이 경우 계산이 매우 복잡해진다.

[1-3] 정적분 $\int_{k^2}^{(k+1)^2} 2xf(x)dx$ 에서 $s = x - k^2$ 이라 하자. 그러면 치환적분에 의해서 그 정적분은 다음과 같다.

$$\int_0^{2k+1} 2(s+k^2)f(s+k^2)ds$$

한편, 문제 [1-1]에 의하여 위의 식에서 $f(s+k^2) = f(s)$ ($\because k^2$ 은 정수)이다. 이를 이용하여 위의 정적분을 정리하면 다음과 같다.

$$\int_0^{2k+1} 2sf(s)ds + \int_0^{2k+1} 2k^2 f(s)ds$$

한편, $\int_0^1 f(x)dx = 2$ 이고 $f(x)$ 는 주기가 1 이므로, $\int_0^{2k+1} f(s)ds = 4k+2$ 임을 알 수 있고,

또한 문제 [1-2]에서 얻은 결과를 이용하면 $\int_0^{2k+1} 2sf(s)ds = 2(2k+1)^2$ 임을 알 수 있다.

구하고자 하는 정적분의 값은 $2(2k+1)^2 + 2k^2(4k+2) = 2 + 8k + 12k^2 + 8k^3$ 이다. 따라서 $a=2, b=8, c=12, d=8$ 이다.

[1-4] 정적분의 성질에 의해 $\int_0^{n^2} 2xf(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k^2}^{(k+1)^2} 2xf(x)dx$ 가 됨을 알 수 있다.

한편, 문제 [1-3]에 의해 얻은 결과를 이용하면 다음의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\int_0^{n^2} 2xf(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} (8k^3 + 12k^2 + 8k + 2)$$

따라서, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \int_0^{n^2} 2xf(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} (8k^3 + 12k^2 + 8k + 2)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} 8k^3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} 12k^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} 8k + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} 2$$

(수렴하는 수열의 성질을 이용)



$$= \int_0^1 8x^3 dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-1)n(2n-1)}{n^4} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n-1)n}{n^4} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-1)}{n^4}$$

(정적분의 정의를 이용)

$$= 2 \text{ 이다.}$$

[문항2] 대학발표 예시답안

[2-1] 중심의 좌표가 (a, b) 이고 반지름이 r 인 원 $C_1 = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$ 이 원 C 의 내부에 있을 조건은

$$(*) \sqrt{a^2 + b^2} + r < 4$$

이고 점 $(2, 0)$ 이 C_1 내부에 있을 조건은

$$(**) \sqrt{(2-a)^2 + b^2} < r$$

이다. (*)와 (**)에 의해서

$$\sqrt{(2-a)^2 + b^2} < r < 4 - \sqrt{a^2 + b^2}$$

을 얻을 수 있다. 즉 중심의 영역은 $\sqrt{(a-2)^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2} < 4$ 인 타원의 내부이다. 타원의 방정식 $\sqrt{(a-2)^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2} = 4$ 를 간단히 하면 $3(a-1)^2 + 4b^2 = 12$ 가 된다. 이때 $12 - 4b^2 \geq 0$ 이므로 $-\sqrt{3} \leq b \leq \sqrt{3}$ 이다. 따라서 정수인 b 는 $-1, 0$ 또는 1 이 될 수 있고 이 중 a 가 정수값을 가질 수 있는 b 는 0 이다. 따라서 영역 F_1 의 경계선 위에 있는 점의 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은 $(3, 0)$ 와 $(-1, 0)$ 이다.

[2-2] 중심이 (a, b) 이고 반지름이 r 인 원 $C_2 = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$ 이 원 C 의 외부에 있을 조건은

$$(*) \sqrt{a^2 + b^2} - r > 4$$

이고 점 $(8, 0)$ 이 C_2 내부에 있을 조건은

$$(**) \sqrt{(8-a)^2 + b^2} < r$$

이다. (*)와 (**)에 의해서

$$\sqrt{(8-a)^2 + b^2} < r < \sqrt{a^2 + b^2} - 4$$

를 얻을 수 있다. 즉, 중심의 영역은 $\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{(8-a)^2 + b^2} > 4$ 인 한쪽 쌍곡선의 내부이고 F_2 의 경계는 $\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{(8-a)^2 + b^2} = 4$ 인 곡선이다. 등식을 간단히 하면 $3(a-4)^2 - b^2 = 12$ ($a > 4$) 이다.

쌍곡선의 정의를 이용하면 $\overline{OP_1} + \overline{P_1P_2} - \overline{Q_2P_2} = 4$ 이고 타원의 정의를 이용하면 $\overline{OP_1} + \overline{Q_1P_1} = 4$ 이다. 두 식을 빼면 $\overline{P_1P_2} - \overline{Q_2P_2} - \overline{Q_1P_1} = 0$ 을 구할 수 있다. 이에 따라 $\overline{Q_1P_1} : \overline{Q_2P_2} = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ 를 만족시키는 $\overline{P_1P_2}$ 위의 점 P 에 대하여 $\overline{OP} = \overline{OP_1} + \overline{P_1P} = \overline{OP_1} + \overline{Q_1P_1} = 4$ 가 된다. 즉 점 P 의 자취는 반지름이 4 이고 각도가



30° 인 호가 되며 이 길이는 $\frac{2\pi}{3}$ 이다.

[문항3] 대학발표 예시답안

[3-1] (1) 이차식 $q_1(x)$ 에 대하여, 등식 $q_1(x)=0$ 은 두 개의 서로 다른 근 b 와 c 를 가지므로, $q_1(x)=C(x-b)(x-c)$ 임을 알 수 있다. 또한 $q_1(a)=f(a)$ 임을 이용하면,

$C=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}$ 임을 알 수 있다. 따라서 ① = -1, ② = 1, ③ = -1 이다. (각 5점씩 15점)

(2) 이차식 $q_2(x)$ 에 대하여, 등식 $q_2(x)=0$ 은 두 개의 서로 다른 근 a 와 c 를 가지므로, $q_2(x)=C'(x-c)(x-a)$ 임을 알 수 있다. 또한 $q_2(b)=f(b)$ 임을 이용하면,

$C'=\frac{f(b)}{(b-c)(b-a)}=\frac{f(b)}{(a-b)(-b+c)}$ 임을 알 수 있다. 따라서

④ = -1, ⑤ = -1, ⑥ = 1 이다. (각 5점씩 15점)

[3-2] 롤의 정리에 의하여, $h'(c_1)=0$ 인 c_1 이 열린 구간 (a,b) 사이에 적어도 하나 존재하고, 역시 롤의 정리에 의하여 $h'(c_2)=0$ 인 c_2 이 열린 구간 (b,c) 사이에 적어도 하나 존재한다. (20점)

이 때, $a < c_1 < b < c_2 < c$ 임을 알 수 있다. (10점)

다시 롤의 정리에 의하여 $h''(d)=0$ 인 d 가 열린 구간 $(c_1, c_2) \subset (a, c)$ 사이에 적어도 하나 존재한다. (10점)

[3-3] 문제 [3-1](1), (2)의 답에서와 마찬가지로 방법을 통하여, 이차 이하 다항함수 $y=q_3(x)$ 의 그래프가 세 점 $(a,0)$, $(b,0)$, $(c,f(c))$ 을 지난다고 하면,

$q_3(x)=\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$ 이다.

$p(x)=q_1(x)+q_2(x)+q_3(x)$ 로 두면, $p(x)$ 는 이차 이하의 다항식이고, 함수 $y=p(x)$ 의 그래프는 $(a,f(a))$, $(b,f(b))$, $(c,f(c))$ 를 지난다.

$h(x)=f(x)-p(x)$ 로 두면, $h(a)=h(b)=h(c)=0$ 임을 알 수 있다. [3-2]의 결과로부터, $h''(d)=0$ 인 d 가 열린 구간 (a,c) 사이에 적어도 하나 존재함을 알 수 있다. (20점)

이때, $p(x)$ 의 이차항의 계수 $A=\frac{\left(\frac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)}{c-a}$ 이다. (15점)

한편, $h''(x)=f''(x)-p''(x)=f''(x)-2A$ 인데, $h''(d)=0$ 으로부터,

$\frac{\left(\frac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)}{c-a}=\frac{f''(d)}{2}$ 이다. (15점)



03

경북대학교(자연계열 I) 수시3)

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
조건부확률, 이산확률변수, 정규분포, 좌표공간에서의 거리, 공간벡터의 내적, 음함수의 미분법, 정사영, 삼수선의 정리, 역함수의 정적분, 치환적분법	3개 영역 등급 합 8 이내 & 한국사 4등급 이내 (단, 전자공학부 모바일공학전공은 2개 영역(수학/과탐) 등급 합 3 이내) *수학나형의 경우 2등급 하향반영	수학 4문항 내외	100분

[문항 1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 표본공간 S 의 두 사건 A, B 에 대하여 사건 A 가 일어났을 때, 사건 B 가 일어날 확률을 사건 A 가 일어났을 때의 사건 B 의 조건부확률이라고 하며, 이것을 기호로 $P(B|A)$ 와 같이 나타낸다. 이때

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (\text{단, } P(A) \neq 0)$$

이 성립한다.

(나) 이산확률변수 X 가 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 의 값을 가질 확률을 각각 $P(X = x_i) = p_i$ 라고 할 때, x_1, x_2, \dots, x_n 과 확률 p_1, p_2, \dots, p_n 사이의 대응 관계를 이산확률변수 X 의 확률분포라 한다. 이산확률변수 X 의 확률질량함수 $P(X = x_i) = p_i$ 는 다음의 성질을 만족시킨다.

(a) $0 \leq p_i \leq 1$

(b) $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

이산확률변수 X 의 기댓값(평균) $E(X)$ 와 분산 $V(X)$ 는

(c) $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$

(d) $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i p_i \right)^2$

이다.



(다) 자연수 k 에 대하여

$$(a) \sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$(b) \sum_{j=1}^k j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$(c) \sum_{j=1}^k j^3 = \left\{ \frac{k(k+1)}{2} \right\}^2$$

이다.

(라) 평균이 0이고 분산이 1인 정규분포 $N(0,1)$ 을 표준정규분포라고 한다. 확률변수 Z 가 표준정규분포 $N(0,1)$ 을 따를 때, 양수 z 에 대하여 확률 $P(0 \leq Z \leq z)$ 는 다음의 표준정규분포표를 이용하여 구할 수 있다.

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
3.0	0.4987

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

[1-1] 두 사건 A, B 가

$$P(A) = P(A^C \cap B) = \frac{1}{3}P(A^C \cap B^C)$$

을 만족시킬 때, $P(B^C|A^C)$ 의 값을 구하시오. (단, A^C 은 A 의 여사건이다.) (20 점)



[1-2] 이산확률변수 X, Y 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 자연수 k 에 대하여 이산확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	...	k	합계
$P(X=x)$	p_1	p_2	...	p_k	1

다음 조건을 만족시키는 자연수 k 와 $P(X=1)$ 의 값을 구하시오. (30점)

$$(a) P(X=j) = j \times P(X=1) \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

$$(b) E(X^2) = \frac{10}{3}E(X)$$

(2) 상수 a 에 대하여 서로 다른 세 실수 α, β, γ 는 방정식

$$x^3 - (a+1)x^2 + 2(a-1)x - a + 2 = 0$$

의 근이다. 이산확률변수 Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	α	β	γ	합계
$P(Y=y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

이산확률변수 Y 의 분산이 $\frac{2}{3}$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오. (30점)

[1-3] 평균이 m 이고 표준편차가 σ 인 정규분포를 따르는 확률변수 X 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(a) P(X \leq 11) = 0.1587$$

$$(b) P(X \geq 6) = 0.9772$$

제시문 (라)를 이용하여 $P(1 \leq X \leq 21)$ 의 값을 구하시오. (30점)



[문항 2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표공간에서 점 (x_1, y_1, z_1) 과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

이다.

(나) 도형 F 의 평면 α 위로의 정사영을 F' 이라 하고, 도형 F 를 포함하는 평면이 평면 α 와 이루는 각의 크기를 θ , 도형 F 와 도형 F' 의 넓이를 각각 S, S' 이라고 하면

$$S' = S \cos \theta$$

이다.

(다) 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P , 평면 α 위의 직선 l , 직선 l 위의 한 점 Q , 직선 l 위에 있지 않은 평면 α 위의 한 점 R 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\overline{PR} \perp \alpha, \overline{RQ} \perp l \text{ 이면 } \overline{PQ} \perp l$$

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

좌표공간에서 평면 α 와 직선 l 은

$$\alpha : x+2y-2z+1=0, l : \frac{x+1}{4} = 1-y = z-1$$

이다. 중심이 점 $P(-1, 1, 1)$ 이고 반지름의 길이는 각각 $7, 7\sqrt{2}$ 인 두 동심원 O_a, O_b 가 평면 α 위에 있다. 인공위성 A, B 는 각각 동심원 O_a, O_b 를 따라 일정한 속력으로 이동한다. 중심이 직선 l 위에 있고 반지름의 길이가 10 인 원 O_c 는 평면 α 위에 있지 않다. 인공위성 C 는 원 O_c 를 따라 이동한다. 장박사는 점 $H(14, 16, 1)$ 의 위치에서 인공위성을 관찰한다. 다음 물음에 답하시오. (단, 인공위성 A, B, C 를 각각 점 A, B, C 라 하고, 인공위성 A 의 회전축은 원 O_a 의 중심을 지나고 원 O_a 를 포함하는 평면과 수직인 직선이다.)

[2-1] 인공위성 A 가 원 O_a 를 따라 한 바퀴 이동할 때, A 와 H 사이의 거리의 최솟값을 구하시오. (30점)



[2-2] 두 인공위성 A, B는 시간당 원 O_a , O_b 를 따라 각각 네 바퀴, 두 바퀴씩 돈다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 다음은 $\angle APB = \theta$ 일 때, 두 인공위성 A, B사이의 거리를 구하는 과정이다.

$\vec{u} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{PB}$ 라고 하면 $\overrightarrow{BA} = \vec{u} - \vec{v}$ 이다. 따라서

$$\overline{AB}^2 = |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 49 + \boxed{\text{㉠}} - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$= 49 + \boxed{\text{㉠}} - \boxed{\text{㉡}} \cos \theta$$

이다.

㉠, ㉡에 알맞은 값을 구하시오. (10점)

(2) 두 인공위성 A, B가 최단거리에 위치한 후 처음으로 $\angle APB$ 의 크기가 45° 가 될 때, 두 인공위성 A, B사이의 거리의 시간(분)에 따른 변화율을 구하시오. (단, 두 인공위성이 최단거리에 위치할 때 A의 속도벡터는 B의 속도벡터의 양의 실수배이고, 회전속력의 단위는 라디안/분이다.) (30점)

[2-3] 인공위성 C의 회전축은 두 인공위성 A, B의 회전축과 만나고, 원 O_c 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 $50\sqrt{2}\pi$ 이다. 인공위성 C의 회전축의 방향벡터를 $(2, p, q)$ 라 할 때, $6p - q = m + n\sqrt{2}$ 이다. 순서쌍 (m, n) 을 모두 구하시오. (단, m, n 은 정수이다.) (50점)



[문항 3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 일대일 대응일 때

(1) f 의 역함수 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 가 존재한다.

(2) $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

(나) 미분가능한 함수 $t = g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 가 닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 연속이고, 함수 $f(t)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ 이면

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(a) 함수 $f(x)$ 는 미분가능한 역함수 $f^{-1}(x)$ 를 갖는다.

(b) 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+2) = f(x)+2, \quad f(x) = -f(-x)$$

이다.

(c) 실수 a 에 대하여 $f(a) = a$ 이면 a 는 정수이다.

(d) $\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{3}$

함수 $g(x) = f(x) - f^{-1}(x)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[3-1] $\int_0^1 g(x)dx$ 의 값을 구하시오. (20점)

[3-2] 모든 실수 x 에 대하여 $g(x+1) + g(1-x) = 0$ 이 성립함을 증명하시오. (30점)

[3-3] 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 방정식 $g(x) = 0$ 을 만족시키는 모든 실근의 개수는 두 개임을 증명하시오. (30점)

[3-4] $\int_1^{20} x^2 |g(x)|dx - \int_0^1 (19x^2 - 40x + 40)g(x)dx$ 의 값을 구하시오. (40점)





문제1. 좌표공간에 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 이 평면 $x + 2z - 5 = 0$ 과 만나서 생기는 원 C 가 있다. 원 C 위의 점 중 y 좌표가 최소인 점을 P 라 하고, 점 P 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 Q 라 하자. 원 C 위를 움직이는 점 X 에 대하여 $|\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{QX}|^2$ 의 최댓값을 $a + b\sqrt{30}$ 이다. $10(a+b)$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 유리수이다.) (2017. 대수능)

문제2. 연속함수 $f(x)$ 와 그 역함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1) = 1, f(3) = 3, f(7) = 7$

(나) $x \neq 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f''(x) < 0$ 이다.

(다) $\int_1^7 f(x) dx = 27, \int_1^3 g(x) dx = 3$

$12 \int_3^7 |f(x) - x| dx$ 의 값을 구하시오. (2017. 3월 전국연합)



풀어보기(문제1) 정답 136

구 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 의 중심을 $O(0, 0, 0)$ 이라 하고, 원 C 의 중심을 C 라 하면 원점 O 에서 평면 $x+2z-5=0$ 에 내린 수선의 발이 점 C 이다.

평면 $x+2z-5=0$ 이 법선벡터를 \vec{n} 이라 하면 $\vec{n}=(1, 0, 2)$

이므로 원점 O 를 지나고 평면 $x+2z-5=0$ 에 수직인 직선의 방정식은 $\frac{x}{1}=\frac{z}{2}, y=0$

$\frac{x}{1}=\frac{z}{2}=t$ (t 는 실수)라 하면 $x=t, z=2t$ 이므로 이를 $x+2z-5=0$ 에 대입하면

$t+4t-5=0$ 에서 $t=1$ 이다.

따라서 점 C 의 좌표는 $(1, 0, 2)$ 이다.

한편, 원점 O 와 평면 $x+2z-5=0$ 사이의 거리를 d_1 이라 하면

$$d_1 = \frac{|-5|}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}} = \sqrt{5}$$

이므로 원 C 의 반지름의 길이는

$$\sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2} = 1$$

이므로 평면 $x+2z-5=0$ 은 y 축과 평행하므로 원 C 도 y 축과 평행하다.

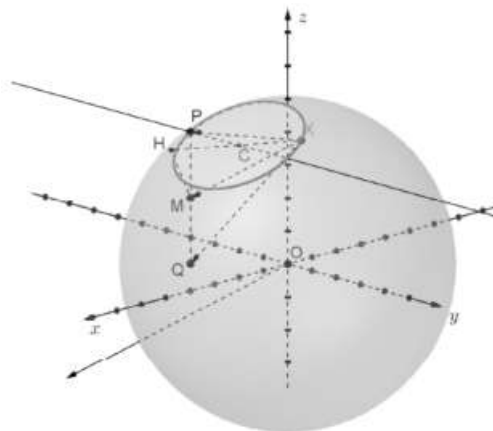
따라서 점 C 를 지나고 y 축에 평행한 직선과 원 C 가 만나는 두 점 중 y 좌표가 작은 점이 점 P 이다.

따라서 점 P 의 좌표는 $(1, -1, 2)$ 이고, 점 Q 의 좌표는 $(1, -1, 0)$ 이다.

한편, $|\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{QX}| = |\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{XQ}|$ 이므로 선분 PQ 의 중점을 M 이라 하면

$$|\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{XQ}| = 2|\overrightarrow{XM}|$$

이다.



점 M 의 좌표는 $(1, -1, 1)$ 이다.



점 M과 평면 $x+2z-5=0$ 사이의 거리를 d_2 라 하면

$$d_2 = \frac{|1+2-5|}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

이다.

따라서 점 M에서 평면 $x+2z-5=0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{MH} = d_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

이므로

$$\overline{HC} = \sqrt{\overline{MC}^2 - \overline{MH}^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$$

이때 원 C 위의 점 X에 대하여 \overline{HX} 의 최댓값은 $\overline{HC}+1 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}+1$

이므로 \overline{MX}^2 의 최댓값은

$$\overline{MH}^2 + (\overline{HC}+1)^2 = \frac{4}{5} + \frac{6}{5} + \frac{2\sqrt{30}}{5} + 1 = 3 + \frac{2\sqrt{30}}{5}$$

이다.

따라서 $|\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{XQ}|^2 = 4|\overrightarrow{XM}|^2$ 의 최댓값은 $4\left(3 + \frac{2\sqrt{30}}{5}\right) = 12 + \frac{8\sqrt{30}}{5}$ 이므로

$$a = 12, b = \frac{8}{5}$$

따라서 $10(a+b) = 120 + 16 = 136$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 24

함수 $f(x)$ 가 $f(1) < f(3)$ 이고 일대일대응이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $[1, 3]$ 에서 증가한다. 그러므로

$$\int_1^3 f(x) dx = 3 \times 3 - 1 \times 1 - \int_1^3 g(x) dx$$

이다. 또한, 조건 (다)에 의해서 $\int_1^3 g(x) dx = 3$ 이므로

$$\int_1^3 f(x) dx = 8 - 3 = 5,$$

$$\int_3^7 f(x) dx = \int_1^7 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx = 27 - 5 = 22$$

이다. 조건 (나)에 의해서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 구간 $(3, 7)$ 에서 위로 볼록하다. 조건 (가)에 의해서 $f(3) = 3$, $f(7) = 7$ 이므로 구간 $[3, 7]$ 에서 $f(x) - x \geq 0$ 이다.

$$12 \int_3^7 |f(x) - x| dx = 12 \int_3^7 \{f(x) - x\} dx = 12 \left\{ \int_3^7 f(x) dx - \int_3^7 x dx \right\} = 12 \times (22 - 20) = 24$$



[문항1] 대학발표 예시답안

[1-1]

$P(A)=x$ 라 하면 $P(A)=P(A^C \cap B)$ 이므로 $P(A \cup B)=P(A)+P(A^C \cap B)=2x$ 이다.

$P(A^C \cap B^C)=1-2x$ 이고 $P(A)=\frac{1}{3}P(A^C \cap B^C)$ 이므로 $1-2x=3x$ 이다.

따라서 $x=P(A)=\frac{1}{5}$ 이고 $P(A^C \cap B^C)=\frac{3}{5}$ 이므로

$$P(B^C|A^C)=\frac{P(B^C \cap A^C)}{P(A^C)}=\frac{P(A^C \cap B^C)}{1-P(A)}=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{3}{4} \text{ 이다.}$$

[1-2]

(1) 이산확률변수 X 의 확률분포와 조건에 의해서

$$E(X)=\sum_{j=1}^k j \times P(X=j)=\sum_{j=1}^k j^2 \times P(X=1)=p_1 \sum_{j=1}^k j^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}p_1 \text{ 이고}$$

$$E(X^2)=\sum_{j=1}^k j^2 \times P(X=j)=\sum_{j=1}^k j^3 \times P(X=1)=p_1 \sum_{j=1}^k j^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2 p_1 \text{ 이다.}$$

$$E(X^2)=\frac{10}{3}E(X) \text{ 이므로 } \left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2 p_1=\frac{10}{3} \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}p_1 \text{ 이고}$$

$9k^2-31k-20=(k-4)(9k+5)=0$ 을 만족시킨다. 따라서 $k=4$ 이다.

$$\text{그리고 } \sum_{j=1}^4 P(X=j)=(1+2+3+4)p_1=1 \text{ 이므로 } P(X=1)=\frac{1}{10} \text{ 이다.}$$

(2) 방정식 $x^3-(a+1)x^2+2(a-1)x-a+2=(x-1)\{x^2-ax+(a-2)\}=0$ 의 서로 다른 세 실근은 α, β, γ 이다. $\alpha=1$ 이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해서 $\beta+\gamma=a$ 이고 $\beta\gamma=a-2$ 이므로

$$E(Y)=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\frac{1+a}{3} \text{ 이고}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= \frac{1^2+\beta^2+\gamma^2}{3}-\left(\frac{1+a}{3}\right)^2=\frac{1+(\beta+\gamma)^2-2\beta\gamma}{3}-\frac{(a+1)^2}{9} \\ &= \frac{1+a^2-2(a-2)}{3}-\frac{(a+1)^2}{9}=\frac{2(a^2-4a+7)}{9} \end{aligned}$$

이다. $V(Y)=\frac{2}{3}$ 이므로 $a^2-4a+4=(a-2)^2=0$ 이다. 따라서 $a=2$ 이다.



[1-3]

확률변수 X 가 평균이 m 이고 표준편차가 σ 인 정규분포를 따르므로

$$P(X \leq 11) = P\left(Z \leq \frac{11-m}{\sigma}\right) = 0.1587 \text{ 이고 } P(X \geq 6) = P\left(Z \geq \frac{6-m}{\sigma}\right) = 0.9772 \text{ 이다.}$$

표준정규분포표로부터 $\frac{11-m}{\sigma} = -1$ 이고 $\frac{6-m}{\sigma} = -2$ 이므로 $m = 16$ 이고 $\sigma = 5$ 이다. 그러므로

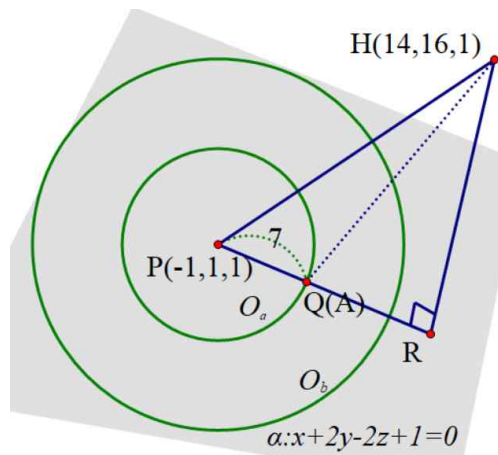
$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 21) &= P\left(\frac{1-16}{5} \leq Z \leq \frac{21-16}{5}\right) = P(-3 \leq Z \leq 1) \\ &= P(0 \leq Z \leq 3) + P(0 \leq Z \leq 1) = 0.4987 + 0.3413 = 0.84 \end{aligned}$$

이다.

[문항2] 대학발표 예시답안

[2-1]

점 H에서 평면 α 에 내린 수선의 발 R과 점 P를 연결하는 (평면 α 위의) 선분과 인공위성 A가 이동하는 원 O_a 와의 교점을 Q라 하자. 인공위성 A가 점 Q에 위치할 때, 점 A와 점 H사이의 거리가 최소가 된다.



$$\overline{PH} = 15\sqrt{2} \text{ 이고 } \overline{HR} = \frac{|1 \times 14 + 2 \times 16 - 2 \times 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 15 \text{ 이므로, 피타고라스 정리를 사용하면}$$

$$\overline{PR} = \sqrt{\overline{PH}^2 - \overline{HR}^2} = 15, \overline{QR} = \overline{PR} - \overline{PQ} = 8 \text{ 이고, } \overline{HQ} = \sqrt{\overline{HR}^2 + \overline{QR}^2} = 17 \text{ 이다.}$$

(다른 풀이)

점 H에서 평면 α 에 내린 수선의 발 R과 점 P를 연결하는 (평면 α 위의) 선분과 인공위성 A가 이동하는 원 O_a 와의 교점을 Q라 하자. 인공위성 A가 점 Q에 위치할 때, 점 A와 점 H사이의 거리가 최소가 된다.

점 H를 지나면서 평면 α 와 수직인 직선의 벡터 방정식은 $(t+14, 2t+16, -2t+1)$ 이다. 이것을 평면 α 의 방정식에 대입하면 $t = -5$ 임을 구할 수 있고, 따라서 수선의 발 R의 좌



표는 (9, 6, 11) 이다.

$$\overline{PR} = 15, \overline{QR} = \overline{PR} - \overline{PQ} = 8 \text{ 이고, } \overline{HR} = \frac{|1 \times 14 + 2 \times 16 - 2 \times 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 15 \text{ 이므로}$$

$$\overline{HQ} = \sqrt{\overline{HR}^2 + \overline{QR}^2} = 17 \text{ 이다.}$$

[2-2]

(1) ①과 ②에 알맞은 값은 각각 $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 = 98$, $2|\vec{u}||\vec{v}| = 98\sqrt{2}$ 이다.

(2) 두 인공위성이 최단거리에 위치했을 때의 시간을 $t = t_0$ (분)이라 하고 그 때의 인공위성 A의 위치를 점 T라 하자.

인공위성 A는 60분당 8π 회전하고, 인공위성 B는 60분당 4π 회전하므로 $\angle APT$ 와 $\angle BPT$ 의 차이의 시간에 따른 변화율은 $t_0 \leq t < t_0 + 15$ 에서

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{8\pi}{60} - \frac{4\pi}{60} = \frac{\pi}{15}$$

이다.

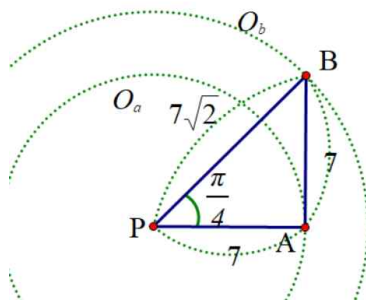
또한, 시간 t ($t_0 \leq t < t_0 + 15$)에서 인공위성 A와 인공위성 B사이의 거리를 $D = D(t)$, $\angle APB$ 를 $\theta = \theta(t)$ 라 하면, (1)에 의하여

$$D^2 = 49 + 98 - 98\sqrt{2} \cos \theta \Rightarrow 2D \frac{dD}{dt} = 98\sqrt{2} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \dots\dots(*)$$

이다.

두 인공위성이 최단거리에 위치한 후 처음으로 $\angle APB = 45^\circ$ ($t = t_0 + \frac{15}{4}$)가 될 때 $\frac{d\theta}{dt}$ 의

값은 $\frac{\pi}{15}$ 이고 $D = 7$ 이다.



따라서 (*)에 의해 $t = t_0 + \frac{15}{4}$ 일 때 $\frac{dD}{dt}$ 의 값은 $\frac{7}{15}\pi$ 이다.



[2-3]

두 벡터 $\vec{e}=(1, 2, -2)$, $\vec{f}=(4, -1, 1)$ 은 각각 평면 α 의 법선벡터, 직선 l 의 방향벡터이다. 벡터 $\vec{y}=(2, p, q)$ 는 인공위성 C의 회전축의 방향벡터이다. 벡터 $\vec{z}=(c, d, e)$ 는 벡터 \vec{f} 와 수직이면서 평면 α 와 평행하다고 하면 $\vec{f} \perp \vec{z}$, $\vec{e} \perp \alpha$ 이므로 제시문(다)에 의하여 다음의 연립방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} \vec{f} \cdot \vec{z} = 4c - d + e = 0 \\ \vec{e} \cdot \vec{z} = c + 2d - 2e = 0 \\ \vec{y} \cdot \vec{z} = 2c + pd + qe = 0 \end{cases}$$

연립방정식을 풀면 $c=0$ 이고 $d=e$ 이다. $d \neq 0$ 이므로 $p+q=0$ 이다.

따라서 $\vec{y}=(2, p, -p)$ 또는 $\vec{y}=(2, -q, q)$ 이다.

한편, 직선 l 은 평면 α 위에 있으므로 원 O_c 의 중심은 평면 α 위에 있다. 원 O_c 의 넓이는 100π 이므로 그것을 평면 α 에 정사영시켰을 때, 그 정사영으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $50\sqrt{2}\pi$ 이므로 제시문(나)에 의하여 벡터 \vec{f} 와 벡터 \vec{y} 가 이루는 각의 크기는 45° 또는 135° 이다.

따라서 $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{|\vec{f} \cdot \vec{y}|}{|\vec{f}| |\vec{y}|} = \frac{8-2p}{\sqrt{18} \sqrt{4+2p^2}}$ 이 성립한다.

즉, $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4-p}{\sqrt{9(p^2+2)}}$ 에서 p 는 이차방정식 $7p^2+16p-14=0$ 의 해가 되므로

$$p = -q = \frac{-8 \pm 9\sqrt{2}}{7} \text{ 이고 } 6p - q = 7p = -8 \pm 9\sqrt{2} \text{ 이다.}$$

그러므로 $(m, n) = (-8, \pm 9)$ 이다.

[문항3] 대학발표 예시답안

[3-1]

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고 조건 (b), (c)에 의해 $f(0)=0$, $f(1)=1$ 이므로 정적분과 넓이의 관계에 의하여

$$\int_0^1 (f(x) + f^{-1}(x)) dx = 1 \text{ 이다. 따라서}$$

$$\int_0^1 f^{-1}(x) dx = 1 - \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} \text{ 이고 } \int_0^1 g(x) dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

(물론, $\int_0^1 g(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx - \int_0^2 (f(x) + f^{-1}(x)) dx = \frac{1}{3}$ 으로서도 구할 수 있다.)

[3-2]

$y=f(x)$ 라 하면, 조건 (b)에 의해 $f^{-1}(y)+2=x+2=f^{-1}(y+2)$ 이고

$f^{-1}(-y) = -x = -f^{-1}(f(x)) = -f^{-1}(y)$ 이다.

즉, f^{-1} 도 (b)를 만족시킨다.



$$\begin{aligned} g(x+1)+g(1-x) &= f(x+1)-f^{-1}(x+1)+f(1-x)-f^{-1}(1-x) \\ &= f(x-1)+2-f^{-1}(x-1)-2-f(x-1)+f^{-1}(x-1)=0 \end{aligned}$$

이다.

[3-3]

(b)로부터 $f(0)=f^{-1}(0)=0$, $f(1)=f^{-1}(1)=1$ 이고 $g(0)=0=g(1)$ 이다.

한편, $0=g(x_0)$ 인 $x_0 \in (0, 1)$ 이라고 한다면

$$0=g(x_0)=f(x_0)-f^{-1}(x_0) \Leftrightarrow f(x_0)=f^{-1}(x_0) \Leftrightarrow f(f(x_0))=x_0$$

이다. 이때, $f(0)=0$, $f(1)=1$ 이고 $f(x)$ 는 역함수를 갖기 때문에 증가함수이다.

만약 $f(x_0) \geq x_0$ 이면 $x_0 = (f \circ f)(x_0) \geq f(x_0)$ 이고 이는 $f(x_0)=x_0$ 이다.

같은 방법으로 $f(x_0) \leq x_0$ 일 때도 $f(x_0)=x_0$ 를 보일 수 있다. 조건 (c)로부터 $x_0 \in (0, 1)$ 는 모순이다. 따라서 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $g(x)=0$ 의 실근은 0 과 1 뿐이다.

[3-4]

[3-2] 풀이 과정에서 구한 $f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$ 이므로 $g(x) = -g(-x)$ 이고 [3-2]에 의하여 $g(x+1) = -g(1-x)$ 이 성립하므로 x 대신에 $x+1$ 을 대입하면

$g(x+2) = -g(-x) = g(x)$ 이 성립한다. 즉, $g(x+2) = g(x)$

$$\begin{aligned} \int_0^{20} x^2 |g(x)| dx &= \sum_{k=0}^9 \int_{2k}^{2k+2} x^2 |g(x)| dx && (x=2k+t) \\ &= \sum_{k=0}^9 \int_0^2 (t+2k)^2 |g(t)| dt && (\because g(x+2)=g(x)) \\ &= \sum_{k=0}^9 \left(\int_0^1 (t+2k)^2 |g(t)| dt + \int_1^2 (t+2k)^2 |g(t)| dt \right) && (t=s+1) \& [3-2] \\ &= \sum_{k=0}^9 \left(\int_0^1 (t+2k)^2 |g(t)| dt + \int_0^1 (s+2k+1)^2 |g(1-s)| ds \right) && (r=1-s) \\ &= \sum_{k=0}^9 \int_0^1 \{ (r+2k)^2 + (-r+2k+2)^2 \} |g(r)| dr \end{aligned}$$

[3-3]과 조건 (d)에 의해 $g(x)$ 는 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 양수이므로

$$\int_0^{20} x^2 |g(x)| dx = 8 \left(\int_0^1 g(x) dx \right) \sum_{k=0}^9 (k^2 + k) + 10 \int_0^1 (4-4x+2x^2) g(x) dx$$

이다. [3-1]에서 구한 $\int_0^1 g(t) dt = \frac{1}{3}$ 를 이용하면

$$\int_0^{20} x^2 |g(x)| dx = \sum_{k=0}^9 \int_{2k}^{2k+2} x^2 |g(x)| dx = \frac{8}{9} \times 10 \times 9 \times 11 + 10 \int_0^1 (4-4x+2x^2) g(x) dx \text{ 이고}$$

$$\int_0^{20} x^2 |g(x)| dx = \frac{8}{9} \times 10 \times 9 \times 11 + \int_0^1 (40-40x+19x^2) g(x) dx \text{ 이므로 답은 } 880 \text{ 이다.}$$



04

경북대학교(자연계열 II) 수시4)



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
미분가능성, 도함수, 접선의 방정식, 함수의 최댓값, 증복순열, 같은 것이 있는 순열, 수열의 합, 평균값 정리, 수열의 극한, 삼각함수의 도함수, 방정식의 실근의 개수	4개 영역 등급 합 5 이내&한국사 4등급 이내(의예, 치의예) 3개 영역 등급 합 6 이내&한국사 4등급 이내(의예, 치의예) *수학나형의 경우 2등급 하향반영	수학 4문항 내외	100분

[문항 1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

- (a) 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 연속이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.
- (b) 함수 $f(x)$ 가 열린 구간 (α, β) 에서 미분가능하고 닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 연속일 때, $f(x)$ 의 극값과 양 끝점의 함수값 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 가장 큰 값이 닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이다.

(나) 함수 $f(x)$ 에 대하여 극한값

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

가 존재하면, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다고 한다.

이때 이 극한값을 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수라고 하며, 이것을 기호로 $f'(a)$ 와 같이 나타낸다.

(다) 함수 $f(x)$ 가 실수 a 에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이라고 한다.

(a) $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 정의되어 있다.

(b) 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재한다.

(c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

$\frac{1}{2} \leq t \leq 2$ 인 실수 t 에 대하여, 포물선 $y=f(x)$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(t, 0)$ 이고 y 절편은 $\frac{1}{t}$ 이다. 다음 물음에 답하시오.

[1-1] 포물선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=m$ 이 만나는 두 점 중 x 좌표가 작은 점을 $P(a(t), m)$ 이라 할 때, $a(t)$ 를 구하시오. (단, $0 < m < \frac{8}{9}$) (20점)

[1-2] $0 < m < \frac{8}{9}$ 인 m 에 대하여, 닫힌 구간 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 에서 [1-1]에서 구한 함수 $a(t)$ 의 최댓값을 $g(m)$ 이라 하자. 미분계수의 정의를 이용하여 $g(m)$ 이 $m = \frac{2}{9}$ 에서 미분가능함을 증명하고, 열린 구간 $\left(0, \frac{8}{9}\right)$ 에서 도함수 $g'(m)$ 을 구하시오. (50점)

[1-3] [1-2]에서 구한 함수 $g(x)$ 와 도함수 $g'(x)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 닫힌 구간 $\left[\frac{1}{9}, \frac{7}{9}\right]$ 에서 방정식 $g(x) + xg'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 최댓값을 β , 최솟값을 α 라 할 때, $\beta - \alpha$ 의 값을 구하시오. (10점)

(2) 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(k, g(k))$ 에서의 접선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 $S(k)$ 라 하자. 닫힌구간 $\left[\frac{1}{9}, \frac{7}{9}\right]$ 에서 $S(k)$ 의 최댓값을 구하시오. (40점)



[문항 2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_nP_r = n^r$$

이다.

(나) n 개 중에서 같은 것이 각각 p 개, q 개, \dots , r 개씩 있을 때, n 개를 모두 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p! \times q! \times \dots \times r!}$$

이다. (단, $p+q+\dots+r=n$)

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

두 정수 m, n 에 대하여 좌표평면 위의 점 (m, n) 을 격자점이라 하자. 격자점 (m, n) 에 인접한 격자점은

$$(m, n+1), (m, n-1), (m+1, n), (m-1, n)$$

뿐이고, 각각의 격자점을 순서대로 위로, 아래로, 오른쪽으로, 왼쪽으로 인접한다고 하자.

물체 M은 좌표평면 위에서 다음 규칙에 따라 이동한다.

(규칙 a) 시각 $t=0$ 일 때 물체 M은 격자점 $(0, 0)$ 에 위치한다.

(규칙 b) 시각 $t=i$ 일 때 물체 M이 한 격자점에 위치하면, 시각 $t=i+1$ 일 때 물체 M이 그 격자점과 인접한 네 격자점에 위치할 확률은 각각 $\frac{1}{4}$ 이다. (단, i 는 음이 아닌 정수이다.)

물체 M을 점 M이라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

[2-1] 다음은 시각 $t=2N$ 일 때 물체 M이 격자점 (m, n) 에 위치하면, 세 명제

(i) $m+n$ 은 짝수이다.

(ii) $-2N \leq m+n \leq 2N$

(iii) $-2N \leq m-n \leq 2N$

이 참임을 증명하는 과정이다. (단, N 은 자연수이다.)



시각 $t=2N$ 에 물체 M 이 격자점 (m, n) 에 위치할 때, 시각 $t=0$ 부터 시각 $t=2N$ 까지 위로, 아래로, 오른쪽으로, 왼쪽으로 인접한 격자점으로 이동한 횟수를 각각 u, d, r, l 이라 하자.

이 경우 u, d, r, l 은 연립방정식

$$u+d+r+l = \boxed{\text{①}} \times N$$

$$u-d = \boxed{\text{②}} \times m + \boxed{\text{③}} \times n \quad \dots\dots (*)$$

$$r-l = \boxed{\text{③}} \times m + \boxed{\text{②}} \times n$$

을 만족시킨다. $m+n = \boxed{\text{④}} \times (N-d-l)$ 이므로 명제 (i)은 참이다. 또한, 연립방정식 (*)을 이용하면

⋮
(중략)

⋮

따라서 명제 (ii)와 (iii)은 참이다.

①, ②, ③, ④에 들어갈 알맞은 값을 각각 구하시오. (20점)

[2-2] 시각 $t=6$ 일 때 물체 M 이 격자점 $(1, 1)$ 에 위치할 확률은 $\frac{c}{1024}$ 이다. 자연수 c 의 값을 구하시오. (40점)

[2-3] 시각 $t=2N$ 일 때 물체 M 은 [2-1]의 세 명제를 만족시키는 모든 격자점 (m, n) 에 위치할 수 있다. 실수 q 에 대하여 집합 R_q, S_q 를

$$R_q = \{(x, y) \mid |x| + |y| = 2^q, x, y \text{는 실수}\},$$

$$S_q = \{(x, y) \mid \max\{|x|, |y|\} = 2^q, x, y \text{는 실수}\}$$

로 정의한다. 자연수 k 에 대하여 시각 $t=2^{k+1}$ 에 물체 M 이 위치할 수 있는 모든 격자점들 중에서 집합

$$R_{k+1} \cup S_k \cup R_k \cup S_{k-1} \cup \dots \cup R_1 \cup S_0$$

에 속하는 점들의 개수를 a_k 라 하자. $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값을 구하시오. (단, 실수 a 와 b 중 크거나 같은 수를 $\max\{a, b\}$ 라 하고, N 은 자연수이다.) (50점)



[문항 3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

(나) 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 연속이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.

(다) 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a, b) 에서 미분가능하면,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

인 c 가 열린 구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

(라) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (\alpha \text{ 는 실수})$$

일 때, 수열 $\{c_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq c_n \leq b_n$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

함수 $f(x) = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + c \sin 2x$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, c 는 상수이다.)

[3-1] $c=0$ 일 때, 닫힌 구간 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 연속인 역함수 f^{-1} 를 갖는다.

닫힌 구간 $[0, 2]$ 에서 함수

$$g(x) = \int_0^x (1 - f^{-1}(s)) ds$$

의 최댓값을 M 이라 하자. 다음 물음에 답하시오.

(1) M 의 값을 구하시오. (20점)

(2) 자연수 n 에 대하여, x 에 대한 방정식 $g(x) = \frac{M}{n}$ 의 근을 d_n 이라 할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} n d_n = \frac{bM}{a + \pi}$ 이다. 자연수 a, b 의 값을 각각 구하시오. (30점)



[3-2] 실수 t 에 대하여, x 에 대한 방정식 $f(x)=t$ ($0 \leq x < 2\pi$)의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$ 라 하자. 다음 물음에 답하시오. (단, $c > \frac{\sqrt{2}}{2}$)

(1) 구간 $[0, 2\pi)$ 에서 방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.(30점)

(2) 함수 $h(t)$ 가 $t=0$ 에서 불연속일 때

$$c, h(0), \lim_{t \rightarrow 0^-} h(t), \lim_{t \rightarrow 0^+} h(t)$$

의 값을 각각 구하시오. (40점)





문제1. $\frac{3}{5} < x < 4$ 에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f(1)=2$ 이고

$$f'(x) = \frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 가 존재하고 미분가능 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (2018. 4월 전국연합)

—< 보 기 >—

$$\neg. g'(2) = -\frac{4}{7}$$

$$\neg. g(x) = \frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3 - \frac{5}{3}$$

$$\neg. 2 < g(1) < \frac{5}{2}$$

- ① \neg ② \neg, \neg ③ \neg, \neg ④ \neg, \neg ⑤ \neg, \neg, \neg

문제2. 함수 $f(x) = x^2 + ax + b$ ($0 < b < \frac{\pi}{2}$)에 대하여 함수 $g(x) = \sin(f(x))$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $g'(-x) = -g'(x)$ 이다.

(나) 점 $(k, g(k))$ 는 곡선 $y = g(x)$ 의 변곡점이고,

$$2kg(k) = \sqrt{3}g'(k) \text{이다.}$$

두 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은? (2019. 3월 전국연합)

- ① $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ ④ $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$



풀어보기(문제1) 정답 ⑤

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $f(g(x))=x$, $f(1)=2$ 이므로 $g(2)=1$
주어진 식에서

$$f'(g(x)) = \frac{1 - \{g(x)\}^2 \{f(g(x))\}^3}{\{g(x)\}^3 \{f(g(x))\}^2} = \frac{1 - x^3 \{g(x)\}^2}{x^2 \{g(x)\}^3} = \frac{1}{g'(x)}$$

이므로

$$g'(x) = \frac{x^2 \{g(x)\}^3}{1 - x^3 \{g(x)\}^2} \quad \dots (*)$$

ㄱ. 식 (*)에 $x=2$ 를 대입하면 $g'(2) = \frac{2^2 \times \{g(2)\}^3}{1 - 2^3 \times \{g(2)\}^2} = \frac{2^2}{1 - 2^3} = -\frac{4}{7} \quad \therefore (\text{참})$

ㄴ. 식 (*)을 정리하면

$$g'(x) = x^3 \{g(x)\}^2 g'(x) + x^2 \{g(x)\}^3 = x^2 \{g(x)\}^2 \{xg'(x) + g(x)\}$$

양변을 x 에 대하여 적분하면 $xg'(x) + g(x) = \{xg(x)\}'$ 이므로

$$\int g'(x) dx = \int \{xg(x)\}^2 \{xg(x)\}' dx$$

$$g(x) = \frac{1}{3} x^3 \{g(x)\}^3 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$x=2$ 를 대입하면 $1 = \frac{8}{3} + C$ 이므로 $C = -\frac{5}{3}$

$$g(x) = \frac{1}{3} x^3 \{g(x)\}^3 - \frac{5}{3} \quad \dots (**)$$

ㄷ. 식 (**)에 $x=1$ 을 대입하여 정리하면 $\{g(1)\}^3 - 3g(1) - 5 = 0$

함수 $h(t) = t^3 - 3t - 5$, $g(1) = \alpha$ 라 하면 $h'(t) = 3(t+1)(t-1)$

$t=-1$ 에서 극댓값 -3 , $t=1$ 에서 극솟값 -7 을 가지므로 방정식 $h(t)=0$ 은 하나의 실근 α 를 갖는다.

$$h(2) = 8 - 6 - 5 = -3 < 0, \quad h\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{8} - \frac{15}{2} - 5 = \frac{25}{8} > 0 \text{이므로}$$

사잇값 정리에 의해 $2 < \alpha < \frac{5}{2}$, $2 < g(1) < \frac{5}{2} \quad \therefore (\text{참})$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀어보기(문제2) 정답 ③

$$g(x) = \sin(x^2 + ax + b) \text{이므로 } g'(x) = (2x + a) \cos(x^2 + ax + b)$$

조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여



$$(-2x+a)\cos(x^2-ax+b) = -(2x+a)\cos(x^2+ax+b)$$

$x=0$ 을 대입하면 $a\cos b=0$

$0 < b < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos b \neq 0$ 이므로 $a=0$

$$g(x) = \sin(x^2+b)$$

$$g'(x) = 2x\cos(x^2+b)$$

$$g''(x) = 2\cos(x^2+b) - 4x^2\sin(x^2+b)$$

조건 (나)에서 점 $(k, g(k))$ 는 곡선 $y=g(x)$ 의 변곡점이므로 $g''(k)=0$

$$2\cos(k^2+b) - 4k^2\sin(k^2+b) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$k=0$ 이면 $0 < b < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos b \neq 0$ 이므로 $\textcircled{㉠}$ 이 성립하지 않고,

$\cos(k^2+b)=0$ 이면 $\textcircled{㉠}$ 에서 $\sin(k^2+b)=0$ 이므로

$\sin^2(k^2+b) + \cos^2(k^2+b) = 1$ 이 성립하지 않는다.

따라서 $k \neq 0$, $\cos(k^2+b) \neq 0$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } \tan(k^2+b) = \frac{1}{2k^2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

조건 (나)에서

$$2k\sin(k^2+b) = 2\sqrt{3}k\cos(k^2+b)$$

$$\tan(k^2+b) = \sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉡}$, $\textcircled{㉢}$ 에서

$$\frac{1}{2k^2} = \sqrt{3}, \quad k^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } \tan\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + b\right) = \sqrt{3} \text{ 이고 } 0 < b < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \frac{\sqrt{3}}{6} + b = \frac{\pi}{3}, \quad b = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{따라서 } a+b = 0 + \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

[문항1] 대학발표 예시답안

[1-1]

꼭짓점이 $(t, 0)$ 이므로 포물선은 $y=p(x-t)^2$ 꼴이다. 포물선이 $\left(0, \frac{1}{t}\right)$ 을 지나므로

$p = \frac{1}{t^3}$ 이다. 즉, $f(x) = \frac{1}{t^3}(x-t)^2$ 이므로 $y=m$ 일 때, $x = t \pm \sqrt{t^3m}$ 이다. 따라서 조건으로

부터 $a(t) = t - \sqrt{t^3m}$ 이다.



[1-2]

$a'(t) = 1 - \frac{3}{2} \sqrt{t} \sqrt{m}$ 이므로 $a'(t) = 0$ 인 t 는 $\frac{4}{9m}$ 이다. 만약 $t < \frac{4}{9m}$ 이면 $a'(t) > 0$ 이고 $t > \frac{4}{9m}$ 이면 $a'(t) < 0$ 이다. 즉 $a(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	$\frac{4}{9m}$...
$a'(t)$	+	0	-
$a(t)$	\nearrow	$\frac{4}{27m}$	\searrow

$a(t)$ 의 증감을 이용하면

- i) $\frac{4}{9m} < \frac{1}{2}$ 일 때, (즉, $m > \frac{8}{9}$ 일 때) 최댓값 $g(m) = a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{m}{8}}$
- ii) $\frac{1}{2} \leq \frac{4}{9m} < 2$ 일 때, (즉, $\frac{2}{9} \leq m < \frac{8}{9}$ 일 때) 최댓값 $g(m) = a\left(\frac{4}{9m}\right) = \frac{4}{27m}$
- iii) $\frac{4}{9m} \geq 2$ 일 때, (즉, $0 \leq m < \frac{2}{9}$ 일 때) 최댓값 $g(m) = a(2) = 2 - \sqrt{8m}$

따라서

$$g(m) = \begin{cases} 2 - \sqrt{8m} & \left(0 < m < \frac{2}{9}\right) \\ \frac{4}{27m} & \left(\frac{2}{9} \leq m < \frac{8}{9}\right) \end{cases}$$

이다. 구간별로 미분하면

$$g'(m) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}} & \left(0 < m < \frac{2}{9}\right) \\ -\frac{4}{27m^2} & \left(\frac{2}{9} < m < \frac{8}{9}\right) \end{cases}$$

이다. 따라서 $m = \frac{2}{9}$ 에서 함수 $g(m)$ 이 미분가능한지 확인하면 된다. $m = \frac{2}{9}$ 에서 $g(m)$ 의

미분가능성을 조사해 보면

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g\left(h + \frac{2}{9}\right) - g\left(\frac{2}{9}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \left\{ \frac{4}{27\left(h + \frac{2}{9}\right)} - \frac{4}{27 \times \frac{2}{9}} \right\} = -3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g\left(h + \frac{2}{9}\right) - g\left(\frac{2}{9}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{1}{h} \left\{ \left(2 - \sqrt{8\left(\frac{2}{9} + h\right)}\right) - \frac{2}{3} \right\} = -3$$

이므로 $m = \frac{2}{9}$ 에서 미분가능하다. 또한 도함수는



$$g'(m) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}} & \left(0 < m < \frac{2}{9}\right) \\ -\frac{4}{27m^2} & \left(\frac{2}{9} \leq m < \frac{8}{9}\right) \end{cases}$$

이다.

[1-3]

(1) [1-2]의 풀이로부터

$$\frac{g(x)}{g'(x)} = \begin{cases} -(2 - \sqrt{8x}) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} & \left(0 < x < \frac{2}{9}\right) \\ -x & \left(\frac{2}{9} \leq x < \frac{8}{9}\right) \end{cases}$$

이므로 $g(x) + xg'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 범위는 $\frac{2}{9} \leq x < \frac{8}{9}$ 이다. 따라서 $\beta = \frac{7}{9}$ 이고

$\alpha = \frac{2}{9}$ 이므로 $\beta - \alpha = \frac{5}{9}$ 이다.

(2) $y = g(x)$ 위의 점 $(k, g(k))$ 에서의 접선은 $y = g'(x)(x - k) + g(k)$ 이고 x 절편, y 절편은 각각 $\frac{kg'(k) - g(k)}{g'(k)}$, $g(k) - kg'(k)$ 이다. 따라서 $S(k) = -\frac{1}{2g'(k)} \{g(k) - kg'(k)\}^2$ 이다. [1-2]의 풀이로부터

$$g'(k) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}} & \left(\frac{1}{9} \leq k < \frac{2}{9}\right) \\ -\frac{4}{27k^2} & \left(\frac{2}{9} < k \leq \frac{7}{9}\right) \end{cases}$$

이므로 닫힌 구간 $\left[\frac{1}{9}, \frac{7}{9}\right]$ 에서 $S(k)$ 는 연속이다. 또한, $S(k)$ 는 열린 구간 $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right)$ 각각에서 미분가능하며

$$S'(k) = \frac{g''(k)}{2\{g'(k)\}^2} \{g(k) - kg'(k)\} \{g(k) + kg'(k)\}$$

이다. 또한 위의 각 열린 구간에서 $g(k) - kg'(k) \neq 0$, $g''(k) > 0$, $g'(k) \neq 0$ 이다. 따라서 $S'(k) = 0$ 인 k 는 방정식 $g(k) + kg'(k) = 0$ 의 근이다. (1)의 풀이에 의하여 $g(k) + kg'(k) = 0$ 을 만족시키는 모든 k 의 집합은 닫힌 구간 $\left[\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right]$ 이다. 이때,

$$S(k) = -\frac{1}{2g'(k)} \{g(k) - kg'(k)\}^2 = -\frac{2\{g(k)\}^2}{g'(k)} = -\frac{2\left(\frac{4}{27m}\right)^2}{\left(-\frac{4}{m^2}\right)} = \frac{8}{27}$$

이다. 또한 열린 구간 $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ 에서 $S'(k) < 0$ 이므로 $S(k)$ 의 최댓값은 $\frac{8}{27}$ 이다.



[문항2] 대학발표 예시답안

[2-1]

$$\textcircled{1} = 2, \textcircled{2} = 0, \textcircled{3} = 1, \textcircled{4} = 2$$

[2-2]

문제[2-1]의 증명과정에서 $N=3$, $(m, n)=(1, 1)$ 이므로 연립방정식 (*)은

$$u+d+r+l=6$$

$$u-d=1$$

$$r-l=1$$

 $u=d+1$, $r=l+1$ 이므로 $d+l=2$ 이고

$$l=2-d$$

$$u=1+d$$

$$r=1+l=3-d$$

6 개 중에서 같은 것이 각각 d 개, $2-d$ 개, $1+d$ 개, $3-d$ 개씩 있을 때, 이들을 모두 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수는

$$\frac{6!}{d! \times (2-d)! \times (1+d)! \times (3-d)!}$$

여기서 $d=0, 1, 2$ 이므로 $t=6$ 일 때 물체 M이 격자점 $(1, 1)$ 에 위치하는 총 경로의 수는

$$\frac{6!}{0! \times 2! \times 1! \times 3!} + \frac{6!}{1! \times 1! \times 2! \times 2!} + \frac{6!}{2! \times 0! \times 3! \times 1!} = 60 + 180 + 60 = 300$$

물체 M이 $t=6$ 까지 이동 가능한 총 경로의 수는 4^6 이므로 구하는 확률은

$$\frac{300}{4^6} = \frac{75}{1024}$$

따라서 $c=75$ 이다.

[2-3]

- 1) 물체 M이 시각 $t=2^{k+1}$ 에 위치할 수 있는 격자점은 마름모 R_{k+1} 위나 내부에 있는 격자점 (m, n) 중에서 $m+n$ 이 짝수인 것이다.
- 2) 자연수 q 에 대하여 마름모 R_q 위의 모든 격자점은 성분의 합이 짝수이고, 그 개수는 4×2^q 이다.
- 3) 자연수 q 에 대하여 정사각형 S_q 위의 격자점 중 1사분면에 위치하고 좌표의 합이 짝수인 격자점은 $(2, 2^q), (4, 2^q), (6, 2^q), \dots, (2^q, 2^q), (2^q, 2^q-2), (2^q, 2^q-4), (2^q, 2^q-6), \dots, (2^q, 2)$ 이고 그 개수는 $2 \times 2^{q-1} - 1$ 이다. 대칭성에 의하여 제1, 2, 3, 4사분면에 위치하고 성분의 합이 짝수인 격자점의 개수는 $4 \times 2^q - 4$ 이다. 또한 좌표축 위의 네 격자점 $(0, \pm 2^q), (\pm 2^q, 0)$ 을 포함시키면, 정사각형 S_q 위의 격자점 중 성분의 합이 짝수인 격자점의 개수는 4×2^q 이다.
- 4) 물체 M이 시각 $t=2^{k+1}$ 에 위치 가능한 격자점 중 도형 $R_{k+1}, R_k, R_{k-1}, \dots, R_1$ 위에



놓인 격자점의 개수는 각각 $4 \times 2^{k+1}$, 4×2^k , $4 \times 2^{k-1}$, \dots , 4×2^1 이고, 도형 S_k , S_{k-1} , S_{k-2} , \dots , S_0 위에 놓인 격자점의 개수는 각각 4×2^k , $4 \times 2^{k-1}$, $4 \times 2^{k-2}$, \dots , 4×2^0 이다. 또한 인접한 도형들은 4개의 격자점을 공유하므로 중복된 횟수를 제외하면

$$\begin{aligned} a_k &= 4 \times 2^{k+1} + 8(2^k + 2^{k-1} + \dots + 2^1) + 4 \times 2^0 - 4(k+1) - 4k \\ &= 4 \times 2^{k+1} + 8(2^{k+1} - 2) - 8k \\ &= 12 \times 2^{k+1} - 8k - 16 \end{aligned}$$

따라서 $\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (12 \times 2^{k+1} - 8k - 16) = 48504$

[문항3] 대학발표 예시답안

[3-1]

$f(x) = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 는 닫힌 구간 $[0, 2]$ 사이에서

$$-\frac{\pi}{4} \leq f^{-1}(x) \leq 0, \quad 1 \leq 1 - f^{-1}(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}$$

이다.

따라서 함수 $g(x)$ 의 피적분함수는 양수의 값을 가지므로 $g(x)$ 는 닫힌 구간 $[0, 2]$ 에서 증가한다. 그러므로 $g(2) = M$ 이다.

역함수의 성질에 의하여

$$\int_0^2 f^{-1}(s) ds = - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(x) dx = - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx = 2 - 2\sqrt{2}$$

이다. 따라서

$$M = g(2) = 2 - \int_0^2 f^{-1}(s) ds = 2\sqrt{2}$$

이다.

[3-2]

함수 $g(x)$ 가 닫힌 구간 $[0, 2]$ 에서 증가하고, $g(2) = M$ 이므로 자연수 n 에 대하여 방정식 $g(x) = \frac{M}{n}$ 는 닫힌 구간 $[0, 2]$ 에서 하나의 실근 d_n 을 갖는다. $g(0) = 0$ 이고, 함수 $g(x)$ 는 닫힌 구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 열린 구간 $(0, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{M}{n} = g(d_n) = d_n \left(\frac{g(d_n) - g(0)}{d_n} \right) = d_n g'(c_n), \quad 0 < c_n < d_n \leq 2$$

인 c_n 이 존재한다. $1 \leq 1 - f^{-1}(c_n) = g'(c_n)$ 이고 $d_n = \frac{M}{ng'(c_n)} \leq \frac{M}{n}$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ 이다.

$f^{-1}(x)$ 는 연속이고 $f^{-1}(0) = -\frac{\pi}{4}$ 이므로



$$\lim_{n \rightarrow \infty} nd_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{1-f^{-1}(c_n)} = \frac{M}{1-f^{-1}(0)} = \frac{4M}{4+\pi}$$

따라서 $a=b=4$ 이다.

[3-2]

(1) $f'(x) = 2(\cos x - \sin x)\{1 + c(\cos x + \sin x)\}$ 이므로 $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ 와 방정식

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{c}$$

의 근이 방정식 $f'(x)=0$ 의 모든 근이다.

$-\sqrt{2} < -\frac{1}{c} < 0$ 이므로 곡선 $y = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ 와 $y = -\frac{1}{c}$ 은 구간 $[0, 2\pi)$ 에서 서로

다른 두 점에서 만나고, $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ 는 방정식 $\cos x + \sin x = -\frac{1}{c}$ 의 근이 될 수 없다.

따라서 서로 다른 실근의 개수는 4 이다.

(2) $f(x)=t$ 이고 $w = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos x + \sin x$ 이면,

$(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$ 이므로 함수 $F(w) = c \left(w + \frac{1}{c} \right)^2 - c - \frac{1}{c}$ 라 할 때 $F(w)=t$ 이

다. 따라서 방정식 $f(x)=t$ 의 모든 서로 다른 실근은 $F(w) = c \left(w + \frac{1}{c} \right)^2 - c - \frac{1}{c} = t$ 인 각

각의 w 에 대하여 (단, $-\sqrt{2} \leq w \leq \sqrt{2}$) $\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = w$ 인 x 를 구함으로써 얻을

수 있다. 또한 $\sqrt{2} \sin \left(x_1 + \frac{\pi}{4} \right) = w_1, \sqrt{2} \sin \left(x_2 + \frac{\pi}{4} \right) = w_2, w_1 \neq w_2$ 이면 $x_1 \neq x_2$ 이므로
근이 중복되는 경우가 없다.

$F\left(-\frac{1}{c}\right) = -c - \frac{1}{c}, F(-\sqrt{2}) = c - 2\sqrt{2}, F(\sqrt{2}) = c + 2\sqrt{2}$ 이고, c 의 조건으로부터 포물

선 $y = F(w)$ 의 꼭짓점의 w 좌표 $-\frac{1}{c} \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 이고 대소관계

$$-c - \frac{1}{c} < c - 2\sqrt{2} < c + 2\sqrt{2}$$

가 성립한다. 따라서 구간 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 에서 방정식 $F(w)=t$ 의 실근의 개수를 $H(t)$ 라 하면

$$H(t) = \begin{cases} 0 & (t < A, t > C) \\ 1 & (t = A, B < t \leq C) \\ 2 & (A < t \leq B) \end{cases}$$

이다. (단, $A = -c - \frac{1}{c}, B = c - 2\sqrt{2}, C = c + 2\sqrt{2}$)



삼각함수의 그래프를 이용하면 구간 $[0, 2\pi)$ 에서 $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = w$ 인 x 의 개수는

$w = \pm \sqrt{2}$ 일 때 1개, $-\sqrt{2} < w < \sqrt{2}$ 일 때 2개이므로

$$h(t) = \begin{cases} 0 & (t < A, t > C) \\ 1 & (t = C) \\ 2 & (t = A, B < t < C) \\ 3 & (t = B) \\ 4 & (A < t < B) \end{cases}$$

이다. c 의 조건으로부터 $h(t)$ 의 불연속점들 중 $A \neq 0$, $C \neq 0$ 이므로 $c = 2\sqrt{2}$ 이다.

$h(0) = 3$, $\lim_{t \rightarrow 0^-} h(t) = 4$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = 2$ 이다.





05

경희대학교(자연계) 모의5)



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
접선의 방정식, 미분법, 함수의 증가와 감소, 삼각함수의 덧셈정리, 정적분, 나머지 정리	국어, 수학과, 영어, 과탐(1과목) 중 2개 영역 등급 합 5 이내, 한국사 5등급 이내	수학 2문항	120분 (과학 1과목 포함)

I. 다음 제시문을 읽고 문제에 답하십시오.(60점)

[가] $x=a$ 에서 미분가능한 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

[나] n 이 실수일 때, $y=x^n$ 이면 $y'=nx^{n-1}$

[다] 함수 $f(x)$ 가 어떤 구간의 임의의 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 일 때 $f(x_1) < f(x_2)$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 증가한다고 한다. 한편 $x_1 < x_2$ 일 때 $f(x_1) > f(x_2)$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 감소한다고 한다. $f(x)$ 가 어떤 열린구간에서 미분이 가능하고, 이 구간의 모든 x 에 대하여

(1) $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.

(2) $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.

[라] 삼각함수의 덧셈정리

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

[마] 구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 영역의 넓이 S 는

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

[바] 다항식 $P(x)$ 에서 $P(\alpha)=0$ 이면 $P(x)$ 는 $x-\alpha$ 로 나누어떨어진다.



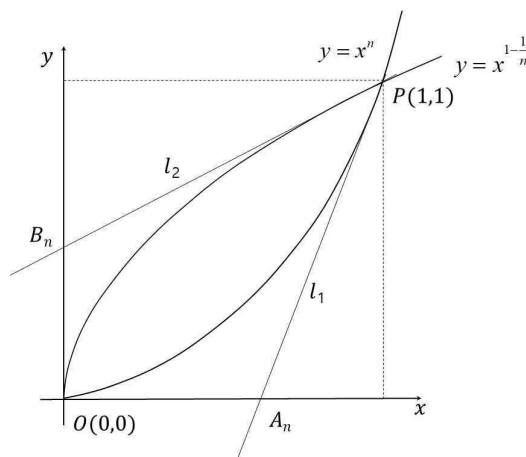
[문제 I] 제시문 [가]~[바]를 읽고 다음 질문에 답하시오.

[문제 I-1] 곡선 $y=x^2$ ($x>0$) 위의 두 점 A, B가 있다. (단, B의 x 좌표가 A의 x 좌표보다 크다.)

(1) 두 점 A, B의 x 좌표의 차가 h ($h>0$)일 때, 선분 AB와 곡선 $y=x^2$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

(2) 점 A의 좌표가 (a, a^2) 이고 선분 AB의 길이가 $\sqrt{\frac{25a^4}{16} + \frac{a^2}{4}}$ 일 때($a>0$), 선분 AB와 곡선 $y=x^2$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

[문제 I-2] $n>1$ 인 실수 n 에 대하여 두 함수 $f(x)=x^n$ 과 $g(x)=x^{1-\frac{1}{n}}$ 의 그래프는 두 점 $O(0,0)$ 과 $P(1,1)$ 에서 만난다. 점 $P(1,1)$ 에서 함수 $f(x)=x^n$ 의 그래프 $y=f(x)$ 에 접하는 접선이 x 축과 만나는 점을 $A_n(a_n, 0)$, 점 $P(1,1)$ 에서 함수 $g(x)=x^{1-\frac{1}{n}}$ 의 그래프 $y=g(x)$ 에 접하는 접선이 y 축과 만나는 점을 $B_n(0, b_n)$ 이라 했을 때, 다음 물음에 답하시오.



(1) 삼각형 A_nPB_n 의 넓이가 최소가 되는 n 의 값과 그 때 삼각형 A_nPB_n 의 넓이를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

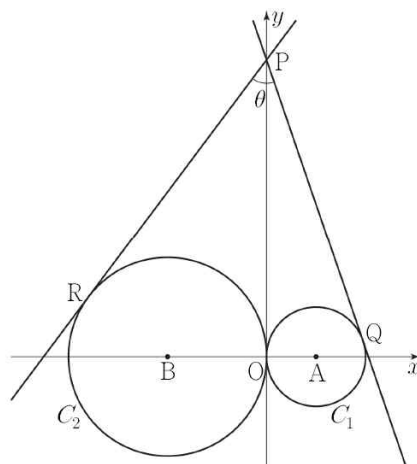
(2) 각 A_nPB_n 를 θ 라 했을 때, θ 가 최소가 되는 n 의 값과 그 때 $\tan\theta$ 의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (20점)



문제1. 함수 $f(x)=x^2-2x$ 에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-1)-1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점] (2020. 9월 평가원)

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

문제2. 그림과 같이 중심이 점 $A(1, 0)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원 C_1 과 중심이 점 $B(-2, 0)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원 C_2 가 있다. y 축 위의 점 $P(0, a)$ ($a > \sqrt{2}$)에서 원 C_1 에 그은 접선 중 y 축이 아닌 직선이 원 C_1 과 접하는 점을 Q , 원 C_2 에 그은 접선 중 y 축이 아닌 직선이 원 C_2 와 접하는 점을 R 라 하고 $\angle RPQ = \theta$ 라 하자. $\tan \theta = \frac{4}{3}$ 일 때, $(a-3)^2$ 의 값을 구하시오. (2019. 4월 전국연합)



예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ③

$$-f(x-1)-1 = -\{(x-1)^2-2(x-1)\}-1 = -x^2+4x-4$$

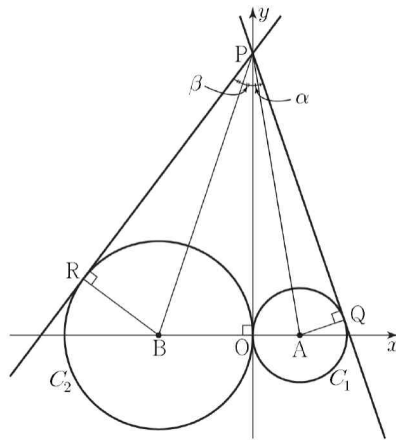
이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-1)-1$ 의 교점의 좌표는

$$x^2-2x = -x^2+4x-4, x^2-3x+2=0, (x-1)(x-2)=0$$

에서 $x=1$ 또는 $x=2$ 이다. 따라서 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_1^2 (-x^2+4x-4) dx - \int_1^2 (x^2-2x) dx = \int_1^2 (-2x^2+6x-4) dx = \frac{1}{3}$$

풀어보기(문제2) 정답 11



원점을 O , $\angle OPA = \alpha$, $\angle BPO = \beta$ 라 하자. 삼각형 POA 와 삼각형 PQA 가 서로 합동이고 삼각형 PRB 와 삼각형 POB 가 서로 합동이므로

$$\angle APQ = \angle OPA, \angle RPB = \angle BPO$$

이고 $\angle RPQ = \theta = 2(\alpha + \beta)$ 이므로

$$\tan \theta = \tan 2(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha + \beta)}{1 - \tan(\alpha + \beta) \times \tan(\alpha + \beta)} = \frac{4}{3}$$

이때, $\tan(\alpha + \beta) = t$ 라 두면

$$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{4}{3}, 2t^2 + 3t - 2 = 0$$

$a > \sqrt{2}$ 에서 $0 < \theta < \pi$ 이므로 $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ 이다. 그러므로 $t = \tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ 이다. 또



$$\text{한, } \tan \alpha = \frac{1}{a}, \tan \beta = \frac{2}{a}, \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{3a}{a^2 - 2} = \frac{1}{2}$$

이다. 이것을 풀면 $a = 3 + \sqrt{11}$ 이고 따라서 $(a-3)^2 = 11$

[문제 I-1] 대학발표 예시답안

- (1) 점 A, B의 좌표를 각각 (a, a^2) , $(a+h, (a+h)^2)$ 이라 두면($h > 0$), 점 A, B의 x 축 위의 수선의 발 A', B' 는 $(a, 0)$, $(a+h, 0)$ 이 된다. 제시문 [마]를 이용하여 구하고자 하는 영역의 넓이 S 를 구하면

$$S = (\text{사다리꼴 } ABB'A' \text{의 넓이}) - \int_a^{a+h} x^2 dx$$

가 된다.

$$(\text{사다리꼴 } ABB'A' \text{의 넓이}) = \frac{\{a^2 + (a+h)^2\}h}{2} = a^2h + ah^2 + \frac{h^3}{2},$$

$$\int_a^{a+h} x^2 dx = \frac{1}{3} \{(a+h)^3 - a^3\} = \frac{h^3}{3} + a^2h + ah^2$$

이므로, $S = \frac{h^3}{6}$ 이다.

- (2) 점 B의 좌표를 $(a+h, (a+h)^2)$ 이라 두면($h > 0$), $\overline{AB}^2 = \frac{25a^4}{16} + \frac{a^2}{4}$ 이므로,

$$h^4 + 4ah^3 + (4a^2 + 1)h^2 - \frac{25a^4}{16} - \frac{a^2}{4} = h^4 + 4ah^3 + (4a^2 + 1)h^2 - \frac{a^2}{4} \left(\frac{25a^2}{4} + 1 \right) = 0$$

이 된다. $P(h) = h^4 + 4ah^3 + (4a^2 + 1)h^2 - \frac{a^2}{4} \left(\frac{25a^2}{4} + 1 \right)$ 이라 두면, $P\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ 이므로,

제시문 [바]에 의해 다항식 P 는 $x - \frac{a}{2}$ 로 나누어떨어지고

$$P(h) = \left(h - \frac{a}{2}\right) \left\{ h^3 + \frac{9a}{2}h^2 + \left(\frac{25a^2}{4} + 1\right)h + \frac{a}{2} \left(\frac{25a^2}{4} + 1\right) \right\}$$

이 된다. a 와 h 는 양수이므로 $h = \frac{a}{2}$ 일 때만 $\overline{AB} = \sqrt{\frac{25a^4}{16} + \frac{a^2}{4}}$ 을 만족한다.

따라서, (1)번에 의해 선분 AB와 곡선 $y = x^2$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\frac{a^3}{48}$ 이다.

[문제 I-1] 나침반 풀이

- (1) 점 A, B의 좌표를 각각 (a, a^2) , $(a+h, (a+h)^2)$ 이라 두면($h > 0$) 직선 AB의 방정식은 $y - a^2 = (2a+h)(x-a)$ 이다. 따라서 제시문 [마]에 의하여 구하고자 하는 영역의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_a^{a+h} \{(2a+h)x - a^2 - ah\} dx - \int_a^{a+h} x^2 dx \\ &= \frac{1}{2}(2a+h)\{(a+h)^2 - a^2\} - (a^2 + ah)h - \frac{1}{3}((a+h)^3 - a^3) \\ &= \frac{1}{6}h^3 \end{aligned}$$

(2) 점 A, B의 좌표를 각각 (a, a^2) , (b, b^2) 이라 두면($a < b$),

$$\overline{AB} = \sqrt{(b-a)^2 + (b^2 - a^2)^2} = (b-a)\sqrt{1+(a+b)^2}$$

한편 $\overline{AB} = \sqrt{\frac{25a^4}{16} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25a^2}{4} + 1}$ 이고 $a+b > 2a$ 이므로 $b = \frac{3}{2}a$ 임을 알 수 있다.

따라서 (1)번의 h 는 $\frac{a}{2}$ 이고 선분 AB와 곡선 $y=x^2$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\frac{a^3}{48}$ 이다.

[문제 I-2] 대학발표 예시답안

(1) 제시문 [나]에 의해 $f'(x) = nx^{n-1}$, $g'(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x^{-\frac{1}{n}}$ 이다. 점 $P(1, 1)$ 에서 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 에 접하는 접선을 각각 l_1 , l_2 라 하면, 제시문 [가]에 의해

$$l_1 : y-1 = n(x-1), \quad l_2 : y-1 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x-1)$$

이다. l_1 이 x 축과 만나는 점 $A_n(a_n, 0)$ 의 x 좌표는 $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, l_2 가 y 축과 만나는 점

$B_n(0, b_n)$ 의 y 좌표는 $b_n = \frac{1}{n}$ 이다.

(사각형 OA_nPB_n 의 넓이) = (삼각형 OA_nP 의 넓이) + (삼각형 OPB_n 의 넓이)

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

이므로 n 과 상관없이 일정하다. 따라서

(삼각형 A_nPB_n 의 넓이) = (사각형 OA_nPB_n 의 넓이) - (삼각형 OA_nB_n 의 넓이)

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \overline{OA_n} \times \overline{OB_n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{n^2 - n + 1}{2n^2}$$

이다. $G(n) = \frac{n^2 - n + 1}{2n^2}$ 이라 하면 $G'(n) = \frac{n(n-2)}{2n^4}$ 이고 $n > 1$ 의 범위에서 $n=2$ 일 때

극값을 가진다. $1 < n < 2$ 일 때 $G'(n) < 0$ 이고 $n > 2$ 일 때 $G'(n) > 0$ 이므로, 제시문 [다]에 의해 $G(n)$ 은 $1 < n < 2$ 에서 감소함수이고, $n > 2$ 에서 증가함수이다. 따라서

$n=2$ 일 때 $G(n)$ 은 최솟값 $G(2) = \frac{3}{8}$ 을 가지며, 삼각형 A_nPB_n 의 넓이는 $n=2$ 일 때



최솟값 $\frac{3}{8}$ 을 가진다.

- (2) x 축 위의 점 $A(1, 0)$ 과 y 축 위의 점 $B(0, 1)$ 에 대하여, $\angle A_nPA$ 를 α , $\angle BPB_n$ 을 β 라 하면, $\theta = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$ 이므로 $\alpha + \beta$ 가 최대일 때 θ 가 최소가 된다.

삼각형 A_nPA 는 $\overline{AP} = 1$ 이고 $\overline{A_nA} = \overline{OA} - \overline{OA_n} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ 이며 $\angle A_nAP = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로 $\tan\alpha = \frac{1}{n}$ 이다.

또한 삼각형 BPB_n 은 $\overline{BP} = 1$ 이고 $\overline{BB_n} = \overline{OB} - \overline{OB_n} = 1 - \frac{1}{n}$ 이며 $\angle B_nBP = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로 $\tan\beta = 1 - \frac{1}{n}$ 이다.

제시문 [라]에 의해 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{n^2}{n^2 - n + 1}$ 이고,

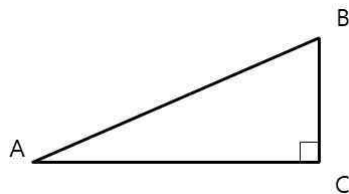
$\tan\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - (\alpha + \beta)\right) = \frac{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - (\alpha + \beta)\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} - (\alpha + \beta)\right)}$ 이며,

$\tan\left(\frac{\pi}{4} - (\alpha + \beta)\right) = \frac{1 - \tan(\alpha + \beta)}{1 + \tan(\alpha + \beta)}$ 이므로 $\tan\theta = \frac{1}{\tan(\alpha + \beta)} = \frac{n^2 - n + 1}{n^2}$ 이다.

$H(n) = \frac{n^2 - n + 1}{n^2}$ 이라 하면 $H'(n) = \frac{n(n-2)}{n^4}$ 이고 $n > 1$ 의 범위에서 $n = 2$ 일 때 극값을 가진다. $1 < n < 2$ 일 때 $H'(n) < 0$ 이고 $n > 2$ 일 때 $H'(n) > 0$ 이므로, 제시문 [다]에 의해 $H(n)$ 은 $1 < n < 2$ 에서 감소함수이고, $n > 2$ 에서 증가함수이다. 따라서 $n = 2$ 일 때 $H(n)$ 는 최솟값 $H(2) = \frac{3}{4}$ 을 가진다.

한편 $\tan x$ 함수는 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 증가함수이므로, $\tan\theta$ 가 최소일 때 θ 도 최소이다. 따라서 $n = 2$ 일 때 θ 는 최소이며, 이때 $\tan\theta = \frac{3}{4}$ 이다.

* $\tan\theta = \frac{1}{\tan(\alpha + \beta)}$ 에 대한 별해



위의 직각삼각형에서 $\angle ABC$ 를 $\alpha + \beta$ 라 하면 $\angle CAB$ 는 $\theta = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$ 가 된다.

또한 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}}$ 이므로 $\tan \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{1}{\tan(\alpha + \beta)}$ 이다.

[문제 I-2] 나침반 풀이

- (1) 제시문 [나]에 의해 $f'(x) = nx^{n-1}$, $g'(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x^{-\frac{1}{n}}$ 이다. 점 P (1, 1)에서 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 에 접하는 접선을 각각 l_1 , l_2 라 하면, 제시문 [가]에 의해

$$l_1 : y - 1 = n(x - 1), \quad l_2 : y - 1 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x - 1)$$

이다. l_1 이 x 축과 만나는 점 $A_n(a_n, 0)$ 의 x 좌표는 $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, l_2 가 y 축과 만나는 점

$B_n(0, b_n)$ 의 y 좌표는 $b_n = \frac{1}{n}$ 이다. A(1, 0), B(0, 1)이라 하면

(삼각형 A_nPB_n 의 넓이)

$$\begin{aligned} &= (\text{사각형 OAPB의 넓이}) - (\text{삼각형 PAA}_n \text{의 넓이}) \\ &\quad - (\text{삼각형 PBB}_n \text{의 넓이}) - (\text{삼각형 OA}_n\text{B}_n \text{의 넓이}) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

$\frac{1}{n} = t$ 이라 하면

(삼각형 A_nPB_n 의 넓이)

$$= \frac{1}{2}(t^2 - t + 1) = \frac{1}{2} \left\{ \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때 삼각형 A_nPB_n 의 넓이는 최댓값 $\frac{3}{8}$ 을 갖는다. 이때 $n = 2$ 이다.

- (2) 직선 l_1 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α 라 하면 $\tan \alpha = n$ 이고 직선 l_2 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 β 라 하면 $\tan \beta = 1 - \frac{1}{n}$ 이므로

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{n - \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 + n \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

이다. 따라서 $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ 즉, $n = 2$ 일 때 $\tan \theta$ 는 최소이며, 이때 $\tan \theta = \frac{3}{4}$ 이다.



06

경희대학교(의학계) 모의6)



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
이차방정식의 판별식, 곡선의 접선, 음함수의 미분법, 고차식의 인수분해, 여러 가지 극한의 성질	국어, 수학(가), 영어, 과학탐구(1과목) 중 3개 영역 등급 합 4 이내, 한국사 5등급 이내	수학 4문항 내외 물리, 화학, 생명과학 중 택 1(4문항 내외)	120분

[문항 1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하십시오.(60점)

(가) 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)에서 $D = b^2 - 4ac$ 라고 하면 다음이 성립한다.

- ① $D > 0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖고, 서로 다른 두 실근을 가지면 $D > 0$ 이다.
- ② $D = 0$ 이면 중근(서로 같은 두 실근)을 갖고, 중근을 가지면 $D = 0$ 이다.
- ③ $D < 0$ 이면 서로 다른 두 허근을 갖고, 서로 다른 두 허근을 가지면 $D < 0$ 이다.

(나) x 에 대한 다항식 $P(x)$ 에 대하여 $P(\alpha) = 0$ 이면 $P(x)$ 는 일차식 $x - \alpha$ 로 나누어 떨어진다. 또 $P(x)$ 가 $x - \alpha$ 로 나누어 떨어지면 $P(\alpha) = 0$ 이다.

(다) 함수 $f(x)$ 의 $x = a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기를 나타낸다. 따라서 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ 이다.

(라) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에서 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ (α, β 는 실수)일 때,

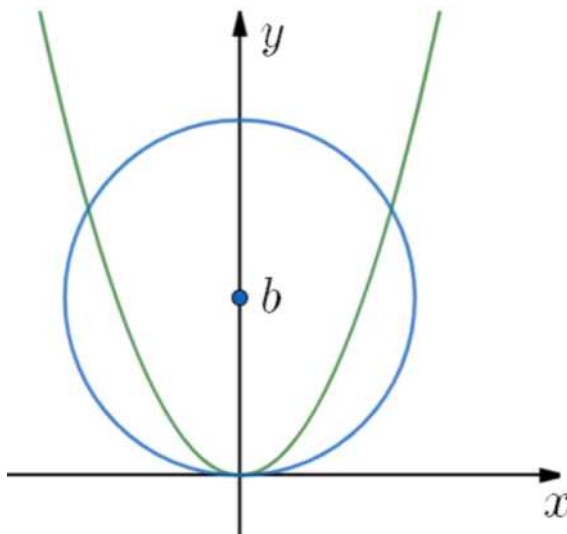
- ① $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha + \beta$
- ② $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha - \beta$
- ③ $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c\alpha$ (단, c 는 상수)
- ④ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha\beta$
- ⑤ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta \neq 0$)

(마) 삼각함수의 극한

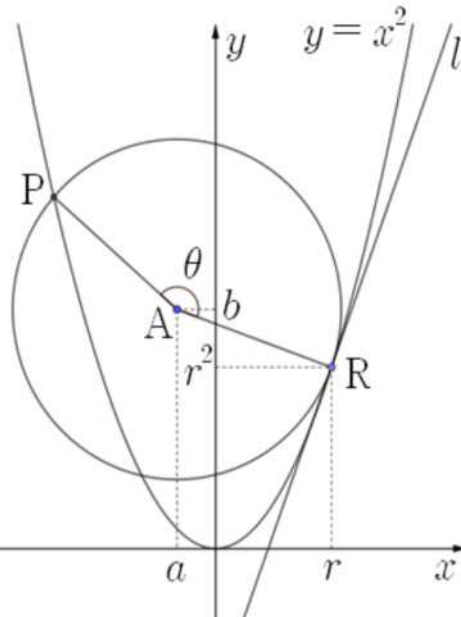
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(바) x 의 함수 y 가 음함수 $f(x, y) = 0$ 의 꼴일 때에는 y 를 x 의 함수로 보고, 각 항을 x 에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

[문제 I] 좌표평면 위의 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ 을 생각하자. 원의 위치와 크기는 a, b, c 에 의해서 결정된다. 다음 그림은 서로 다른 a, b, c 에 대하여 원과 포물선 $y = x^2$ 이 만나게 되는 몇 가지 경우이다. 제시문 (가), (나), (다), (라), (마), (바)를 읽고 다음 질문에 답하시오.



[그림1]



[그림2]

[문제 I-1] [그림1]과 같이 $a=0$ 이고 $b=c \geq 0$ 인 경우를 생각하자. 이 경우 원점에서 원의 접선과 포물선의 접선은 $y=0$ 으로 일치한다. 이때 원과 포물선이 만나는 점의 개수는 b 의 범위에 따라 달라진다. 원과 포물선이 한 점에서 만나는 경우 원의 넓이를 b 에 관한 함수 $f(b)$ 로 표현했을 때, 이 함수의 최댓값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (10점)



[문제 I-2] 포물선 위의 점 $R(r, r^2)$ 을 생각하자. [그림2]와 같이 점 R 이 원점이 아니고, 점 R 에서 원의 접선과 포물선의 접선이 l 로 일치한다고 할 때, a 와 b 의 관계식을 구하고 그 근거를 논술하시오. (10점)

[문제 I-3] [문제 I-2]에서 $ar < 0$ 인 경우를 생각하자. 이때 원과 포물선이 만나는 점의 개수는 a 의 범위에 따라 달라진다. 원과 포물선이 두 점에서 만나는 경우, 원의 넓이를 r 에 관한 함수 $g(r)$ 로 표현하고 그 근거를 논술하시오. (20점)

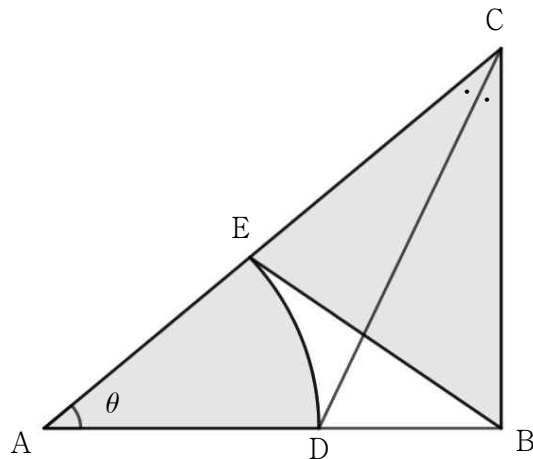
[문제 I-4] [문제 I-3]에서와 같이 $ar < 0$ 이고 원과 포물선이 두 점에서 만나는 경우를 생각하자. 원과 포물선이 만나는 두 점 중 R 이 아닌 점을 P , 원의 중심을 A 라고 했을 때, $\theta = \angle PAR$ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라고 하자. 이때 극한 $\lim_{r \rightarrow \infty} r\theta$ 의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (20점)



문제1. 양의 실수 t 에 대하여 곡선 $y = t^3 \ln(x-t)$ 가 곡선 $y = 2e^{x-a}$ 과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a 의 값을 $f(t)$ 라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$ 의 값을 구하시오.

(2019. 대수능)

문제2. 그림과 같이 $\overline{AB} = 1$, $\angle B = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\angle C$ 를 이등분하는 직선과 선분 AB의 교점을 D, 중심이 A이고 반지름의 길이가 \overline{AD} 인 원과 선분 AC의 교점을 E라 하자. $\angle A = \theta$ 일 때, 부채꼴 ADE의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 BCE의 넓이를 $T(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$ 의 값은? (2019. 9월 평가원)



- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$



풀어보기(문제1) 정답 64

곡선 $y = t^3 \ln(x-t)$ 와 곡선 $y = 2e^{x-a}$ 이 만나는 점의 x 좌표를 $\alpha (\alpha > t)$ 라 하면

$$t^3 \ln(\alpha - t) = 2e^{\alpha - a} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

곡선 $y = t^3 \ln(x-t)$ 와 곡선 $y = 2e^{x-a}$ 이 한 점에서 만나려면 두 곡선이 만나는 점에서의 미분계수가 같아야 한다.

곡선 $y = t^3 \ln(x-t)$ 에서 $y' = t^3 \times \frac{1}{x-t}$ 이다.

또한, 곡선 $y = 2e^{x-a}$ 에서 $y' = 2e^{x-a}$ 이다. 이때,

$$t^3 \times \frac{1}{\alpha - t} = 2e^{\alpha - a} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠의 양편을 t 에 대하여 미분하면

$$3t^2 \ln(\alpha - t) + t^3 \times \left(-\frac{1}{\alpha - t}\right) = 2e^{\alpha - a} \times (-1) \times \frac{da}{dt},$$

$$t^3 \ln(\alpha - t) \times \frac{3}{t} - \frac{t^3}{\alpha - t} = 2e^{\alpha - a} \times (-1) \times \frac{da}{dt}$$

㉠, ㉡에 의해

$$2e^{\alpha - a} \times \frac{3}{t} - 2e^{\alpha - a} = 2e^{\alpha - a} \times (-1) \times \frac{da}{dt}$$

$$\frac{3}{t} - 1 = (-1) \times \frac{da}{dt}, \quad \frac{da}{dt} = -\frac{3}{t} + 1$$

$t = \frac{1}{3}$ 일 때 $\frac{da}{dt} = -8$ 이므로 $f'\left(\frac{1}{3}\right) = -8$ 이다.

따라서 $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2 = (-8)^2 = 64$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 ②

$\overline{AC} = \frac{1}{\cos \theta}$, $\overline{BC} = \tan \theta$ 이고 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{BC}$ 이므로 $\overline{AD} = \frac{1}{1 + \sin \theta}$ 이다. 또한

$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 + \sin \theta}\right)^2 \times \theta$ 이다.

한편, $\overline{CE} = \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{1 + \sin \theta}$ 이므로

$$T(\theta) = \frac{1}{2} \times \tan \theta \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{1 + \sin \theta}\right) \times \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \times \sin \theta \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{\tan \theta (1 + \sin \theta - \cos \theta)}{1 + \sin \theta}, \\
 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 + \sin \theta} \right)^4 \theta^2}{\frac{1}{2} \frac{\tan \theta (1 + \sin \theta - \cos \theta)}{1 + \sin \theta}} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta^2}{2 \tan \theta (1 + \sin \theta)^3 (1 + \sin \theta - \cos \theta)} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\theta}{2 \tan \theta} \times \frac{1}{(1 + \sin \theta)^3} \times \frac{\theta}{1 + \sin \theta - \cos \theta} \right\} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\theta}{2 \tan \theta} \times \frac{1}{(1 + \sin \theta)^3} \times \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta}} \right\} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\theta}{2 \tan \theta} \times \frac{1}{(1 + \sin \theta)^3} \times \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\theta} + \frac{\sin \theta}{\theta} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{1 + 1 \times 0} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

[문제 I]

[I -1] 원의 방정식 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ 에서 $a=0$ 이고, $b=c \geq 0$ 이면

$x^2 + (y-b)^2 = b^2$ 이다. 포물선 $y=x^2$ 과 만나는 점을 구하기 위해, 두 식을 연립하면

$x^2 + (x^2 - b)^2 = b^2$ 이고, 이를 정리하면 $x^2(x^2 - 2b + 1) = 0$ 이다.

따라서 $x^2 = 0$ 또는 $x^2 = 2b - 1$ 이고, $b \geq 0$ 이므로

① $b > \frac{1}{2}$ 이면 $x = 0$ 또는 $x = \pm \sqrt{2b - 1}$

② $b = \frac{1}{2}$ 이면 $x = 0$

③ $0 \leq b < \frac{1}{2}$ 이면 $x = 0$

이다. 그러므로, 원과 포물선이 한 점에서 만나게 되는 b 의 범위는 $0 \leq b \leq \frac{1}{2}$ 이다.

함수 $f(b)$ 는 반지름이 b 인 원의 넓이이므로 $f(b) = \pi b^2$ 이고, $0 \leq b \leq \frac{1}{2}$ 에서 $f(b)$ 의

최댓값은 $\frac{\pi}{4}$ 이다.



[다른 풀이]

$a=0$ 이고 $b=c \geq 0$ 이므로 원의 방정식은 $x^2 + (y-b)^2 = b^2$ 이다. 포물선 $y=x^2$ 과 연립하면 $y + (y-b)^2 = b^2$ 이고 $y=0$ 또는 $y=2b-1$ 을 얻는다.

원과 포물선이 한점에서 만나는 경우는 $2b-1 \leq 0$ 일 때이므로 b 의 범위는 $0 \leq b \leq \frac{1}{2}$ 이

고, 원의 넓이는 $f(b) = \pi b^2$ 에서 $f(b)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{4}\pi$ 이다.

[I -2] 점 $R(r, r^2)$ 에서 원의 접선과 포물선의 접선이 일치하므로 점 R 에서의 접선의 기울기가 같다.

원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ 의 점 R 에서의 접선의 기울기를 구하기 위하여 음함수의 미분법을 이용하면, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{y-b}$ 를 구할 수 있고, 따라서 점 R 에서의 접선의

기울기는 $-\frac{r-a}{r^2-b}$ 이다.

포물선 $y=x^2$ 에 대해서는 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 이므로 점 R 에서의 접선의 기울기는 $2r$ 이다.

따라서 $-\frac{r-a}{r^2-b} = 2r$ 이고, 이를 정리하면 $b = -\frac{a}{2r} + r^2 + \frac{1}{2}$ 이다.

[다른 풀이1]

점 $R(r, r^2)$ 에서 포물선 $y=x^2$ 의 접선의 기울기가 $2r$ 이고, 원이 점 R 에서 접선 l 에 접하므로 직선 AR 의 기울기가 $\frac{b-r^2}{a-r}$ 이다.

따라서 두 기울기의 곱이 -1 에서 $\frac{b-r^2}{a-r} = -\frac{1}{2r}$, $b = r^2 - \frac{a}{2r} + \frac{1}{2}$ 이다.

[다른 풀이2]

포물선 $y=x^2$ 위의 점 $R(r, r^2)$ 에서의 접선의 기울기가 $2r$ 이므로 접선 l 에 수직이고 점 R 을 지나는 직선은 $y = -\frac{1}{2r}(x-r) + r^2$ 이다.

따라서 이 직선이 점 $A(a, b)$ 를 지나므로 $b = r^2 - \frac{a}{2r} + \frac{1}{2}$ 이다.

[I -3] 대학발표 예시답안

원의 반지름은 \overline{AR} 의 길이이다. 앞에서 구한 a 와 b 의 관계식을 이용해서 \overline{AR} 의 길이를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\overline{AR} = \sqrt{(r-a)^2 + \left(r^2 + \frac{a}{2r} - r^2 - \frac{1}{2}\right)^2} = |r-a| \sqrt{1 + \frac{1}{4r^2}}$$

따라서 원의 방정식은 다음과 같다.

$$(x-a)^2 + \left(y + \frac{a}{2r} - r^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = (r-a)^2 \left(1 + \frac{1}{4r^2}\right)$$

원과 포물선이 만나는 점은 다음 식을 만족한다.

$$(x-a)^2 + \left(x^2 + \frac{a}{2r} - r^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = (r-a)^2 \left(1 + \frac{1}{4r^2}\right)$$

이를 정리하면 다음과 같다.

$$x^4 + \left(\frac{a}{r} - 2r^2\right)x^2 - 2ax + r^4 + ar = 0$$

원과 포물선이 점 R에서 만난다는 사실을 이용하면 위 식을 다음과 같이 인수분해 할 수 있다.

$$(x-r)^2 \left(x^2 + 2rx + \left(r^2 + \frac{a}{r}\right)\right) = 0$$

방정식 $x^2 + 2rx + \left(r^2 + \frac{a}{r}\right) = 0$ 은 판별식 $D = -\frac{a}{r}$ 의 부호에 따라 근의 개수가 달라지는데, 문제의 조건($ar < 0$)에 의해 $D > 0$ 이다. 따라서 위의 사차방정식은 최대 세 개의 근 r (중근), $-r + \sqrt{-\frac{a}{r}}$, $-r - \sqrt{-\frac{a}{r}}$ 을 가진다. 문제의 조건에 의해 $\sqrt{-\frac{a}{r}} \neq 0$ 이므로, $-r + \sqrt{-\frac{a}{r}} \neq -r - \sqrt{-\frac{a}{r}}$ 이다. 따라서 원과 포물선이 두 점에서 만나는 경우는 $r = -r + \sqrt{-\frac{a}{r}}$ 또는 $r = -r - \sqrt{-\frac{a}{r}}$ 인 경우이다.

두 식을 정리하면 모두 $a = -4r^3$ 가 된다. 앞에서 구한 원의 방정식에 $a = -4r^3$ 을 대입하면

$$(x + 4r^3)^2 + \left(y - 3r^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = (r + 4r^3)^2 \left(1 + \frac{1}{4r^2}\right)$$

를 얻고, 따라서 원의 넓이는 다음과 같다.

$$g(r) = \pi(r + 4r^3)^2 \left(1 + \frac{1}{4r^2}\right) = \frac{\pi}{4}(1 + 4r^2)^3$$

[I -4] 대학발표 예시답안

[I -3]에서 원과 포물선이 두 점에서 만나는 경우 세 점 P, A, R의 위치에 대해서 생각하자. 우선, 점 R의 좌표는 (r, r^2) 이다. 점 A의 좌표는 (a, b) 인데, $a = -4r^3$ 이고 $b = -\frac{a}{2r} + r^2 + \frac{1}{2}$ 이므로, $A\left(-4r^3, 3r^2 + \frac{1}{2}\right)$ 을 얻는다. 점 P의 좌표에 대해서 생각해보자.

먼저, $r = -r + \sqrt{-\frac{a}{r}}$ 인 경우 $r > 0$ 이고, 점 P의 x 좌표는 $-r - \sqrt{-\frac{a}{r}}$ 인데, $a = -4r^3$ 이므



로 $-r - \sqrt{4r^2} = -3r$ 이 된다. 마찬가지로 $r = -r - \sqrt{-\frac{a}{r}}$ 인 경우 $r < 0$ 이고, 점 P 의 x 좌표는 $-r + \sqrt{-\frac{a}{r}}$ 인데,

$a = -4r^3$ 이므로 $-r + \sqrt{4r^2} = -r + 2|r| = -3r$ 이 된다. 따라서 두 경우 모두 $-3r$ 을 얻고, 점 P 가 포물선 위에 있다는 사실을 이용하여 $P(-3r, 9r^2)$ 을 얻는다. 세 점의 좌표를 이용하여 \overline{PA} , \overline{AR} , \overline{PR} 의 길이를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\overline{PA}^2 = \overline{AR}^2 = \frac{1}{4}(1+4r^2)^3, \quad \overline{PR}^2 = 16r^2(1+4r^2)$$

삼각형 PAR 은 이등변삼각형이므로 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \frac{\overline{PR}}{\overline{PA}}$ 이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{4r}{1+4r^2}$$

극한 $\lim_{r \rightarrow \infty} \sin \frac{\theta}{2} = 0$ 이고 $0 \leq \theta \leq \pi$ 이므로, $\lim_{r \rightarrow \infty} \theta = 0$ 이다. 극한 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r\theta = \lim_{r \rightarrow \infty} 2r \sin \frac{\theta}{2} \frac{\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \lim_{r \rightarrow \infty} 2r \sin \frac{\theta}{2} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{8r^2}{1+4r^2} = 2$$



07

경희대학교(자연계 I) 수시 7)

...



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
함수의 극한, 접선의 방정식, 적분법, 적분의 활용, 미분의 활용	국어, 수학과, 영어, 과탐(1과목) 중 2개 영역 등급 합 5 이내, 한국사 5등급 이내	수학 4문항	120분 (과학 1과목 포함)

I. 다음 제시문을 읽고 문제에 답하십시오. (60점)

[가] 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 보다 큰 값을 가지면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 수 α 에 한없이 가까워지면 α 를 $x=a$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 우극한이라 하며, 기호로 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \alpha$ 와 같이 나타낸다. 또, x 가 a 보다 작은 값을 가지면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 수 β 에 한없이 가까워지면 β 를 $x=a$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 좌극한이라 하며, 기호로 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \beta$ 와 같이 나타낸다.

[나] 함수 $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

[다] 구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$ 의 도함수 $g'(t)$ 가 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 연속이고 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$ 이면

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt$$

[라] 닫힌 구간 $[a, b]$ 의 임의의 점 x 에서 x 축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 넓이가 $S(x)$ 인 입체도형의 부피 V 는

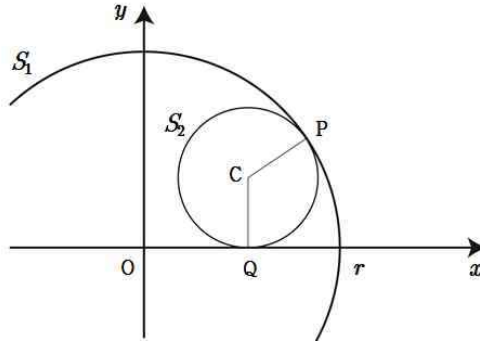
$$V = \int_a^b S(x) dx \quad (\text{단, } S(x) \text{는 닫힌 구간 } [a, b] \text{에서 연속})$$

[마] 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(a)=0$ 일 때, $x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$ 를 가진다.



[논제 I] 제시문 [가]~[마]를 읽고 다음 질문에 답하시오.

그림과 같이 원 S_2 는 원 $S_1 : x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 의 내부에서 x 축과 접하고, 제1사분면 위의 점 P 에서 원 S_1 과 접한다. 원 S_2 의 중심을 C 라 하고 점 C 에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q 라 하자. (단, O 는 원점)



[논제 I-1]

$r=1$ 일 때 원 S_1 위의 점 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 에서의 접선을 l 이라 하자. 접선 l 이 x 축과 만나는 점을 D 라 할 때, 두 점 C 와 D 를 지나는 직선의 방정식을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (6점)

[논제 I-2]

(1) $0 < a < r$ 인 점 $P(a, \sqrt{r^2 - a^2})$ 에 대하여, 점 C 의 x 좌표와 y 좌표를 a 에 관한 함수 $g(a)$ 와 $h(a)$ 로 각각 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

(2) 극한값 $\lim_{a \rightarrow 0+} g(a)$, $\lim_{a \rightarrow 0+} h(a)$, $\lim_{a \rightarrow r-} g(a)$, $\lim_{a \rightarrow r-} h(a)$ 를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (4점)



[문제 I-3]

점 C가 그리는 곡선과 x 축 그리고 y 축으로 둘러싸인 영역 A 의 넓이를 $\alpha(r)$ 이라 하자. 영역 A 의 내부에 있고 각 변이 x 축 또는 y 축에 평행한 직사각형의 넓이의 최댓값을 $\beta(r)$ 이라 할 때, $\alpha(r)$ 과 $\beta(r)$ 을 각각 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

[문제 I-4]

(1) 삼각형 CPQ를 밑면으로 하고 높이가 선분 OC의 길이와 같은 삼각기둥을 만들었을 때, 이 삼각기둥의 부피의 최댓값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

(2) $r \geq 2$ 이고 $0 < x < r$ 일 때, 점 Q의 좌표가 $(x, 0)$ 인 삼각형 CPQ의 넓이를 $S(x)$ 라 하자. 닫힌 구간 $\left[\frac{1}{\sqrt{r}}, \sqrt{\frac{2}{r}} \right]$ 의 임의의 점 x 에서 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$ 인 입체도형의 부피가 $V(r)$ 일 때, 극한값 $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r)$ 을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

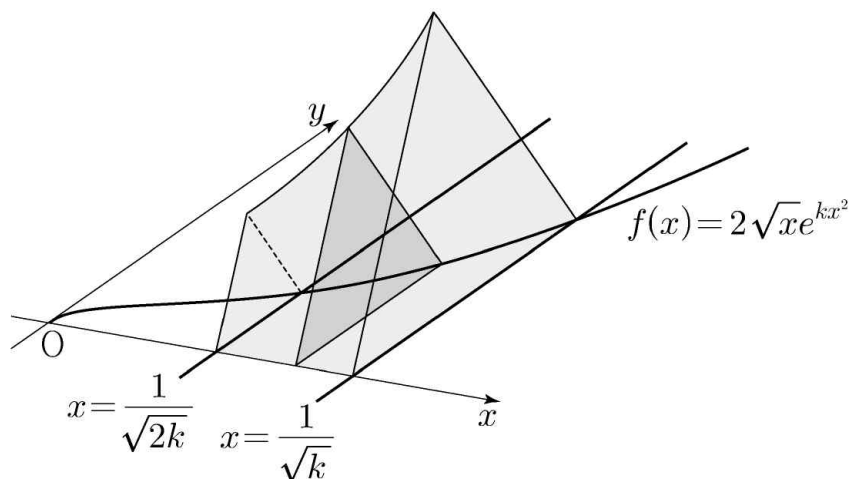


문제1. $a > e$ 인 실수 a 에 대하여 두 곡선 $y = e^{x-1}$ 과 $y = a^x$ 이 만나는 점의 x 좌표를 $f(a)$ 라 할 때, $\lim_{a \rightarrow e^+} \frac{1}{(e-a)f(a)}$ 의 값은? [4점] (2018. 4월 전국연합)

- ① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ 1 ④ e ⑤ e^2

문제2. 그림과 같이 양수 k 에 대하여 함수 $f(x) = 2\sqrt{x}e^{kx^2}$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x = \frac{1}{\sqrt{2k}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형인 입체도형의 부피가 $\sqrt{3}(e^2 - e)$ 일 때, k 의 값은? [4점] (2019. 9월 평가원)

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$





풀어보기(문제1) 정답 ②

두 곡선 $y = e^{x-1}$ 과 $y = a^x$ 이 만나는 점의 x 좌표는 방정식 $e^{x-1} = a^x$ 의 해이다.

양변에 $\frac{e}{a^x}$ 를 곱하면 $\left(\frac{e}{a}\right)^x = e$ 이고 $x = \frac{1}{\ln \frac{e}{a}}$ 이므로 $f(a) = \frac{1}{\ln \frac{e}{a}}$ 이다.

$a - e = t$ 라 하면 $a = t + e$ 이고, $a \rightarrow e + 0$ 일 때 $t \rightarrow 0 + 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow e+} \frac{1}{(e-a)f(a)} &= \lim_{a \rightarrow e+} \frac{\ln \frac{e}{a}}{(e-a)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln \frac{e}{t+e}}{-t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \ln \left(1 + \frac{t}{e}\right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0+} \ln \left\{ \left(1 + \frac{t}{e}\right)^{\frac{e}{t}} \right\}^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

풀어보기(문제2) 정답 ③

$\int_{\frac{1}{\sqrt{2k}}}^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \sqrt{3} x e^{2kx^2} dx = \sqrt{3}(e^2 - e)$ 일 때 k 값을 구하면 된다.

$e^{2kx^2} = t$ 라고 치환하면 $4kxe^{2kx^2} dx = dt \Rightarrow xe^{2kx^2} dx = \frac{dt}{4k}$ 이고

$\sqrt{3} \int_e^{e^2} \frac{1}{4k} dt = \sqrt{3} \frac{e^2 - e}{4k} = \sqrt{3}(e^2 - e)$ 이 성립한다. 따라서 $k = \frac{1}{4}$ 이다.

[문제 I-1] 대학발표 예시답안

점 P는 함수 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ($0 < x < 1$)의 그래프 위의 점이고, $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 이다.

접선 l 은 기울기가 $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$, 점 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 을 지나는 직선 $y = -\sqrt{3}x + 2$ 이다.

따라서 점 D의 좌표는 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 이다.

$\triangle CPD$, $\triangle CQD$, $\triangle OPD$ 를 생각하자. $\triangle CPD$ 와 $\triangle CQD$ 는 합동인 직각삼각형이므로 선분 CD는 $\angle PDO$ 의 이등분선 위에 있다. 직선 l 의 기울기가 $-\sqrt{3}$ 이므로, $\triangle OPD$ 에서 $\angle PDO = \frac{\pi}{3}$ 이고 따라서 $\angle CDQ = \frac{\pi}{6}$ 이다. 그러므로 두 점 C와 D를 지나는 직선은 기울



기가 $-\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 점 $D\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 을 지나는 직선 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2}{3}$ 이다.

[문제 I-2] 대학발표 예시답안

(1) 점 P는 함수 $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ($0 < x < r$)의 그래프 위의 점이고, $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

이므로 점 $P(a, \sqrt{r^2 - a^2})$ ($0 < a < r$)에서 원 S_1 에 접하는 접선 l 의 기울기는

$f'(a) = -\frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}}$ 이다. 따라서 원 S_2 의 중심 C는 점 P에서 l 에 수직인 직선

$y = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}x$ 위에 있으며, $\overline{CP} = \overline{CQ}$ 인 점이다. 점 C의 좌표를 $\left(x, \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}x\right)$

($0 < x < a$)라 하면,

$$\overline{CP}^2 = (x-a)^2 + \left(\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}x - \sqrt{r^2 - a^2}\right)^2, \quad \overline{CQ}^2 = \frac{r^2 - a^2}{a^2}x^2$$

이다. $\overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2$ 이므로 $x^2 - \frac{2r^2}{a}x + r^2 = 0$ 이고,

$$x = \frac{r^2 + r\sqrt{r^2 - a^2}}{a} \quad \text{또는} \quad x = \frac{r^2 - r\sqrt{r^2 - a^2}}{a}$$

이다. $0 < x < a$ 이므로 $x = \frac{r^2 - r\sqrt{r^2 - a^2}}{a}$ 이다.

따라서 $g(a) = \frac{r^2 - r\sqrt{r^2 - a^2}}{a}$, $h(a) = \left(\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}\right)\left(\frac{r^2 - r\sqrt{r^2 - a^2}}{a}\right)$ 이다.

(2) 극한값을 구하면

$$\lim_{a \rightarrow 0+} g(a) = \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{r^2 - r\sqrt{r^2 - a^2}}{a} = \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{r}{a} (r - \sqrt{r^2 - a^2})$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{r}{a} \frac{a^2}{(r + \sqrt{r^2 - a^2})} = 0$$

$$\lim_{a \rightarrow 0+} h(a) = \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{r\sqrt{r^2 - a^2} (r - \sqrt{r^2 - a^2})}{a^2} = \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{r\sqrt{r^2 - a^2}}{a^2} \left(\frac{a^2}{r + \sqrt{r^2 - a^2}}\right)$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{r\sqrt{r^2 - a^2}}{r + \sqrt{r^2 - a^2}} = \frac{r}{2}$$

$$\lim_{a \rightarrow r-} g(a) = \lim_{a \rightarrow r-} \frac{r^2 - r\sqrt{r^2 - a^2}}{a} = r$$

$$\lim_{a \rightarrow r-} h(a) = \lim_{a \rightarrow r-} \frac{r\sqrt{r^2 - a^2} (r - \sqrt{r^2 - a^2})}{a^2} = 0$$



[문제 I-3] 대학발표 예시답안

[문제 I-2](1)에 의해, 점 C의 좌표를 (x, y) 라 하면 $0 < a < r$ 인 경우, $x = \frac{r^2 - r\sqrt{r^2 - a^2}}{a}$

이고, 이때 x 의 범위는 $0 < x < r$ 이다. 여기서 $x^2 - \frac{2r^2}{a}x + r^2 = 0$ 이므로,

$$a = \frac{2r^2x}{r^2 + x^2} \quad (0 < x < r) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이다. 마찬가지로, [문제 I-2](1)에 의해,

$$y = \left(\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} \right) \left(\frac{r^2 - r\sqrt{r^2 - a^2}}{a} \right) = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}x \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이므로, ①, ②에 의해 점 C의 좌표 (x, y) 는 $0 < x < r$ 에서 식 $y = \frac{r^2 - x^2}{2r}$ 을 만족한다.

따라서 영역 A의 넓이는 $\alpha(r) = \int_0^r \frac{r^2 - x^2}{2r} dx = \frac{r^2}{3}$ 이다.

영역 A의 내부에서 두 변이 각각 x 축과 y 축에 평행한 직사각형의 넓이가 최대가 되는 경우, 직사각형의 두 변은 각각 x 축과 y 축 위에 있고, 한 꼭짓점은 점 C가 그리는 곡선

위에 있다. 점 C의 좌표가 $\left(x, \frac{r^2 - x^2}{2r}\right)$ ($0 < x < r$)일 때 직사각형의 넓이를 $f(x)$ 라 하면,

$f(x) = x \times \frac{r^2 - x^2}{2r}$ 이고 $f'(x) = \frac{r}{2} - \frac{3x^2}{2r}$ 이다. $f'(x) = 0$ 인 $x = \pm \frac{r}{\sqrt{3}}$ 에서 $0 < x < r$ 인 것

은 $x = \frac{r}{\sqrt{3}}$ 이다. $0 < x < \frac{r}{\sqrt{3}}$ 에서 $f'(x) > 0$ 이고, $\frac{r}{\sqrt{3}} < x < r$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 제시

문 [마]에 의해 $x = \frac{\sqrt{3}r}{3}$ 에서 최댓값 $\frac{\sqrt{3}r^2}{9}$ 을 가진다. 따라서 $\beta(r) = \frac{\sqrt{3}r^2}{9}$ 이다.

[문제 I-4] 대학발표 예시답안

(1) $0 < x < r$ 인 x 에 대하여 $C\left(x, \frac{r^2 - x^2}{2r}\right)$, $P(a, \sqrt{r^2 - a^2})$, $Q(x, 0)$ 이고, [문제 I-3]의 식

①로부터 $P\left(\frac{2r^2x}{r^2 + x^2}, \frac{r(r^2 - x^2)}{r^2 + x^2}\right)$ 이다.

$(\triangle CPQ \text{의 넓이}) = (\triangle OPQ \text{의 넓이}) - (\triangle OCQ \text{의 넓이})$

$$= \frac{1}{2} \times x \times \frac{r(r^2 - x^2)}{r^2 + x^2} - \frac{1}{2} \times x \times \frac{r^2 - x^2}{2r}$$

따라서 $\triangle CPQ$ 의 넓이는 $\frac{x(r^2 - x^2)^2}{4r(r^2 + x^2)}$ 이다. $\overline{OC} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{r^2 - x^2}{2r}\right)^2} = \frac{r^2 + x^2}{2r}$ 이므로, 삼

각기둥의 부피는 $\frac{x(r^2 - x^2)^2}{4r(r^2 + x^2)} \times \frac{r^2 + x^2}{2r} = \frac{x(r^2 - x^2)^2}{8r^2}$ 이다.



삼각기둥의 부피를 $f(x)$ 라 하면 $f'(x) = \frac{(\sqrt{5}x+r)(\sqrt{5}x-r)(x+r)(x-r)}{8r^2}$ 이고,

$0 < x < r$ 에서 $f'(x) = 0$ 을 만족하는 x 는 $\frac{r}{\sqrt{5}}$ 이다. $0 < x < \frac{r}{\sqrt{5}}$ 에서 $f'(x) > 0$ 이고,

$\frac{r}{\sqrt{5}} < x < r$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로, 제시문 [마]에서 의해 $f(x) = \frac{x(r^2-x^2)^2}{8r^2}$ 는

$x = \frac{r}{\sqrt{5}}$ 일 때 최대이고, 부피의 최댓값은 $f\left(\frac{r}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2\sqrt{5}r^3}{125}$ 이다.

(2) [문제 I-4](1)에 의해, $S(x) = \frac{x(r^2-x^2)^2}{4r(r^2+x^2)}$ 이므로, 제시문 [라]에 의해 입체도형의 부피

는 $V(r) = \int_{\frac{1}{\sqrt{r}}}^{\sqrt{\frac{2}{r}}} \frac{x(r^2-x^2)^2}{4r(r^2+x^2)} dx$ 이다.

$r^2+x^2=u$ 로 놓으면 $\frac{du}{dx} = 2x$ 이고 $r^2 + \frac{1}{r} \leq u \leq r^2 + \frac{2}{r}$ 이므로

$$\begin{aligned} V(r) &= \int_{\frac{1}{\sqrt{r}}}^{\sqrt{\frac{2}{r}}} \frac{x(r^2-x^2)^2}{4r(r^2+x^2)} dx = \int_{r^2+\frac{1}{r}}^{r^2+\frac{2}{r}} \frac{(2r^2-u)^2}{8ru} du \\ &= \left[\frac{r^3}{2} \ln u - \frac{r}{2} u + \frac{u^2}{16r} \right]_{r^2+\frac{1}{r}}^{r^2+\frac{2}{r}} = \frac{r^3}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{r^3+1} \right) + \frac{3}{16r^3} - \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$t = r^3 + 1$ 로 놓으면,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} V(r) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \frac{r^3}{2(r^3+1)} \ln \left(1 + \frac{1}{r^3+1} \right)^{r^3+1} + \frac{3}{16r^3} - \frac{3}{8} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{t-1}{2t} \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t + \frac{3}{16(t-1)} - \frac{3}{8} \right\} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$



08

경희대학교(자연계 II) 수시 8)

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
근과 계수와의 관계, 함수의 증가와 감소, 미분법, 적분법	국어, 수학과, 영어, 과탐(1과목) 중 2개 영역 등급 합 5 이내, 한국사 5등급 이내	수학 2문항	120분 (과학 1과목 포함)

I. 다음 제시문을 읽고 문제에 답하십시오. (60점)

[가] 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

[나] 함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x 에 대하여

(1) $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.

(2) $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.

[다] 함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, $F(x)$ 가 $f(x)$ 의 부정적분이면

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

[라] (1) 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능하고 $g(x) \neq 0$ 일 때,

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ 이면 } y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

(2) 두 함수 $y = f(u), u = g(x)$ 가 미분가능할 때, 합성함수 $y = f(g(x))$ 의 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ 또는 } \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

[마] 미분가능한 함수 $t = g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, $g(a) = \alpha,$

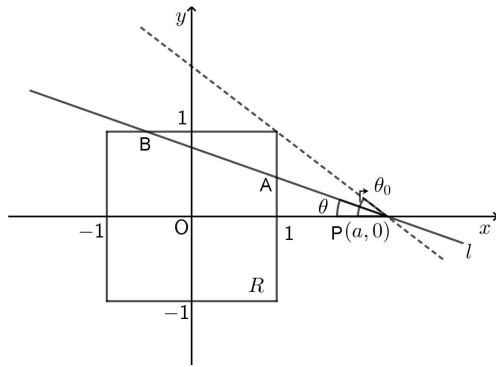
$g(b) = \beta$ 에 대하여 함수 $f(t)$ 가 α 와 β 를 양 끝으로 하는 닫힌 구간에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$

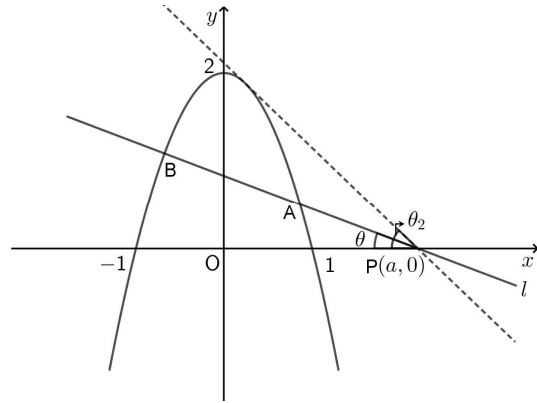


[문제 I] 제시문 [가]~[마]를 읽고 다음 질문에 답하시오.

$a \geq 1$ 이고 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 점 $P(a, 0)$ 을 지나고 x 축의 음의 방향과 이루는 각의 크기가 θ 인 직선 l 의 방정식은 $y = -\tan\theta(x-a)$ 이다.



[그림 1]



[그림 2]

[문제 I-1]

[그림 1]과 같이 $a > 1$ 이고 사각형 R 은 꼭짓점이 $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ 인 정사각형이다. 직선 l 이 $(1, 1)$ 을 지날 때의 θ 를 θ_0 이라 하자. $0 \leq \theta < \theta_0$ 일 때, 직선 l 과 정사각형 R 은 서로 다른 두 점에서 만나고 이 두 점을 A 와 B 라 하자. (단, A 의 x 좌표가 B 의 x 좌표보다 크다.) $\theta = \theta_0$ 인 경우 한 점에서 만나므로 점 A 와 B 모두 $(1, 1)$ 이라 하자.

(1) 직선 l 이 점 $(-1, 1)$ 을 지날 때의 θ 를 θ_1 이라 하자. $\tan\theta_1$ 을 a 를 이용하여 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (3점)

(2) $0 \leq \theta \leq \theta_0$ 에 대하여 $\overline{PB}^2 - \overline{PA}^2$ 을 θ 에 관한 함수 $g(\theta)$ 로 나타낼 수 있다.

$\int_0^{\theta_0} g(\theta) d\theta$ 를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)



[문제 I-2]

[그림 2]와 같이 직선 l 이 곡선 $C: y = -2x^2 + 2$ 에 접하고, 이 접점의 y 좌표가 0보다 크거나 같을 때의 θ 를 θ_2 라 하자. $0 \leq \theta < \theta_2$ 일 때, 직선 l 과 곡선 C 는 서로 다른 두 점에서 만나고 이 두 점을 A와 B라 하자. (단, A의 x 좌표가 B의 x 좌표보다 크다.)

(1) $\tan \theta_2$ 를 a 를 이용하여 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (12점)

(2) $a = 1$ 이고 $0 \leq \theta < \theta_2$ 일 때, \overline{AB}^2 이 최대가 되는 $\tan \theta$ 와 \overline{AB}^2 의 최댓값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

(3) 직선 l 이 점 $(0, 2)$ 를 지날 때의 θ 를 θ_3 이라 하자. $0 \leq \theta \leq \theta_3$ 에 대하여 A와 B의 중점이 M일 때, 선분 PM과 선분 MB의 길이의 곱 $\overline{PM} \times \overline{MB}$ 를 θ 에 관한 함수 $h(\theta)$ 로 나타낼 수 있다. $\int_0^{\theta_3} h(\theta) d\theta$ 를 a 를 이용하여 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

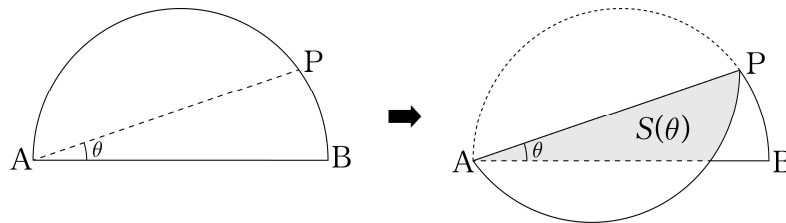


문제1. $\int_1^{\sqrt{2}} x^3 \sqrt{x^2-1} dx$ 의 값은? [3점] (2018. 6월 평가원)

- ① $\frac{7}{15}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{11}{15}$

문제2. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 모양의 색종이가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 두 점 A, P를 연결하는 선을 접는 선으로 하여 색종이를 접는다. $\angle PAB = \theta$ 일 때, 포개어지는 부분의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\theta = \alpha$ 에서 $S(\theta)$ 가 최댓값을 갖는다고 할 때, $\cos 2\alpha$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]

(2017. 10월 전국연합)



- ① $\frac{-2 + \sqrt{17}}{8}$ ② $\frac{-1 + \sqrt{17}}{8}$ ③ $\frac{\sqrt{17}}{8}$
 ④ $\frac{1 + \sqrt{17}}{8}$ ⑤ $\frac{2 + \sqrt{17}}{8}$

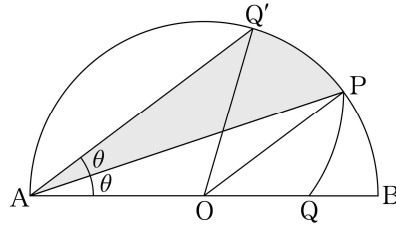


풀어보기(문제1) 정답 ②

$x^2 - 1 = t$ 라 하면 $2x dx = dt$ 이고 $x = 1$ 일 때 $t = 0$, $x = \sqrt{2}$ 일 때 $t = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{2}} x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx &= \int_0^1 \frac{1}{2}(t+1) \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{16}{15} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

풀어보기(문제2) 정답 ④



색종이를 접었을 때 호 AP와 선분 AB의 교점을 Q, 접힌 색종이를 다시 폈을 때 점 Q가 호 AB 위에 있게 되는 점을 Q'이라 하자.

도형 AQP와 도형 APQ'은 합동이므로 $S(\theta)$ 는 호 AP와 현 AP로 둘러싸인 도형에서 호 AQ'과 현 AQ'으로 둘러싸인 도형의 넓이를 빼 것이다.

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \{(\pi - 2\theta) - \sin(\pi - 2\theta)\} - \frac{1}{2} \{(\pi - 4\theta) - \sin(\pi - 4\theta)\}$$

$$= \frac{1}{2} (2\theta - \sin 2\theta + \sin 4\theta)$$

$$S'(\theta) = 2 \cos 4\theta - \cos 2\theta + 1$$

$$= 2(\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta) - \cos 2\theta + 1$$

$$= 2(2\cos^2 2\theta - 1) - \cos 2\theta + 1$$

$$= 4\cos^2 2\theta - \cos 2\theta - 1$$

$$S'(\theta) = 0 \text{ 에서 } 4 \left(\cos 2\theta - \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \right) \left(\cos 2\theta - \frac{1 - \sqrt{17}}{8} \right) = 0$$

따라서 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 에서 $0 < \cos 2\theta < 1$ 이므로 $\cos 2\theta = \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$ 인 θ 에서 $S(\theta) = 0$ 이다.

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 에서 $\cos 2\theta = \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$ 를 만족시키는 θ 를 θ_0 이라 하면 $\theta < \theta_0$ 일 때 $S'(\theta) > 0$ 이



고 $\theta > \theta_0$ 일 때 $S'(\theta) < 0$ 이므로 $S(\theta)$ 는 $\theta = \theta_0$ 에서 최댓값을 갖는다.

그러므로 $\theta_0 = \alpha$, 따라서 $\cos 2\alpha = \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$ 이다.

[문제 I-1] 대학발표 예시답안

(1) 점 P 와 점 $(-1, 1)$ 에서 x 축에 내린 수선의 발 $(-1, 0)$ 까지 거리가 $a+1$ 이므로 $\tan \theta_1 = \frac{1}{a+1}$ 이다.

(2) $\cos \theta = \frac{a-1}{\overline{PA}}$ 이므로 $\overline{PA} = \frac{a-1}{\cos \theta}$ 이다. 직선 l 이 점 $(-1, 1)$ 을 지날 때 θ 를 θ_1 이라 하자. $0 \leq \theta \leq \theta_1$ 이면 점 B 는 $(-1, 0)$ 을 지나는 정사각형 R 의 변 위에 있고, x 좌표는 -1 이므로 $\overline{PB} = \frac{a+1}{\cos \theta}$ 이다. $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0$ 이면 점 B 는 $(0, 1)$ 을 지나는 정사각형 R 의 변 위에 있고, y 좌표는 1 이므로 $\overline{PB} = \frac{1}{\sin \theta}$ 이다. 따라서

$$g(\theta) = \overline{PB}^2 - \overline{PA}^2 = \begin{cases} \frac{4a}{\cos^2 \theta} & (0 \leq \theta \leq \theta_1) \\ \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{(a-1)^2}{\cos^2 \theta} & (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0) \end{cases}$$

제시문 [라]를 이용하면 $(\tan \theta)' = \frac{1}{\cos^2 \theta}$, $(\cot \theta)' = -\frac{1}{\sin^2 \theta}$ 이고 제시문 [다]를 이용하여 적분하면

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta_0} g(\theta) d\theta &= 4a \int_0^{\theta_1} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_0} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{(a-1)^2}{\cos^2 \theta} \right\} d\theta \\ &= 4a \tan \theta_1 + (\cot \theta_1 - \cot \theta_0) - (a-1)^2 (\tan \theta_0 - \tan \theta_1) \end{aligned}$$

$\tan \theta_1 = \frac{1}{a+1}$, $\tan \theta_0 = \frac{1}{a-1}$ 이므로, 대입하면

$$\int_0^{\theta_0} g(\theta) d\theta = \frac{4a}{a+1} + 2 - (a-1)^2 \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} \right) = \frac{4a}{a+1} + \frac{4}{a+1} = 4$$

[문제 I-2] 대학발표 예시답안

(1) $y = -\tan \theta (x-a)$ 를 $y = -2x^2 + 2$ 에 대입하면 x 에 관한 이차방정식 $2x^2 - x \tan \theta + a \tan \theta - 2 = 0$ 을 얻는다. $\theta = \theta_2$ 일 때 직선 l 이 곡선 C 에 접하려면 $2x^2 - x \tan \theta_2 + a \tan \theta_2 - 2 = 0$ 은 중근을 갖고, 판별식에 의해

$$\tan^2 \theta_2 - 8a \tan \theta_2 + 16 = \left\{ \tan \theta_2 - 4(a - \sqrt{a^2 - 1}) \right\} \left\{ \tan \theta_2 - 4(a + \sqrt{a^2 - 1}) \right\} = 0$$



$a > 1$ 인 경우, $\tan \theta = 4(a - \sqrt{a^2 - 1})$ 일 때 접점의 y 좌표는 $4(a - \sqrt{a^2 - 1})\sqrt{a^2 - 1} > 0$ 이고 $\tan \theta = 4(a + \sqrt{a^2 - 1})$ 일 때 접점의 y 좌표는 $-4(a + \sqrt{a^2 - 1})\sqrt{a^2 - 1} < 0$ 이다. $a = 1$ 인 경우, $\tan \theta_2 = 4$ 이고 접점의 y 좌표는 0이다. 따라서 $\tan \theta_2 = 4(a - \sqrt{a^2 - 1})$ 이다.

(2) $y = -\tan \theta (x - 1)$ 를 $y = -2x^2 + 2$ 에 대입하여 얻은 x 에 관한 이차방정식

$2x^2 - x \tan \theta + \tan \theta - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β ($\alpha > \beta$)라 하면, 점 A의 x 좌표는 α 이고 점 B의 x 좌표는 β 이다. 따라서 제시문 [가]를 이용하면

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \frac{(\alpha - \beta)^2}{\cos^2 \theta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{(\tan^2 \theta - 8 \tan \theta + 16)(1 + \tan^2 \theta)}{4} = \frac{(\tan \theta - 4)^2 (1 + \tan^2 \theta)}{4}\end{aligned}$$

$\tan \theta$ 는 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 연속이고 증가함수이므로 [논제 I-2](1)번에 의해, $0 \leq \theta < \theta_2$

일 때 $0 \leq \tan \theta < 4$ 이다. $\tan \theta = t$ 로 놓으면, $0 \leq t < 4$ 이고 $\overline{AB}^2 = \frac{1}{4}(t - 4)^2(1 + t^2)$ 이다.

$f(t) = \frac{1}{4}(t - 4)^2(1 + t^2)$ 라 하면, $f'(t) = (t - 4)\left(t - \frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)\left(t - \frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)$ 이고 제시문 [나]를 이용하여 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$...	$\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$...	4
$f'(t)$	-	-	0	+	0	-	
$f(t)$	4	\searrow	$\frac{71 - 8\sqrt{2}}{16}$	\nearrow	$\frac{71 + 8\sqrt{2}}{16}$	\searrow	

따라서 $t = \tan \theta = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{71 + 8\sqrt{2}}{16} = \frac{71}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

(3) 세 점 P, A, B가 직선 l 위에 있고 M은 A와 B의 중점이므로, 네 점 P, A, B, M 모두 직선 l 위에 있다. $\overline{MB} = \overline{MA}$ 이고 $\overline{PB} > \overline{PA}$ 이기 때문에 $\overline{PM} = \overline{PB} - \overline{MB} = \overline{PA} + \overline{MB}$ 이다. 따라서 $\overline{PM} = \frac{\overline{PB} + \overline{PA}}{2}$, $\overline{MB} = \frac{\overline{PB} - \overline{PA}}{2}$ 이고

$$\overline{PM} \times \overline{MB} = \frac{\overline{PB} + \overline{PA}}{2} \times \frac{\overline{PB} - \overline{PA}}{2} = \frac{1}{4}(\overline{PB}^2 - \overline{PA}^2)$$

이다. $y = -\tan \theta (x - a)$ 를 $y = -2x^2 + 2$ 에 대입하여 얻은 x 에 관한 이차방정식

$$2x^2 - x \tan \theta + a \tan \theta - 2 = 0$$

의 두 근을 α, β ($\alpha > \beta$)라 하면 점 A의 x 좌표는 α 이고 점 B의 x 좌표는 β 이다. 제



시문 [가]를 이용하면

$$h(\theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{(a-\beta)^2}{\cos^2 \theta} - \frac{(a-\alpha)^2}{\cos^2 \theta} \right) = \frac{(\alpha-\beta)(2a-\alpha-\beta)}{4 \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\sqrt{\tan^2 \theta - 8a \tan \theta + 16} (4a - \tan \theta)}{16 \cos^2 \theta},$$

$$\int_0^{\theta_3} h(\theta) d\theta = \frac{1}{16} \int_0^{\theta_3} \frac{\sqrt{\tan^2 \theta - 8a \tan \theta + 16} (4a - \tan \theta)}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$\theta = \theta_3$ 일 때, 직선 l 이 $(0, 2)$ 를 지나므로 $\tan \theta_3 = \frac{2}{a}$ 이다. $u = \tan^2 \theta - 8a \tan \theta + 16$ 이라

하면, $\frac{du}{d\theta} = \frac{2 \tan \theta - 8a}{\cos^2 \theta}$ 이고 $\theta = 0$ 일 때 $u = 16$, $\theta = \theta_3$ 일 때 $u = \frac{4}{a^2}$ 이다. 제시문 [마]와

[라]를 이용하면, $\int_0^{\theta_3} h(\theta) d\theta = -\frac{1}{32} \int_0^{\frac{4}{a^2}} \sqrt{u} du = \frac{4}{3} - \frac{1}{6a^3}$ 이다.

09 경희대학교(의학계) 수시 9)

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
원의 방정식, 역함수, 수열의 극한, 함수의 극한, 적분의 활용	국어, 수학과, 영어, 과탐(1과목) 중 3개 영역 등급 합 4 이내, 한국사 5등급 이내	수학 2문항	120분 (과학 1과목 포함)

I. 다음 제시문을 읽고 문제에 답하십시오. (60점)

[가] 중심이 $C(a, b)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

[나] 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 정의역을 $\{x|x \geq 0\}$, 공역을 $\{y|y \geq 0\}$ 이라고 하면 이 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 즉 $y = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$)에서 x 를 y 의 식으로 나타내면 $x = y^2$ ($y \geq 0$) 이고, 이 식에서 x 와 y 를 서로 바꾸면 역함수

$$y = x^2 \quad (x \geq 0)$$

을 얻는다.

[다] 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 수렴하고, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ 일 때

(1) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq b_n$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \text{ 즉 } \alpha \leq \beta$$

(2) 수열 $\{c_n\}$ 과 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq c_n \leq b_n$ 이고 $\alpha = \beta$ 이면 수열 $\{c_n\}$ 도 수렴하고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$$

[라] x 의 값이 a 보다 크면서 a 에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x \rightarrow a+$ 와 같이 나타내고, x 의 값이 a 보다 작으면서 a 에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x \rightarrow a-$ 와 같이 나타낸다. 일반적으로 함수 $f(x)$ 에서 $x \rightarrow a+$ 일 때 $f(x)$ 의 값이 일정한 값 L 에 한없이 가까워지면 L 을 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 우극한이라고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L \text{ 또는 } x \rightarrow a+ \text{일 때 } f(x) \rightarrow L$$



과 같이 나타낸다. 또 $x \rightarrow a-$ 일 때 $f(x)$ 의 값이 일정한 값 M 에 한없이 가까워지면 M 을 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 좌극한이라고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = M \text{ 또는 } x \rightarrow a-\text{일 때 } f(x) \rightarrow M$$

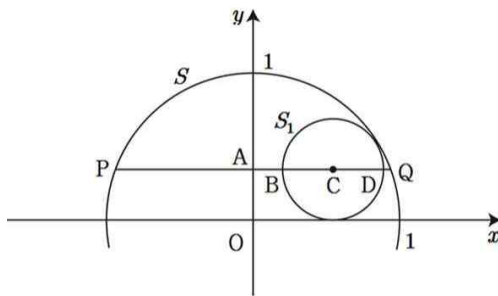
과 같이 나타낸다.

[마] 닫힌 구간 $[a, b]$ 의 임의의 점 x 에서 x 축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 넓이가 $S(x)$ 인 입체도형의 부피 V 는

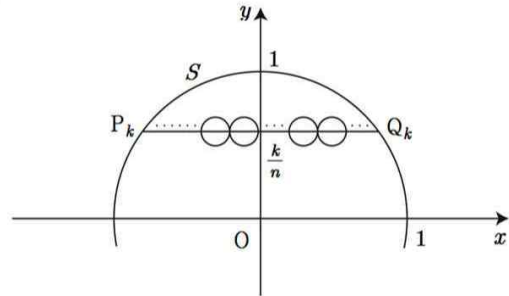
$$V = \int_a^b S(x) dx \quad (\text{단, } S(x) \text{는 닫힌 구간 } [a, b] \text{에서 연속})$$

[문제 I] 제시문 [가]~[마]를 읽고 다음 질문에 답하시오.

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원을 S 라 하고, 원 S 의 내부와 경계선으로 이루어진 영역을 R 이라 하자.



[그림 1]



[그림 2]

[문제 I-1] [그림 1]과 같이 $0 < t < \frac{1}{2}$ 일 때, 점 A 의 좌표는 $(0, t)$ 이고, 직선 $y=t$ 와 원 S 가 만나는 두 점을 P 와 Q 라 하자. (단, P 의 x 좌표가 Q 의 x 좌표보다 작다.) 반지름의 길이가 t 이고 중심 C 가 선분 AQ 위에 있는 원 S_1 이 원 S 와 접한다.

(1) 원 S_1 이 선분 AQ 와 만나는 두 점을 B 와 D 라 하자. (단, B 의 x 좌표가 D 의 x 좌표보다 작다.) 선분 DQ 의 길이를 $f(t)$ 라 할 때, 극한값 $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t)}{t^3}$ 를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

(2) 선분 PQ 위에 중심이 있고 반지름의 길이가 t 인 같은 크기의 원들을 서로 한 점에서 만나거나 만나지 않도록 영역 R 에 최대한 많이 그렸을 때, 양쪽 끝에 있는 두 개의 원들이 원 S 와 접하는 경우를 생각하자. 이때 작은 원들의 개수를 N (N 은 2 이상의 자연수)이라 할 때, t 의 최댓값을 N 을 이용하여 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

[문제 I-2] [그림 2]와 같이 n 이 3 이상의 자연수이고, $0 \leq k \leq n-1$ 인 정수 k 일 때, 직선 $y = \frac{k}{n}$ 가 원 S 와 만나는 점을 각각 P_k 와 Q_k 라 하자. 선분 $P_k Q_k$ 위에 중심이 있고 반지름의 길이가 $\frac{1}{n}$ 인 같은 크기의 원들을 서로 한 점에서 만나거나 만나지 않도록 영역 R 에 최대한 많이 그리자. 이때, 그 원들의 개수를 a_k 라 하자.

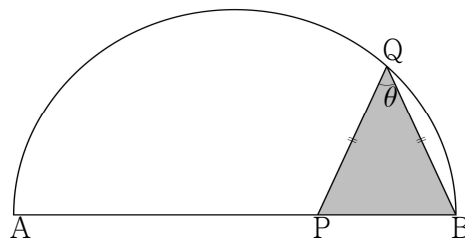
(1) $n \geq 4$ 일 때, $a_{n-4} = 8$ 이 되는 가장 큰 자연수 n 을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (12점)

(2) $n = 11$ 이고, k 는 $0 \leq k \leq 10$ 인 정수라 하자. 선분 $P_k Q_k$ 위에 중심이 있는 원들 중, 이웃하는 원들은 한 점에서 만나고 양끝의 두 원은 S 에도 접하는 k 의 값을 모두 구하고, 근거를 논술하시오. (8점)

(3) 자연수 m 이 주어져 있을 때, $k = n - m$ 이라 하자. (단, $2 \leq m < n$) 반지름의 길이가 $\frac{1}{n}$ 인 원 하나를 선택하여 선분 $P_{n-m} Q_{n-m}$ 과 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 p, q ($p < q$)라 하자. $p \leq x \leq q$ 인 점 $(x, 0)$ 에서 y 축에 평행한 직선을 그렸을 때, 선택한 작은 원과 만나는 두 점 중에서 y 좌표가 더 큰 점부터 x 축까지의 거리를 한 변의 길이로 하는 정사각형의 넓이를 $A(x)$ 라 하자. 닫힌 구간 $\left[p, \frac{p+3q}{4} \right]$ 의 임의의 점 x 에서 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $A(x)$ 인 입체도형의 부피를 V_n 이라 할 때, V_n 을 구한 후, 수열 $\{\sqrt{n} a_{n-m} V_n\}$ 의 수렴, 발산을 조사하여 수렴하면 그 극한값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (20점)

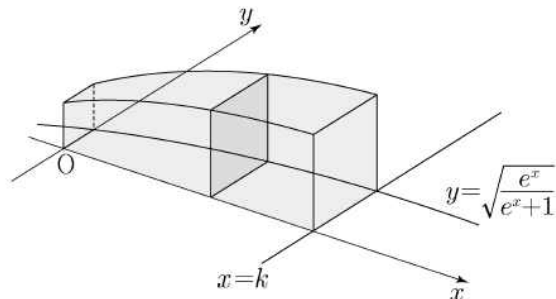


문제1. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{QB} = \overline{QP}$ 를 만족시키는 반원 위의 점을 Q라 할 때, $\angle BQP = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)라 하자. 삼각형 QPB의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$ 의 값은? [4점] (2019. 7월 전국연합)



- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

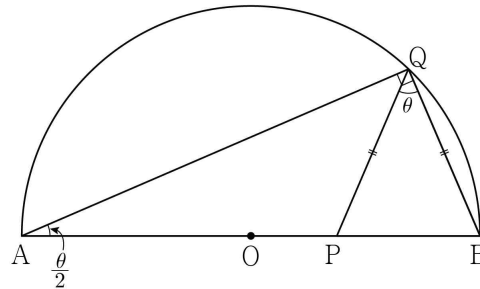
문제2. 그림과 같이 양수 k 에 대하여 곡선 $y = \sqrt{\frac{e^x}{e^x + 1}}$ 과 x 축, y 축 및 직선 $x = k$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $\ln 7$ 일 때, k 의 값은? [4점] (2020. 대수능)



- ① $\ln 11$ ② $\ln 13$ ③ $\ln 15$ ④ $\ln 17$ ⑤ $\ln 19$



풀어보기(문제1) 정답 ②



삼각형 QPB 는 이등변삼각형이므로 $\angle QBP = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ 이다.

삼각형 ABQ 는 $\angle Q = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로 $\angle QAB = \frac{\theta}{2}$, $\overline{QB} = \overline{QP} = 2\sin \frac{\theta}{2}$ 이다.

따라서 $S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{QB} \times \overline{QP} \times \sin \theta$ 이고

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2\sin^2 \frac{\theta}{2} \sin \theta}{\theta^3} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ 2 \times \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \right)^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{\sin \theta}{\theta} \right\} \\ &= 2 \times 1 \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

풀어보기(문제2) 정답 ②

주어진 입체도형의 부피는

$$\int_0^k \left(\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}} \right)^2 dx = \int_0^k \frac{e^x}{e^x+1} dx$$

$e^x + 1 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = e^x$ 이고 $x=0$ 일 때, $t=2$ 이고 $x=k$ 일 때, $t=e^k+1$ 이므로

$$\int_0^k \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int_2^{e^k+1} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_2^{e^k+1} = \ln(e^k+1) - \ln 2 = \ln \frac{e^k+1}{2}$$

주어진 입체도형의 부피가 $\ln 7$ 이므로

$$\ln \frac{e^k+1}{2} = \ln 7, \quad e^k = 13$$

이 고 따라서 $k = \ln 13$ 이다.



[문제 I-1] 대학발표 예시답안

(1) 두 원이 접하는 점을 E라 하면, 원점 O, 점 C와 점 E가 한 직선 위에 있다.

$\overline{CE}=t$ 이므로 $\overline{OC}=1-t$ 이다. 따라서 $\overline{AC}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{OA}^2 = (1-t)^2 - t^2 = 1-2t$ 이다.

$\overline{DQ} = \overline{AQ} - \overline{AC} - \overline{CD}$ 이므로, $f(t) = \sqrt{1-t^2} - \sqrt{1-2t} - t$ 이다.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t)}{t^3} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1-t^2} - (\sqrt{1-2t} + t)}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{-2(t-1 + \sqrt{1-2t})}{t^2(\sqrt{1-t^2} + \sqrt{1-2t} + t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{-2}{(\sqrt{1-t^2} + \sqrt{1-2t} + t)(t-1 - \sqrt{1-2t})} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2) t 가 최대가 되려면 이웃하는 원들끼리 접해야 한다. 따라서 N 개의 원들의 지름의

합은 $2Nt$ 가 되는데, 이는 $\overline{PQ} - 2\overline{DQ}$ 와 같아야 한다. 즉, $\overline{PQ} - 2\overline{DQ} = 2Nt$ 를

만족한다. $\overline{PQ} = 2\sqrt{1-t^2}$ 이고, [문제 I-1](1)번의 풀이에서

$\overline{DQ} = \sqrt{1-t^2} - \sqrt{1-2t} - t$ 이므로, $\sqrt{1-2t} + t = Nt$ 가 된다.

$\sqrt{1-2t} = (N-1)t$ 에서 양변을 제곱해서 정리하면, $(N-1)^2 t^2 + 2t - 1 = 0$ 이고 $t > 0$ 이

므로 $t = \frac{-1 + \sqrt{1 + (N-1)^2}}{(N-1)^2}$ 이다.

[문제 I-2] 대학발표 예시답안

(1) $\left(0, \frac{k}{n}\right)$ 를 점 A_k 라 하자. 선분 $P_k Q_k$ 에 중심이 있고 반지름이 $\frac{1}{n}$ 인 원들 중에서 가장 오른쪽에 있는 원을 S_2 라 하고, 원 S_2 가 원 S 와 접한다고 하자. 원 S_2 의 중심을 C라 하고, 선분 CQ_k 와 만나는 점을 D라 하면,

$$\overline{A_k C}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{OA_k}^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{(n-1)^2 - k^2}{n^2}$$

이므로, $\overline{A_k C} = \frac{\sqrt{(n-1)^2 - k^2}}{n}$ 이다. 따라서 선분 $P_k Q_k$ 에 중심이 있는 원들이 움직일

수 있는 선분의 길이는 $2\overline{A_k D} = 2\left(\overline{A_k C} + \frac{1}{n}\right)$ 이므로, $\frac{2}{n}$ 로 나누면, $\sqrt{(n-1)^2 - k^2} + 1$ 이

되기 때문에, a_k 는 $\sqrt{(n-1)^2 - k^2} + 1$ 보다 작거나 같고, $\sqrt{(n-1)^2 - k^2}$ 보다 큰

자연수이다. $k = n-4$ 이면, $\sqrt{(n-1)^2 - (n-4)^2} = \sqrt{6n-15}$ 이므로, $\sqrt{6n-15}$ 가 8보다

작은 자연수 n 을 구하면 된다. $g(x) = \sqrt{6x-15}$ 라 하면, $g(x)$ 는 증가함수이고,

$g\left(\frac{79}{6}\right) = 8$ 이므로, $n < \frac{79}{6}$ 이다. n 은 자연수이기 때문에, 가장 큰 자연수 n 은 13이

된다.

(2) 이웃하는 모든 원들이 한 점에서 만나면, [논제 I -2](1)에서 얻은 $\sqrt{(n-1)^2-k^2}+1$ 이 자연수이다. 즉, $n=11$ 이면, $\sqrt{10^2-k^2}+1$ 이 자연수가 되는 정수 k 는 0, 6 또는 8에서 자연수가 되고, 각각 그 때의 원들의 개수는 11개, 9개, 7개가 된다.

(3) 모든 원의 크기가 같기 때문에 선택한 원을 평행이동하여 $x^2 + \left(y - \frac{n-m}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$ 라 할 수 있다. $(x, 0)$ 으로부터 y 축에 평행한 직선을 그렸을 때, y 좌표가 더 큰 점까지의 거리는 $\frac{n-m}{n} + \sqrt{\frac{1}{n^2} - x^2}$ 이므로, $A(x)$ 는 $\left(\frac{n-m}{n} + \sqrt{\frac{1}{n^2} - x^2}\right)^2$ 이 된다. 닫힌 구간 $\left[p, \frac{p+3q}{4}\right]$ 를 위와 같이 평행이동하면 x 의 범위는 $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}\right]$ 이 된다. 따라서 입체 도형의 부피 V_n 은

$$\begin{aligned} V_n &= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2n}} \left(\frac{n-m}{n} + \sqrt{\frac{1}{n^2} - x^2} \right)^2 dx \\ &= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2n}} \left(\frac{(n-m)^2 + 1}{n^2} - x^2 + \frac{2(n-m)}{n} \sqrt{\frac{1}{n^2} - x^2} \right) dx \\ &= \frac{12(n-m)^2 + 9}{8n^3} + \frac{2(n-m)}{n} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2n}} \sqrt{\frac{1}{n^2} - x^2} dx \end{aligned}$$

이다. 여기에서 적분값 $\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2n}} \sqrt{\frac{1}{n^2} - x^2} dx$ 는 반원 $y = \sqrt{\frac{1}{n^2} - x^2}$ 과 x 축, $x = \frac{1}{2n}$ 로 둘러싸인 영역의 넓이와 같다. 이는 부채꼴과 직각삼각형의 넓이의 합으로 계산하면 된다.

중심각이 $\frac{2\pi}{3}$ 인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{n^2} \times \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3n^2}$ 이고, 직각삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2n} \times \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4n^2}} = \frac{\sqrt{3}}{8n^2} \text{ 이므로 } \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2n}} \sqrt{\frac{1}{n^2} - x^2} dx = \frac{\pi}{3n^2} + \frac{\sqrt{3}}{8n^2} = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{24n^2}$$

이다. 따라서 $V_n = \frac{12(n-m)^2 + 9}{8n^3} + \frac{2(8\pi + 3\sqrt{3})(n-m)}{24n^3} = \frac{3}{2n} + \frac{\alpha}{n^2} + \frac{\beta}{n^3}$ 로 놓으면 상수

α 와 β 는 $\alpha = \frac{-36m + (8\pi + 3\sqrt{3})}{12}$ 이고, $\beta = \frac{36m^2 - 2m(8\pi + 3\sqrt{3}) + 27}{24}$ 이다.

[논제 I -2](1)번에서 $\sqrt{(m-1)(2n-m-1)} < a_{n-m} \leq \sqrt{(m-1)(2n-m-1)} + 1$ 이므로, $\sqrt{n} \sqrt{(m-1)(2n-m-1)} V_n < \sqrt{n} a_{n-m} V_n \leq \sqrt{n} (\sqrt{(m-1)(2n-m-1)} + 1) V_n$ 이다.

$b_n = \sqrt{n} \sqrt{(m-1)(2n-m-1)} V_n$ 이고, $c_n = \sqrt{n} \sqrt{(m-1)(2n-m-1)} V_n + \sqrt{n} V_n$ 이라 하면, $b_n < \sqrt{n} a_{n-m} V_n \leq c_n \dots\dots$ ①



$$b_n = \sqrt{m-1} \sqrt{n} \sqrt{2n-m-1} \left(\frac{3}{2n} + \frac{\alpha}{n^2} + \frac{\beta}{n^3} \right) = \sqrt{m-1} \sqrt{2 - \frac{m+1}{n}} \left(\frac{3}{2} + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} \right) \text{가 되어,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{3}{2} \sqrt{2(m-1)} \dots\dots \textcircled{2}$$

$$c_n = b_n + \sqrt{n} V_n \text{이 되는데, } \sqrt{n} V_n = \sqrt{n} \left(\frac{3}{2n} + \frac{\alpha}{n^2} + \frac{\beta}{n^3} \right) \text{이므로, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} V_n = 0 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{3}{2} \sqrt{2(m-1)} \dots\dots \textcircled{3}$$

제시문 [다]와 ①, ②, ③으로부터 수열 $\{\sqrt{n} a_{n-m} V_n\}$ 은 수렴하고, 극한값은 $\frac{3}{2} \sqrt{2(m-1)}$ 이다.



10

부산대학교(자연계열) 모의¹⁰⁾

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
도형의 방정식, 벡터의 내적, 정적분, 합성함수의 미분, 경우의 수, 자연수의 분할	국, 수(가), 영, 과 중 2개 합 5등급(수(가) 포함, 한국사 4등급 ※ 일부 모집단위는 수(나) 허용, 2개 합 6등급	수학(3문항, 6문제)	100분

[문항 1] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

(나) 연속함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이면 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ 이다.

(다) 구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$ 라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

(라) 세 실수 a, b, c 를 포함하는 닫힌구간에서 함수 $f(x)$ 가 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

[1-1] 실수 전체에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f(1)=0$ 이고 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 $3 \leq f'(x) \leq 7$ 이다. 이 때, $a \leq \int_1^3 f(x)dx \leq b$ 를 만족하는 a 의 최댓값과 b 의 최솟값을 구하시오. (10점)

[1-2] $f(x) = |x^2 + x - 2|$ 의 구간 $[t, t+1]$ 에서의 최댓값을 $g(t)$ 라 할 때, $\int_{-2}^0 g(t)dt$ 의 값을 구하시오. (20점)



[문항 2] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 을 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n} = (a, b, c)$ 에 수직인 평면의 방정식은

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

(나) 점 $A(x_0, y_0, z_0)$ 과 평면 $ax + by + cz + d = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(다) 영벡터가 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 θ 일 때, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 이다.

좌표공간의 세 점 $O(0, 0, 0)$, $A(-4, 0, 0)$, $B(3, -1, \sqrt{6})$ 에 대하여

$$\angle AOB = \angle AOC = \angle BOD, \quad |\vec{OC}| = |\vec{OD}| = 2$$

를 만족하는 점 C, D 가 존재할 때, 다음 물음에 답하시오.

[2-1] 사면체 $OABC$ 의 부피가 최대가 될 때, 점 C 의 좌표를 모두 구하시오. (20점)

[2-2] $\vec{BD} \cdot \vec{AC}$ 가 최대가 될 때, $\vec{OB} \cdot \vec{OC}$ 의 값을 구하시오. (20점)



[문항 3] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 서로 다른 n 개에서 순서를 생각하지 않고 r ($r \leq n$)개를 택할 때, 이것을 n 개에서 r 개를 택하는 조합이라고 하며, 이 조합의 수를 기호로 ${}_nC_r$ 와 같이 나타낸다. 이때, 조합의 수는

$${}_nC_r = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

(나) 자연수 n 을 자신보다 크지 않은 자연수 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ 의 합으로

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k \quad (n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \dots \geq n_k)$$

와 같이 나타내는 것을 자연수의 분할이라고 한다. (단, $1 \leq k \leq n$)

(다) 원소가 유한개인 집합을 공집합이 아닌 몇 개의 서로소인 부분집합의 합집합으로 나타내는 것을 집합의 분할이라고 한다. 예를 들면, 원소가 4개인 집합을 공집합이 아닌 2개의 서로소인 부분집합으로 분할하는 방법의 수는 7이다.

1부터 n 까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 n 장의 카드가 주머니에 들어 있다. 한 번에 1장에서 n 장까지 카드를 반복해서 꺼내려고 한다. 주머니에 남은 카드가 없도록 n 장의 카드를 모두 꺼내는 방법의 수를 생각해보자. 예를 들면, $n=3$ 일 때 꺼내는 방법의 수는 13이다.

[3-1] $n=4$ 일 때 주머니 속의 카드를 모두 꺼내는 방법의 수를 구하시오. (10점)

[3-2] 다음과 같은 시행을 통해 주머니 속에 있는 모든 카드를 꺼낸다.

i 번째 꺼낸 카드의 개수가 m 이면 $(i+1)$ 번째 꺼내는 카드의 개수는 $\frac{m}{2}$ 이하이다.

이와 같은 과정을 통해 10장의 카드를 모두 꺼내는 방법의 수를 구하시오. (20점)



문제1. 좌표공간에서 원점 O 와 점 $A(4, 0, 0)$ 에 대하여 평면 $x+y+\sqrt{2}z=0$ 위의 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{OP}|$ 는 9이하의 자연수이다.

(나) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AP} = 6$

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OP}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하시오.

(2019. 9월 평가원)

문제2. 연필 7자루와 볼펜 4자루를 다음 조건을 만족시키도록 여학생 3명과 남학생 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 연필끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜끼리도 서로 구별하지 않는다.) (2019. 9월 평가원)

(가) 여학생이 각각 받는 연필의 개수는 서로 같고, 남학생이 각각 받는 볼펜의 개수도 서로 같다.

(나) 여학생은 연필을 1자루 이상 받고, 볼펜을 받지 못하는 여학생이 있을 수 있다.

(다) 남학생은 볼펜을 1자루 이상 받고, 연필을 받지 못하는 남학생이 있을 수 있다.



풀어보기(문제1) 정답 86

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} - |\overrightarrow{OA}|^2 = 6 \text{ 이므로 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 22 \text{ 이다.}$$

\overrightarrow{OA} 와 \overrightarrow{OP} 가 이루는 각을 θ 라 하자.

점 A에서 평면 $x+y+\sqrt{2}z=0$ 에 이르는 거리가 2이고 $|\overrightarrow{OA}|=4$ 이므로 $\theta \geq \frac{\pi}{6}$ 이고

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} > 0$ 이므로 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 이다. 즉 $\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 4 \times |\overrightarrow{OP}| \times \cos\theta = 22 \text{ 에서 } \frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } |\overrightarrow{OP}| \geq \frac{11}{\sqrt{3}} > 6 \text{ 이다.}$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OP} = (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OP}|^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OP}|^2 - 22$$

이므로 $M = 9^2 - 22 = 59$, $m = 7^2 - 22 = 27$ 이다. 그러므로 $M+m=86$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 ④

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

여학생	A	B	C	합
연필	s개	s개	s개	3s개
볼펜				4-2t

남학생	a	b	합
연필			7-3s
볼펜	t개	t개	2t개

(1) 여학생이 연필을 1개씩 받으면

남학생 2명이 연필 4개를 나누어 가지므로 ${}_2H_4 = 5$ 가지

(2) 여학생이 연필을 2개씩 받으면

남학생이 남은 연필을 나누어 가지는 경우는 ${}_2H_1 = 2$

따라서 남학생과 여학생이 연필을 나누어 갖는 경우는 7가지

(3) 남학생이 볼펜을 1개씩 받으면

여학생이 남은 볼펜을 나누어 가지는 경우는 ${}_3H_2 = 6$

(4) 남학생이 볼펜을 2개씩 받으면

여학생이 남은 볼펜을 나누어 가지는 경우는 ${}_3H_0 = 1$

따라서 남학생과 여학생이 볼펜을 나누어 갖는 경우는 7가지

그러므로 조건을 만족하는 경우의 수는 49가지다.



[문항1] 대학발표 예시답안

[1-1] $(1, 3)$ 에 속하는 임의의 x 에 대하여 평균값의 정리를 사용하면 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)$

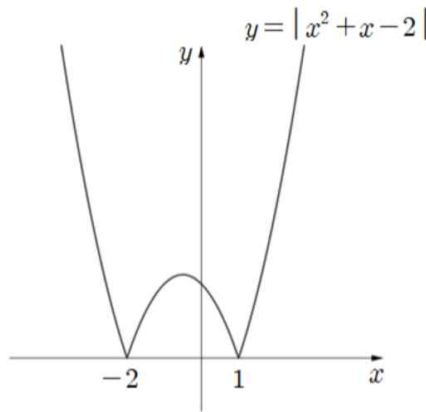
인 c 가 존재한다. 또한, $f(1)=0$ 이므로 $f(x)=f'(c)(x-1)$ 이다.

$3 \leq f'(c) \leq 7$ 이고 $x-1 > 0$ 이므로 $3(x-1) \leq f'(c)(x-1) \leq 7(x-1)$,

$$\int_1^3 3(x-1)dx \leq \int_1^3 f(x)dx \leq \int_1^3 7(x-1)dx, \quad 6 \leq \int_1^3 f(x)dx \leq 14$$

이다. 그러므로 a 의 최댓값 6, b 의 최솟값 14 이다.

[1-2] $f(x)=|x^2+x-2|$ 의 그래프를 그려보자.



$x = -\frac{1}{2}$ 에서 최대이다.

범위로 나누어 생각하면 $(t \leq -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leq t \leq 0)$

i) $t+1 \leq -\frac{1}{2}$ 일 때 즉 $t \leq -\frac{3}{2}$

$f(x)$ 는 증가함수이므로 $g(t)=f(t+1)$

ii) $t \leq -\frac{1}{2} \leq t+1$ 일 때 즉 $-\frac{3}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2}$

$$g(t)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

iii) $t \geq -\frac{1}{2}$ 이고 $t+1 \leq 1$ 일 때, 즉 $-\frac{1}{2} \leq t \leq 0$

$f(x)$ 는 감소함수이므로 $g(t)=f(t)$

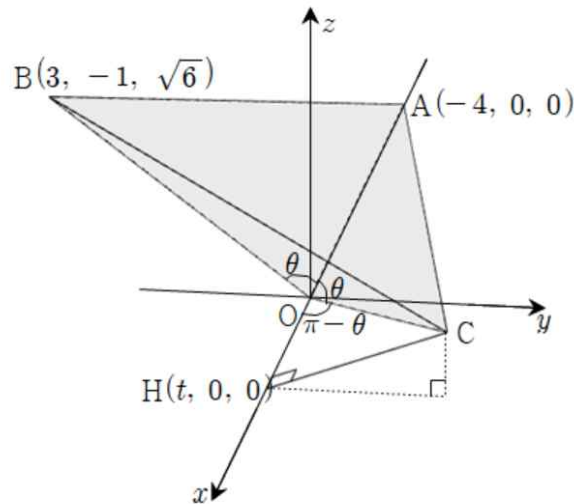
$$S = \int_{-2}^{-\frac{3}{2}} f(t+1)dt + \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{9}{4}dt + \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(t)dt$$

$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)dt + \frac{9}{4} + \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(t)dt = \int_{-1}^0 f(t)dt + \frac{9}{4}$$

$$= \int_{-1}^0 (-t^2 - t + 2) dt + \frac{9}{4} = \frac{53}{12}$$

[문항2] 대학발표 예시답안

[2-1]



세 점 $O(0, 0, 0)$, $A(-4, 0, 0)$, $B(3, -1, \sqrt{6})$ 을 지나는 평면의 방정식을 $ax + by + cz = 0$ 이라 두면

$$-4a = 0, \quad 3a - b + \sqrt{6}c = 0$$

에서 $a = 0$, $b = \sqrt{6}c$ 이고 평면의 방정식은

$$\sqrt{6}y + z = 0$$

이다.

사면체 $OABC$ 의 부피가 최대가 될 때, 점 C 의 평면 OAB 위로의 정사영 한 점 H 는 두 점 O , A 를 지나는 직선 위에 있다. 따라서 두 점 O , A 를 지나는 직선의 방정식은 x 축이고, 점 H 는 $H(t, 0, 0)$ 라 둘 수 있다.

$\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = \theta$ 라 두면 $\cos \theta = \frac{-12}{4 \cdot 4} = -\frac{3}{4}$ 이므로

$$\frac{t}{2} = \cos(\pi - \theta) = \frac{3}{4}$$

이다. 따라서 점 H 는 $H\left(\frac{3}{2}, 0, 0\right)$ 이다.

한편, $C\left(\frac{3}{2}, m, n\right)$ 라 두면, $\overrightarrow{CH} = (0, m, n)$ 이고 $\overrightarrow{CH} = (0, \sqrt{6}t, t)$ 로 둘 수 있다.

$|\overrightarrow{CH}| = \frac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7t^2}$ 이므로 $t = \pm \frac{1}{2}$ 이므로 점 C 의 좌표는

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$



이다.

$$\begin{aligned}
 [2-2] \quad \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD}) \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \\
 &= \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC} \\
 &= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC}
 \end{aligned}$$

이므로 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$ 의 최댓값은, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ 가 최소이고 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA}$ 가 최소이고 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC}$ 가 최대이면 된다.

여기서 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = (-4, 0, 0) \cdot (1, -3, \sqrt{6}) = -4$ 이고, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ 가 최소이고 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA}$ 가 최소이고 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC}$ 가 최대가 되기 위해서는 점 C, D가 평면 OAB 위에 있을 때, 즉,

$$\angle BOC = \angle DOA = 2\pi - 2\theta$$

이다. 그러므로

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 4 \times 2 \times \cos(2\pi - 2\theta) = 8 \cos 2\theta$$

인데 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = \frac{1}{8}$ 이므로 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 1$ 이다.

[문항3] 대학발표 예시답안

[3-1] $n=4$ 일 때, 자연수 4를 분할하는 방법이

$$4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$$

이다. 이것을 이용하여 원소가 4개인 집합의 분할을 고려하여, 주머니 속의 카드를 모두 꺼내는 방법의 수를 구하면

$$1 \times 1 + \left({}_4C_3 \times {}_1C_1 + {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \right) \times 2! + \left({}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \right) \times 3! + 4! = 75 \text{ (가지)}$$

이다.

[3-2] X 를 주머니 속에 있는 카드를 꺼낸 횟수라 하면

(i) $X=1$ 일 때, 10장의 카드를 한 번에 모두 꺼내야 하므로 구하는 경우의 수는 1(가지)이다.

(ii) $X=2$ 일 때, 10을 2개의 자연수로 분할한 것 중 만족하는 경우는

$$10 = 7+3 = 8+2 = 9+1 \text{ 이다. 따라서 구하는 경우의 수는}$$

$${}_{10}C_7 \times {}_3C_3 + {}_{10}C_8 \times {}_2C_2 + {}_{10}C_9 \times {}_1C_1 = 120 + 45 + 10 = 175 \text{ (가지)}$$

이다.

(iii) $X=3$ 일 때, 10을 3개의 자연수로 분할한 것 중 만족하는 경우는

$$10 = 7+2+1 = 6+3+1 \text{ 이다. 따라서 구하는 경우의 수는}$$

$${}_{10}C_7 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 + {}_{10}C_6 \times {}_4C_3 \times {}_1C_1 = 360 + 840 = 1200 \text{ (가지)}$$

이다.

(iv) $X \geq 4$ 이면 만족하는 자연수 분할이 존재하지 않는다.

그러므로 주어진 조건을 만족하는 개수는 $1 + 175 + 1200 = 1376$ (가지)이다.



11

부산대학교(의학계열) 모의11)

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
도형의 방정식, 벡터의 내적, 정적분, 합성함수의 미분, 경우의 수, 자연수의 분할	국, 수(가), 과 3개 합 4등급, 영어2등급, 한국사 4등급	수학(3문항, 7문제)	100분

[문항 1] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 평면 위의 세 점 A, B, C 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\textcircled{1} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\textcircled{2} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$

(나) 영벡터가 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$ 이 성립한다.

중심이 $O(0, 0)$ 이고 점 $A(2, 0)$ 을 지나는 원 C 가 있다. \overline{OA} 위에 $\overline{OP} = t$ ($0 \leq t \leq 2$)인 점 P 와 원 C 위의 임의의 점 Q 에 대하여 $\overline{QR} = \overline{PR}$ 를 만족하는 \overline{OQ} 위의 점 R 가 존재한다. 다음 물음에 답하시오.

[1-1] 점 R 가 나타내는 도형의 방정식을 t 에 관한 식으로 나타내시오. (10점)

[1-2] $0 < t < 2$ 일 때, $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{PQ}$ 를 t 에 관한 식으로 나타내시오. (10점)

[1-3] $t=1$ 일 때, \overline{PQ} 의 중점 M 에 대하여 $\overrightarrow{RM} = \overrightarrow{TR}$ 를 만족하는 y 축 위의 점 T 가 존재한다. 이 때, $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{PR}$ 의 값을 구하시오. (10점)



[문항 2] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$ 의 도함수는

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

(나) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ ($g(x) \neq 0$) 가 미분가능할 때,

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

(다) 함수 $f(t)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ (단, $a < x < b$)

구간 $[0, \infty)$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $x \geq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x) \geq 0, f(x) \leq C + \int_0^x f(s)g(s)ds \quad (\text{단, } C \text{ 는 상수})$$

를 만족할 때, 다음 물음에 답하시오.

[2-1] $u(t) = C + \int_0^t f(s)g(s)ds$ 일 때, $u'(t) \leq u(t)g(t)$ 가 성립함을 보이시오. (10점)

[2-2] $f(x) \leq Ce^{\int_0^x g(s)ds}$ 가 성립함을 보이시오. (20점)

[문항 3] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 서로 다른 n 개에서 순서를 생각하지 않고 r ($r \leq n$)개를 택할 때, 이것을 n 개에서 r 개를 택하는 조합이라고 하며, 이 조합의 수를 기호로 ${}_nC_r$ 와 같이 나타낸다. 이 때, 조합의 수는

$${}_nC_r = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

(나) 자연수 n 을 자신보다 크지 않은 자연수 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ 의 합으로

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k \quad (n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \dots \geq n_k)$$

와 같이 나타내는 것을 자연수의 분할이라고 한다. (단, $1 \leq k \leq n$)

(다) 원소가 유한개인 집합을 공집합이 아닌 몇 개의 서로소인 부분집합의 합집합으로 나타내는 것을 집합의 분할이라고 한다. 예를 들면, 원소가 4개인 집합을 공집합이 아닌 2개의 서로소인 부분집합으로 분할하는 방법의 수는 7이다.

1부터 n 까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 n 장의 카드가 주머니에 들어 있다. 한 번에 1장에서 n 장까지 카드를 반복해서 꺼내려고 한다. 주머니에 남은 카드가 없도록 n 장의 카드를 모두 꺼내는 방법의 수를 생각해보자. 예를 들면, $n=3$ 일 때 꺼내는 방법의 수는 13이다.

[3-1] 다음과 같은 시행을 통해 주머니 속에 있는 모든 카드를 꺼낸다.

i 번째 꺼낸 카드의 개수가 m 이면 $(i+1)$ 번째 꺼내는 카드의 개수는 $\frac{m}{2}$ 이하이다.

이와 같은 과정을 통해 10장의 카드를 모두 꺼내는 방법의 수를 구하시오.

(10점)

[3-2] n 장의 카드를 k ($k \leq n$)번 시행하여 모두 꺼낼 때, 첫 번째, 두 번째, \dots , k 번째 꺼내는 카드의 개수를 각각 n_1, n_2, \dots, n_k 라 하고

$$M(n) = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$$

라 정의하자.

(1) $M(40)$ 의 최댓값을 구하시오. (20점)

(2) (1)의 결과에서 카드를 꺼내는 방법의 수가 $\frac{p}{q} \times \frac{40!}{6^{13}}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수) (10점)



문제1. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x^2 + x + 1) = \pi f(1) \sin \pi x + f(3)x + 5x^2$$

을 만족시킬 때, $f(7)$ 의 값을 구하시오. (2019. 9월 평가원)

문제2. 좌표평면에서 두 점 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 직사각형의 넓이의 최댓값은? (2019. 9월 평가원)

직사각형 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 값은 점 P 의 좌표가 $(0, 6)$ 일때 최대이고 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 일 때 최소이다.

- ① $\frac{200}{19}$ ② $\frac{210}{19}$ ③ $\frac{220}{19}$ ④ $\frac{230}{19}$ ⑤ $\frac{240}{19}$

문제3. 빨간색 공 6개, 파란색 공 3개, 노란색 공 3개가 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내는 시행을 하여, 다음 규칙에 따라 세 사람 A, B, C가 점수를 얻는다. (단, 한 번 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣지 않는다.)

- 빨간색 공이 나오면 A는 3점, B는 1점, C는 1점을 얻는다.
- 파란색 공이 나오면 A는 2점, B는 6점, C는 2점을 얻는다.
- 노란색 공이 나오면 A는 2점, B는 2점, C는 6점을 얻는다.

이 시행을 계속하여 얻은 점수의 합이 처음으로 24점 이상인 사람이 나오면 시행을 멈춘다. 다음은 얻은 점수의 합이 24점 이상인 사람이 A 뿐일 확률을 구하는 과정이다.

꺼낸 빨간색 공의 개수를 x , 파란색 공의 개수를 y , 노란색 공의 개수를 z 라 할 때, 얻은 점수의 합이 24점 이상인 사람이 A 뿐이기 위해서는 x, y, z 가 다음 조건을 만족시켜야한다.

$$x=6, 0 < y < 3, 0 < z < 3, y+z \geq 3$$

이 조건을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z) 는

$$(6, 1, 2), (6, 2, 1), (6, 2, 2)$$

이다.

(i) $(x, y, z) = (6, 1, 2)$ 인 경우의 확률은 (가) 이다.

(ii) $(x, y, z) = (6, 2, 1)$ 인 경우의 확률은 (가) 이다.

(iii) $(x, y, z) = (6, 2, 2)$ 인 경우는 10번째 시행에서 빨간색 공이 나와야 하므로 그 확률은 (나) 이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 확률은 $2 \times$ (가) + (나) 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q 라 할 때, $p+q$ 의 값은?

(2019. 9월 평가원)

- ① $\frac{13}{110}$ ② $\frac{27}{220}$ ③ $\frac{7}{55}$ ④ $\frac{29}{220}$ ⑤ $\frac{3}{22}$



풀어보기(문제1) 정답 93

$a = f(1), b = f(3)$ 이라 하자.

$f'(x^2 + x + 1) = \pi a \sin \pi x + bx + 5x^2$ 의 양변에 $2x + 1$ 을 곱하면

$(2x + 1)f'(x^2 + x + 1) = a\pi(2x + 1)\sin \pi x + bx + (2b + 5)x^2 + 10x^3$ 이다.

위 식의 양변을 부정적분 하면

$$f(x^2 + x + 1) = -a(2x + 1)\cos \pi x + \frac{2a}{\pi} \sin \pi x + \frac{b}{2}x^2 + \frac{2b + 5}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^4 + C$$

이다. (단, C 는 상수)

$g(x) = x^2 + x + 1$ 이라 하자.

$$a = f(g(0)) = -a + C \quad \dots\dots \quad \textcircled{㉠}$$

$$a = f(g(-1)) = -a + \frac{b}{2} - \frac{2b + 5}{3} + \frac{5}{2} + C \quad \dots\dots \quad \textcircled{㉡}$$

$$b = f(g(1)) = 3a + \frac{b}{2} + \frac{2b + 5}{3} + \frac{5}{2} + C \quad \dots\dots \quad \textcircled{㉢}$$

이때,

$$\textcircled{㉡} + \textcircled{㉢} \Rightarrow a + b = 2a + b + 2C + 5 \text{ 이고}$$

$$\textcircled{㉠} \Rightarrow C = 2a \text{ 이다.}$$

따라서 $a = -1, b = 5, C = -2$ 이고

$$f(x^2 + x + 1) = (2x + 1)\cos \pi x - \frac{2}{\pi} \sin \pi x + \frac{5}{2}x^2 + 5x^3 + \frac{5}{2}x^4 - 2 \text{ 이다.}$$

$f(x^2 + x + 1)$ 에 $x = 2$ 를 대입하면 $f(7) = 93$ 이다.

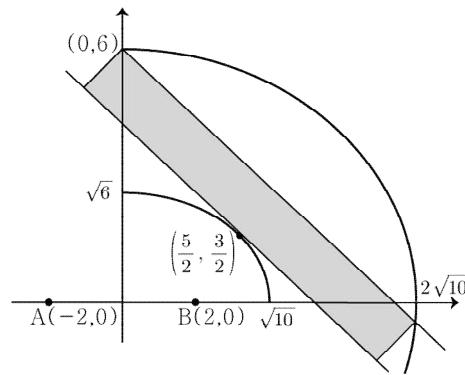
풀어보기(문제2) 정답 ⑤

$\overline{PA} + \overline{PB} = 2a$ 라 하면 $2\sqrt{10} \leq 2a \leq 4\sqrt{10}$ 이다.

a 가 일정할 때, 점 P 의 자취는 타원이므로

$$a = \sqrt{10} \text{ 일 때, } \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1 \text{ 이고}$$

$$a = 2\sqrt{10} \text{ 일 때, } \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{36} = 1 \text{ 이다.}$$



위 그림과 같이 조건을 만족하는 넓이가 최대인 직사각형은 타원 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$ 과 점 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 에서 접하면서 외부에 있고 점 $(0, 6)$ 을 지나고 타원 $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{36} = 1$ 내부에 위치한다.

점 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 에서 타원 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$ 의 접선은 $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ 이므로 넓이가 최대인 직사각형의 한 변의 길이는 점 $(0, 6)$ 에서 $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ 이르는 거리와 같으므로 $\sqrt{2}$ 이다. 점 $(0, 6)$ 을 지나고 $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ 에 평행한 직선의 방정식은 $x + y = 6$ 이므로 이 직선과 타원 $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{36} = 1$ 의 교점은 $\left(\frac{120}{19}, -\frac{6}{19}\right)$ 이다. 따라서 넓이가 최대인 직사각형의 다른 한 변의 길이는 $\frac{120\sqrt{2}}{19}$ 이므로 넓이의 최댓값은 $\frac{240}{19}$ 이다.

풀어보기(문제3) 정답 ②

(i) $(x, y, z) = (6, 1, 2)$ 인 경우 총 9개의 공을 꺼내므로 전체 경우는 ${}_{12}P_9$ 이고,

(1) 빨간공을 6개 뽑으므로 ${}_6P_6$

(2) 파란공을 1개 뽑으므로 ${}_3P_1$

(3) 노란공을 2개 뽑으므로 ${}_3P_2$

(4) 뽑은 9개의 공을 나열하는 가짓수 $\frac{9!}{6!2!}$

(1)~(4)에서 경우의 수는 $9 \times 9!$ 이다.

이때 ${}_{12}P_9 = {}_{12}C_9 \times 9! = {}_{12}C_3 \times 9!$ 이므로 확률은 $\frac{9}{220}$ 이다,

(ii) 같은 방법으로

$(x, y, z) = (6, 2, 1)$ 일 확률은 $\frac{9}{220}$ 이다.



(iii) $(x, y, z) = (6, 2, 2)$ 인 경우

10번째 시행은 반드시 빨간공이 나오므로 9번째 시행까지 $(x, y, z) = (5, 2, 2)$ 이다.

$(x, y, z) = (5, 2, 2)$ 일 확률은 $\frac{27}{110}$ 이고,

10번째 시행에서 빨간공이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$ 이므로

$(x, y, z) = (6, 2, 2)$ 일 확률은 $\frac{9}{110}$ 이다.

위의 과정에서 $p = \frac{9}{220}$, $q = \frac{9}{110}$ 이므로 $p+q = \frac{27}{220}$ 이다.

[문항1] 대학발표 예시답안

[1-1] $\overline{OQ} = 2$ 이고, $\overline{OQ} = \overline{OR} + \overline{RQ} = \overline{OR} + \overline{PR}$ 이므로 $\overline{OR} + \overline{PR} = 2$ 이다. 따라서 점 R은 두 점 O, P로부터 거리의 합이 2로 일정한 점이다.

i) $t=0$ 이면 점 P가 원점이 되므로 점 R이 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원과 같다. 따라서 $x^2 + y^2 = 1$ 이다.

ii) $t=2$ 이면 점 P가 점 A가 되고 $2 = \overline{OA} \leq \overline{OR} + \overline{AR} \leq \overline{OR} + \overline{PR} = 2$ 이므로 점 Q가 점 A가 아닌 위치에 있을 때, 점 R이 나타내는 도형은 $(0, 0)$ 이고, 점 Q가 점 A의 위치에 있을 때, 점 R이 나타내는 도형은 $y=0$ ($0 \leq x \leq 2$)이다.

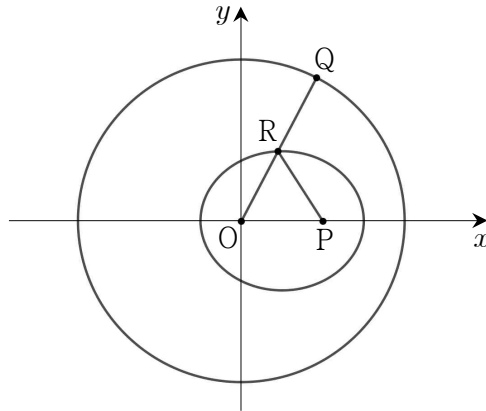
iii) $0 < t < 2$ 이면 점 R은 서로 다른 두 점 O, P로부터 거리의 합이 2로 일정한 점이 되어 타원 위의 점이 된다. 즉, $O(0, 0)$ 과 $P(t, 0)$ 을 초점으로 하고 장축의 길이가 2인 타원의 방정식은, 두 점 $O'(-\frac{t}{2}, 0)$ 과 $P'(\frac{t}{2}, 0)$ 을 초점으로 하고 장축의 길이가 2인

타원을, x 축 방향으로 $\frac{t}{2}$ 만큼 평행이동한 방정식과 같다. 따라서

$$\left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - \frac{t^2}{4}} = 1$$

이다.

[1-2]



$$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OR} \cdot (\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}) = \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{PR} \text{ 과 같다. } \dots \textcircled{1}$$

한편 $|\overrightarrow{OR}| = k$ ($0 < k < 2$) 라 두면, $|\overrightarrow{RQ}| = |\overrightarrow{PR}| = 2 - k$ 이다.

또한, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RO} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{PR}$ 이므로 $|\overrightarrow{OP}|^2 = |\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{PR}|^2$ 이다.

$$t^2 = k^2 + (2 - k)^2 - 2\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{PR}$$

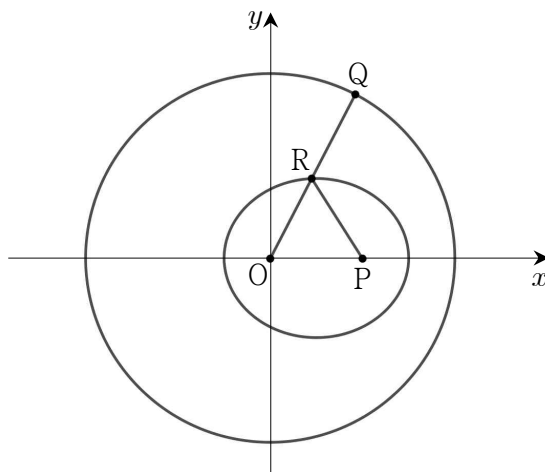
이므로 $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{PR} = k^2 - 2k + 2 - \frac{t^2}{2}$ 이다.

따라서 ①에

$$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OR} \cdot (\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}) = k(2 - k) + \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{PR} = 2 - \frac{t^2}{2}$$

이다.

[1-3] $t = 1$ 이면 점 R 은 타원 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1$ 위에 있다.



$\overrightarrow{RM} = \overrightarrow{TR}$ 에서 $\overrightarrow{RM} + \overrightarrow{RT} = \vec{0}$ 이므로 점 R 은 두 점 M, T 의 중점이어야 한다. $\dots \textcircled{1}$



- i) 점 Q의 좌표를 (a, b) 라 하자. 그러면 $a^2 + b^2 = 4$ 이다.
- ii) 점 M은 \overline{PQ} 의 중점이므로 $M\left(\frac{1+a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 이다. 한편, 점 R은 두 직선 OQ와 MR의 교점이다.
직선 OQ의 방정식은

$$y = \frac{b}{a}x \quad \cdots \textcircled{2}$$

이고, 직선 MR은 점 M을 지나고 직선 PQ에 수직이다. 직선 PQ의 기울기는 $\frac{b}{a-1}$ 이므로 직선 MR의 방정식은

$$y = \frac{1-a}{b}\left(x - \frac{a+1}{2}\right) + \frac{b}{2} \quad \text{즉, } y = \frac{1-a}{b}x + \frac{3}{2b} \quad \cdots \textcircled{3}$$

이다. 따라서 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에 의해서 $\frac{b}{a}x = \frac{1-a}{b}x + \frac{3}{2b}$ 가 되어 $x = \frac{3a}{2(4-a)}$ 즉, 점 R의 x 좌표는 $\frac{3a}{2(4-a)}$ 이다.

- iii) $\textcircled{1}$ 에 의해서 점 R의 x 좌표의 2배가 점 M의 x 좌표가 된다.

따라서 $2 \times \frac{3a}{2(4-a)} = \frac{a+1}{2}$ 을 만족하는 $a=1$ 이다($-2 \leq a \leq 2$).

이를 만족하는 점 Q의 좌표는 $(1, \sqrt{3})$ 이 된다.

따라서 점 R은 타원의 단축 위의 꼭짓점이 되어

$$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{PR} = 1 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

이다.

[문항2] 대학발표 예시답안

[2-1] $u(t) = C + \int_0^t f(s)g(s)ds$ 의 양변을 t 에 대해 미분하면 $u'(t) = f(t)g(t)$

$u'(t) = f(t)g(t)$ 에 $f(x) \leq C + \int_0^x f(s)g(s)ds$ 를 적용하면 $u'(t) = f(t)g(t) \leq u(t)g(t)$

[2-2] $f(x) \leq u(x)$ 이므로 $u(x) \leq Ce^{\int_0^x g(s)ds}$ 임을 보이면 된다. 여기서 $h(x) = \frac{u(x)}{e^{\int_0^x g(s)ds}}$ 라 하자.



양변을 미분하면
$$h'(x) = \frac{u'(x)e^{\int_0^x g(s)ds} - u(x)e^{\int_0^x g(s)ds} g(x)}{\left(e^{\int_0^x g(s)ds}\right)^2}$$
 이다.

[2-1]에 의해
$$e^{\int_0^x g(s)ds} \{u'(x) - u(x)g(x)\} \leq 0$$
 이다.

또한, $h(0) = u(0) = C$ 이므로 $h(x) \leq C$ 즉, $\frac{u(x)}{e^{\int_0^x g(s)ds}} \leq C$ 이므로 $u(x) \leq Ce^{\int_0^x g(s)ds}$ 이고,

$f(x) \leq Ce^{\int_0^x g(s)ds}$ 가 성립한다.

[문항3] 대학발표 예시답안

[3-1] X 를 주머니 속에 있는 카드를 꺼낸 횟수라 하면

(i) $X=1$ 일 때, 10장의 카드를 한 번에 모두 꺼내야 하므로 구하는 경우의 수는 1(가지)이다.

(ii) $X=2$ 일 때,

10을 2개의 자연수로 분할한 것 중 만족하는 경우는 $10=7+3=8+2=9+1$ 이다.
따라서 구하는 경우의 수는

$${}_{10}C_7 \times {}_3C_3 + {}_{10}C_8 \times {}_2C_2 + {}_{10}C_9 \times {}_1C_1 = 120 + 45 + 10 = 175 \text{ (가지)}$$

(iii) $X=3$ 일 때,

10을 3개의 자연수로 분할한 것 중 만족하는 경우는 $10=7+2+1=6+3+1$ 이다.
따라서 구하는 경우의 수는

$${}_{10}C_7 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 + {}_{10}C_6 \times {}_4C_3 \times {}_1C_1 = 360 + 840 = 1200 \text{ (가지)}$$

(iv) $X \geq 4$ 이면 만족하는 자연수 분할이 존재하지 않는다.

그러므로 주어진 조건을 만족하는 개수는 $1 + 175 + 1200 = 1376$ (가지)이다.

[3-2] $i=1, 2, \dots, k$ 에 대하여 $n_i \geq 1$ 이므로 다음과 같이 경우를 나누자.

(i) n_i 중 적어도 하나가 1일 때,

일반성을 잃지 않고 $n_k=1$ 라 가정하면

$$n = \underbrace{n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1} + 1}_{k\text{개}} = \underbrace{n_1 + n_2 + \dots + (n_{k-1} + 1)}_{(k-1)\text{개}}$$

이다. 이 때,

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times (n_{k-1} + 1) - n_1 \times n_2 \times \dots \times n_{k-1} \times 1 = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_{k-1} > 0$$

이므로 $M(n)$ 이 최댓값을 가지려면 n_i 는 2 이상이다.

(ii) n_i 가 홀수인 소수일 때,

㉠ $n_i=3$ 이면 $3=2+1$ 이고 $3 > 2 \times 1$ 이므로 3은 그대로 사용한다.



㉔ $n_i > 3$ 인 홀수인 소수이면

2 이상인 두 자연수 m_1, m_2 에 대하여 $n_i = m_1 + m_2$ 로 나타낼 수 있다.

$$m_1 \times m_2 = m_1(n_i - m_1) = -m_1^2 + n_i m_1 = -\left(m_1 - \frac{n_i}{2}\right)^2 + \frac{n_i^2}{4}$$

$m_1 = \frac{n_i}{2}$ 에서 $m_1 \times m_2$ 의 곱이 최대를 가진다. 하지만 n_i 가 홀수이므로 두 수 $m_1,$

m_2 의 곱이 최대가 되는 경우는 $\frac{n_i}{2}$ 에 가까운 두 자연수일 때, 즉

$$n_i = \frac{n_i - 1}{2} + \frac{n_i + 1}{2}$$

이고 $n_i \leq \frac{n_i - 1}{2} \times \frac{n_i + 1}{2}$ 를 만족하는 n_i 의 범위를 구하면

$$n_i \geq 2 + \sqrt{5} = 4. \times \times \times$$

그러므로 n_i 가 5 이상인 홀수인 소수인 경우 2 이상 n_i 보다 작은 두 수로 분할하여 곱한 값이 크다.

(iii) $n_i \geq 6$ 인 합성수일 때,

$$6 = 2 + 2 + 2 = 4 + 2 = 3 + 3$$

으로 분할할 수 있으며 가장 큰 곱은 3^2 이다.

따라서 6보다 큰 자연수의 경우 위의 (ii), (iii)의 경우를 반복할 수 있고, $M(n)$ 이 가장 큰 곱을 가지려면 n_i 는 2, 3, 4 의 자연수로 구성된다.

(1) $n = 40$ 일 때,

$$40 = \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{12\text{개}} + 2 + 2 = \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{12\text{개}} + 4$$

로 분할할 수 있고 $M(40) = 3^{12} \times 4$ 이다.

(2) 한편 카드를 뽑는 방법의 수는

$$\begin{aligned} & \left({}_{40}C_3 \times {}_{37}C_3 \times \cdots \times {}_7C_3 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{12!} \times \frac{1}{2!} \right) \times 14! \\ & + \left({}_{40}C_3 \times {}_{37}C_3 \times \cdots \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{12!} \right) \times 13! \\ & = \frac{91}{4} \times \frac{40!}{6^{12}} + \frac{13}{24} \times \frac{40!}{6^{12}} = \frac{559}{24} \times \frac{40!}{6^{12}} = \frac{559}{4} \times \frac{40!}{6^{13}} \end{aligned}$$

따라서 구하는 $p + q = 559 + 4 = 563$ 이다.



12 부산대학교(자연계열) 수시¹²⁾

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
일대일함수, 경우의 수, 조합, 중복조합, 쌍곡선의 방정식, 음함수의 미분법, 삼각함수의 덧셈정리, 여러 가지 함수의 미분법	* 자연과학대학, 공과대학, 사범대학, 간호 대학, 나노과학기술 대학, 정보의생명공학 대학 : 국어, 수학(가), 영어, 과학탐구 영역 중 수학 (가)를 포함한 2개 영역 등급 합 5 이내 & 한국사 4등급 이내 * 생활환경대학 : 국어, 수학(가)/(나), 영어, 과학탐구 영역 중 2개 영역 등급 합 6 이내 & 한국사 4등급 이내	수학Ⅱ, 미적분Ⅰ, 미적분Ⅱ, 기하와 벡터, 확률과 통계	100분

[문항 1] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 서로 다른 n 개에서 순서를 생각하지 않고 r ($0 \leq r \leq n$)개를 택하는 것을 n 개에서 r 개를 택하는 조합이라고 하며, 이 조합의 수는

$${}_nC_r = \frac{n!}{r! \times (n-r)!} \quad (\text{단, } 0! = 1)$$

이다.

(나) 서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r \text{ 이다.}$$

(다) 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의 임의의 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 일 때, 함수 f 를 X 에서 Y 로의 일대일함수라고 한다.

※ 답은 ${}_nC_r, {}_nH_r, n!$ 등의 기호를 사용하지 않고 간단한 식으로 나타내시오.

(예 : $\frac{{}_nC_1}{{}_nH_2 + 2!}$ 은 $\frac{2n}{n^2 + n + 4}$ 으로 적는다.)

두 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{이하의 자연수}\}$ 에 대하여 함수 f 는 정의역을 A , 공역을 B 로 갖는다. n 이 자연수일 때, 다음 물음에 답하시오.

[1-1] 집합 A 의 임의의 원소 a 에 대하여 $f(a) - a \geq n$ 을 만족하는 일대일함수 f 의 개수를 $g(n)$ 이라 할 때, $g(n)$ 을 n 에 관한 식으로 나타내시오. (단, $n \leq 7$) (10점)



[1-2] $f(x+1)-f(x) \geq n-1$ ($x=1, 2$) 을 만족하는 함수 f 의 개수를 $h(n)$ 이라 하자. $h(1)$ 의 값을 구하고, $2 \leq n \leq 5$ 일 때 $h(n)$ 을 n 에 관한 다항식으로 나타내시오. (20점)

[문항 2] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 함수 $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능할 때, $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기와 같다.

(나) x 의 함수 y 가 음함수 $f(x, y)=0$ 의 꼴로 주어져 있을 때에는 y 를 x 의 함수로 보고 각 항을 x 에 대하여 미분한 후에 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

좌표평면에서 곡선 $C: x^2+y^2=4$ ($x \geq 0, y \geq 0$)와 두 점 $A(4, 0), B(0, 4)$ 가 있다. 곡선 C 위의 점 T 에 대하여 $\angle TOA=\theta$ 라 하자. (단, O 는 원점이다.)

$0 \leq \theta \leq a$ 인 모든 실수 θ 에 대하여 $\overline{PT}=\overline{PA}$ 를 만족하는 반직선 OT 위의 점 P 가 존재하고, $b < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 인 모든 실수 θ 에 대하여 $\overline{QT}=\overline{QB}$ 를 만족하는 반직선 OT 위의 점 Q 가 존재한다. 두 점 P 와 Q 가 나타내는 곡선을 각각 C_1, C_2 라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

[2-1] a 의 최댓값과 b 의 최솟값을 구하시오. (15점)

[2-2] 두 곡선 C_1, C_2 가 만나는 점을 R 라 하자. 점 R 에서 곡선 C_1 의 접선과 곡선 C_2 의 접선이 이루는 예각의 크기를 α 라 할 때, $\tan \alpha$ 의 값을 구하시오. (20점)

[문항 3] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$ 는 미분가능하고, 그 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

(나) 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가 극값을 가질 때

- 1) 이 구간에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 극댓값, $f(a), f(b)$ 중에서 가장 큰 값이다.
- 2) 이 구간에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 극솟값, $f(a), f(b)$ 중에서 가장 작은 값이다.

중심이 O이고, 반지름의 길이가 1인 구에 대하여 다음 단계를 순서대로 시행한다.

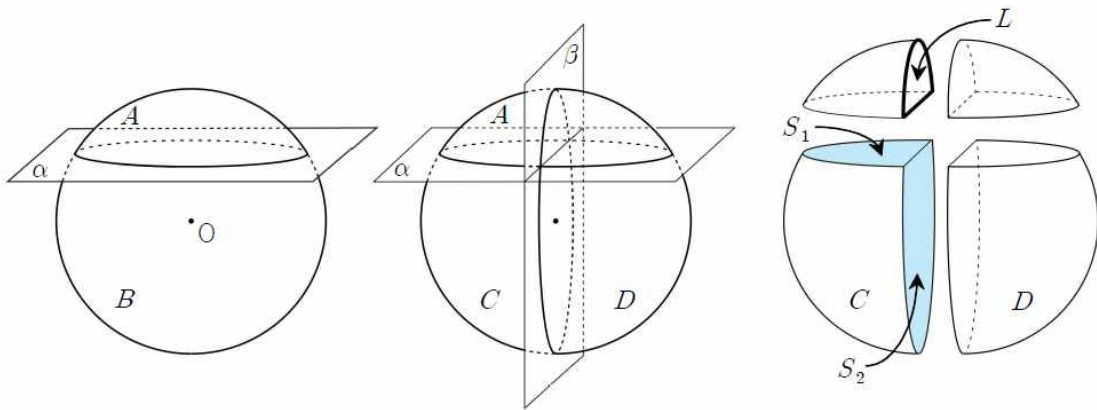
[단계 1] 구를 평면 α 로 자른다.

이때, 생기는 두 도형을 각각 A, B라 하자.

(단, B의 부피는 A의 부피보다 크거나 같다.)

[단계 2] 도형 A와 B를 평면 α 에 수직이고 구의 중심 O를 지나는 평면 β 로 자른다.

이때, 도형 B에서 생기는 두 도형을 각각 C, D라 하자. 도형 C와 평면 α 가 만나서 생기는 단면을 S_1 , 도형 C와 평면 β 가 만나서 생기는 단면을 S_2 , 도형 A와 평면 β 가 만나서 생기는 단면을 L이라 하자.



[3-1] [단계 1]에서 구와 평면 α 가 만나서 생기는 단면을 밑면으로 하고 중심 O를 꼭짓점으로 하는 원뿔의 부피 중 최댓값을 구하시오. (10점)

[3-2] [단계 1]과 [단계 2]를 시행하여 생기는 두 단면 S_1, S_2 의 넓이의 합의 최댓값을 S 라 하고, 두 단면 S_1, S_2 의 넓이의 합이 최대일 때 단면 L의 둘레의 길이를 M 이라 하자. $S + \frac{M}{2}$ 의 값을 구하시오. (25점)

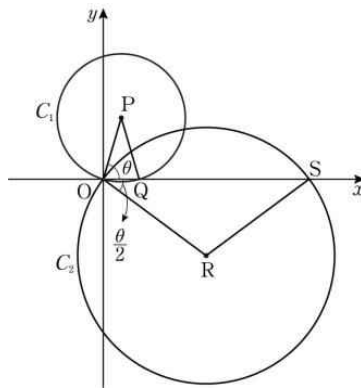


문제1. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $f(x)$ 는 일대일 대응이다.
 (나) $1 \leq n \leq 2$ 일 때, $f(2n) < f(n) < f(3n)$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 개수를 구하시오. (2017. 10월 전국연합)

문제2. 그림과 같이 $\overline{OP}=1$ 인 제1사분면 위의 점 P 를 중심으로 하고 원점을 지나는 원 C_1 이 x 축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 Q 라 하자. $\overline{OR}=2$ 이고 $\angle ROQ = \frac{1}{2}\angle POQ$ 인 제4사분면 위의 점 R 를 중심으로 하고 원점을 지나는 원 C_2 가 x 축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 S 라 하자. $\angle POQ = \theta$ 라 할 때, 삼각형 OQP 와 삼각형 ORS 의 넓이의 합이 최대가 되도록 하는 θ 에 대하여 $\cos \theta$ 의 값은? (단, O 는 원점이고, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.) (2015. 3월 전국연합)



- ① $\frac{-3+2\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$



풀어보기(문제1) 정답 18

조건 (나)에서 $f(2n) < f(n) < f(3n)$ 이므로

$$n=1\text{일 때, } f(2) < f(1) < f(3)$$

$$n=2\text{일 때, } f(4) < f(2) < f(6)$$

$f(4) < f(2) < f(1) < f(3)$ 이고 $f(2) < f(6)$ 이므로 6개의 숫자 중 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(6)$ 에 대응될 5개를 선택하면 $f(5)$ 에 대응될 나머지 한 수와 5개의 수 중 $f(4)$, $f(2)$ 에 대응될 수가 정해진다.

$f(4)$, $f(2)$ 에 대응될 두 수를 제외한 나머지 세 수 중 $f(6)$ 에 대응될 수를 선택하면 $f(1)$ 과 $f(3)$ 에 대응되는 수도 정해진다.

구하는 경우의 수는 6개의 숫자 중 5개를 선택하는 경우의 수 ${}_6C_5$ 와 $f(4)$, $f(2)$ 에 대응될 두 수를 제외한 나머지 세 수 중 $f(6)$ 에 대응되는 수를 선택하는 경우의 수 3의 곱과 같다.

따라서 ${}_6C_5 \times 3 = 18$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 ⑤

점 P의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 이므로 삼각형 OQP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\cos\theta \times \sin\theta = \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

점 R의 좌표는 $\left(2\cos\frac{1}{2}\theta, -2\sin\frac{1}{2}\theta\right)$ 이므로 삼각형 ORS의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4\cos\frac{1}{2}\theta \times 2\sin\frac{1}{2}\theta = 4\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta = 2\sin\theta$$

따라서 삼각형 OQP와 삼각형 ORS의 넓이의 합을 $f(\theta)$ 라 하면

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \sin 2\theta + 2\sin\theta$$

$$f'(\theta) = \cos 2\theta + 2\cos\theta$$

$$= 2\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1$$

이므로 $f'(\theta) = 0$ 에서 $\cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos\theta > 0$ 이므로 $\cos\theta = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$

$f'(\theta) = 0$ 인 θ 의 값을 $\theta_1 \left(0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}\right)$ 라 할 때, $f(\theta)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.



θ	(0)	...	θ_1	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		\nearrow	$f(\theta_1)$	\searrow	

그러므로 $f(\theta)$ 는 $\theta = \theta_1$ 에서 극대이면서 최대이다. 따라서 $f(\theta)$ 가 최대가 되도록 하는 θ 에 대하여 $\cos\theta$ 의 값은 $\cos\theta = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ 이다.

[문항1] 대학발표 예시답안

[1-1] $1 \leq n \leq 7$ 에 대하여

$$f(1) \geq n+1, f(2) \geq n+2, f(3) \geq n+3$$

이므로 $n+1 \leq f(1) \leq 10, n+2 \leq f(2) \leq 10, n+3 \leq f(3) \leq 10$ 을 만족해야 한다.

(1) 우선 $f(3)$ 의 값을 정하자. $f(3)$ 은 $n+3$ 이상 10이하의 자연수 중 하나의 값을 가질 수 있다.

$$10 - (n+3) + 1 = 8 - n(\text{가지})$$

(2) $f(2)$ 는 $n+2$ 이상 10이하의 자연수 중 $f(3)$ 이 아닌 하나의 값을 가질 수 있다.

$$10 - (n+2) + 1 - 1 = 8 - n(\text{가지})$$

(3) $f(1)$ 은 $n+1$ 이상 10이하의 자연수 중 $f(2)$ 와 $f(3)$ 이 아닌 하나의 값을 가질 수 있다.

$$10 - (n+1) + 1 - 2 = 8 - n(\text{가지})$$

따라서 일대일함수 f 의 개수 $g(n)$ 은 $(8-n)^3$ (단, $n \leq 7$)이다.

[1-2]

(1) $n=1$ 일 때, $f(2)-f(1) \geq 0, f(3)-f(2) \geq 0$ 이므로 $f(1) \leq f(2) \leq f(3)$ 을 만족하는 함수 f 의 개수는 집합 B 의 원소 10개 중에서 중복을 허락하여 3개를 뽑는 경우의 수와 같다. 따라서 $h(1) = {}_{10}H_3 = {}_{12}C_3 = 220$

(2) $n \geq 2$ 일 때, $f(x+1)-f(x) \geq n-1$ ($x=1, 2$)을 만족하는 함수 f 는

$$f(2) \geq f(1)+n-1, f(3) \geq f(2)+n-1$$

을 만족한다.

따라서 $f(1)$ 과 $f(2)$, $f(2)$ 와 $f(3)$ 사이에는 $n-2$ 개 이상의 집합 B 의 원소가 존재한다. 이때,

$f(1)$ 보다 작은 집합 B 의 원소의 개수를 a ,

$f(1)$ 보다 크고 $f(2)$ 보다 작은 집합 B 의 원소의 개수를 b ,

$f(2)$ 보다 크고 $f(3)$ 보다 작은 집합 B 의 원소의 개수를 c ,

$f(3)$ 보다 큰 집합 B 의 원소의 개수를 d

라 하면 $a+b+c+d=7$ ($a \geq 0, b \geq n-2, c \geq n-2, d \geq 0$)을 만족한다.

$$b' = b - (n-2), c' = c - (n-2)$$



이라 하면

$$a+b'+c'+d=7-2(n-2)=11-2n \quad (a, b', c', d \geq 0)$$

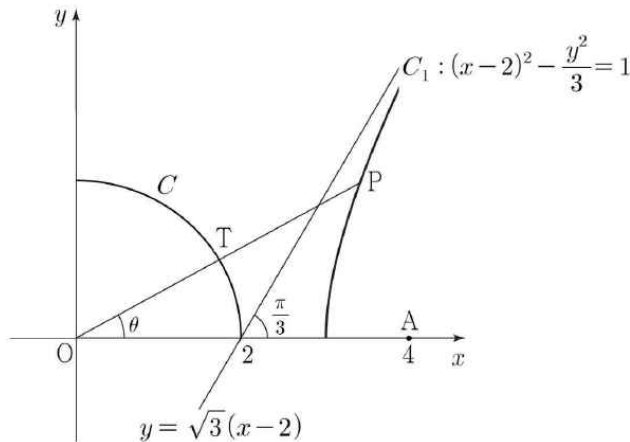
이 되어 $h(n)$ 은 방정식 $a+b'+c'+d=11-2n \quad (a, b', c', d \geq 0)$ 의 해의 개수와 같다.

따라서 $2 \leq n \leq 5$ 일 때, $h(n) = {}_4H_{11-2n} = {}_{14-2n}C_{11-2n} = {}_{14-2n}C_3$ 이다.

$$\text{그러므로 } h(n) = \frac{(14-2n)(13-2n)(6-n)}{3} \text{ 이다.}$$

[문항 2] 대학발표 예시답안

[2-1] $\overline{OP} - \overline{PA} = \overline{OT} = 2$ (일정)이므로 점 P가 나타내는 곡선 C_1 은 두 점 O, A가 초점이고, 거리의 차가 2인 쌍곡선의 일부분이다. 따라서 곡선 C_1 의 방정식은 $(x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \quad (x \geq 2, y \geq 0)$ 이다. 이때 점근선의 방정식은 $y = \sqrt{3}(x-2)$ 이고, 곡선 C_1 을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



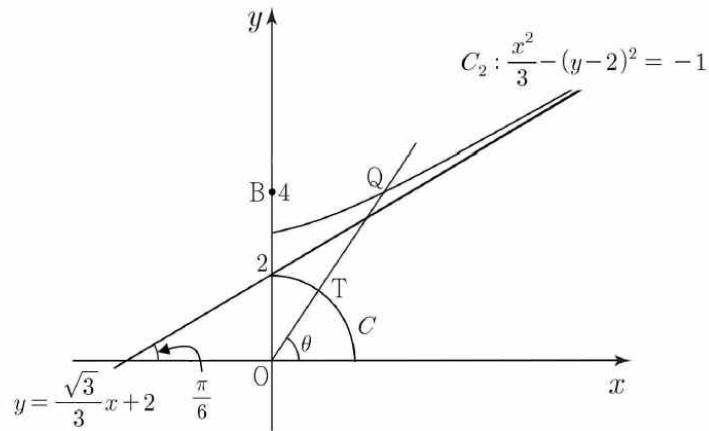
직선 OP의 기울기는 $\sqrt{3}$ 보다 작고, $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 이므로 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{3}$ 이다.

따라서 a 의 최댓값은 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

$\overline{OQ} - \overline{QB} = \overline{OT} = 2$ (일정)이므로 점 Q가 나타내는 곡선 C_2 는 두 점 O, B가 초점이고, 거리의 차가 2인 쌍곡선의 일부분이다.

따라서 곡선 C_2 의 방정식은 $\frac{x^2}{3} - (y-2)^2 = -1 \quad (x \geq 0, y \geq 2)$ 이다.

이때 점근선의 방정식은 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ 이고, 곡선 C_2 를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



직선 OQ의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 보다 크고, $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 $\frac{\pi}{6} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 이다.

따라서 b 의 최솟값은 $\frac{\pi}{6}$ 이다.

[2-2] 두 곡선 C_1, C_2 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선 C_1, C_2 의 교점 R은 곡선 $C_1: (x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 과 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

따라서 $(x-2)^2 - \frac{x^2}{3} = 1$, $2x^2 - 12x + 9 = 0$, $x = 3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$ 이므로 $R\left(3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}, 3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$

이다. 또한, $C_1: (x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$2(x-2) - \frac{2}{3}y \times \frac{dy}{dx} = 0$$

이므로 $\frac{dy}{dx} = \frac{3(x-2)}{y}$ 이다. 따라서 곡선 C_1 위의 점 R에서의 접선의 기울기는

$$\frac{3\left(1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)}{3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 1$$

이다.

한편 곡선 C_1 위의 점 R에서의 접선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α_1 , 곡선 C_2 위의 점 R에서의 접선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α_2 라 하면 $\alpha = |\alpha_1 - \alpha_2|$ 와 같다.

곡선 C_1 위의 점 R에서의 접선과 곡선 C_2 위의 점 R에서의 접선은 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ 이다. 따라서

$$\tan \alpha_1 = 2\sqrt{2} - 1 \text{ 이고, } \tan \alpha_2 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) = \cot \alpha_1 = \frac{1}{2\sqrt{2} - 1} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{7}$$



$$\text{이므로 } \tan \alpha = \tan |\alpha_1 - \alpha_2| = \frac{2\sqrt{2}-1 - \frac{2\sqrt{2}+1}{7}}{1+1} = \frac{6\sqrt{2}-4}{7} \text{ 이다.}$$

[문항 3] 대학발표 예시답안

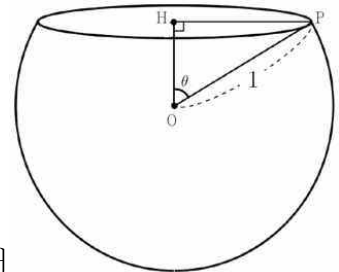
[3-1] 구의 중심 O에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 한다. 그리고 구와 평면 α 가 만나서 생기는 단면의 경계 위의 한 점을 P라 하고, $\angle POH = \theta$ 라고 두자. 원뿔의 부피를 $V(\theta)$ 라 두면

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \frac{\pi}{3} \sin^2 \theta \cos \theta, \\ V'(\theta) &= \frac{\pi}{3} (2 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta) \\ &= \frac{\pi}{3} \sin \theta (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= \frac{\pi}{3} \sin \theta (3 \cos^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

이다.

$V'(\theta) = 0$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)을 만족하는 θ 의 값을 k 라고 두면 $\cos k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

θ	0	...	k	...	$\frac{\pi}{2}$
$V'(\theta)$		+	0	-	
$V(\theta)$		↗	$\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$	↘	



위의 증감표에서 $\theta = k$ 에서 원뿔의 부피는 최대가 되고, 그 때의 부피는 $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$ 이다.

[3-1] (별해)

도형 B의 절단면은 원이고, 구의 중심 O에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H, 그리고 $\overline{OH} = t$ ($0 < t < 1$)라 두고, 원뿔의 부피를 $V(t)$ 라 두면

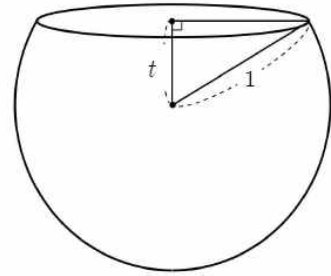
$$V(t) = \frac{\pi}{3} (1-t^2)t = \frac{\pi}{3} (t-t^3), \quad V'(t) = \frac{\pi}{3} (1-3t^2)$$

이다.

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$...	1
$V'(t)$		+	0	-	
$V(t)$		↗	$\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$	↘	



위의 증감표에서 $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 에서 원뿔의 부피는 최대가 되고,
그 때의 부피는 $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$ 이다.



[3-2] 구의 중심 O에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 한다. 그리고 구와 두 평면 α, β 와의 두 교점 중 하나를 P라고 하고 $\angle POH = \theta$ 라고 두자. 따라서 두 절단면의 넓이를 각각 $S_1(\theta), S_2(\theta)$ 라고 하면 $S_1(\theta)$ 는 반지름이 $\sin\theta$ 인 반원의 넓이이고, $S_2(\theta)$ 는 ‘반지름이 1, 중심각의 크기가 $2\pi - 2\theta$ 인 부채꼴’과 ‘밑변이 $2\sin\theta$ 이고, 높이가 $\cos\theta$ 인 삼각형’의 넓이의 합으로 나타낼 수 있다. 따라서

$$S_1(\theta) = \frac{\pi}{2} \sin^2\theta$$

$$S_2(\theta) = \cos\theta \sin\theta + \pi - \theta$$

이다. $f(\theta) = S_1(\theta) + S_2(\theta)$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)라고 하면,

$$f(\theta) = \frac{\pi}{2} \sin^2\theta + \cos\theta \sin\theta + \pi - \theta$$

$$f'(\theta) = \pi \sin\theta \cos\theta - \sin^2\theta + \cos^2\theta - 1$$

$$= \pi \cos\theta \sin\theta - 2\sin^2\theta$$

$$= \sin\theta(\pi \cos\theta - 2\sin\theta)$$

이다. $f'(\theta) = 0$ 을 만족하는 θ 의 값을 p 라고 두면 증감표는 다음과 같다.

θ	0	...	p	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		\nearrow	$\frac{3\pi}{2} - p$	\searrow	

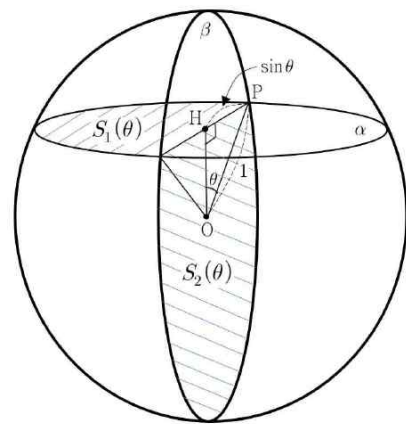
이것으로부터 $f(\theta)$ 는 $\theta = p$ 일 때 최대이고, 이 때, 절단면의 넓이의 최댓값 S 는

$$S = f(p) = \frac{3\pi}{2} - p \left(\because \tan p = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \cos p = \frac{2}{\sqrt{4+\pi^2}}, \sin p = \frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}} \right)$$

이다. 이때, 도형 L 의 호의 중심각이 $2 \times \angle POH$ 이므로 호의 길이는 $2p$ 이고 도형 L 의

밑변의 길이는 $2\sin p = \frac{2\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}$ 이므로 $M = 2p + \frac{2\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}$ 이다.

따라서 $S + \frac{M}{2} = \frac{3\pi}{2} - p + p + \frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}$ 이다.





13

부산대학교(의학계열) 수시 13)

...



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
합성함수의 미분법, 부정적분, 부분적분법, 치환적분법, 음함수의 미분법과 접선의 방정식, 쌍곡선, 점근선, 내적, 미분가능성, 이계도함수, 증가와 감소, 순열과 조합, 파스칼 삼각형, 확률의 곱셈정리, 확률변수, 확률질량함수, 기댓값	국어, 수학(가), 과학탐구 3개 영역 등급 합 4 이내 & 영어 2등급 이내 & 한국사 4등급 이내	미적분 I, 미적분 II, 기하와 벡터, 확률과 통계	100분

[문항 1] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$ 는 미분가능하고, 그 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

(나) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 미분가능할 때,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(다) 미분가능한 함수 $t=g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$ 에 대하여 함수 $f(t)$ 가 α 와 β 를 양 끝점으로 하는 닫힌 구간에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

(라) x 의 함수 y 가 음함수 $f(x, y)=0$ 의 꼴로 주어져 있을 때에는 y 를 x 의 함수로 보고 각 항을 x 에 대하여 미분한 후에 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

[1-1] 함수 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-4})$ ($x>2$)의 도함수를 구하고, 이를 이용하여 부정적분 $\int \sqrt{x^2-4}dx$ 를 구하시오. (15점)



[1-2] 곡선 $C: 3x^2 - 4y^2 - 6x + 16y = 25$ 위의 점 $(5, 5)$ 에서의 접선을 l 이라 하자. [1-1]을 이용하여 곡선 C 와 접선 l 및 직선 $y=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

(15점)

[문항 2] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 평면 위의 서로 다른 두 직선의 방향벡터를 \vec{a}, \vec{b} 라 할 때

1) 두 직선이 만나기 위한 필요충분조건은 $\vec{a} \neq k\vec{b}$ (단, k 는 실수)

2) 두 직선이 수직으로 만나기 위한 필요충분조건은 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 이다.

(나) 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ 가 성립한다.

(다) 함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수는

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

이고, 함수 $f(x)$ 에 대하여 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 가 존재할 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다고 한다.

(라) 함수 $y=f(x)$ 에 대하여 열린 구간 (a, b) 에서 $f'(x), f''(x)$ 가 존재할 때

1) 열린 구간 (a, b) 에서 $f''(x) > 0$ 이면

이 구간에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록하고 $f'(x)$ 는 증가한다.

2) 열린 구간 (a, b) 에서 $f''(x) < 0$ 이면

이 구간에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하고 $f'(x)$ 는 감소한다.

원 $C: x^2 + y^2 = 4$ 와 두 점 $A(4, 0), B(0, 4)$ 가 있다. 원 C 위의 어떤 점 T 에 대하여 반직선 OT 위에 다음 조건을 만족하는 두 점 P, Q 가 모두 존재한다.

$$\overline{PT} = \overline{PA}, \overline{QT} = \overline{QB}$$

이를 만족하는 모든 점 T 에 대하여 두 점 P, Q 가 나타내는 곡선을 각각 C_1, C_2 라 하자. 다음 물음에 답하시오. (단, O 는 원점이다.)

[2-1] 곡선 C_1 위의 모든 점 P 에 대하여 $\overline{OP} > a$ 를 만족하는 상수 a 의 최댓값을 구하시오. (15점)

[2-2] 곡선 C_2 위의 임의의 점을 $(x, f(x))$ 라 하고, 실수 k 에 대하여 직선 $y = -x + k$ 와 곡선 C_2 의 교점의 x 좌표를 $g(k)$ 라 하면 다음이 성립한다.

$$f(g(k)) = -g(k) + k$$

이를 이용하여 $g'(k) > b$ 를 만족하는 상수 b 의 최댓값을 구하시오. (10점)



- [2-3] 직선 $y = -x + k$ 와 두 곡선 C_1, C_2 의 교점을 각각 T_1, T_2 라 할 때 선분 T_1T_2 의 길이를 $h(k)$ 라 하고, 방정식 $h(k) = 0$ 의 유일한 해를 α 라 하자. [2-2]를 이용하여 함수 $h(k)$ 를 k 와 $g(k)$ 로 나타내고, 함수 $h(k)$ 의 $k = \alpha$ 에서의 미분가능성을 조사하시오. (15점)

[문항 3] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 서로 다른 n 개에서 순서를 생각하지 않고 r ($0 \leq r \leq n$)개를 택하는 것을 n 개에서 r 개를 택하는 조합이라고 하며, 이 조합의 수는

$${}_nC_r = \frac{n!}{r! \times (n-r)!} \quad (\text{단, } 0 \neq 1)$$

이다.

(나) ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$ (단, $1 \leq r < n$)

(다) 확률변수 X 의 확률질량함수가 $P(X = x_i) = p_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)일 때,

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^n x_ip_i$$

를 확률변수 X 의 기댓값 또는 평균이라고 하며, 이것을 기호로 $E(X)$ 와 같이 나타낸다.

※ 답은 ${}_nP_r, {}_nC_r, n!$ 등의 기호를 사용하지 않고 간단한 식으로 나타내시오.

(예 : $\frac{{}_nC_1}{{}_nP_2 + 2!}$ 은 $\frac{n}{n^2 - n + 2}$ 으로 적는다.)

자연수 n 에 대하여 1부터 $2n$ 까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 $2n$ 장의 카드가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 적힌 수를 확인하는 시행을 반복한다. 꺼낸 카드는 다시 넣지 않으며, n 이하의 자연수가 적힌 카드를 모두 꺼내면 이 시행을 멈추기로 한다. 시행을 멈출 때까지 시행한 횟수를 확률변수 X 라 하자.

확률질량함수 $P(X = x)$ ($x = n, n+1, \dots, 2n$)은 n 이하의 자연수가 적힌 카드를 모두 꺼내어 멈출 때까지 시행한 횟수가 x 일 확률이다.

[3-1] $n = 4$ 일 때, 확률 $P(X = 6)$ 을 구하시오. (10점)

[3-2] $n = l$ 일 때, 평균 $E(X)$ 를 l 에 관한 식으로 나타내시오. (20점)



문 제1. $\int_1^{\sqrt{2}} x^3 \sqrt{x^2-1} dx$ 의 값은? (2018. 6월 평가원)

① $\frac{7}{15}$

② $\frac{8}{15}$

③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{11}{15}$

문 제2. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 와 함수

$$g(x) = |2\sin(x+2|x|)+1|$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(g(x))$ 는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$ 를 갖고,
 $h''(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$ 의 값을 구하시오.

(2016. 9월 평가원)



풀어보기(문제1) 정답 ②

$\int_1^{\sqrt{2}} x^3 \sqrt{x^2-1} dx$ 에서 $\sqrt{x^2-1}=t$ 라 하자.

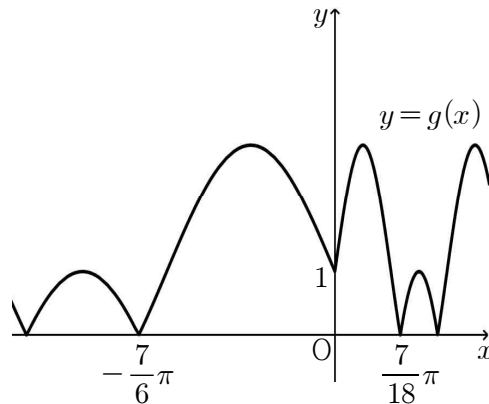
양변을 x 에 대해 미분하면 $\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{dt}{dx}$ 이고 $x^2 = t^2 + 1$ 이므로

$$\int_0^1 (t^2+1)t^2 dt = \int_0^1 (t^4+t^2) dt = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$$

풀어보기(문제2) 정답 48

$$g(x) = |2\sin(x+2|x|)+1| = \begin{cases} |2\sin 3x+1| & (x \geq 0) \\ |-2\sin x+1| & (x < 0) \end{cases}$$

이므로 함수 $g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$h(x) = f(g(x))$ 이고 $x=0$ 에서 $y = h'(x)$ 은 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f'(g(x))g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f'(g(x))g'(x)$$

이다. 그런데

$$g'(x) = \begin{cases} -2\cos x & \left(-\frac{7}{6}\pi < x < 0\right) \\ 6\cos 3x & \left(0 < x < \frac{7}{18}\pi\right) \end{cases}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} g'(x) = 6 \neq -2 = \lim_{x \rightarrow 0-} g'(x)$ 이다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f'(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0-} f'(g(x)) = 0$$

에서

$$f'(1) = 0 \quad \dots \textcircled{7}$$



이다. $x=0$ 에서 $y=h''(x)$ 는 연속이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} h''(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} h''(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} [f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + f'(g(x))g''(x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} h''(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} [f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + f'(g(x))g''(x)]\end{aligned}$$

이다. 그런데

$$g'(x) = \begin{cases} -2\cos x & \left(-\frac{7}{6}\pi < x < 0\right) \\ 6\cos 3x & \left(0 < x < \frac{7}{18}\pi\right) \end{cases}$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \{g'(x)\}^2 = 36 \neq 4 = \lim_{x \rightarrow 0-} \{g'(x)\}^2$$

이다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f''(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0-} f''(g(x)) = 0$$

에서

$$f''(1) = 0 \quad \dots \textcircled{L}$$

이다.

또한 $x = \frac{7\pi}{18}$ 에서 $y=h'(x)$ 가 연속이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{18}+} h'(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{18}+} f'(g(x))g'(x) \\ \lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{18}-} h'(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{18}-} f'(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

이다. 그런데

$$g'(x) = \begin{cases} -6\cos 3x & \left(\frac{7}{18}\pi < x < \frac{11}{18}\pi\right) \\ 6\cos 3x & \left(0 < x < \frac{7}{18}\pi\right) \end{cases}$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow \frac{7}{18}\pi+} g'(x) = -3\sqrt{3} \neq 3\sqrt{3} = \lim_{x \rightarrow \frac{7}{18}\pi-} g'(x)$$

이다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow \frac{7}{18}\pi+} f'(g(x)) = \lim_{x \rightarrow \frac{7}{18}\pi-} f'(g(x)) = 0$$

에서



$$f'(0) = 0 \quad \dots \textcircled{\text{D}}$$

이다.

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 $\textcircled{\text{A}}$, $\textcircled{\text{B}}$, $\textcircled{\text{D}}$ 에 의하여

$$f'(x) = 4x(x-1)^2$$

이다. 따라서 $f'(x) = 4 \times 3 \times 2^2 = 48$

[문항1] 대학발표 예시답안

[1-1] $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 4})$ ($x > 2$)를 미분하면

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{x + \sqrt{x^2-4}} = \frac{\sqrt{x^2-4} + x}{(x + \sqrt{x^2-4})\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$$

이다. 한편

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{x^2-4} dx \\ &= \int (1 \times \sqrt{x^2-4}) dx = x\sqrt{x^2-4} - \int x \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} dx \\ &= x\sqrt{x^2-4} - \int \frac{x^2-4+4}{\sqrt{x^2-4}} dx \\ &= x\sqrt{x^2-4} - I - \int \frac{4}{\sqrt{x^2-4}} dx \end{aligned}$$

이다. $\int \frac{4}{\sqrt{x^2-4}} dx$ 에서 $x = 2\sec\theta$ 로 치환하면 $dx = 2\sec\theta\tan\theta d\theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{4}{\sqrt{x^2-4}} dx &= \int \frac{4}{2\sqrt{\sec^2\theta-1}} \times 2\sec\theta\tan\theta d\theta \\ &= 4 \int \sec\theta d\theta \\ &= 4 \int \frac{\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta)}{\sec\theta + \tan\theta} d\theta \\ &= 4 \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C_1 \quad (\text{단, } C_1 \text{은 적분 상수}) \\ &= 4 \ln \left| \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{2} \right| + C_1 \end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned} I &= x\sqrt{x^2-4} - I - 4 \ln|x + \sqrt{x^2-4}| + C' \quad (\text{단, } C' \text{는 적분 상수}) \\ \therefore I &= \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-4} - 4 \ln|x + \sqrt{x^2-4}|) + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분 상수}) \end{aligned}$$

이다.

[1-2] 곡선 $C: 3x^2 - 4y^2 - 6x + 16y = 25$ 위의 점 $(5, 5)$ 에서의 접선의 방정식을 구하기 위



해 $3x^2 - 4y^2 - 6x + 16y = 25$ 에서 y 를 x 의 함수로 보고, 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$6x - 8y \cdot y' - 6 + 16y' = 0 \quad (y \neq 2)$$

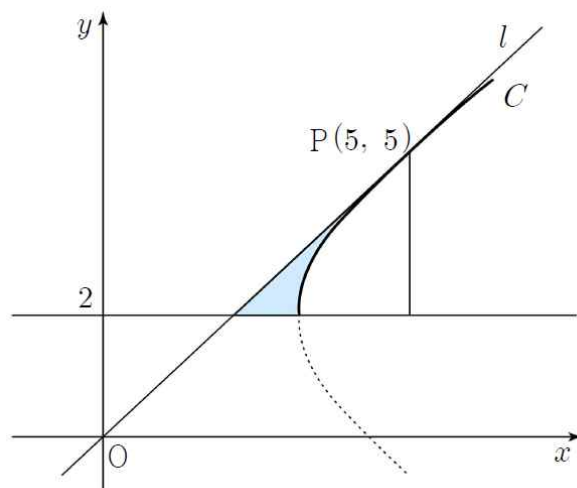
이므로 점 $(5, 5)$ 에서의 접선의 기울기는 위 식에 $x=5, y=5$ 를 대입하면

$$30 - 40y' - 6 + 16y' = 0$$

이므로 $y' = 1$ 이다. 따라서 구하는 접선의 방정식은 $l : y = x$ 이다. 그러므로 접선과 직선 $y = 2$ 의 교점의 좌표는 $(2, 2)$ 이다.

$3x^2 - 4y^2 - 6x + 16y = 25$ 를 변형하면 $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$ 이므로 $y = \pm \sqrt{\frac{3}{4}(x-1)^2 - 3} + 2$

이다. 그러므로 그림의 색칠된 부분이 구하는 넓이와 같다. 따라서



$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - \int_3^5 \left[\left\{ \sqrt{\frac{3}{4}(x-1)^2 - 3} + 2 \right\} - 2 \right] dx = \frac{9}{2} - \int_3^5 \left\{ \sqrt{\frac{3}{4}(x-1)^2 - 3} \right\} dx$$

이다. 여기서 $\int_3^5 \left\{ \sqrt{\frac{3}{4}(x-1)^2 - 3} \right\} dx$ 의 값을 구하기 위해 $x-1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 1$

$x=3$ 일 때 $t=2$, $x=5$ 일 때 $t=4$

$$\int_3^5 \left\{ \sqrt{\frac{3}{4}(x-1)^2 - 3} \right\} dx = \int_2^4 \sqrt{\frac{3}{4}t^2 - 3} dt = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_2^4 \sqrt{t^2 - 4} dt$$

이다. [1-1]의 결과를 이용하면

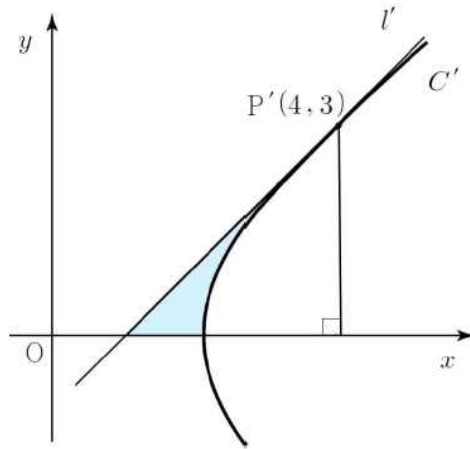
$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{t^2 - 4} dt &= \frac{\sqrt{3}}{4} [t\sqrt{t^2 - 4} - 4\ln|t + \sqrt{t^2 - 4}|]_2^4 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \{8\sqrt{3} - 4\ln(4 + 2\sqrt{3}) + 4\ln 2\} \\ &= \sqrt{3} \{2\sqrt{3} - \ln(4 + 2\sqrt{3}) + \ln 2\} \\ &= \sqrt{3} \{2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})\} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $S = \frac{9}{2} - \sqrt{3} \{2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})\} = -\frac{3}{2} + \sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3})$ 이다.



[별해] $3x^2 - 4y^2 - 6x + 16y = 25$ 를 변형하면 $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$ 이다. 접선 l 과 직선 $y=2$ 및 곡선 C 로 둘러싸인 영역의 넓이는 곡선 C 를 x 축으로 -1 만큼, y 축으로 -2 만큼 평행이동시킨 곡선 $C' : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 과 점 $(4, 3)$ 에서의 접선 l' 및 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하면 된다. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 에서 y 를 x 의 함수로 보고, 각 항을 x 에 대하여 미분하면 $\frac{2x}{4} - \frac{2y}{3} \cdot y' = 0$ ($y \neq 0$)이다.

$(4, 3)$ 에서의 접선의 기울기는 $y' = 1$ 이므로 접선의 방정식은 $y = x - 1$ 이다. 접선의 x 절편이 $(1, 0)$ 이므로



구하는 영역의 넓이 $S = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_2^4 \sqrt{x^2 - 4} dx$ 이다. [1-1]의 결과를 이용하면

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{x^2 - 4} dt &= \frac{\sqrt{3}}{4} [x \sqrt{x^2 - 4} - 4 \ln |x + \sqrt{x^2 - 4}|]_2^4 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \{8\sqrt{3} - 4 \ln(4 + 2\sqrt{3}) + 4 \ln 2\} \\ &= \sqrt{3} \{2\sqrt{3} - \ln(4 + 2\sqrt{3}) + \ln 2\} \\ &= \sqrt{3} \{2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})\} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $S = \frac{9}{2} - \sqrt{3} \{2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})\} = -\frac{3}{2} + \sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3})$ 이다.

[문항2] 대학발표 예시답안

[2-1] 점 T 에 대하여 $\overline{PO} - \overline{PA} = (\overline{PT} + \overline{OT}) - \overline{PA} = \overline{OT} = 2$ (일정) 이므로 점 P 는 두 점 O, A 를 초점으로 하고 거리의 차가 2인 쌍곡선 $(x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ ($x > 2$) 위의 점이다. 이 곡선의 점근선의 방정식이 $y = \pm \sqrt{3}(x-2)$ 이므로 반직선 \overrightarrow{OT} 위의 점 P 에 대하여 직선

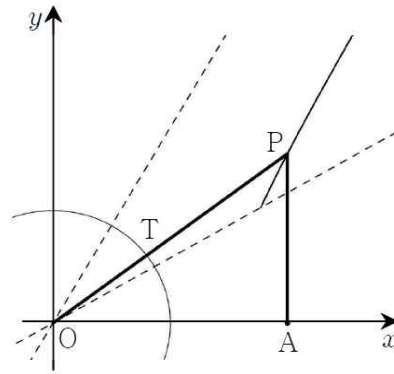
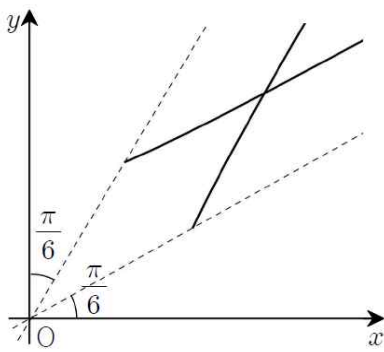


OP의 기울기는 $-\sqrt{3}$ 보다 크고 $\sqrt{3}$ 보다 작아야 한다. $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 이므로 동경 OP가

나타내는 각의 크기 θ_1 에 대하여 $-\frac{\pi}{3} < \theta_1 < \frac{\pi}{3}$ 일 때 점 P가 존재한다. ... ㉠

점 Q는 점 P를 직선 $y=x$ 에 대칭이동 시킨 곳에 생기므로 $\frac{\pi}{6} < \theta_2 < \frac{5}{6}\pi$ 일 때 점 Q가 존재한다. ... ㉡

그러므로 점 T에 의해서 두 점 P, Q가 동시에 존재하는 $\theta = \angle AOT$ 의 범위는 ㉠, ㉡에 의해서 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$ 이다.



$$\text{따라서 } C_1 = \left\{ (x, y) \mid (x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1, y > \frac{\sqrt{3}}{3}x, x > 2 \right\}$$

$x > 2$ 에서 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 와 $(x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 이 만나는 점을 P_1 이라 할 때, $\overline{OP} > a$ 인 a 의 최댓값은 $\overline{OP_1}$ 과 같다. ... (*)

$\overline{OP_1} = t$ 에 대하여 쌍곡선의 정의에 의해서 $\overline{P_1A} = t - 2$ 이고

$$|\overrightarrow{P_1A}|^2 = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP_1}|^2$$

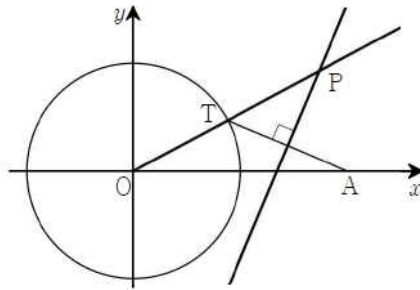
$$(t-2)^2 = 16 + t^2 - 2 \times 4 \times t \times \cos \frac{\pi}{6}$$

$$t = \frac{3}{2}(\sqrt{3} + 1)$$

따라서 a 의 최댓값은 $\frac{3}{2}(\sqrt{3} + 1)$ 이다.

[㉠의 다른 풀이 1]

점 P는 \overline{TA} 의 수직이등분선과 \overrightarrow{OT} 의 교점이므로 점 P가 존재하기 위해서는 \overline{TA} 의 수직이등분선과 \overrightarrow{OT} 가 평행이 되지 않아야 한다.



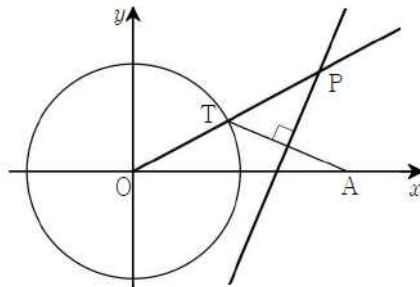
즉, \overline{TA} 가 원 C 의 접선일 때 점 P 가 존재하지 않으므로 동경 OP 가 나타내는 각의 크기 θ_1 에 대하여 $\cos\theta_1 \neq \frac{1}{2}$ 인 $\theta_1 \neq \pm \frac{\pi}{3}$.

그러므로 $-\frac{\pi}{3} < \theta_1 < \frac{\pi}{3}$ 일 때 점 P 가 존재한다.

($-\frac{\pi}{3} < \theta_1 < \frac{\pi}{3}$ 가 아닌 θ_1 에 대해서는 \overrightarrow{OT} 가 아닌 위치에서 교점이 생긴다.)

[㉠의 다른 풀이 2]

점 P 는 \overline{TA} 의 수직이등분선과 \overrightarrow{OT} 의 교점이므로 점 P 가 존재하기 위해서는 \overline{TA} 의 수직이등분선과 \overrightarrow{OT} 가 평행이 되지 않아야 한다.



동경 OP 가 나타내는 각의 크기 θ_1 에 대하여 $T(2\cos\theta_1, 2\sin\theta_1)$ 이고 직선 TA 의 기울기는

$\frac{2\sin\theta_1}{2\cos\theta_1 - 4} = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1 - 2}$ 이므로 직선 TA 에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{\cos\theta_1 - 2}{\sin\theta_1}$ 이다. 또

한, \overrightarrow{OT} 의 기울기는 $\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}$ 이다. 따라서 \overline{TA} 의 수직이등분선과 \overrightarrow{OT} 가 평행이면

$-\frac{\cos\theta_1 - 2}{\sin\theta_1} = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}$ 이고 $\cos\theta_1 = \frac{1}{2}$ 을 만족하는 값은 $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta_1 = -\frac{\pi}{3}$ 이다. 그러

므로 $-\frac{\pi}{3} < \theta_1 < \frac{\pi}{3}$ 일 때 점 P 가 존재한다.



[(※)의 다른 풀이]

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 와 $(x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 를 연립하여 x 의 값을 구하면 $x = \frac{9+3\sqrt{3}}{4}$ 이다. 점 P_1 의 x 좌표가 $x = \frac{9+3\sqrt{3}}{4}$ 이므로 $\overline{OP_1} = \frac{9+3\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)$. 따라서 a 의 최댓값은 $\frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)$ 이다.

[2-2] 곡선 $y=f(x)$ 는 쌍곡선의 일부분이고, 점근선의 기울기가 $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$$f'(x) < \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

(또는, 함수 $f(x) = \left(\frac{x^2}{3} + 1\right)^{\frac{1}{2}} + 2$ 에 대하여 $f'(x) = \left(3 + \frac{9}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 이므로 $f'(x) < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.)

$f(g(k)) = -g(k) + k$ 로부터 $f'(g(k)) \times g'(k) = -g'(k) + 1$ 이고, 이를 정리하면

$$g'(k) \times \{f'(g(k)) + 1\} = 1$$

이므로 $\textcircled{1}$ 에 의해서 $g'(k) > \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ 이다. 그러므로 b 의 최댓값은 $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ 이다.

[2-3] $h(k) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} |f(g(k)) - g(k)| = \sqrt{2} |f(g(k)) - g(k)| = \sqrt{2} |k - 2g(k)|$ 와 같고

$$h'(k) = \begin{cases} \sqrt{2}(1 - 2g'(k)) & (k < \alpha) \\ \sqrt{2}(2g'(k) - 1) & (k > \alpha) \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$h''(k) = \begin{cases} -2\sqrt{2}g''(k) & (k < \alpha) \\ 2\sqrt{2}g''(k) & (k > \alpha) \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

이다. 그리고 곡선 $y=f(x)$ 는 아래로 볼록하므로 $f''(x) > 0$ 이다.

(또는, 함수 $f(x) = \left(\frac{x^2}{3} + 1\right)^{\frac{1}{2}} + 2$ 에 대하여 이계도함수를 직접 구해도 $f''(x) > 0$ 임을 알 수 있다.)

한편 [2-2]의 결과로부터 $g'(k) \times \{f'(g(k)) + 1\} = 1$ 이고 $g'(k) > \frac{3-\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{3}$

이므로 위 식을 양변 미분하면

$$g''(k) \times \{f'(g(k)) + 1\} + \{g'(k)\}^2 \times f''(g(k)) = 0$$

이다. $f'(g(k)) + 1 > 0$, $\{g'(k)\}^2 \times f''(g(k)) > 0$ 이므로 $g''(k) < 0$ 이다. $\dots \textcircled{4}$

만일 함수 $h(k)$ 가 $k=\alpha$ 에서 미분가능하다고 가정하면, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ 로부터

$$1) \ k > \alpha \text{ 일 때 } h'(k) > 0 \text{ 이고, } h''(k) < 0 \text{ 이므로 } \lim_{k \rightarrow \alpha+} \frac{h(k) - h(\alpha)}{k - \alpha} > 0$$

2) $k < \alpha$ 일 때 $h'(k) < 0$ 이고, $h''(k) > 0$ 이므로 $\lim_{k \rightarrow \alpha-} \frac{h(k) - h(\alpha)}{k - \alpha} \leq 0$

이다. 따라서 $\lim_{k \rightarrow \alpha-} \frac{h(k) - h(\alpha)}{k - \alpha} \neq \lim_{k \rightarrow \alpha+} \frac{h(k) - h(\alpha)}{k - \alpha}$ 이므로 함수 $h(k)$ 는 $k = \alpha$ 에서 미분가능하지 않다.

[문항3] 대학발표 예시답안

[3-1] 5번째까지 숫자 1, 2, 3, 4가 적힌 카드 중 세 장과 숫자 5, 6, 7, 8이 적힌 카드 중 두 장을 꺼내어 배열하고, 6번째에 숫자 1, 2, 3, 4가 적힌 카드 중 남은 숫자가 적힌 카드를 꺼내면

$$\frac{{}_4C_3 \times {}_4C_2 \times 5!}{{}_8P_5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$$

이다.

[다른 풀이]

$P(X=6)$ 의 의미는 1부터 8까지의 자연수 중에서 하나씩 뽑아갈 때 4이하의 자연수를 6번째에 모두 뽑게 되는 확률이다. 즉,

$$P(X=6) = \frac{(\text{6번째에 4이하의 카드를 모두 뽑게 되는 위치를 선택하는 경우의 수})}{(\text{8장의 카드를 뽑는 과정에서 1, 2, 3, 4의 카드를 뽑을 위치를 선택하는 경우의 수})}$$

와 같다.

① 8장의 카드를 뽑는 과정에서 1, 2, 3, 4의 카드를 뽑을 위치를 선택하는 경우의 수 :

$${}_8C_4$$

② 6번째에 4 이하의 카드를 모두 뽑도록 1, 2, 3, 4의 카드를 뽑을 위치를 선택하는 경우의 수 : ${}_5C_3$

$$\text{이므로 } P(X=6) = \frac{{}_5C_3}{{}_8C_4} = \frac{1}{7} \text{ 이다.}$$

[3-2]

$1 \leq N \leq l$ 인 자연수 N 에 대하여 $(k-1)$ ($k=l, l+1, \dots, 2l$)번째까지 N 을 제외한 l 이하의 자연수가 적힌 카드를 꺼내고, k 번째에서 N 이 적힌 카드를 꺼낸다고 하면

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \frac{{}_lC_{l-1} \times {}_lC_{k-l} \times (k-1)!}{{}_lP_{k-1}} \times \frac{1}{2l-k+1} \\ &= \frac{l \times \frac{l!}{(k-l)! \cdot (2l-k)!} \times (k-1)!}{\frac{(2l)!}{(2l-k+1)!}} \times \frac{1}{2l-k+1} \\ &= \frac{l \times (2l-l)! \times (k-1)!}{(2l)! \times (k-l)!} = \frac{l! \times (2l-l)!}{(2l)!} \times \frac{(k-1)!}{(k-l)! \cdot (l-1)!} \end{aligned}$$



$$= \frac{{}^{k-1}C_{l-1}}{{}_lC_l} \dots (*)$$

이다. 따라서 제시문 (나), (다)에 의해 구하는 평균 $E(X)$ 의 값은

$$\begin{aligned} \sum_{k=l}^{2l} \left\{ k \times \frac{{}^{k-1}C_{l-1}}{{}_lC_l} \right\} &= \frac{1}{{}_lC_l} \sum_{k=l}^{2l} \left\{ k \times \frac{(k-1)!}{(l-1)! \cdot (k-l)!} \right\} \\ &= \frac{1}{{}_lC_l} \sum_{k=l}^{2l} \frac{k!}{l! \cdot (k-l)!} \\ &= \frac{1}{{}_lC_l} \sum_{k=l}^{2l} {}_kC_l \\ &= \frac{1}{{}_lC_l} ({}_lC_l + {}_{l+1}C_l + \dots + {}_{2l}C_l) \\ &= \frac{1}{{}_lC_l} ({}_{l+1}C_{l+1} + {}_{l+1}C_l + \dots + {}_{2l}C_l) \\ &= \frac{1}{{}_lC_l} \times {}_{2l+1}C_{l+1} \\ &= \frac{l(2l+1)}{l+1} \end{aligned}$$

[(*)의 다른 풀이]

$P(X=k)$ 의 의미는 1부터 $2l$ 까지의 자연수 중에서 하나씩 뽑아갈 때 l 이하의 자연수를 k 번째에 모두 뽑게 되는 확률이다. 즉,

$$P(X=k) = \frac{(\text{k번째에 } l \text{ 이하의 카드를 모두 뽑게 되는 위치를 선택하는 경우의 수})}{(\text{2l장의 카드를 뽑는 과정에서 } l \text{ 이하의 카드를 뽑을 위치를 선택하는 경우의 수})}$$

와 같다.

- ① $2l$ 장의 카드를 뽑는 과정에서 l 이하의 카드를 뽑을 위치를 선택하는 경우의 수 : ${}_{2l}C_l$
 ② k 번째에 l 이하의 카드를 모두 뽑도록 l 이하의 카드를 뽑을 위치를 선택하는 경우의 수 : ${}^{k-1}C_{l-1}$

이므로 $P(X=k) = \frac{{}^{k-1}C_{l-1}}{{}_lC_l}$ 이다.



14 서강대학교 수시¹⁴⁾

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
속도와 가속도, 치환적분법, 삼각함수의 미분, 도함수의 활용, 부분적분법, 역함수의 미분, 정적분의 활용, 함수의 연속, 등차수열, 수열의 합	국, 수(가/나), 영, 탐구(사/과) 중 3개 합 6등급, 한국사 4등급 ※ 탐구(사/과) 2과목 중 상위 1과목 반영	수학(4문항, 17문제)	100분

[문항 1] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

[가] 좌표평면 위에서 움직이는 점 P의 좌표 (x, y) 가 변수 t 의 함수 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ 로 나타내어질 때, 변수 t 를 매개변수라 한다. 예를 들어, 점 P가 점 $(1, 0)$ 을 출발하여 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 시계 반대 방향으로 매분 1만큼의 거리를 움직일 때, 출발 후 t 분에서 점 P의 위치를 매개변수를 이용하여 $x = \cos t$, $y = \sin t$ 로 나타낼 수 있다.

[나] 반지름의 길이와 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기를 1라디안이라 하고, 라디안을 단위로 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라고 한다.
부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로 반지름의 길이가 r 이고 중심각의 크기가 θ 라디안인 부채꼴의 호의 길이 l 은 $l = r\theta$ 이다.

[다] 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 좌표 (x, y) 가 $x = f(t)$, $y = g(t)$ 일 때, 점 P의 시각 t 에서의 속도, 속력, 가속도, 가속도의 크기는 다음과 같다.

$$(1) \text{ 속도 } \vec{v} = (v_x, v_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (f'(t), g'(t))$$

$$(2) \text{ 속력 } |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} = \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}$$

$$(3) \text{ 가속도 } \vec{a} = (a_x, a_y) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right) = (f''(t), g''(t))$$

$$(4) \text{ 가속도의 크기 } |\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)^2} = \sqrt{\{f''(t)\}^2 + \{g''(t)\}^2}$$



아래 글을 읽고 [1-1], [1-2], [1-3]의 물음에 답하시오.

서강이는 원점 O 를 중심으로 반지름의 길이가 1인 원의 둘레를 점 $(1, 0)$ 에서부터 출발하여 시계 반대 방향으로 일정한 속력으로 움직여 매 π 분마다 한 바퀴씩 돌고 있다. 동시에 서준이는 점 $(-1, 0)$ 을 중심으로 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 원둘레를 점 $(\sqrt{3}-1, 0)$ 에서부터 출발하여 시계 반대 방향으로 일정한 속력으로 움직여 매 2π 분마다 한 바퀴씩 돌고 있다.

[1-1] 서강이와 서준이가 동시에 출발 후, t 분이 지날 때, 각자의 위치를 매개변수 방정식으로 나타내시오.

[1-2] 서강이와 서준이가 첫 번째 만날 때의 속도와 가속도를 구하고, 이들 크기의 합을 각각 구하시오.

[1-3] 출발 t 분 후 서준이의 가속도가 $(a(t), b(t))$ 이고, 함수 $f(t)$ 가 $t > 0$ 에서 $|f(t)| \leq 3$ 이다. 정적분 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} a(t)b(t)f(t) dt$ 가 최댓값을 갖도록 하는 함수 $f(t)$ 를 제시하고, 그 때 정적분의 값을 구하시오.

[1-4] 점 $(-1, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 원을 밑면으로 하고, xy 평면에 수직인 원기둥 모양의 벽이 있다. 서준이가 이 벽의 둘레를 점 $(\sqrt{3}-1, 0)$ 에서 출발하여 시계 반대 방향으로 일정한 속력으로 매 2π 분마다 한 바퀴씩 돌고 있다. 반면, 서강이는 점 $(1, 0)$ 에서 정지한 상태로 서준이가 실제 움직이는 거리를 측정하기로 하였다. 출발하여 $\frac{49\pi}{12}$ 분이 경과할 때까지 서강이가 관측할 수 있는 서준이의 총 움직인 거리를 구하시오. (단, 원기둥의 높이는 무한히 높고 서준이는 매우 작다고 가정한다.)



[문항 2] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

[가] 삼각함수 $y = \sin x$ 와 $y = \cos x$ 의 그래프는 모두 2π 간격으로 같은 모양이 반복된다. 임의의 실수 x , 정수 n 에 대하여

$$\sin(x+2n\pi) = \sin x, \cos(x+2n\pi) = \cos x$$

이다. 또한 $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ 이고 $f(x)$ 가 미분가능 함수일 때 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx} \sin f(x) = \{\cos f(x)\} f'(x),$$

$$\frac{d}{dx} \cos f(x) = \{-\sin f(x)\} f'(x)$$

이다.

[나] 함수 $f(x)$ 가 어떤 열린 구간에서 미분가능할 때, 그 구간의 모든 x 에 대하여

i) $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 증가한다.

ii) $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 감소한다.

함수 $f(x)$ 가 어떤 열린 구간에서 미분가능할 때,

i) $f(x)$ 가 그 구간에서 증가하면 그 구간의 모든 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이다.

ii) $f(x)$ 가 그 구간에서 감소하면 그 구간의 모든 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이다.

[다] 함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, 함수 $F(x)$ 가 $f(x)$ 의 한 부정적분일 때,

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

이다.

[라] 미분가능한 함수 $t = g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$ 에 대하여 함수 $f(t)$ 가 α, β 를 양 끝으로 하는 닫힌 구간에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$

이다.

[마] 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 미분가능하고, $f'(x)$, $g'(x)$ 가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

이다.



[2-1] 함수 $f(x) = \begin{cases} 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ 에서 $f'(0)$ 의 값을 구하시오.

[2-2] $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 $\cos \frac{1}{a_n} = 1$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 의 예를 찾으시오.

[2-3] 함수 $f(x) = \begin{cases} 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ 는 $x=0$ 을 포함하는 어떤 열린 구간에서 증가하는지 서술하시오.

[2-4] $\int_0^1 2x^4 \sqrt{1-x^4} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x^4)^{\frac{3}{2}} dx$ 임을 보이시오.

[2-5] $p'(0) = 5$ 를 만족하는 다항함수 $p(x)$ 에 대하여 $\int_0^\pi \{p(x) + p''(x)\} \cos x dx = 3$ 이 성립할 때 $p'(\pi)$ 가 가질 수 있는 모든 값을 구하시오.

[문항 3] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

[가] 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

[나] 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 미분가능하면 다음이 성립한다.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (\text{단, } f'(f^{-1}(x)) \neq 0)$$

[다] 일반적으로 함수 $f(x)$ 가 실수 a 에 대하여 다음을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이라고 한다.

- ① 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 정의되어 있다.
- ② 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재한다.
- ③ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

구간 $[0, \infty)$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x < 1) \\ (m-1)x+2-m & (1 \leq x < 2) \\ x^3-6x^2+12x+m-8 & (x \geq 2) \end{cases}$$

에 대하여 제시문을 참고하여 다음 물음에 답하시오.

[3-1] 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하기 위한 실수 m 의 범위를 구하시오.

[3-2, 3-3, 3-4] 문제 [3-1]의 결과를 이용하여 다음 물음에 답하시오.

[3-2] 함수 $f^{-1}(x)$ 의 $x=9m$ 에서의 미분계수 $(f^{-1})'(9m)$ 을 m 에 대한 식으로 나타내시오.

[3-3] 정적분 $\int_0^{9m} f^{-1}(x)dx$ 를 m 에 대한 식으로 나타내시오.

[3-4] 함수 $g(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f^{-1}(x+\Delta x) - f^{-1}(x)}{\Delta x}$ 로 정의한다.

$1 < c < m$ 인 실수 c 에 대하여 함수 $h(x) = (x-\alpha)g(x)$ 가 닫힌 구간 $[0, c]$ 에서 연속이 되도록 실수 α 의 값을 구하시오.



[문항 4] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

[가] 함수 $f(x)$ 에서 정의역에 속하는 모든 x 에 대하여

$$f(x+L)=f(x)$$

를 만족하는 0 이 아닌 상수 L 이 존재할 때, 함수 f 를 주기함수라 하고 L 의 값 중에서 최소인 양수를 함수 f 의 주기라 한다.

예를 들어, 함수 $y=\sin x$ 는 주기가 2π 인 주기함수이다.

[나] 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

을 합의 기호 \sum 를 사용하여 다음과 같이 간단히 $\sum_{k=1}^n a_k$ 로 나타낸다. 즉,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

여기서, $\sum_{k=1}^n a_k$ 는 수열의 일반항 a_k 의 k 에 $1, 2, 3, \dots, n$ 을 차례로 대입하여 얻은 항 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 의 합을 뜻한다.

[다] 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k,$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k,$$

$$\sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k \quad (\text{단, } c \text{ 는 상수}),$$

$$\sum_{k=1}^n c = c n \quad (\text{단, } c \text{ 는 상수})$$

[라] 첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면,

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + \{a+(n-1)d\} = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

이다.

구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 는 다음 성질을 만족시킨다.

$$f(x)=x \quad (0 \leq x < 1), \quad f(x+1)=f(x)$$

제시문을 참고하여 다음 물음에 답하시오.

[4-1] 열린 구간 $(0, 2)$ 에서 함수 $g(x) = \left\{f(2x) - \frac{1}{2}\right\} \left\{f(3x) - \frac{1}{2}\right\}$ 이 불연속이 되는 x 의 값을 모두 구하시오.

[4-2] $N > 1$ 인 모든 자연수 N 에 대하여 다음 급수

$$\sum_{n=1}^N f\left(n\left(1 + \frac{1}{N}\right)\right)$$

을 N 에 대한 식으로 나타내시오.

[4-3, 4-4] 다음은 $f(Nx) - \sum_{n=1}^N \left(f\left(x + \frac{n}{N}\right) - \frac{1}{2}\right)$ 의 계산과정 일부를 나타낸 것이다. 참고하여 문제 [4-3], [4-4]에 답하시오.

임의의 실수 x 는 정수 m 과 소수 α ($0 \leq \alpha < 1$)의 합, 즉 $x = m + \alpha$ 으로 표현이 가능하다. 그런데 $f(x) = \alpha$ 이므로

$$\sum_{n=1}^N \left(f\left(m + \alpha + \frac{n}{N}\right) - \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^N \left(f\left(\alpha + \frac{n}{N}\right) - \frac{1}{2}\right)$$

(단, N 은 1보다 큰 자연수이다.)

이다. 이때

$$\alpha + \frac{n_0 - 1}{N} < 1, \quad \alpha + \frac{n_0}{N} \geq 1$$

을 동시에 만족하는 자연수 n_0 ($1 < n_0 \leq N$)을 찾을 수 있다.

[4-3] 임의의 실수 x 에 대하여 다음을 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{n_0-1} \left(f\left(x + \frac{n}{N}\right) - \frac{1}{2}\right)$$

[4-4] 임의의 실수 x 에 대하여 다음을 구하시오.

$$f(Nx) - \sum_{n=1}^N \left(f\left(\alpha + \frac{n}{N}\right) - \frac{1}{2}\right)$$



[문항1] 대학발표 예시답안

[1-1]

서강이는 반지름의 길이가 1인 원(둘레가 2π)을 한 바퀴 도는데 π 분이 소요되므로 1분 동안 움직인 거리는 2이다. t 분 후 움직인 거리는 $2t=1 \times \theta(t)$ 이므로 $\theta(t)=2t$ 이다. 그러므로 t 분에서의 위치는 $(\cos 2t, \sin 2t)$ 이다. 서준이는 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 원(둘레가 $2\sqrt{3}\pi$)을 한 바퀴 도는데 2π 분이 소요되므로 1분 동안 움직인 거리는 $\sqrt{3}$ 이다. t 분 후 움직인 거리는 $\sqrt{3}t=\sqrt{3}\theta(t)$ 이므로 $\theta(t)=t$ 이다. 그러므로 t 분에서의 위치는 $(\sqrt{3}\cos t-1, \sqrt{3}\sin t)$ 이다.

[1-2]

서강이와 서준이가 만날 수 있는 점은 $x^2+y^2=1$ 과 $(x+1)^2+y^2=3$ 의 교점 $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 뿐이다. 서강이가 처음으로 점 A를 지나는 시각은 $t=\frac{\pi}{6}$,

서준이도 처음으로 점 A를 지나는 시각은 $t=\frac{\pi}{6}$ 이다. (t 의 단위는 분) 즉, $t=\frac{\pi}{6}$ 일 때,

둘은 처음 만난다. 서강이의 위치는 $(\cos 2t, \sin 2t)$ 이므로 t 분 후의 속도는 $(-2\sin 2t, 2\cos 2t)$, 가속도는 $(-4\cos 2t, -4\sin 2t)$ 이다. 서준이의 위치는

$(\sqrt{3}\cos t-1, \sqrt{3}\sin t)$ 이므로 t 분 후의 속도는 $(-\sqrt{3}\sin t, \sqrt{3}\cos t)$, 가속도는

$(-\sqrt{3}\cos t, -\sqrt{3}\sin t)$ 이다. 그러므로 $t=\frac{\pi}{6}$ 일 때, 서강이의 속도는

$\left(-2\sin\frac{\pi}{3}, 2\cos\frac{\pi}{3}\right)=(-\sqrt{3}, 1)$, 가속도는 $\left(-4\cos\frac{\pi}{3}, -4\sin\frac{\pi}{3}\right)=(-2, -2\sqrt{3})$ 이고

서준이의 속도는 $\left(-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 가속도는

$\left(-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}, -\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}\right)=\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이다.

이에 해당하는 서강이의 속력은 $\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{3}+4\cos^2\frac{\pi}{3}}=2$, 서준이의 속력은

$\sqrt{3\sin^2\frac{\pi}{6}+3\cos^2\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}$ 이므로 이들의 합은 $2+\sqrt{3}$ 이다. 한편, 서강이의 가속도의 크

기는 $\sqrt{16\cos^2\frac{\pi}{3}+16\sin^2\frac{\pi}{3}}=4$ 이고 서준이의 가속도의 크기는 $\sqrt{3\cos^2\frac{\pi}{6}+3\sin^2\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}$

이므로 합은 $4+\sqrt{3}$ 이다.

[1-3]

출발 t 분 후 서준이의 가속도는 $(-\sqrt{3} \cos t, -\sqrt{3} \sin t)$ 이므로

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} a(t)b(t)f(t) dt = 3 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(t) \sin t \cos t dt$$

이다. 모든 $t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 에 대하여 $\sin t > 0$ 이고 $t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 일 때 $\cos t \geq 0$,

$t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 일 때 $\cos t \leq 0$ 그리고 $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ 이므로

$$f_1(t) = \begin{cases} 3 & \left(\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ -3 & \left(\frac{\pi}{2} < t \leq \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

라 놓으면 함수 $f_1(t) \sin t \cos t$ 는 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 에서 연속이고, $t > 0$ 에서 $|f(t)| \leq 3$ 을 만족하는 모든 $f(t)$ 에 대하여

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(t) \sin t \cos t dt \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f_1(t) \sin t \cos t dt$$

가 성립한다.

그러므로 정적분 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} a(t)b(t)f(t) dt$ 가 최댓값을 갖도록 하는 함수 $f(t)$ 는

$$f(t) = \begin{cases} 3 & \left(\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ -3 & \left(\frac{\pi}{2} < t \leq \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases} \quad \text{또는} \quad f(t) = \begin{cases} 3 & \left(\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{\pi}{2}\right) \\ -3 & \left(\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

이고 그때 정적분의 값은

$$9 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt - 9 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin t \cos t dt = \frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$$

이다.

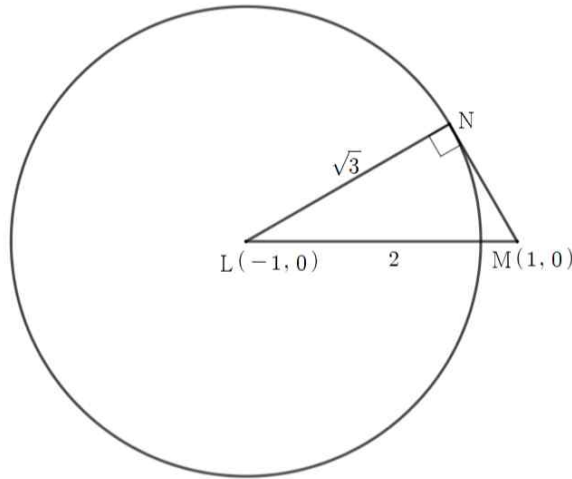
$$\left(x = \cos t \text{ 라 치환하면 } \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = - \int_{\frac{1}{2}}^0 x dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x dx = \frac{1}{8} = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin t \cos t dt \right)$$

[1-4]

원기둥 밑면의 중심을 점 L, 서강이의 위치를 점 M이라 하자. 서강이가 관찰하고 있는 점 (1, 0)에서 원기둥 밑면에 그은 접점을 N이라 하면 삼각형 LMN은 아래 그림과 같이 직각삼각형이다. $\overline{LM} = 2$, $\overline{LN} = \sqrt{3}$ 이므로 $\angle NLM = \frac{\pi}{6}$ 이다. 그러므로 서준이가 원을 한바퀴 돌았을 때, 서강이가 관측할 수 있는 구간에 해당하는 서준이가 움직인 거리는



$\sqrt{3} \times \frac{\pi}{3}$ 이다. 출발 후 $\frac{49\pi}{12} \left(= 4\pi + \frac{\pi}{12} \right)$ 분 동안 서준이는 2바퀴를 돌고 중심각이 $\frac{\pi}{12}$ 인 부채꼴의 호만큼 더 움직일 수 있다. 그러므로 답은 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{12}\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4}\pi$ 이다.



[문항2] 대학발표 예시답안

[2-1]

$x \neq 0$ 일 때 $-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ 이다.

따라서

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 + 3x \sin \frac{1}{x} \right) = 2$$

이다.

[2-2]

$a_n = \frac{1}{2\pi n}$ (또는 $a_n = -\frac{1}{2\pi n}$, $a_n = \frac{1}{4\pi n}$ 등도 가능함)일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 $\cos \frac{1}{a_n} = 1$ 을 만족한다.

[2-3]

$x \neq 0$ 일 때 $f'(x) = 2 + 6x \sin \frac{1}{x} - 3 \cos \frac{1}{x}$ 이고, $a_n = \frac{1}{2\pi n}$ 일 때 $\sin \frac{1}{a_n} = 0$, $\cos \frac{1}{a_n} = 1$ 이

므로, 모든 자연수 n 에 대하여

$$f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = f'\left(-\frac{1}{2n\pi}\right) = 2 + 0 - 3 = -1$$

이다. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n} = 0$ 이므로 $x=0$ 을 포함하는 열린 구간은 $f'(a) = -1$ 을 만족하는 점 $x=a$ 를 항상 포함한다. 제시문 [나]에 의해서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 을 포함하는 어떤 열린 구간에서도 증가하지 않는다.

[2-4]

$f(x)=x$ 그리고 $g'(x)=2x^3\sqrt{1-x^4}$ 라 놓으면 $f'(x)=1$ 이고 $g(x) = -\frac{1}{3}(1-x^4)^{\frac{3}{2}}$ 이다.

제시문 [마]에 의해서

$$\int_0^1 2x^4 \sqrt{1-x^4} dx = \left[-\frac{1}{3} x(1-x^4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{3} (1-x^4)^{\frac{3}{2}} \right\} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x^4)^{\frac{3}{2}} dx$$

이다.

[2-5]

제시문 [가]와 [마]에 의해서

$$\int_0^\pi p(x) \cos x dx = [p(x) \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi p'(x) \sin x dx = - \int_0^\pi p'(x) \sin x dx$$

그리고

$$\begin{aligned} \int_0^\pi p''(x) \cos x dx &= [p'(x) \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi p'(x) (-\sin x) dx \\ &= -p'(\pi) - p'(0) + \int_0^\pi p'(x) \sin x dx \end{aligned}$$

이다.

그러므로 $3 = \int_0^\pi [p(x) + p''(x)] \cos x dx = -p'(\pi) - p'(0) = -p'(\pi) - 5$ 가 성립한다.

따라서 $p'(\pi) = -8$ 이고 $p'(\pi)$ 가 갖는 유일한 값은 -8 이다.

[문항3] 대학발표 예시답안

[3-1]

함수 $f(x)$ 가 일대일 대응일 때 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하므로 함수 $f(x)$ 가 일대일 대응일 조건을 구한다. 구간 $[0, 1)$, $[2, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가하므로 구간 $[1, 2)$ 에서 증가하면 모든 구간에서 증가한다.

구간 $[1, 2)$ 에서 $m < 1$ 이면 $m-1 < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 감소하고, $m=1$ 이면 함수 $f(x)=2-m=1$ 이고 상수함수가 되어 증가하지 않는다. $m > 1$ 이면 $m-1 > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다. 결국, $m > 1$ 이면 함수 $f(x)$ 는 모든 구간에서 증가하므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, \infty)$ 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이고 일대일함수이다.

또한 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, \infty)$ 에서 연속이고 증가하므로 치역과 공역이 모두 구간



$[0, \infty)$ 이고 일대일 대응이다. 따라서 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하기 위한 실수 m 의 범위는 $m > 1$ 이다.

[3-2]

제시문 [나]에서 주어진 공식을 사용하자. 우선 $f(x) = 9m$ 을 만족하는 x 값을 찾아야 한다. $m > 1$ 임으로 $9m > 9$ 가 되고 이 구간에서 함수 $f(x)$ 는

$x^3 - 6x^2 + 12x + m - 8 = (x-2)^3 + m$ 으로 표시할 수 있다. 따라서 $f(x) = 9m$ 을 만족하는 x

값은 $2 + 2m^{\frac{1}{3}}$ 이 된다. 그러므로

$$(f^{-1})'(9m) = \frac{1}{f'(2+2m^{\frac{1}{3}})} = \frac{1}{12m^{\frac{2}{3}}}$$

을 얻는다.

[3-3]

제시문으로부터 문제의 적분값은 $\left(2 + 2m^{\frac{1}{3}}\right) \times (9m) - \int_0^{2+2m^{\frac{1}{3}}} f(x) dx$ 가 됨을 알 수 있다.

두 번째 항의 적분을 세 구간으로 나누어 계산하면

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x dx + \int_1^2 ((m-1)x + 2 - m) dx + \int_2^{2+2m^{\frac{1}{3}}} ((x-2)^3 + m) dx \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right) + \int_0^{2m^{\frac{1}{3}}} (x^3 + m) dx = \frac{m}{2} + 1 + 6m^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

이 되고, 따라서 최종 결과는 $\left(2 + 2m^{\frac{1}{3}}\right) \times (9m) - \left(6m^{\frac{4}{3}} + \frac{m}{2} + 1\right) = 12m^{\frac{4}{3}} + \frac{35}{2}m - 1$ 이다.

[3-4]

$f'(x)$ 가 $x \neq 1$, $x \neq 2$ 인 모든 점에서 존재하고 연속임은 자명하다. $f'(x)$ 의 $x=1$ 그리고 $x=2$ 에서 좌극한과 우극한을 생각해보자.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = m-1, \lim_{x \rightarrow 2-} f'(x) = m-1, \lim_{x \rightarrow 2+} f'(x) = 0$$

임을 알 수 있다. 한편 $f(1)=1$, $f(2)=m$ 이기 때문에 제시문 [나]로부터

$$\lim_{x \rightarrow 1-} (f^{-1})'(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1+} (f^{-1})'(x) = \frac{1}{m-1},$$

$$\lim_{x \rightarrow m-} (f^{-1})'(x) = \frac{1}{m-1}, \lim_{x \rightarrow m+} (f^{-1})'(x) = \infty$$

임을 알 수 있다. 따라서 $[0, c]$ 의 구간 내에서 $c < m$ 임으로 일반적인 $m > 1$ 에 대하여 $x=1$ 에서만 $(f^{-1})'(1)$ 이 존재하지 않는다. 그런데 $g(x)$ 의 정의에 따라 $x \neq 1$ 인 경우,



$(f^{-1})'(x)$ 가 존재하고 연속이기 때문에 $g(x)$ 는 연속이고, $x=1$ 에서는

$$g(1) = \frac{1}{m-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \frac{1}{m-1}$$

이기 때문에 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서만 일반적인 $m > 1$ 에 대하여 불연속이 된다. 따라서 $h(x) = (x-\alpha)g(x)$ 는 $x \neq 1$ 인 경우 연속이 된다. 이제 $x=1$ 인 경우를 살펴보면

$$h(1) = (1-\alpha) \frac{1}{m-1} \text{ 이고 } \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = 1-\alpha, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \frac{1-\alpha}{m-1}$$

이기 때문에 $x=1$ 에서의 연속조건

$$h(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$$

가 만족되려면 $m > 1$ 이기 때문에 $\alpha = 1$ 이 되어야 한다.

[문항4] 대학발표 예시답안

[4-1]

함수 f 는 정수인 n 들이 불연속점들이다. 따라서 구간 $(0, 2)$ 에서 $f(2x)$ 는 $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ 에서 불연속이고 $f(3x)$ 는 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$ 에서 불연속이다. 그런데 $x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ 에서 함수 g 는 연속이 된다. 그러므로 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$ 에서 함수 g 는 불연속이다.

[4-2]

함수 f 의 정의로부터 $f(N+1) = 0$ 이므로,

$$\sum_{n=1}^N f\left(n\left(1 + \frac{1}{N}\right)\right) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{n}{N} = \frac{1}{N} \frac{(N-1)N}{2} = \frac{N-1}{2}$$

[4-3]

준식은

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n_0-1} \left\{ \left(\alpha + \frac{n}{N} \right) - \frac{1}{2} \right\} &= (n_0-1)\alpha + \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{n}{N} - \frac{n_0-1}{2} \\ &= (n_0-1) \left(\alpha + \frac{n_0}{2N} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

또는

$$(n_0-1) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) + \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{n}{N}$$

[4-4]

준식은 다음과 같다.



$$f(Nx) - \left[\sum_{n=1}^{n_0-1} \left\{ \left(\alpha + \frac{n}{N} \right) - \frac{1}{2} \right\} + \sum_{n=n_0}^N \left\{ \left(\alpha + \frac{n}{N} - 1 \right) - \frac{1}{2} \right\} \right]$$

한편, [4-3]에 의해서

$$\sum_{n=1}^{n_0-1} \left\{ \left(\alpha + \frac{n}{N} \right) - \frac{1}{2} \right\} = (n_0 - 1) \left\{ \alpha + \frac{n_0}{2N} - \frac{1}{2} \right\}$$

이다. 따라서 등차수열의 합을 이용하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n_0-1} \left\{ \left(\alpha + \frac{n}{N} \right) - \frac{1}{2} \right\} + \sum_{n=n_0}^N \left\{ \left(\alpha + \frac{n}{N} - 1 \right) - \frac{1}{2} \right\} &= \sum_{n=1}^N \left\{ \left(\alpha + \frac{n}{N} \right) - \frac{1}{2} \right\} - (N - n_0 + 1) \\ &= N\alpha + \frac{N(N+1)}{2N} - (N - n_0 + 1) - \frac{N}{2} \\ &= N\alpha - (N - n_0) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

그런데, 조건 $\alpha + \frac{n_0-1}{N} < 1$ 로부터 $N\alpha - N + n_0 < 1$ 이고, 다른 조건 $\alpha + \frac{n_0}{N} \geq 1$ 로부터

$N\alpha - N + n_0 \geq 0$ 이다. 즉 $N \leq N\alpha + n_0 < N+1$ 이므로

$$N\alpha - (N - n_0) - \frac{1}{2} = f(N\alpha) - \frac{1}{2}$$

그런데 $f(N\alpha) = f(Nx)$ 이므로

$$f(Nx) - \sum_{n=1}^N \left(f\left(\alpha + \frac{n}{N} \right) - \frac{1}{2} \right) = f(Nx) - \left(f(Nx) - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

15 서울과학기술대학교 모의15)

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
부분적분법, 함수의 극한, 도함수의 활용, 여러 가지 함수의 적분, 지수함수와 로그함수의 미분, 두 점 사이의 거리, 도형의 대칭이동, 함수의 그래프와 최대, 최소, 확률변수와 확률분포, 순열과 조합	없음	수학 대문항 3개 (대문항 1개에 소문항 2~5개 내외)	100분

[문제 1] 다음 물음에 답하시오.

[1-1] 다음 극한 값을 ${}_aC_b$ 라 할 때, a 와 b 를 구하시오.

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{(1-r^{1011})(1-r^{1012})(1-r^{1013}) \dots (1-r^{2020})}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3) \dots (1-r^{1010})}$$

[1-2] 함수 $y = x \ln x$ (단, $x > 0$)가 $x = a$ 에서 최솟값이 될 때,

$$\int_a^t x \ln x \, dx = \frac{3}{4e^2}$$

을 만족하는 실수 t 를 구하시오. ($t > a$)

[1-3] 곡선 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 와 직선 $y = L(x) = mx + n$ 이 매개변수로 나타낸 두 곡선 $x = \sqrt{12} \sin t$, $y = \sqrt{12} \cos t$ 와 $x = t$, $y = t^2$ 의 교점을 지난다. 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = L(x)$ 이 서로 다른 세 점에서 만난다. 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = L(x)$ 의 교점의 x 좌표를 α, β, γ (단, $\alpha < \beta < \gamma$)라 할 때

(1) $\alpha + \beta + \gamma = 1$

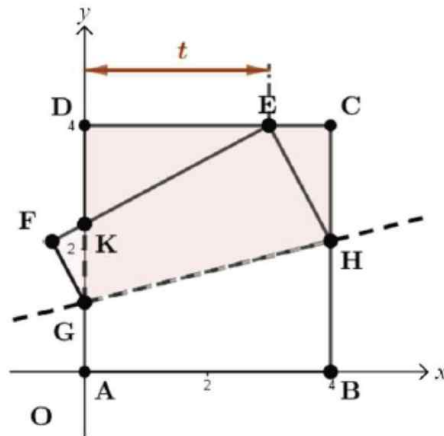
(2) $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx = 0$

이 성립한다. 이때 $a + b + c$ 의 값을 구하시오.



[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

그림과 같이 평면 위의 네 점 $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 4)$, $D(0, 4)$ 로 이루어진 정사각형 모양의 종이 $ABCD$ 가 있다. 이 종이를 점 B 가 변 CD 위에 오도록 접을 때, 접히는 선을 선분 GH 라 하자. 이 선분 GH 에 대하여 점 B 의 대칭인 CD 위의 점을 E 라 하고, 점 A 의 대칭인 점을 F 라 하자. 또한 선분 AB 가 접히는 선분 GH 에 대하여 대칭 이동한 선분 FE 가 선분 AD 와 만나는 점을 K 라 하자. 점 D 와 점 E 사이의 거리는 t 라 하자.



[2-1] 점 H 의 y 좌표를 t 에 관한 식으로 나타내시오.

[2-2] 직각삼각형 $\triangle CEH$, $\triangle DKE$, $\triangle FKG$ 는 닮은 삼각형이다. 세 삼각형 $\triangle CEH$ 와 $\triangle DKE$, 그리고 $\triangle FKG$ 의 닮음비를 $a:t:b$ 라 할 때, a , b 를 t 에 관한 식으로 나타내시오.

[2-3] 직각삼각형 $\triangle CEH$ 의 넓이가 최대가 될 때, 점 E 의 x 좌표를 구하시오.

[문제3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

주머니 안에 크기와 모양이 같은 열쇠가 4개 들어있다. 그 중 2개는 일반열쇠이고, 나머지 2개는 황금열쇠이다. 황금열쇠를 찾기 위해 이 주머니에서 하나씩 2개의 열쇠를 꺼내려 한다. (단, 꺼냈던 열쇠는 다시 넣지 않는다.) 확률변수 X 를 첫 번째 황금열쇠를 찾아낼 때까지 꺼낸 횟수, 확률변수 Y 를 두 번째 황금열쇠를 찾아낼 때까지 꺼낸 횟수라 하자.

(가) 확률변수 X 의 확률질량함수는 $P(X=x) = \frac{4-x}{6}$, $x=1, 2, 3$ 이다. 그리고 확률변수 $X-1$ 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$X-1$	0	1	2	합계
P	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(나) 확률변수 Y 의 확률질량함수는 $P(Y=y) = \frac{y-1}{6}$, $y=2, 3, 4$ 이다. 그리고 확률변수 $4-Y$ 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$4-Y$	0	1	2	합계
P	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

[3-1] 주머니 안에 세 개의 일반열쇠, 두 개의 황금열쇠, 총 다섯 개의 열쇠가 들어있다. 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내고, 확률질량함수를 구하시오.

[3-2] 주머니 안에 세 개의 일반열쇠, 두 개의 황금열쇠, 총 다섯 개의 열쇠가 들어있다. 확률변수 $6-Y$ 의 확률분포는 X 의 확률분포와 동일함을 보이시오.

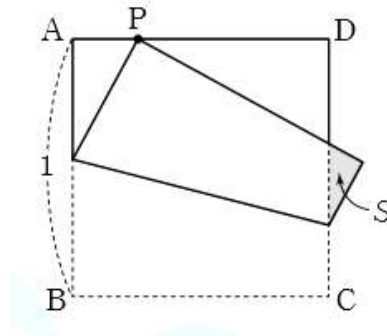
[3-3] 황금열쇠 두 개를 포함해서 주머니 안에 전체 열쇠의 개수가 9개인 경우에 대하여, $P(Y=5)$ 를 구하시오.



문제1. $\int_{\frac{e}{2}}^e \ln 2x dx$ 의 값은?

- ① $e \ln 2$ ② $e \ln 3$ ③ $2e \ln 2$ ④ $e \ln 5$ ⑤ $e \ln 6$

문제2. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 색종이가 있다. 선분 AD 위의 점 P에 대하여 점 B와 점 P가 일치하도록 색종이를 접었을 때, 정사각형 ABCD의 외부에 생기는 색칠한 도형의 넓이를 S 라 하자. S 의 값이 최대일 때, 선분 AP의 길이는?



- ① $\frac{-2+\sqrt{7}}{6}$ ② $\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$ ③ $\frac{-1+\sqrt{7}}{6}$
 ④ $\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$ ⑤ $\frac{-1+2\sqrt{7}}{6}$



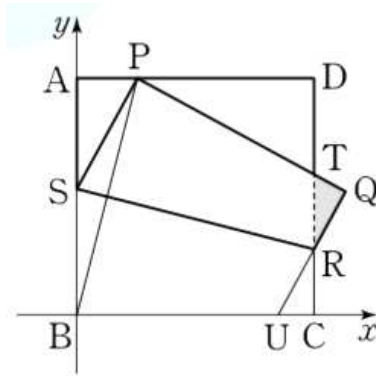
풀어보기(문제1) 정답 ① $e \ln 2$

$\int_{\frac{e}{2}}^e \ln 2x dx$ 에서 $f(x) = \ln 2x$, $g(x) = x$ 로 놓으면 $f'(x) = \frac{1}{2x} \times 2 = \frac{1}{x}$, $g'(x) = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{\frac{e}{2}}^e \ln 2x dx &= [x \ln 2x]_{\frac{e}{2}}^e - \int_{\frac{e}{2}}^e 1 dx \\ &= \left(e \ln 2e - \frac{e}{2} \ln e \right) - [x]_{\frac{e}{2}}^e \\ &= \left\{ e(\ln 2 + \ln e) - \frac{e}{2} - \left(e - \frac{e}{2} \right) \right\} \\ &= e \ln 2 + \frac{e}{2} - \frac{e}{2} = e \ln 2 \end{aligned}$$

풀어보기(문제2) 정답 ② $\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}$

그림과 같이 선분 BC가 x 축, 선분 AB가 y 축 위에 오도록 좌표평면에 놓으면 $A(0, 1)$, $B(0, 0)$, $C(1, 0)$, $D(1, 1)$



$\overline{AP} = t$ ($0 \leq t \leq 1$)이라 하면 $P(t, 1)$ 이고, 직선 SR은 선분 BP의 수직이등분선이다.

먼저 $t=0$ 또는 $t=1$ 이면 $S=0$ 이다. ㉠

$0 < t < 1$ 일 때 직선 BP의 기울기가 $\frac{1}{t}$ 이고, 선분 BP의 중점의 좌표가 $\left(\frac{t}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이므로 직

선 SR의 방정식은 $y - \frac{1}{2} = -t\left(x - \frac{t}{2}\right)$, 즉 $y = -tx + \frac{t^2 + 1}{2}$

이때 $S\left(0, \frac{t^2 + 1}{2}\right)$, $R\left(1, \frac{(t-1)^2}{2}\right)$ 이다.

직선 QR과 x 축이 만나는 점을 U라 하면 삼각형 TQR과 삼각형 UCR은 합동이다.



두 직선 PS와 QR은 서로 평행하므로 직선 QR의 방정식은

$$y - \frac{(t-1)^2}{2} = \frac{1-t^2}{2t}(x-1) \quad \text{즉, } y = \frac{1-t^2}{2t}x + \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{t^2-1}{2t}$$

따라서 점 U의 좌표는 $\left(\frac{t^2+1}{t+1}, 0\right)$ 이고

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{UC} \times \overline{CR} = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{t^2+1}{t+1}\right) \times \frac{(t-1)^2}{2} = \frac{t(1-t)^3}{4(1+t)} \quad (\text{단, } 0 < t < 1) \quad \text{..... ㉞}$$

㉞에서 $t=0$ 또는 $t=1$ 일 때 ㉞이 성립하므로

$$S = \frac{t(1-t)^3}{4(1+t)} \quad (\text{단, } 0 \leq t \leq 1)$$

S 를 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{4} \times \frac{\{(1-t)^3 - 3t(1-t)^2\}(1+t) - t(1-t)^3}{(1+t)^2} = \frac{(1-t)^2(1-4t-3t^2)}{4(1+t)^2}$$

$0 < t < 1$ 일 때 $\frac{dS}{dt} = 0$ 에서 $t = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$

$0 \leq t \leq 1$ 일 때 S 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$...	1
$\frac{dS}{dt}$		+	0	-	
S	0	↗	극대	↘	0

$t = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$ 일 때 S 의 값이 극대이면서 최대이므로 구하는 선분 AP의 길이는 $\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$ 이다.

[문항1] 대학발표 예시답안

[1-1] 등비급수의 합 공식으로부터 $\frac{1-r^n}{1-r} = 1+r+r^2+\dots+r^{n-1}$ 이다. 이를 이용하기 위해

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{(1-r^{1011})(1-r^{1012})(1-r^{1013}) \dots (1-r^{2020})}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3) \dots (1-r^{1010})}$$

에서 분모와 분자를 $(1-r)^{1010}$ 으로 나눈 후 극한값을 계산하면

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 1} \frac{(1-r^{1011})(1-r^{1012})(1-r^{1013}) \dots (1-r^{2020})}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3) \dots (1-r^{1010})} \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{(1+r+r^2+\dots+r^{1010})(1+r+\dots+r^{1011}) \dots (1+r+\dots+r^{2019})}{1(1+r)(1+r+r^2) \dots (1+r+\dots+r^{1009})} \\ &= \frac{1011 \times 1012 \times \dots \times 2020}{1 \times 2 \times \dots \times 1010} = {}_{2020}C_{1010} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $a=2020$, $b=1010$ 이 된다.

[1-2] $f(x) = x \ln x$ 라고 하면 $f'(x) = \ln x + 1$ 이므로, $y=f(x)$ 의 증감표는 다음과 같다.

x	\dots	$\frac{1}{e}$	\dots
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	감소	극소(최소)	증가

이로부터 $f(x)$ 는 $\frac{1}{e}$ 에서 최소가 됨을 알 수 있고, 따라서 $a=\frac{1}{e}$ 이다. 부분적분을 이용하면, $t > a$ 이므로

$$\int_{\frac{1}{e}}^t x \ln x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_{\frac{1}{e}}^t - \int_{\frac{1}{e}}^t \frac{1}{2} x dx = \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{t^2}{4} + \frac{3}{4e^2}$$

을 얻는다. 가정으로부터 $t > a$ 이고

$$\int_{\frac{1}{e}}^t x \ln x dx = \frac{3}{4e^2}$$

이므로

$$\int_{\frac{1}{e}}^t x \ln x dx - \frac{3}{4e^2} = \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{t^2}{4} = 0$$

을 얻는다. 그러므로 $\ln t = \frac{1}{2}$ 이고, 이로부터 $t = \sqrt{e}$ 이다.

[1-3] 두 매개곡선은 각각 원 $x^2 + y^2 = 12$ 와 포물선 $y = x^2$ 이다. 원 $x^2 + y^2 = 12$ 와 포물선 $y = x^2$ 의 교점을 구하기 위해 원의 방정식에 $y = x^2$ 을 대입하면 $(x^2)^2 + x^2 - 12 = 0$ 을 얻는다. 따라서 $x^2 = -4$ 또는 $x^2 = 3$ 이 되고, x 는 실수이므로, 두 교점은 $(-\sqrt{3}, 3)$ 과 $(\sqrt{3}, 3)$ 이다.

이로부터 직선 $y = L(x)$ 는 $y = mx + n = 3$ 임을 알 수 있다.

문제의 조건 (1)로부터 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ 이고, 가정에서 $\alpha < \beta < \gamma$ 이므로 $\alpha = -\sqrt{3}$, $\beta = 1$, $\gamma = \sqrt{3}$ 이다. 곡선 $y = f(x)$ 가 직선 $y = L(x) = 3$ 과 $x = \pm \sqrt{3}$, 1에서 만나므로



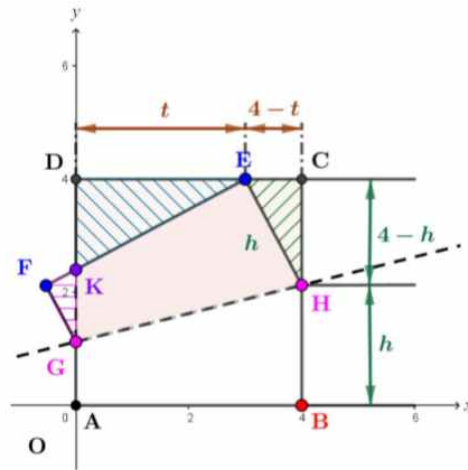
$$y = f(x) = a(x-1)(x^2-3)+3$$

이다. 문제의 조건 (2)를 이용하면

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx = 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3}a = 0$$

이므로 $a = -\frac{3}{2}$ 이다. 따라서 $a+b+c = f(1)-f(0) = 3 - \left(-\frac{3}{2} \times 3 + 3\right) = \frac{9}{2}$ 를 얻는다.

[문항2] 대학발표 예시답안



[2-1] 점 D로부터 점 E까지 이동한 거리를 t 라 하고 점 B로부터 점 H까지의 거리를 h 라 하자. 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 4이므로, 점 E와 점 C사이의 거리 $\overline{EC} = 4-t$, 점 C와 점 H사이의 거리 $\overline{CH} = 4-h$ 이다.

삼각형 $\triangle CEH$ 는 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의해,

$$h^2 = (4-t)^2 + (4-h)^2$$

$$\Rightarrow h^2 = (4-t)^2 + 16 - 8h + h^2$$

$$\Rightarrow 8h = (4-t)^2 + 16$$

$$\Rightarrow h = \frac{t^2 - 8t + 32}{8} \quad \text{or} \quad \frac{t^2}{8} - t + 4$$

이므로 H의 y 좌표는 $\frac{t^2}{8} - t + 4$ 이다.

[2-2] 삼각형의 닮음비는 닮은 삼각형의 대응하는 변의 길이의 비와 같다. 따라서, 세 삼각형 $\triangle CEH$, $\triangle DKE$, $\triangle FKG$ 의 닮음비는 세 변의 길이 \overline{CH} , \overline{DE} , \overline{FG} 의 비와 같다. $\overline{DE} = t$ 로 놓으면, [2-1]에서 구한 h 를 이용하여

$$\overline{CH} = 4-h = 4 - \frac{t^2 - 8t + 32}{8} = -\frac{t^2 - 8t}{8} \quad \text{or} \quad t - \frac{t^2}{8} \quad \text{or} \quad \frac{8t - t^2}{8}$$

이다. \overline{FG} 를 구하기 위해서는 사각형 $\square ABHG$ 와 사각형 $\square FEHG$ 는 합동이고 대각선 $\overline{EG} = \overline{BG}$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned} b^2 &= \overline{FG}^2 = \overline{AG}^2 \\ &= \overline{BG}^2 - \overline{AB}^2 \\ &= \overline{EG}^2 - 4^2 \\ &= \overline{ED}^2 + \overline{DG}^2 - 4^2 \\ &= t^2 + (4-b)^2 - 4^2, \\ b^2 &= t^2 + 16 - 8b + b^2 - 16 \\ \Rightarrow 8b &= t^2 \\ \Rightarrow b &= \frac{t^2}{8} \end{aligned}$$

따라서 세 삼각형 $\triangle CEH$ 와 $\triangle DKE$, 그리고 $\triangle FKG$ 의 닮음비는

$$\overline{CH} : \overline{DE} : \overline{FG} = \frac{8t-t^2}{8} : t : \frac{t^2}{8}$$

이므로 $a = \frac{8t-t^2}{8}$, $b = \frac{t^2}{8}$ 이다.

[2-3] 삼각형 $\triangle CEH$ 의 넓이 $f(t)$ 는

$$f(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{t(8-t)}{8} \cdot (4-t) = \frac{1}{16} t(8-t)(4-t) = \frac{1}{16} (t^3 - 12t^2 + 32t)$$

로 나타낼 수 있다. 3차 함수의 최댓값을 구하기 위해 미분을 이용한다.

$$f'(t) = \frac{1}{16} (3t^2 - 24t + 32)$$

$$\Rightarrow t = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 3 \cdot 32}}{3} = \frac{4}{3} (3 \pm \sqrt{3})$$

$0 \leq t \leq 4$ 이고, $t = \frac{4}{3} (3 - \sqrt{3})$ 에서 극댓값을 가지므로, $t = \frac{4}{3} (3 - \sqrt{3})$ 에서 $f(t)$ 는

최대가 된다. 따라서 점 E의 x 좌표는 $\frac{4}{3} (3 - \sqrt{3})$ 이다.

[문항3] 대학발표 예시답안

[3-1] X 가 될 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이다.

X	1	2	3	4
가능한 경우	●	○●	○○●	○○○●
확률	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{2}\right)$

● : 황금열쇠, ○ : 일반열쇠

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.



X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

확률변수 X 의 확률질량함수는 $P(X=x) = \frac{{}_3P_{x-1} \times {}_2P_1}{{}_5P_x} = \frac{5-x}{10}$, $x=1, 2, 3, 4$ 이다.

[별해] 첫 번째 황금열쇠를 찾아낼 때까지의 추출횟수를 x 라 놓고 확률을 구하면 5개의 열쇠 중 x 개를 순서대로 뽑으니 그 순열이 분모가 된다. 그리고 그 중 우선 황금열쇠가 아닌 2개 중 $x-1$ 개를 순서대로 뽑고 마지막 1개는 황금열쇠 2개 중에서 순서대로 뽑으니 두 순열의 곱이 분자가 된다. 따라서 확률변수 X 의 확률질량함수는 $P(X=x) = \frac{{}_3P_{x-1} \times {}_2P_1}{{}_5P_x} = \frac{5-x}{10}$ 이다.

[3-2] 확률변수 Y 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이다.

Y	2	3	4	5
가능한 경우				

Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	2	3	4	5	합계
$P(Y=y)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

확률변수 Y 의 확률질량함수는 $P(Y=y) = \frac{y-1}{10}$, $y=2, 3, 4, 5$ 이다.

6- Y 의 확률분포를 표로 나타내면 X 의 확률분포와 동일하다.

6- Y	1	2	3	4	합계
P	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$T=6-Y$ 라고 할 때, T 의 확률질량함수는

$$P(T=t) = \frac{(6-t)-1}{10} = \frac{5-t}{10}, \quad t=1, 2, 3, 4$$

이므로 X 의 확률질량함수와 동일함을 알 수 있다.

[별해]

$X-1$: 확률변수 X 는 첫 번째 황금열쇠를 찾을 때까지 추출 횟수이므로 황금열쇠를 하나 찾아낸 상태이다. 1은 남아있는 황금열쇠라고 생각한다면, $X-1$ 은 두 개의 황금열쇠를 찾았을 때, 남아있는 일반 열쇠의 수와 같다.

$5-Y$: 확률변수 Y 는 두 번째 황금열쇠를 찾아냈을 때까지 추출 횟수이므로 두 개의 황금열쇠를 모두 다 찾아낸 상태이다. 따라서 $5-Y$ 는 5개의 열쇠 중 남아있는 일반 열쇠의 수와 같다.

따라서 두 확률변수 $X-1$ 와 $5-Y$ 는 같으므로 X 의 확률분포와 $6-Y$ 의 확률분포는 동일하다.

[3-3]

$\bullet \circ \circ \circ \bullet$ Y 가 5가 되는 경우는 총 4가지이고 첫 번째 황금열쇠를 꺼낸 순서에
 $\circ \bullet \circ \circ \bullet$ 상관없이 확률은 모두 $\frac{1}{36}$ 로 동일하다. 그러므로
 $\circ \circ \bullet \circ \bullet$
 $\circ \circ \circ \bullet \bullet$ $P(Y=5) = \frac{1}{36} \times 4 = \frac{1}{9}$ 이다.

[별해]

열쇠의 개수	$P(Y=y) = a_n$
4	$P(Y=y) = \frac{y-1}{6} = \frac{y-1}{3C_2}, y=2, 3, 4$
5	$P(Y=y) = \frac{y-1}{10} = \frac{y-1}{4C_2}, y=2, 3, 4, 5$
6	$P(Y=y) = \frac{y-1}{5C_2}, y=2, 3, 4, 5, 6$
\vdots	\vdots
n	$P(Y=y) = \frac{y-1}{nC_2}, y=2, 3, \dots, n-1$

열쇠의 개수가 n 인 경우에 확률변수 Y 의 확률질량함수는

$$P(Y=y) = \frac{y-1}{nC_2}, y=2, 3, \dots, n-1$$

이다. 따라서 $n=9$ 인 경우에 $P(Y=5) = \frac{5-1}{9C_2} = \frac{1}{9}$ 이다.



16

서울과학기술대학교(오전) 수시¹⁶⁾

...



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
수열의 합, 로그의 성질, 포물선과 원의 성질, 점과 직선사이의 거리, 벡터의 내적, 분수함수의 미분법, 삼각함수의 합성, 부분적분법, 평균값 정리, 정적분의 성질	없음	수학 대문항 3개 (대문항 1개에 소문항 2~5개 내외)	100분

[문제 1] 다음 물음에 답하시오.

[1-1] 일반항이 $a_n = (n^2 + 7n + 12)^{\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)}$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^n \log a_k = -2$ 를 만하는 n 의 값을 구하시오.

[1-2] 서울투어버스는 출발지에서 오전 8시 정각부터 최대 10분 간 승객을 기다리고, 정원이 다 차면 곧바로 출발한다. 투어버스가 8시 t 분에 출발할 t 의 확률밀도함수는

$$f(t) = at^2 \quad (0 \leq t \leq 10)$$

이라고 하자.

(1) a 의 값을 구하시오.

(2) 지수가 8시 3분에 출발지에 도착해서 버스 정원이 다 차지 않은 것을 확인하고, 화장실에 다녀오니 8시 8분이었다. 이때, 지수가 버스에 탈 수 있는 확률을 구하시오.

[1-3] 점 P 는 포물선 $y^2 = 2x + 1$ 위를 움직이고 제1사분면에 있다. 원점 O , 점 $A(2, \sqrt{3})$, 점 P 로 만든 삼각형 OAP 둘레의 길이가 최소가 될 때, 점 P 에서의 접선을 l 이라고 하자. 그리고 중심이 $(t, 0) (t > 0)$ 이고 포물선 $y^2 = 2x + 1$ 에 접하는 원을 C 라고 하자. 원 C 위의 점과 접선 l 사이의 거리의 최솟값이 1일 때, t 의 값을 구하시오.



[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 제 1사분면에 있는 n 개의 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 에 가까운 직선 $y = tx$ ($t > 0$)를 찾고자 한다. 직선이 점들에 가까운 정도를 측정하기 위하여, 직선과 점들 사이의 오차를 다음과 같이 정의한다.

(나) 제시문 (가)에 주어진 n 개의 점과 직선 $y = tx$ 사이의 제곱오차를

$$L(t) = \sum_{i=1}^n (y_i - tx_i)^2$$

으로 정의하고, 제곱오차를 최소로 하는 직선을 **최소제곱오차직선**이라고 하자.

(다) 제시문 (가)에서 주어진 n 개의 점과 직선 $y = tx$ 사이의 거리제곱오차를

$$E(t) = \sum_{i=1}^n d_i^2$$

으로 정의하고, 거리제곱오차를 최소로 하는 직선을 **최소거리제곱오차직선**이라고 하자.(단, d_i 는 점 (x_i, y_i) 와 직선 $y = tx$ 사이의 거리이다.)

[2-1] 벡터 $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1, t)$ 와 점 (x_i, y_i) 의 위치벡터 $\vec{v}_i = (x_i, y_i)$ 에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$E(t) = \sum_{i=1}^n \left\{ \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i - (\vec{v}_i \cdot \vec{u})^2 \right\}$$

[2-2] 세 점 $(1, 1), (2, 3), (3, 2)$ 에 대하여 최소제곱오차직선과 최소거리제곱오차직선을 각각 구하시오.

[2-3] 제시문 (가)에 주어진 n 개의 점이 다음을 만족할 때, 최소제곱오차직선과 최소거리제곱오차직선을 각각 구하시오.

$$m_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{5}{2}, \quad m_Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{7}{2}, \quad m_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i = \frac{39}{4}$$

$$\sigma^2_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_X)^2 = \frac{5}{4}, \quad \sigma^2_Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - m_Y)^2 = \frac{5}{4}$$



[문제3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 정적분과 부등식

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때

$$f(x) \geq g(x) \text{ 이면 } \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

(나) 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족한다.

(1) 닫힌 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 연속이다.

(2) 열린 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 미분가능하다.

(3) 닫힌 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 $f'(x)$ 의 최댓값은 M 이고, 최솟값은 m 이다.

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx$$

[3-1] 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx$$

[3-2] 다음 등식에서 \boxed{A} 와 \boxed{B} 에 들어갈 식을 각각 구하시오.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{f(\boxed{A}) - f(\boxed{B})\}\sin x dx$$

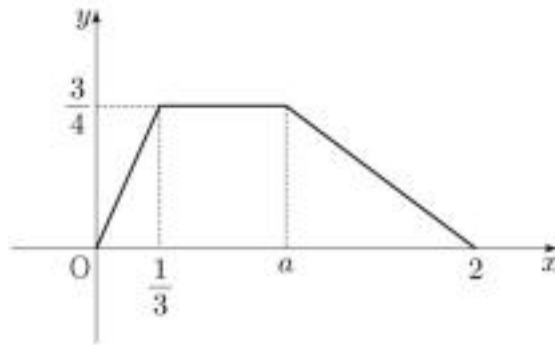
[3-3] 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)m \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx \leq \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)M$$



문제1. 연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq 2$ 이고, X 의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같을 때, $P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq a\right)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [3점]

(2019. 9월 평가원)



① $\frac{11}{16}$

② $\frac{5}{8}$

③ $\frac{9}{16}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{7}{16}$

문제2. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(1+x)=f(1-x), f(2+x)=f(2-x)$$

를 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 $f'(x)$ 가 연속이고, $\int_2^5 f'(x)dx=4$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점] (2019. 7월 전국연합)

<보 기>

ㄱ. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2)=f(x)$ 이다.

ㄴ. $f(1)-f(0)=4$

ㄷ. $\int_0^1 f(f(x))f'(x)dx=6$ 일 때, $\int_1^{10} f(x)dx=\frac{27}{2}$ 이다.

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



풀어보기(문제1) 정답 ④ $\frac{1}{2}$

$0 \leq x \leq 2$ 에서

확률밀도함수와 x 축으로 둘러싸인 사다리꼴의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \left(a - \frac{1}{3} + 2\right) = \frac{3}{8} \left(a + \frac{5}{3}\right) = 1 \text{에서 } a + \frac{5}{3} = \frac{8}{3} \text{ 따라서 } a = 1$$

$$P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq 1\right) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

풀어보기(문제2) 정답 ⑤ \neg, \perp, \sqsubset

$$\neg. f(2+x) = f(2-x) = f(1+(1-x)) = f(1-(1-x)) = f(x)$$

$$f(x+2) = f(x) \quad (\text{참})$$

$$\perp. \int_2^5 f'(x) dx = [f(x)]_2^5 = f(5) - f(2) = 4 \text{ 이고}$$

$$\neg \text{에 의하여 } f(2+x) = f(x) \text{ 이다. 즉, } f(2+3) = f(3) = f(2+1) = f(1)$$

$$\text{또, } f(2-x) = f(x), \text{ 즉 } f(2-0) = f(0) \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } f(5) = f(1) \text{ 이고 } f(2) = f(0) \text{ 이므로 } f(1) - f(0) = 4 \quad (\text{참})$$

$$\sqsubset. f(0) = a \text{ 라 하면, } \perp \text{에 의하여 } f(1) = a + 4$$

$$f(x) = t \text{ 라 치환하면 } \frac{dt}{dx} = f'(x) \text{ 이므로 } \int_0^1 f(f(x)) f'(x) dx = \int_{f(0)}^{f(1)} f(t) dt = 6$$

$$\neg, \perp \text{에 의하여 } \int_a^{a+4} f(t) dt = 6 = 2 \int_a^{a+2} f(t) dt \text{ 에서 } \int_0^2 f(t) dt = 3$$

$$\int_0^{10} f(x) dx = 5 \int_0^2 f(x) dx = 15$$

$$f(1+x) = f(1-x) \text{ 이므로 } \int_0^1 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx = \frac{3}{2}$$

$$\int_1^{10} f(x) dx = \int_0^{10} f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = 15 - \frac{3}{2} = \frac{27}{2} \quad (\text{참})$$

[문항1] 대학발표 예시답안

[1-1] $\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1}$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \log a_k &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \log(k+3)(k+4) \\ &= \log 4 + (-1)^{n+1} \log(n+4) \\ &= \begin{cases} \log 4(n+4) & n \text{이 홀수} \\ \log \frac{4}{n+4} & n \text{이 짝수} \end{cases}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $\sum_{k=1}^n \log a_k = -2$ 이려면 n 은 짝수이다. 즉, $\log \frac{4}{n+4} = -2$

이것은 $\frac{4}{n+4} = 10^{-2} = \frac{1}{100}$ 의미하므로 $n = 396$ 이다.

[1-2] 확률밀도함수의 성질에 의하여

$$\int_0^{10} at^2 dt = \frac{1000a}{3} = 1$$

따라서 $a = \frac{3}{1000}$ 이다.

또 8시 3분에 출발하지 않았을 확률은 $1 - \int_0^3 \frac{3}{1000} t^2 dt = 1 - \frac{27}{1000} = \frac{973}{1000}$ 이다.

8시 8분에 출발하지 않았을 확률은 $1 - \int_0^8 \frac{3}{1000} t^2 dt = 1 - \frac{512}{1000} = \frac{488}{1000}$ 이다.

따라서 8시 3분에 버스가 출발하지 않았을 때, 8시 8분까지 기다릴 확률은 $\frac{488}{973}$ 이다.

[1-3] 점 P가 점 A에서 포물선 $y^2 = 2x + 1$ 의 준선 $x = -1$ 에 내린 수선과 포물선의 교점일 때, 삼각형 OAP 둘레의 길이는 최소가 된다. 이때, 점 P는 $(1, \sqrt{3})$ 이며 점 P를 지나는 접선의 기울기는 포물선의 식을 미분하여 구할 수 있다. 즉, $2y \frac{dy}{dx} = 2$ 에서 $y = \sqrt{3}$ 을 대입하면 $\frac{dy}{dx} = 1$ 에서 접선의 기울기가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 임을 알 수 있다. 따라서 접선 l의 방정식은 $y - \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 1)$, 즉, $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ 이다.

원 C의 중심과 접선 l사이의 거리는 점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여 $\frac{t+2}{2}$ 이



고, 원 C와 접선 l 사이의 거리의 최솟값이 1이므로 $\frac{t+2}{2} = r+1 \cdots \textcircled{1}$ 이다.

또 원 C는 포물선에 접하므로 $(x-t)^2 + (y-0)^2 = r^2$ 에 $y^2 = 2x+1$ 을 대입한 식 $(x-t)^2 + 2x+1 = r^2$ 은 중근을 가진다. 따라서 판별식에 의해서 $2t = r^2 \cdots \textcircled{2}$

①, ②를 연립하면 $r=4$,이고 $t=8$ 을 구할 수 있다.

[문항2] 대학발표 예시답안

[2-1] 점 (x_i, y_i) 를 A_i 라고 하고, 점 A_i 로부터 직선 $y=tx$ 에 내린 수선의 발을 B_i 라 하자.

$\overrightarrow{OB_i}$ 는 \vec{u} 와 평행하므로 $\overrightarrow{OA_i}$ 와 \vec{u} 가 이루는 각을 θ 라 하면, $\overrightarrow{OB_i}$ 의 크기는

$$|\overrightarrow{OB_i}| = |\overrightarrow{OA_i}| \cos \theta = |\overrightarrow{OA_i}| |\vec{u}| \cos \theta = \vec{v_i} \cdot \vec{u}$$

이다. (참고로 $t > 0$ 이고, 점 A_i 는 제1사분면에 있기 때문에 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.)

피타고라스 정리에 의해

$$d_i^2 = |\overrightarrow{A_i B_i}|^2 = |\overrightarrow{OA_i}|^2 - |\overrightarrow{OB_i}|^2 = \vec{v_i} \cdot \vec{v_i} - (\vec{v_i} \cdot \vec{u})^2$$

이므로

$$E(t) = \sum_{i=1}^n \{ \vec{v_i} \cdot \vec{v_i} - (\vec{v_i} \cdot \vec{u})^2 \}$$

[2-2] 주어진 세 점에 대하여 제곱오차는

$$L(t) = (1-t)^2 + (3-2t)^2 + (2-3t)^2 = 14 - 26t + 14t^2$$

이므로 $\frac{dL}{dt} = -26 + 28t = 0$ 을 계산하면 $t = \frac{13}{14}$ 에서 최소이고, 최소제곱오차직선은

$$y = \frac{13}{14}x$$

이다. 주어진 세 점에 대하여 거리제곱오차는 $E(t) = \sum_{i=1}^n \{ \vec{v_i} \cdot \vec{v_i} - (\vec{v_i} \cdot \vec{u})^2 \}$ 을 적

용하여 계산하면

$$E(t) = 2 + 13 + 13 - \frac{1}{1+t^2} \{ (1+t)^2 + (2+3t)^2 + (3+2t)^2 \} = 28 - \frac{14+26t+14t^2}{1+t^2}$$

이므로 $\frac{dE}{dt} = \frac{26(t^2-1)}{(1+t^2)^2} = 0$ 에서 $E(t)$ 는 최소이다. 즉, $t=1(t>0)$ 에서 $E(t)$ 는 최소이다.

따라서 최소거리제곱오차직선은

$$y = x$$

이다.



[2-3] 주어진 n 개의 점에 대하여 제곱오차는

$$L(t) = \sum_{i=1}^n (y_i - tx_i)^2$$

이므로

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (y_i - tx_i)^2 = -2 \sum_{i=1}^n (x_i y_i - tx_i^2) = -2n \{m_{XY} - (\sigma_X^2 + m_X^2)t\} = -2n \left(\frac{39}{4} - \frac{15}{2}t \right)$$

이다. 그러므로 $t = \frac{13}{10}$ 에서 $L(t)$ 는 최소이고, 최소제곱오차곡선은

$$y = \frac{13}{10}x$$

이다. 한편 주어진 n 개의 점에 대하여 거리제곱오차는

$$E(t) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) - \frac{1}{1+t^2} \sum_{i=1}^n (x_i + ty_i)^2$$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{2n}{(1+t^2)^2} \left\{ \frac{t^2}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i) + \frac{t}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - y_i^2) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \right\} \\ &= \frac{2n}{(1+t^2)^2} [m_{XY}t^2 + \{(\sigma_X^2 + m_X^2 - (\sigma_Y^2 + m_Y^2))t - m_{XY}\}] \\ &= \frac{n}{(1+t^2)^2} \left(\frac{39}{2}t^2 - 12t - \frac{39}{2} \right) \end{aligned}$$

여기서 $\frac{n}{(1+t^2)^2} > 0$ 이므로 $E(t)$ 는 $t = \frac{4 + \sqrt{185}}{13}$ 에서 최솟값을 가진다.

따라서 최소거리제곱곡선은 아래와 같다.

$$y = \frac{4 + \sqrt{185}}{13}x$$

[문항3] 대학발표 예시답안

[3-1] 제시문 (나)의 (4)에 의해

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx \right\} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) (\sin x - \cos x) dx$$

그런데 $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) dx$$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) dx$$



[3-2] 정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx$$

이다. 우변의 첫 번째 정적분에서는 $\frac{\pi}{4} - x = y$ 로 치환하고, 두 번째 정적분에서는 $x - \frac{\pi}{4} = y$ 로 치환하여 계산하면

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 f\left(\frac{\pi}{4} - y\right) \sin(-y)(-dy) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4} + y\right) \sin y dy \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4} - y\right) \sin y dy + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4} + y\right) \sin y dy \end{aligned}$$

이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ f\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right\} \sin x dx$$

이다. 따라서 $\boxed{A} = \frac{\pi}{4} + x$, $\boxed{B} = \frac{\pi}{4} - x$ 이다.

[3-3] 문항 [3.1]과 [3.2]의 결과에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ f\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right\} \sin x dx$$

이다. 평균값 정리에 의하여 $f\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2xf'(c)$

를 만족하는 $c \in \left(\frac{\pi}{4} - x, \frac{\pi}{4} + x\right) \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 가 적어도 하나 존재한다. 또 제시문 (나)의 (3)에 의하여 $m \leq f'(c) \leq M$ 이다. 따라서 제시문 (가)에 의하여

$$\sqrt{2}m \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx \leq \sqrt{2}M \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x dx$$

이제 부분적분법을 이용하여 계산하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x dx = [-x \cos x + \sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

위의 식을 이용하여 최종적인 결과를 얻는다.

$$\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)m \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx \leq \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)M$$



17 서울과학기술대학교(오후) 수시17)

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
공간좌표, 이면각, 조건부 확률, 정적분의 성질 률의 정리, 평균값의 정리, 미분법 곡선의 길이, 움직인 거리, 접선 등	없음	수학 대문항 3개 (대문항 1개에 소문항 2~5개 내외)	100분

[문제 1] 다음 물음에 답하시오.

[1-1] 좌표공간에서 공간도형 $|x| + |y| + |z| = 1$ 의 이웃하는 두 면이 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta$ 의 값을 구하시오.

[1-2] 연아는 지하철을 이용하여 A역 또는 B역에 내린 후, 버스 또는 택시를 타고 등교한다. 연아가 A역에서 내릴 확률은 $\frac{4}{5}$ 이고, 이 경우 택시를 타고 등교할 확률은 $\frac{3}{10}$ 이다. 버스를 타고 등교했을 때, A역에 내릴 확률은 $\frac{9}{10}$ 이다. 연아가 B역에 내렸을 때, 버스를 타고 등교할 확률을 구하시오.

[1-3] 함수 $f(x)$ 가 구간 $[0, 2a]$ 에서 연속일 때,

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a \{f(x) + \boxed{A}\}dx$$

를 만족한다. \boxed{A} 에 알맞은 식을 구하고, 위의 식을 이용하여 다음 정적분의 값을 구하시오.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + 2020^{\sin x}} dx$$



[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 롤의 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a, b) 에서 미분가능할 때,

$f(a)=f(b)$ 이면, $f'(c)=0$ 인 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

(나) 함수 $f(x), g(x)$ 와 실수 k 에 대하여 $g(x)=e^{kx}f(x)$ 이면 방정식 $f(x)=0$ 과 $g(x)=0$ 의 실근은 같다.

(다) 함수 $f(x)$ 가 미분가능하고 $f'(x)$ 도 미분가능하면, 함수 $f(x)$ 는 두 번 미분가능하다고 한다.

[2-1] 함수 $f(x)$ 가 두 번 미분가능하고 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근이 $m(m \geq 3)$ 개이면, 방정식 $f''(x)=0$ 의 서로 다른 실근은 적어도 $m-2$ 개임을 보이시오.

[2-2] 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근이 세 개라고 하자. $g(x)=e^x f(x)$ 로 놓았을 때, $f''(0)=g''(0)=0$ 이면, 0이 방정식 $f(x)=0$ 의 근이 될 수 있는지, 없는지 설명하시오.

[2-3] 함수 $f(x)$ 가 두 번 미분가능하고 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 세 실근이면, 다음 방정식의 실근이 있음을 보이시오.

$$f(x)+6f'(x)+9f''(x)=0$$

[문제3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하십시오.

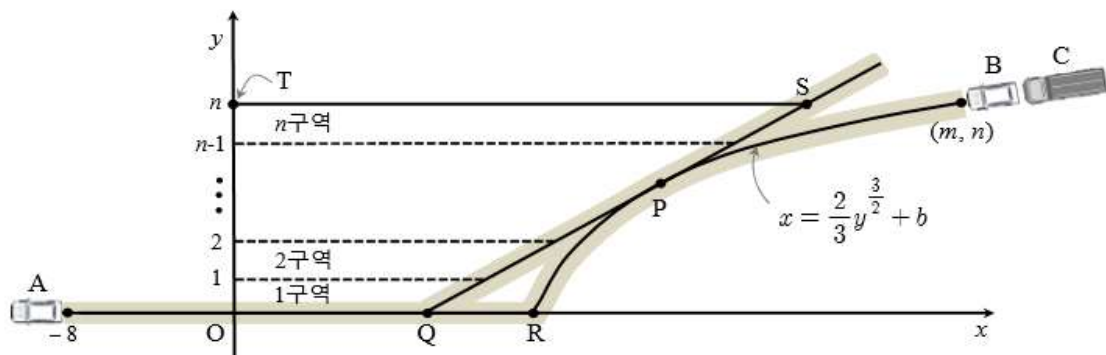
(가) 직선도로와 곡선도로가 xy 평면에 있다. 자동차 A가 점 $(-8, 0)$ 에서 출발하여 점 R까지 이동한 다음 원래의 위치로 되돌아온다. 출발한 지 t 분 후 자동차 A의 위치를 $(f(t), 0)$ 이라 할 때,

$$f(t) = \begin{cases} t-8 & (0 \leq t < 24) \\ -3t+88 & (24 \leq t \leq 32) \end{cases}$$

이다. (단, 도로의 폭은 무시한다.)

(나) 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선도로가 점 P에서 곡선도로와 접한다. 사다리꼴 OQST를 같은 간격으로 x 축과 평행한 n 개의 구역으로 나눈다. 점 (m, n) 은 곡선도로 위에 있고, m 과 n 은 자연수로 둘 중 하나는 10이하이다.

(다) 1 구역부터 n 구역까지 차례대로 보도블록을 놓는다. k 구역($1 \leq k \leq n$)에 최대한 놓을 수 있는 보도블록의 개수는 그 구역의 넓이를 소수 첫째 자리에서 반올림한 값이며, k 구역에 보도블록을 한 개 놓는 데 $0.1k$ 분 걸린다.



[3-1] 자동차 A가 출발한 지 10분 후부터 30분까지 이동한 거리와 점 (m, n) 을 구하시오.

[3-2] 자동차 B는 점 (m, n) 에서 출발하여 곡선도로를 따라 점 R에 도착한다고 할 때, 자동차 B의 이동거리를 구하시오.

[3-3] n 개의 구역 전체에 놓을 수 있는 보도블록의 개수를 구하시오.

[3-4] 트럭 C는 점 (m, n) 에서 출발하여 점 P 부터는 직선도로를 따라 이동한다. 트럭 C가 출발할 때, 보도블록을 놓기 시작해서 점 Q에 도착한 순간 모든 구역에 보도블록을 다 놓았다. 트럭 C가 이동하는데 걸린 시간과 이동거리를 구하시오.



문제1. 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수가 같으면 한 개의 동전을 4번 던지고, 나온 눈의 수가 다르면 한 개의 동전을 2번 던진다. 이 시행에서 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같을 때, 동전을 4번 던졌을 확률은?
(2017. 6월 평가원)

- ① $\frac{3}{23}$ ② $\frac{5}{23}$ ③ $\frac{7}{23}$ ④ $\frac{9}{23}$ ⑤ $\frac{11}{23}$

문제2. 정의역이 $\left\{x \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ 인 함수 $f(x) = \int_0^x \tan \theta d\theta$ 가 있다. $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 인 실수 t 에 대하여 $0 \leq x \leq t$ 일 때 곡선 $y = f(x)$ 의 곡선의 길이를 $l(t)$ 라 하자.
 $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left\{ l(t) + \ln \frac{\sin t}{f'(t)} \right\}$ 의 값은?

- ① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $\ln 4$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$



풀어보기(문제1) ① $\frac{3}{23}$

두 개의 주사위가 같은 눈이 나오는 사건을 A , 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같은 사건을 B 라고 하면 구하는 확률은

$\frac{P(B|A)}{P(B|A)+P(B|A^C)}$ 이고, 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같을 때는

다음과 같은 2가지 경우가 있다.

i) 서로 다른 2개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 같을 때

두 주사위의 눈의 수가 같을 확률은 $\frac{1}{6}$ 이고

동전을 4번 던졌을 때, 앞면과 뒷면이 각각 2번씩 나올 확률은 ${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$ 이므로

구하는 확률 $P(B|A) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{16}$ 이다.

ii) 서로 다른 2개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 다를 때

두 주사위의 눈의 수가 다를 확률은 $\frac{5}{6}$ 이고

동전을 2번 던졌을 때, 앞면과 뒷면이 각각 1번씩 나올 확률은 ${}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ 이므로

구하는 확률 $P(B|A^C) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$ 이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16} + \frac{5}{12}} = \frac{3}{23}$ 이다

풀어보기(문제2) ① $\ln 2$

$f(x) = \int_0^x \tan \theta d\theta$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $f'(x) = \tan x$

따라서 $0 \leq x \leq t$ 일 때 곡선 $y=f(x)$ 의 곡선의 길이 $l(t)$ 는

$$\begin{aligned} l(t) &= \int_0^t \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = \int_0^t \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \int_0^t \sqrt{\sec^2 x} dx = \int_0^t \sec x dx \\ &= \int_0^t \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^t \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int_0^t \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx \end{aligned}$$



이때 $\sin x = s$ 로 놓으면 $x=0$ 일 때 $s=0$, $x=t$ 일 때, $s=\sin t$ 이고 $\frac{ds}{dx} = \cos x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx &= \int_0^{\sin t} \frac{1}{1-s^2} ds = \int_0^{\sin t} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s} \right) ds \\ &= \frac{1}{2} [-\ln(1-s) + \ln(1+s)]_0^{\sin t} = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{1+s}{1-s} \right]_0^{\sin t} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left\{ l(t) + \ln \frac{\sin t}{f'(t)} \right\} &= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \ln \frac{\sin t}{\tan t} \right) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \ln \cos t \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t} + 2 \ln \cos t \right) = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \ln \cos^2 t \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln \left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t} \times \cos^2 t \right) = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln \left\{ \frac{1+\sin t}{1-\sin t} \times (1-\sin^2 t) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln(1+\sin t)^2 = \frac{1}{2} \ln 2^2 = \ln 2\end{aligned}$$

[문항1]

[1-1] 대학발표 예시답안

점 $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, -1, 0)$, $D(0, 1, 0)$ 그리고 M 을 A 와 B 의 중점이라 할 때, 정팔면체에서 이웃하는 두 면이 이루는 작은 선분 AB 와 수직인 두 선분 MC 와 MD 가 이루는 각이다. $\overrightarrow{MC} = \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{MD} = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$ 이므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}}{|\overrightarrow{MC}| |\overrightarrow{MD}|} = -\frac{1}{3}$$

(나침반 풀이)

좌표공간에서 공간도형 $|x| + |y| + |z| = 1$ 을 만족하는 도형은

$A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(-1, 0, 0)$, $E(0, -1, 0)$, $F(0, 0, -1)$ 을 꼭짓점으로 하는 정팔면체이다.

면 ABC 의 법선 벡터는 $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, 1)$ 이고, 면 ACD 의 법선 벡터는 $\overrightarrow{n_2} = (-1, 1, 1)$ 이다. 따라서 두 면의 이면각의 크기 θ 는 법선벡터가 이루는 각의 크기와 같다.



$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{1}{3}$$

참고) 대학풀이와 부호가 다른 것은 예각을 기준으로 했기 때문이다.

[1-2] 대학발표 예시답안

A역에 내릴 사건을 A, B역에 내릴 사건을 B, 버스를 탈 사건을 Bus, 택시를 탈 사건을 T라고 하면,

$$P(A) = \frac{4}{5}, P(B) = \frac{1}{5}, P(T|A) = \frac{3}{10}, P(Bus|A) = \frac{7}{10}, P(A|Bus) = \frac{9}{10}$$

따라서

$$\begin{aligned} P(Bus) &= P(A \cap Bus) + P(B \cap Bus) \\ &= P(A)P(Bus|A) + P(B)P(Bus|B) \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{5} P(Bus|B) \end{aligned}$$

$$\text{한편, } P(A|Bus) = \frac{P(A \cap Bus)}{P(Bus)} = \frac{\frac{4}{5} \times \frac{7}{10}}{\frac{4}{5} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{5} P(Bus|B)} = \frac{9}{10} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } P(Bus|B) = \frac{14}{45} \text{ 이다.}$$

[1-3] 대학발표 예시답안

정적분의 성질에 의하여 다음이 성립한다.

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx$$

위의 식에서 우변의 두 번째 식에서 $x-a=y$ 로 치환하면

$$\int_a^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(y+a)dy = \int_0^a f(x+a)dx$$

이다. 따라서 다음이 성립하다.

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx = \int_0^a (f(x) + f(x+a))dx$$

이다. 따라서 $\boxed{A} = f(x+a)$ 이다. ($\boxed{A} = f(2x-a)$ 도 가능하다.)

위의 등식에 의해

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{1+2020^{\sin x}} dx &= \int_0^{\pi} \left(\frac{\cos^2 x}{1+2020^{\sin x}} + \frac{\cos^2(x+\pi)}{1+2020^{\sin(x+\pi)}} \right) dx \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{\cos^2 x}{1+2020^{\sin x}} + \frac{\cos^2 x}{1+2020^{-\sin x}} \right) dx \end{aligned}$$



그런데 $\frac{1}{1+2020^{\sin x}} + \frac{1}{1+2020^{-\sin x}} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{1+2020^{\sin x}} dx &= \int_0^{\pi} \left(\frac{\cos^2 x}{1+2020^{\sin x}} + \frac{\cos^2 x}{1+2020^{-\sin x}} \right) dx \\ &= \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

[문항2] 대학발표 예시답안

[2-1] 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 m 개의 실근을 s_1, s_2, \dots, s_m ($s_1 < s_2 < \dots < s_m$)이라 하자. 함수 $f(x)$ 가 미분가능하고 $f(s_1)=f(s_2)=0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 s_1 과 s_2 사이에 $f'(t_1)=0$ 인 실수 t_1 이 적어도 하나 존재한다. 이와 같은 방법으로 $j=2, \dots, m-1$ 에 대하여 $f'(t_j)=0$ 인 t_j 가 s_j 와 s_{j+1} 사이에 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $f'(x)=0$ 의 근 t_1, t_2, \dots, t_{m-1} 이 $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots < t_{m-1} < s_m$ 을 만족하므로 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근은 적어도 $m-1$ 개 존재한다. 위와 같은 과정을 반복하면, $f'(x)$ 가 미분가능하고 방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근이 적어도 $m-1$ 개이므로 방정식 $f''(x)=0$ 은 적어도 $m-2$ 개의 서로 다른 실근을 가진다.

[2-2] 0은 $f(x)=0$ 의 실근이 될 수 없다. 왜냐하면 함수 $g(x)$ 를 두 번 미분하면

$$g''(x) = e^x \{f(x) + 2f'(x) + f''(x)\}$$

인테 $g''(0)=0$ 이고 $f''(0)=0$ 이므로 $0=f(0)+2f'(0)$ 이다. 만약 $f(0)=0$ 이면 $f'(0)=0$ 이다. 이것은 삼차방정식 $f(x)=0$ 가 중근을 가짐을 의미한다. 그런데 이것은 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가진다는 조건에 모순이 된다.

[2-3] 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 세 실근이 세 개이므로 $g(x)=e^{\frac{x}{3}}f(x)=0$ 도 서로 다른 세 실근을 가진다. 따라서 문항 [2.1]에 의하여 $g''(x)=0$ 의 실근을 적어도 하나 존재한다. 그런데 함수 $g(x)$ 를 두 번 미분하여 얻은 방정식은 다음과 같다.

$$g''(x) = \frac{1}{9}e^{\frac{x}{3}} \{f(x) + 6f'(x) + 9f''(x)\} = 0$$

위의 방정식이 적어도 하나의 실근을 가지므로 방정식 $f(x)+6f'(x)+9f''(x)=0$ 은 실근을 가진다.

[문항3] 대학발표 예시답안

[3-1] $t=24$ 일 때, 운동 방향이 바뀌므로 10분부터 30분까지 자동차 A가 이동한 거리는 다음과 같다.

$$|f(24)-f(10)| + |f(30)-f(24)| = |16-2| + |-2-16| = 32$$



$x = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + b$ 가 점 $(16, 0)$ 을 지나므로 $x = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + 16$ 이고 또 (m, n) 이 곡선 위의 점

이므로 $m = \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} + 16 > 10$ 이다. 따라서 $n \leq 10$ 인 자연수이고 n 의 제곱근이 3의 배수이므로 $n = 9$ 이다. 따라서 $(m, n) = (34, 9)$ 이다.

[3-2] 자동차 B의 이동거리는 곡선도로의 길이와 같으므로 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\int_0^9 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^9 \sqrt{1+y} dy = \frac{2}{3}(10\sqrt{10} - 1)$$

[3-3] 역함수의 미분법을 이용하여 계산하면 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ 이다. 그런데 점 P에서 기울기가

$\frac{1}{2}$ 이므로 $y = 4$ 이다. 따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{64}{3}, 4\right)$ 이다. 따라서 접선의 방정식은

$y = \frac{1}{2}x - \frac{20}{3}$ 이다. k 구역의 넓이는

$$\int_{k-1}^k \left(2y + \frac{40}{3}\right) dy = 2k + 12 + \frac{1}{3}$$

이므로 k 구역의 보도블록의 개수는 $2k + 12$ 개다. 따라서 모든 구역에 놓을 수 있는

보도블록의 개수는 $\sum_{k=1}^9 (2k + 12) = 198$ 개다.

[3-4] 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{40}{3}, 0\right)$ 이므로 선분 PQ의 길이는 $4\sqrt{5}$, 트럭 C의 이동거리는

$$\int_4^9 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy + 4\sqrt{5} = \int_4^9 \sqrt{1+y} dy + 4\sqrt{5} = \frac{20}{3}\sqrt{10} + \frac{2}{3}\sqrt{5}$$

모든 구역에 보도블록을 놓는데 걸린 시간은

$$\sum_{k=1}^9 (2k + 12)(0.1k) = 111$$

따라서 트럭이 이동하는데 걸린 시간도 111분이다.



18 서울시립대학교 모의18)

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
수열의 합, 정적분과 급수의 합, 삼각함수, 함수의 미분, 정적분	없음	수학 4문항	120분

[문항 1] (100점)

$1 \leq k \leq n$ 인 두 자연수 k, n 과 양수 a 에 대하여 $a_k = \sum_{l=1}^{2n} |k-l|^a$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 할 때,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{a+2}}$ 의 값을 구하여라.

[문항 2] (100점)

좌표평면에서 반지름의 길이가 1이고 중심이 원점 O 인 원에서 두 점 P, Q 가 움직인다. 시각 t 일 때 P, Q 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각은 각각 $4\cos 4t$, $8\cos 2t$ 이다. 삼각형 OPQ 의 넓이가 최대가 되는 t 의 개수를 구하여라. (단, $0 \leq t \leq 2\pi$)

[문항 3] (총 100점)

함수 $f(x) = x^3 - a^2x$ 의 그래프와 점 $P(x, f(x))$ 에 대하여, P 에서 x 축까지의 거리와 P 에서 y 축까지의 거리 중 크지 않은 값을 함숫값으로 하는 함수를 $g(x)$ 라 하자. 다음 물음에 답하여라. (단, $a \geq 0$ 이다.)

- a) a 의 범위에 따라 함수 $g(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 를 모두 구하여라. [60점]
 b) 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라. [40점]

[문항 4] (100점)

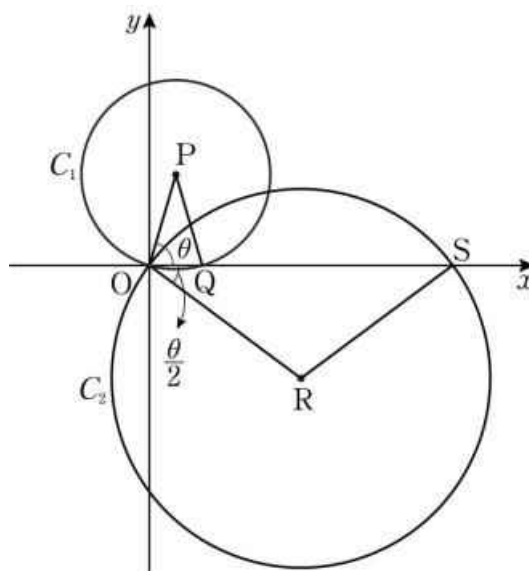
한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC 의 세 변 및 내부에 포함되는 직사각형 $PQRS$ 의 넓이의 최댓값을 구하여라.



문제1. 함수 $f(x) = 4x^3 + x$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)$ 의 값은? (2020. 대수능)

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

문제2. 그림과 같이 $\overline{OP} = 1$ 인 제1사분면 위의 점 P를 중심으로 하고 원점을 지나는 원 C_1 이 x 축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 Q라 하자. $\overline{OR} = 2$ 이고 $\angle ROQ = \frac{1}{2} \angle POQ$ 인 제4사분면 위의 점 R를 중심으로 하고 원점을 지나는 원 C_2 가 x 축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 S라 하자. $\angle POQ = \theta$ 라 할 때, 삼각형 OQP와 삼각형 ORS의 넓이의 합이 최대가 되도록 하는 θ 에 대하여 $\cos \theta$ 의 값은? (단, O는 원점이고, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.) (2015. 3월 전국연합)



- ① $\frac{-3+2\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$



문제3. $0 < x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $4\cos^2 x - 1 = 0$ 과 부등식 $\sin x \cos x < 0$ 을 동시에 만족시키는 모든 x 의 값의 합은? (2020. 대수능)

- ① 2π ② $\frac{7}{3}\pi$ ③ $\frac{8}{3}\pi$ ④ 3π ⑤ $\frac{10}{3}\pi$

문제4. 함수 $f(x) = kx^2 e^{-x}$ ($k > 0$)과 실수 t 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서 x 축까지의 거리와 y 축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k 의 최댓값은? (2013. 대수능)

- ① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ \sqrt{e} ⑤ e



풀어보기(문제1) 정답 ④

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{2k}{n}\right) &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{n} f\left(\frac{2k}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 (4x^3 + x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[x^4 + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 \\
 &= \frac{1}{2} \times 18 = 9
 \end{aligned}$$

풀어보기(문제2) 정답 ⑤

점 P의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 이므로 삼각형 OQP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\cos\theta \times \sin\theta = \sin\theta \cos\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

점 R의 좌표는 $\left(2\cos\frac{\theta}{2}, -2\sin\frac{\theta}{2}\right)$ 이므로 삼각형 ORS의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4\cos\frac{\theta}{2} \times 2\sin\frac{\theta}{2} = 4\sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} = 2\sin\theta$$

따라서 삼각형 OQP와 삼각형 ORS의 넓이의 합을 $f(\theta)$ 라 하면

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \sin 2\theta + 2\sin\theta$$

이므로

$$f'(\theta) = \cos 2\theta + 2\cos\theta = 2\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1$$

이므로

$$f'(\theta) = 0 \text{ 에서 } \cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 에서 } \cos\theta > 0 \text{ 이므로 } \cos\theta = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

$f'(\theta) = 0$ 인 θ 의 값을 $\theta_1 \left(0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}\right)$ 라 할 때, $f(\theta)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	...	θ_1	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		\nearrow	$f(\theta_1)$	\searrow	

그러므로 $f(\theta)$ 는 $\theta = \theta_1$ 에서 극대이면서 최대이다.

따라서 $f(\theta)$ 가 최대가 되도록 하는 θ 에 대하여 $\cos\theta$ 의 값은 $\cos\theta = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ 이다.

풀어보기(문제3) 정답 ②

$4\cos^2 x - 1 = 0$ 에서 $(2\cos x + 1)(2\cos x - 1) = 0$ 이다.

즉, $\cos x = -\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x = \frac{1}{2}$ 이므로 $0 < x < 2\pi$ 에서 이를 만족하는 x 의 값은

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

한편, $\sin x \cos x < 0$ 이므로 x 는 제 2사분면의 각 또는 제 4사분면의 각이다.

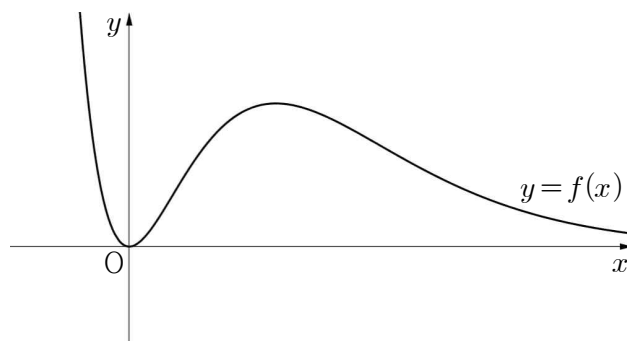
따라서 구하는 x 의 값은 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$ 이므로 모든 x 의 값의 합은 $\frac{7}{3}\pi$ 이다.

풀어보기(문제4) 정답 ⑤

$f(x) = kx^2 e^{-x} (k > 0)$ 에서

$$f'(x) = 2kx e^{-x} - kx^2 e^{-x} = kx(2-x)e^{-x}$$

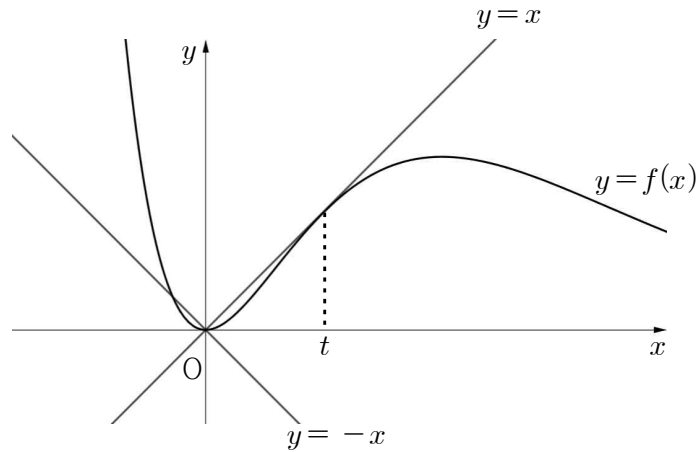
$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$



x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	0	\nearrow	$\frac{4k}{e^2}$	\searrow



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서 x 축까지의 거리와 y 축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$ 라 하므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x, y=-x$ 와 만나는 교점을 찾는다.



이때, 미분가능하지 않은 점이 한 곳만 있으려면 $x>0$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 가 만나지 않거나 접해야 한다.

접점의 좌표를 $(t, f(t))$ 라 하면

$$kt^2e^{-t} = t \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이고

$x=t$ 에서 접선의 기울기가 1이므로

$$kt(2-t)e^{-t} = 1 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $2-t=1 \therefore t=1 \therefore k=e$

따라서 k 의 최댓값은 e 이다.

[문항1] 대학발표 예시답안

$$a_1 = 0+1+2^a+3^a+\dots+(2n-1)^a$$

$$a_2 = 1+0+1+2^a+\dots+(2n-2)^a$$

\vdots

$$a_n = (n-1)^a+(n-2)^a+\dots+1+0+1+2^a+\dots+n^a$$

이다. 따라서 $1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq 2n, 0 \leq m \leq 2n-1$ 에 대해 $|k-l|=m$ 인 두 자연수의 순서쌍 (k, l) 의 개수는 다음과 같다.

[1] $m=0$ 인 것은 $(1,1), (2,2), \dots, (n,n)$ 로 모두 n 개 이다.

[2] $1 \leq m \leq n-1$ 인 것은

$$(m+1,1), (m+2,2), \dots, (n,n-m), (1,m+1), \dots, (n,n+m)$$

의 $2n-m$ 개 이다.

[3] $n \leq m \leq 2n-1$ 인 것은 $(1,m+1), (2,m+2), \dots, (2n-m,2n)$ 의 $2n-m$ 개 이다.



따라서 $S_n = \sum_{m=1}^{2n-1} (2n-m)m^a = \sum_{m=1}^{2n} (2n-m)m^a$ 이므로

$$\frac{S_n}{n^{a+2}} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(2n-m)m^a}{n^{a+2}} = 2 \sum_{m=1}^{2n} \left(\frac{m}{n}\right)^a \frac{1}{n} - \sum_{m=1}^{2n} \left(\frac{m}{n}\right)^{a+1} \frac{1}{n}$$

이다. 또 정적분과 무한급수의 관계에 의해 $[0, 1]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n f\left(\frac{m}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx$$

이므로 치환적분에 의해

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n+1}^{2n} f\left(\frac{m}{n}\right) \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n f\left(1 + \frac{m}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 f(1+x) dx = \int_1^2 f(x) dx$$

이고,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{2n} f\left(\frac{m}{n}\right) \frac{1}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n f\left(\frac{m}{n}\right) \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n+1}^{2n} f\left(\frac{m}{n}\right) \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{a+2}} = 2 \int_0^2 x^a dx - \int_0^2 x^{a+1} dx = \frac{2^{a+2}}{(a+1)(a+2)}$$

이다.

[문항2] 대학발표 예시답안

[예시답안1]

시각 t 일 때 삼각형 OPQ 의 넓이는 $\frac{1}{2} |\sin(4\cos 4t - 8\cos 2t)|$ 이다.

$f(t) = 4\cos 4t - 8\cos 2t$ 라 하면

$f'(t) = -16\sin 4t + 16\sin 2t = -32\sin 2t \cos 2t + 16\sin 2t = -16\sin 2t(2\cos 2t - 1)$ 이다.

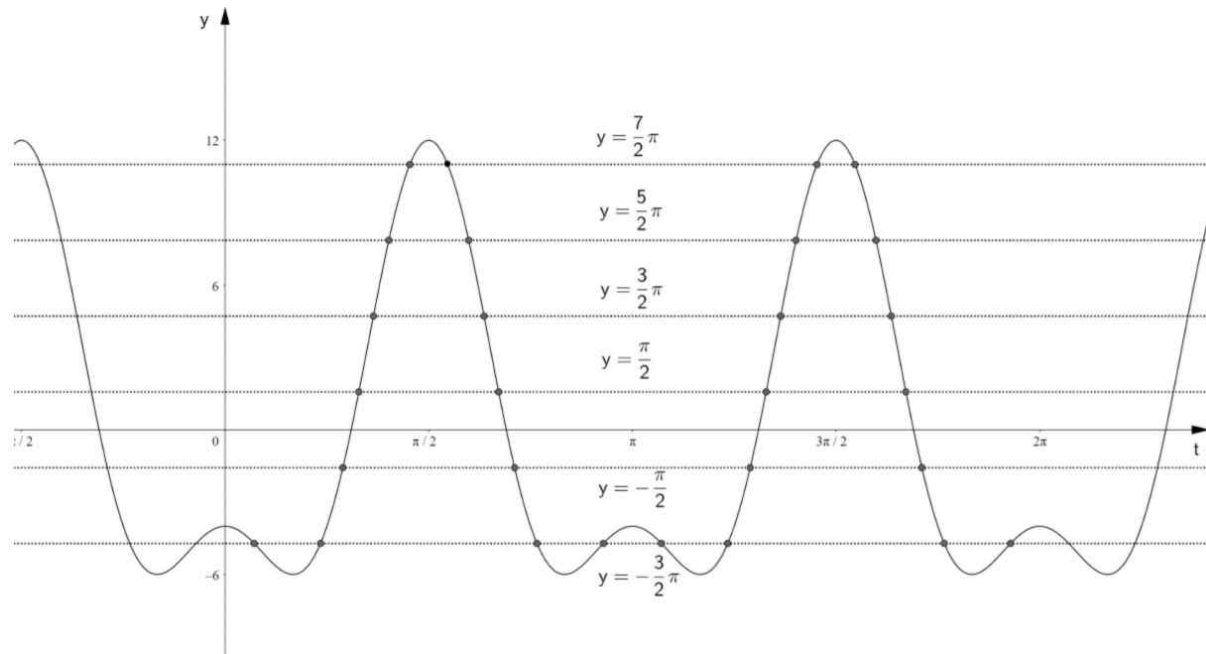
$f'(t) = 0$ 이면 $\sin 2t = 0$ 또는 $\cos 2t = \frac{1}{2}$ 이다.

$\sin 2t = 0$ 에서 $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ 이고 $\cos 2t = \frac{1}{2}$ 에서 $t = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ 이다.



t	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{\pi}{2}$...	$\frac{5}{6}\pi$...	π	...	$\frac{7}{6}\pi$...	$\frac{3}{2}\pi$...	$\frac{11}{6}\pi$...	2π
$f'(t)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0
$f(t)$	-4	↘	-6	↗	12	↘	-6	↗	-4	↘	-6	↗	12	↘	-6	↗	-4

$y = f(t)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



삼각형 OPQ의 넓이는 $f(t) = \frac{(2n+1)}{2}\pi$ ($n = -2, -1, 0, 1, 2, 3$)을 만족하는 t 에서 최댓값을 갖는다. 그래프 개형에서 교점의 개수를 세면 총 28개이다.

[예시답안2]

시각 t 일 때 삼각형 OPQ의 넓이는 $\frac{1}{2} |\sin(4\cos 4t - 8\cos 2t)|$ 이다.

$x = \cos 2t$ 라 하면 $\cos 4t = 2x^2 - 1$ 이므로 $4\cos 4t - 8\cos 2t = 8x^2 - 8x - 4$ 이다.

$f(x) = 8x^2 - 8x - 4 = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 6$ 라 하면 $f(-1) = 12$, $f(1) = -4$ 이고 $\frac{7}{2}\pi < 12 < \frac{9}{2}\pi$,

$4 < \frac{3}{2}\pi < 5$, $7 < \frac{5}{2}\pi < 8$ 이므로 $[-1, 1]$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = \frac{(2n+1)}{2}\pi$ 가

만나도록 하는 정수 n 의 값과 교점의 개수는 $n = -2$ 일 때 2이고 $n = -1, 0, 1, 2, 3$ 일 때 각각 1로 교점은 모두 7개이고 교점의 x 좌표의 절댓값은 1보다 작다.

또 $0 \leq t \leq 2\pi$ 에서 $|a| < 1$ 에 대하여 $\cos 2t = a$ 인 t 는 모두 4개다.

따라서 구하는 값은 $7 \times 4 = 28$ 이다.

[문항3] 대학발표 예시답안

점 $P(x, x^3 - a^2x)$ 에서 x 축까지의 거리는 $|x^3 - a^2x|$ 이고 P 에서 y 축까지의 거리는 $|x|$ 이다. 또

$$|x^3 - a^2x| < |x| \Leftrightarrow |x^2 - a^2| < 1 \Leftrightarrow a^2 - 1 < x^2 < a^2 + 1$$

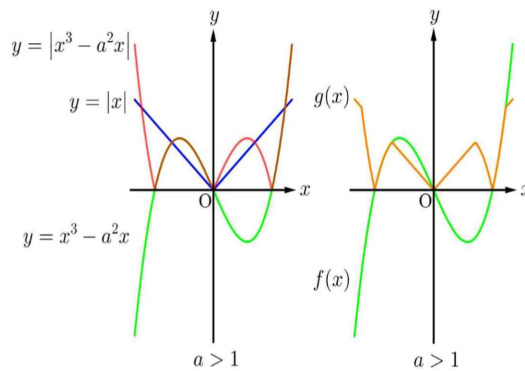
이므로 다음이 성립한다.

[1] $a > 1$ 일 때

$$|x^3 - a^2x| < |x| \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - 1} < |x| < \sqrt{a^2 + 1} \quad \text{이므로}$$

$$g(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \geq \sqrt{a^2 + 1} \\ |x^3 - a^2x|, & \sqrt{a^2 - 1} < |x| < \sqrt{a^2 + 1} \\ |x|, & |x| \leq \sqrt{a^2 - 1} \end{cases}$$

이다.

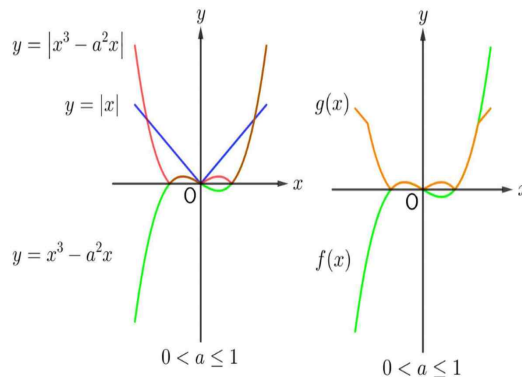


[2] $0 < a \leq 1$ 일 때

$$|x^3 - a^2x| < |x| \Leftrightarrow |x| < \sqrt{a^2 + 1} \quad \text{이므로}$$

$$g(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \geq \sqrt{a^2 + 1} \\ |x^3 - a^2x|, & |x| < \sqrt{a^2 + 1} \end{cases}$$

이다.

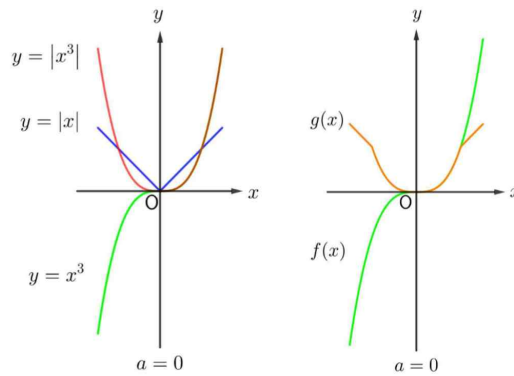




[3] $a=0$ 일 때

$$g(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \geq 1 \\ |x^3|, & |x| < 1 \end{cases}$$

이다.



또 방정식 $x^3 - a^2x = 0$ 의 근은 $0, \pm a$ 이다.

a) 위의 결과에 의해 a 의 값의 범위에 따라 $g(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 는 다음과 같다.

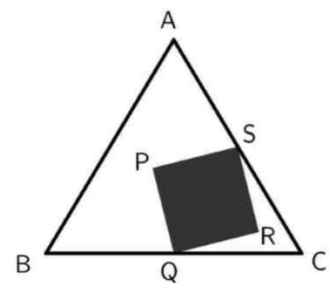
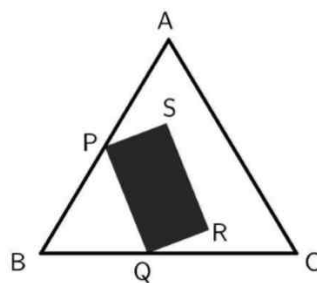
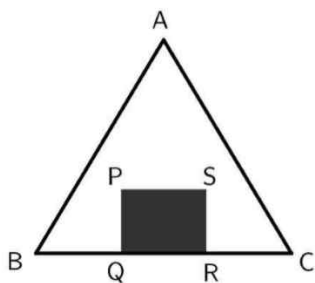
a	$a > 1$	$0 < a \leq 1$	$a = 0$
x	$0, \pm \sqrt{a^2 - 1}, \pm a, \pm \sqrt{a^2 + 1}$	$0, \pm a, \pm \sqrt{a^2 + 1}$	± 1

b) 위에서 그린 그래프를 보면 둘러싸인 영역의 넓이는 모든 경우에 대해

$$2 \int_0^a (a^2x - x^3) dx = \frac{a^4}{2} \text{ 이다.}$$

[문항4] 대학발표 예시답안

직사각형의 네 꼭짓점 중 많아야 한 개가 정삼각형의 변에 있으면 직사각형이 정삼각형 내부에 포함되도록 직사각형의 가로와 세로의 길이를 키울 수 있다. 또 직사각형의 네 꼭짓점 중 2개만이 정삼각형의 변에 있으면, 직사각형의 네 꼭짓점 중 많아야 한 개가 정삼각형의 변에 있도록 평행이동 할 수 있다.



따라서 직사각형의 네 꼭짓점 중 적어도 3개가 정삼각형의 변에 있을 때, 직사각형 넓이의 최댓값을 구하면 된다. 두 꼭짓점이 한 변에 있는 경우 다른 두 꼭짓점은 이미 삼각형의 다른 두 변에 있거나 다른 두 변에 있도록 키울 수 있다. 따라서 직사각형 PQRS에서 P는 선분 AB, Q는 선분 BC, R은 선분 CA에 있다고 하여도 무방하다. P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 점 H, $a = \overline{BQ}$, $\theta = \angle PQB$ 라 하자. 이때 다음이 성립한다.

[1] 꼭짓점 S는 삼각형 ABC의 변 또는 내부에 있으므로

$$\angle APQ = \angle PBQ + \angle PQB = \frac{\pi}{3} + \theta \geq \frac{\pi}{2}, \quad \angle ARQ = \angle RCQ + \angle RQC = \frac{\pi}{3} + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \geq \frac{\pi}{2}$$

이다. 따라서 $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ 이다.

[2] $\overline{BP} \sin \frac{\pi}{3} = \overline{PH} = \overline{PQ} \sin \theta$ 이므로 $\overline{BP} = \overline{PQ} \sin \theta \times \frac{2}{\sqrt{3}}$ 이다.

[3] $a = \overline{BQ} = \overline{BH} + \overline{HQ} = \overline{BP} \cos \frac{\pi}{3} + \overline{PQ} \cos \theta$ 이므로 $\overline{PQ} \left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{3}} + \cos \theta \right) = a$ 이다.

같은 방법으로 $\overline{QR} \left\{ \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{\sqrt{3}} + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right\} = \overline{QR} \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} + \sin \theta \right) = 1 - a$ 이다. 따라서

$$\overline{PQ} \left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{3}} + \cos \theta \right) \times \overline{QR} \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} + \sin \theta \right) = a(1-a) \text{ 이고}$$

$$\left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{3}} + \cos \theta \right) \times \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} + \sin \theta \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4 \sin \theta \cos \theta}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2 \sin 2\theta}{3} \text{ 이므로}$$

$$\overline{PQ} \times \overline{QR} = \frac{3a(1-a)}{\sqrt{3} + 2 \sin 2\theta} \text{ 이다.}$$

또 $a(1-a) = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ 이고, $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ 이므로 $2\sqrt{3} \leq \sqrt{3} + 2 \sin 2\theta \leq \sqrt{3} + 2$ 이다.

따라서 $\overline{PQ} \times \overline{QR} \leq \frac{3}{4} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{8}$ 이고 등호는 $a = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{6}$ 또는 $a = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}$ 일

때 성립한다. 그러므로 구하는 최댓값은 $\frac{\sqrt{3}}{8}$ 이다.



19

서울시립대학교 수시¹⁹⁾

...



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
경우의 수, 수열의 합, 합성함수의 미분, 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이, 정적분의 정의, 정적분의 활용, 부분적분법, 공간좌표, 공간벡터	수능최저학력기준 없음.	수학(4문항, 5문제)	120분

[문제 1] 자연수 n 에 대하여 방정식 $x+y+z=n+2$ 를 만족시키는 세 자연수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 전체의 집합을

$$\{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_m, y_m, z_m)\}$$

이라 하자. $\sum_{k=1}^m (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)$ 을 n 에 대하여 인수분해된 식으로 나타내어라. [100점]

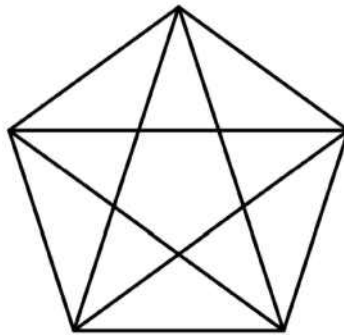
[문제 2] 좌표평면에서 초점이 F인 포물선 $y = \frac{1}{4}x^2$ 의 제1사분면에 있는 임의의 점을 P라고 하고, $\theta = \angle OFP$ 라 하자. 두 선분 FO, FP와 포물선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $S'(\frac{\pi}{3})$ 의 값을 구하여라. (단, O는 원점이다.) [100점]



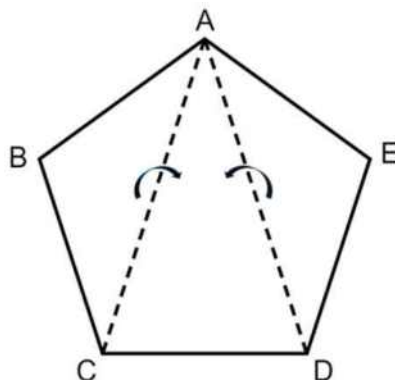
[문제 3] 자연수 n 에 대하여 닫힌 구간 $[0, \pi]$ 에서 곡선 $y = e^{-x} \sin nx$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값을 구하여라. [100점]

[문제 4] 다음 물음에 답하여라. [100점]

(a) 한 변의 길이가 2인 정오각형의 대각선의 길이를 구하여라. (30점)



(b) 정오각형 ABCDE에서 두 대각선 AC와 AD를 따라 두 삼각형 ABC와 ADE를 두 선분 AB와 AE가 일치하도록 접고 두 점 B와 E가 만나는 점을 P라고 하자. 두 면 PAC와 PAD가 이루는 이면각의 크기를 θ 라고 하면 $\cos \theta = a + b\sqrt{5}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a 와 b 는 유리수이다.) (70점)





문제1. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는? [4점] (2018. 9월 평가원)

(가) $x + y + z = 10$

(나) $0 < y + z < 10$

① 39

② 44

③ 49

④ 54

⑤ 59

문제2. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(4, f(4))$ 에서의 접선 l 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 l 은 제2사분면을 지나지 않는다.

(나) 직선 l 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형은 넓이가 2인 직각이등변삼각형이다.

함수 $g(x) = xf(2x)$ 에 대하여 $g'(2)$ 의 값은? [4점] (2018. 3월 전국연합)

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

문제3. 두 곡선 $y = (\sin x) \ln x$, $y = \frac{\cos x}{x}$ 와 두 직선 $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점] (2019. 4월 전국연합)

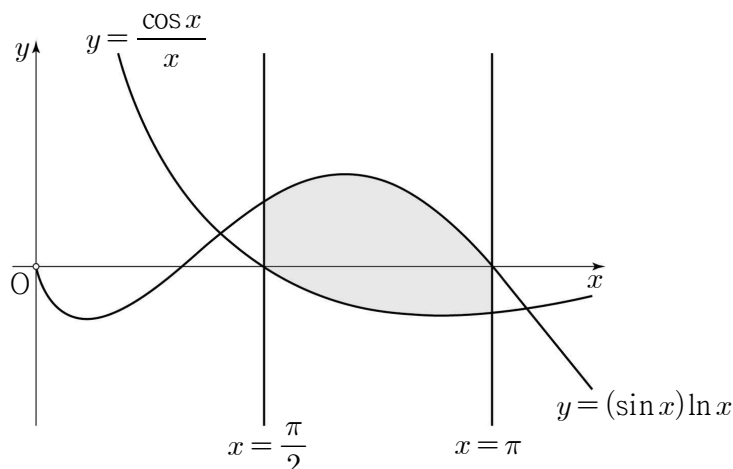
① $\frac{1}{4} \ln \pi$

② $\frac{1}{2} \ln \pi$

③ $\frac{3}{4} \ln \pi$

④ $\ln \pi$

⑤ $\frac{5}{4} \ln \pi$





풀어보기(문제1) 정답 ④

조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$${}_3H_{10} = {}_{3+10-1}C_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = 66$$

(i) $y+z=0$ 인 순서쌍 (x, y, z) 는 $(10, 0, 0)$ 의 경우 1(가지)

(ii) $y+z=10$ 인 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$${}_2H_{10} = {}_{2+10-1}C_{10} = {}_{11}C_{10} = 11 \text{ (가지)}$$

따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$$66 - 1 - 11 = 54 \text{ (가지)}$$

풀어보기(문제2) 정답 ④

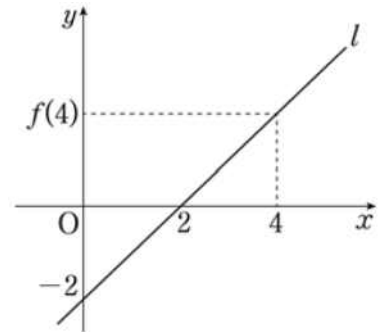
조건 (가)에서 직선 l 이 제2사분면을 지나지 않고, 조건 (나)에서 직선 l 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형인 직각이등변삼각형의 넓이가 2이므로 그림과 같이 직선 l 의 x 절편과 y 절편은 각각 2, -2 이다.

함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(4, f(4))$ 에서의 접선 l 은 기울기가 1이고, 점 $(2, 0)$ 을 지나므로 직선 l 의 방정식은 $y=x-2$ 이다.

따라서 $f(4)=2$, $f'(4)=1$ 이다.

$g(x)=xf(2x)$ 에서 $g'(x)=f(2x)+2xf'(2x)$ 이므로

$$g'(2)=f(4)+4f'(4)=2+4=6$$



풀어보기(문제3) 정답 ④

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left\{ (\sin x) \ln x - \frac{\cos x}{x} \right\} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x) \ln x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx \\ &= \left\{ \left[(-\cos x) \ln x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\frac{\cos x}{x} \right) dx \right\} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx \\ &= \left[(-\cos x) \ln x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \ln \pi \end{aligned}$$



[문제 1] 대학발표 예시답안

(a, b, c) 가 주어진 집합의 원소이면 a, b, c 의 순서를 바꿔도 주어진 집합의 원소가

되므로 $\sum_{k=1}^m x_k^2 = \sum_{k=1}^m y_k^2 = \sum_{k=1}^m z_k^2$ 이다. 따라서 $\sum_{k=1}^m (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) = 3 \sum_{k=1}^m x_k^2$ 이다.

$x_k = l$ ($l = 1, 2, 3, \dots, n$) 일 때 가능한 y_k, z_k 의 순서쌍 (y_k, z_k) 는

$$(1, n-l+1), (2, n-l), \dots, (n-l+1, 1)$$

로 총 $(n-l+1)$ 개다. 따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m x_k^2 &= \sum_{l=1}^n l^2 (n-l+1) = (n+1) \sum_{l=1}^n l^2 - \sum_{l=1}^n l^3 \\ &= \frac{(n+1)n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12} \end{aligned}$$

이므로 $\sum_{k=1}^m (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) = 3 \sum_{k=1}^m x_k^2 = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{4}$ 이다.

[문제 2] 대학발표 예시답안

포물선의 초점의 좌표는 $F(0, 1)$ 이다. 점 P 를 $\left(t, \frac{1}{4}t^2\right)$ ($t > 0$)라 하자.

점 P 에서 y 축에 내린 수선의 발을 Q 라 하면, $\overline{PQ} = t$, $\overline{FP} = 1 + \frac{1}{4}t^2$ 이므로,

$$\sin \theta = \frac{\overline{PQ}}{\overline{FP}} = \frac{t}{1 + \frac{1}{4}t^2} = \frac{4t}{4 + t^2}, \quad \cos \theta = \frac{4 - t^2}{4 + t^2}$$

이다. 이 식을 t 에 관하여 풀면 $t = \frac{2(1 - \cos \theta)}{\sin \theta}$ 이고 $\frac{dt}{d\theta} = \frac{2}{1 + \cos \theta}$ 이다.

합성함수의 미분법에 의해 $\frac{dS}{d\theta} = \frac{dS}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta}$ 이다. $S(\theta)$ 를 t 에 관한 식으로 나타내면

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4}t^2\right)t - \int_0^t \frac{1}{4}x^2 dx = \frac{1}{24}t^3 + \frac{1}{2}t$$

이므로 $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{2}$ 이다.

$\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때 $t = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{dt}{d\theta} = \frac{4}{3}$, $\frac{dS}{dt} = \frac{2}{3}$ 이므로 $S'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$ 이다.



[나침반 풀이]

포물선의 초점 $F(0, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \left\{ \tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right\} x + 1 = -(\cot\theta)x + 1$$

이다. 이 직선과 $y = \frac{1}{4}x^2$ 이 만나는 교점 P 의 x 좌표는 방

정식 $\frac{1}{4}x^2 = -(\cot\theta)x + 1$ 의 해이므로

$$x = -2\cot\theta + 2\csc\theta = \frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\theta} \quad (\because \text{점 } P \text{ 는 제1사분면에 있는 점})$$

이다.

한편, $\int_{\alpha}^{\beta} |a(x-\alpha)(x-\beta)| dx = \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ 임을 이용하여 $y = \frac{1}{4}x^2$ 과 \overline{OP} 로 둘러싸인

도형의 넓이는 $\frac{1}{3}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^3$ 이고, $\triangle OPF$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ 이다.

따라서 $S(\theta) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^3 + \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ 이므로

$$\begin{aligned} S'(\theta) &= \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \times \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)' + \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)' \\ &= \left\{ \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + 1 \right\} \times \frac{1}{1+\cos\theta} \end{aligned}$$

이다. 그러므로 $S'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left\{ \left(\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1 \right\} \times \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{8}{9}$ 이다.

[문제 3] 대학발표 예시답안

$S_n = \int_0^{\pi} |e^{-x} \sin nx| dx$ 이다. 닫힌 구간 $[0, \pi]$ 에서 방정식 $e^{-x} \sin nx = 0$ 의 근은

$$x = 0, \frac{\pi}{n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{n}, \pi$$

이다. $k = 1, \dots, n$ 에 대해

$$a_k = \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} |e^{-x} \sin nx| dx = \left| \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} e^{-x} \sin nx dx \right|$$

라 하면 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 이다. 부분적분법을 이용하면

$$\int e^{-x} \sin nx dx = -\frac{e^{-x}(\sin nx + n \cos nx)}{n^2 + 1}$$



이다. 따라서 $a_k = \left| \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} e^{-x} \sin nx \, dx \right| = \frac{ne^{-\frac{k\pi}{n}}}{n^2+1} \left(1 + e^{\frac{\pi}{n}} \right)$ 이므로

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{n^2+1} \sum_{k=1}^n \left\{ e^{-\frac{(k-1)\pi}{n}} + e^{-\frac{k\pi}{n}} \right\} \\ &= \frac{n}{n^2+1} \left[\left(e^0 + e^{-\frac{\pi}{n}} \right) + \left(e^{-\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{2\pi}{n}} \right) + \dots + \left(e^{-\frac{(n-1)\pi}{n}} + e^{-\frac{n\pi}{n}} \right) \right] \\ &= \frac{2n}{n^2+1} \sum_{k=1}^n e^{-\frac{k\pi}{n}} + \frac{n}{n^2+1} (1 - e^{-\pi}) \end{aligned}$$

이다. $0 \leq 1 - e^{-\pi} \leq 1$ 이므로 수열의 극한값의 대소 관계에 의해

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} (1 - e^{-\pi}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$

이다. 따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} (1 - e^{-\pi}) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = 2$ 이고, 정적분과 급수의 관계에 의해

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{-\frac{k\pi}{n}} = \int_0^1 e^{-\pi x} \, dx = \frac{1 - e^{-\pi}}{\pi}$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{-\frac{k\pi}{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} (1 - e^{-\pi}) = \frac{2(1 - e^{-\pi})}{\pi}$$

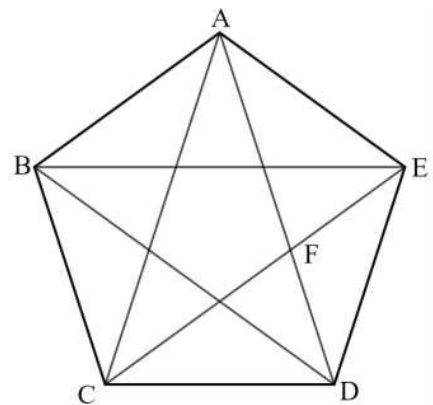
이다.

[문제 4] 대학발표 예시답안

(a) 오른쪽 그림에서 정오각형의 성질에 의해 $\triangle ACF$, $\triangle CDF$ 는 각각 이등변삼각형이므로

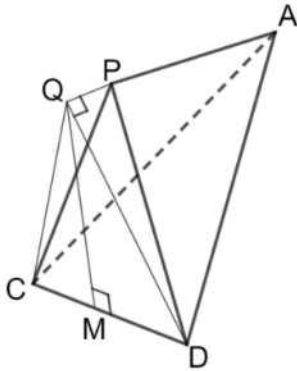
$\overline{AF} = \overline{CF} = \overline{CD} = 2$ 이다. 대각선 AC의 길이를 x 라 하면 $\overline{FD} = x - 2$ 이고, $\triangle ACD$ 와 $\triangle CDF$ 는 닮음이므로 $x : 2 = 2 : x - 2$ 이다.

따라서 $x^2 - 2x - 4 = 0$ 이고 대각선의 길이는 $x = 1 + \sqrt{5}$ 이다.

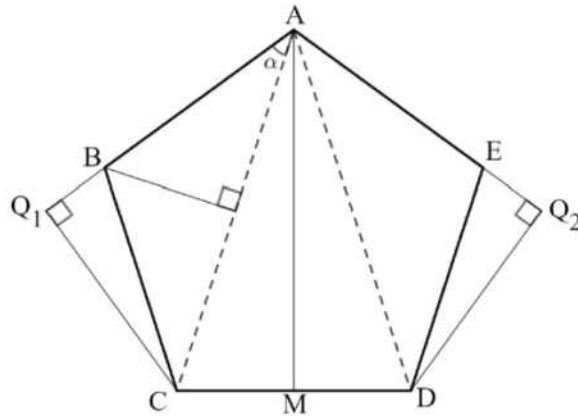




- (b) $\overline{AB}=2c$ 라 하자. 두 면 PAC 와 PAD 의 교선은 선분 AP 이다. [그림 1]과 같이 면 PAC 의 점 C 에서 직선 AP 에 내린 수선의 발을 Q 라고 하자. 이 때 대칭성에 의하여 직선 AP 는 두 직선 QC , QD 와 수직이다. 그러므로 두 면 PAC 와 PAD 가 이루는 이면각의 크기는 $\theta = \angle CQD$ 이다. [그림 2]와 같이 Q_1 과 Q_2 를 점 C 와 점 D 에서 각각 직선 AB 와 AE 에 내린 수선의 발이라 하면 $\overline{QC} = \overline{Q_1C} = \overline{Q_2D} = \overline{QD}$ 이다.



[그림 1]



[그림 2]

[그림 2]의 이등변삼각형 ABC 에서 선분 AC 의 길이가 $(1 + \sqrt{5})c$ 이므로 $\angle BAC = \alpha$ 라 하면

$$\cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

이고 $\overline{Q_1C} = (1 + \sqrt{5})c \sin \alpha$ 이다.

[그림 1]의 이등변삼각형 QCD 에서 선분 CD 의 중점을 점 M 이라 하면

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\overline{CM}}{\overline{QC}} = \frac{1}{(1 + \sqrt{5}) \sin \alpha}$$

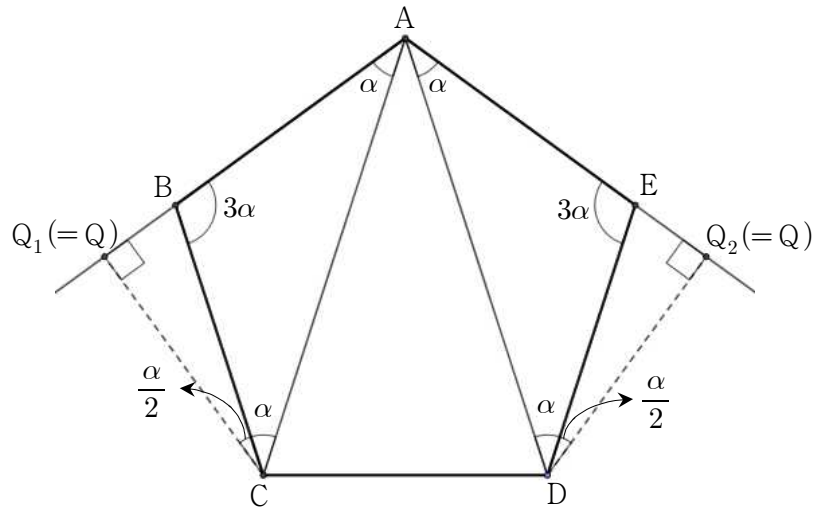
이다. 따라서

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{2}{(1 + \sqrt{5})^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

이므로 $a = 0$, $b = \frac{1}{5}$, $a + b = \frac{1}{5}$ 이다.

[나침반 풀이]

한 변의 길이가 2인 정오각형 ABCDE 에 대하여 점 C 와 점 D 에서 직선 AB , AE 에 내린 수선의 발을 각각 Q_1 , Q_2 라 하자.



$\alpha = 36^\circ = \frac{\pi}{5}$ 로 두면 $\angle BAC = \angle BCA = \angle EAD = \angle EDA = \alpha$, $\angle ABC = \angle DEA = 3\alpha$,
 $\angle BCQ_1 = \angle EDQ_2 = \frac{\alpha}{2}$ 이다.

두 변 PAC 와 PAD 가 이루는 각을 θ 이고 $\overline{QC} = \overline{QD} = 2\cos\frac{\alpha}{2}$ 이므로 $\triangle QCD$ 에서 코사인 법칙을 적용하면

$$\cos\theta = \frac{\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 2^2}{2 \times 2\cos\frac{\alpha}{2} \times 2\cos\frac{\alpha}{2}} = 1 - \frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 1 - \frac{1}{1 + \cos\alpha} \dots\dots \textcircled{7}$$

이다.

한편, (a)의 결과와 $\triangle DAE$ 에서 코사인 법칙을 적용하면

$$\cos\alpha = \frac{(1 + \sqrt{5})^2 + 2^2 - 2^2}{2 \cdot (1 + \sqrt{5}) \cdot 2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

이다. 이 값을 ⑦에 대입하면

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

이다. 따라서 $a = 0$, $b = \frac{1}{5}$ 이므로 $a + b = \frac{1}{5}$ 이다.

20 성균관대학교 모의20

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
접선의 방정식, 타원, 합의 법칙, 곱의 법칙, 조합	자연과학계열 외 6개 학과 : 국어, 수학(가), 과탐(2개 과목평균) 중 2개 등급합 4이내 및 영어 2·한국사 4 이내 반도체시스템공학 외 2개 학과 : 수학(가), 과탐(1개 과목) 등급합 3이내 및 영어2·한국사4 이내	수학(2문항, 5문제) 과학(물리1, 화학1, 생명과학1 3문항 중 택1)	100분

[수학 1]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [수학 1-i] ~ [수학 1-ii]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

<제시문2>

두 초점 $F(0, c)$, $F'(0, -c)$ 로부터 거리의 합이 $2b$ 인 타원의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } b > a > 0, a^2 = b^2 - c^2)$$

<제시문3>

- i) 좌표평면 위에서 $|x| + |y| = 1$ 을 만족하는 점 (x, y) 의 집합을 P 라고 하자.
- ii) 부등식 $0 < u^2 + v^2 \leq 1$ 을 만족하는 u, v 에 대하여 매개변수 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$)로 표현되는 점 $(x, y) = (u \cos \theta, v \sin \theta)$ 의 집합을 C 라고 하자.
- iii) 집합 P 와 집합 C 가 공집합이 아닌 교집합을 가지게 되는 점 (u, v) 로 이루어진 집합을 S 라고 하자.



[수학1- i] <제시문3>의 집합 S 가 좌표평면 위에서 이루는 곡선의 길이를 구하고, 그 이유를 논하시오.

[수학1- ii] <제시문3>의 곡선 C 위의 어떠한 점 Q 에 대해서도 $\overline{QF} + \overline{QF'}$ 의 값이 일정한 좌표평면 위의 두 점 F, F' 이 존재한다. 집합 S 에 속한 점 (u, v) 에 대하여 $\overline{FF'}$ 의 값이 $\sqrt{2}$ 이하가 되는 점 (u, v) 의 집합이 이루는 곡선의 길이의 합을 구하고, 그 이유를 논하시오. 예를 들어, $u=v$ 일 때 점 F 와 점 F' 은 원점으로 일치하고 $\overline{FF'} = 0$ 이다.

[수학 2]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [수학 2-i] ~ [수학 2-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

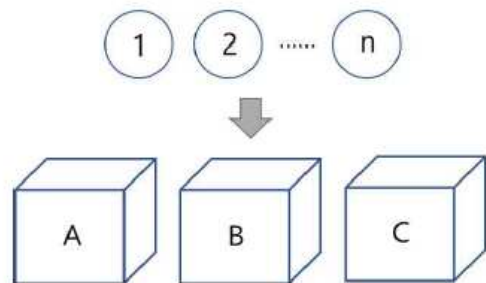
두 사건 X , Y 가 일어나는 경우의 수가 각각 x , y 이고 두 사건 X , Y 가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 X 또는 사건 Y 가 일어나는 경우의 수는 $x+y$ 이며, 이를 합의 법칙이라고 한다. 합의 법칙은 세 개 이상의 사건에 대하여도 성립한다.

<제시문2>

사건 X 가 일어나는 경우의 수가 x 이고, 그 각각의 경우에 대하여 사건 Y 가 일어나는 경우의 수가 y 일 때, 두 사건 X , Y 가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $x \times y$ 이며, 이를 곱의 법칙이라고 한다. 곱의 법칙은 세 개 이상의 사건에 대하여도 성립한다.

<제시문3>

양의 정수 n 에 대하여, 오른쪽 그림과 같이 1부터 n 까지의 숫자가 각각 적힌 n 개의 공을 A , B , C 라고 각각 적힌 세 개의 상자에 담으려고 할 때, 가능한 모든 경우의 수를 $S(n)$ 이라고 한다.



[수학2-i] <제시문3>에서 $n=7$ 일 때, $S(7)$ 의 값을 십진법 표기로 구하고, 그 이유를 논하시오. 예를 들어, $2^7 - 2^4$ 은 112로 표기한다.

[수학2-ii] <제시문3>에서 $n=7$ 일 때, A , B , C 세 개의 상자 모두 적어도 한 개의 공을 가지고 있을 경우의 수를 십진법 표기로 구하고, 그 이유를 논하시오.

[수학2-iii] <제시문3>에서 $n=7$ 일 때, A , B , C 세 개의 상자 모두 적어도 두 개의 공을 가지고 있을 경우의 수를 십진법 표기로 구하고, 그 이유를 논하시오.



문제1. 곡선 $5x + xy + y^2 = 5$ 위의 점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 기울기를 구하시오.
(2017. 9월 평가원)

문제2. 닫힌 구간 $[-2, 2]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (-2 \leq x \leq 0) \\ -x+2 & (0 < x \leq 2) \end{cases}$$

이다. 좌표평면에서 $k > 1$ 인 실수 k 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의

그래프와 타원 $\frac{x^2}{k^2} + y^2 = 1$ 이 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(k)$ 라 하자. 함수 $g(k)$ 가 불연속이 되는 모든 k 의 값들의 제곱의 합은? (2016. 4월 전국연합)

- ① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

문제3. 서로 다른 공 4개를 남김없이 서로 다른 상자 4개에 나누어 넣으려고 할 때, 넣은 공의 개수가 1인 상자가 있도록 넣는 경우의 수는? (단, 공을 하나도 넣지 않은 상자가 있을 수 있다.) (2018. 대수능)

- ① 220 ② 216 ③ 212 ④ 208 ⑤ 204

문제4. 다음은 n 명의 사람이 각자 세 상자 A, B, C 중 2 개의 상자를 선택하여 각 상자에 공을 하나씩 넣을 때, 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수를 구하는 과정이다. (단, n 은 6 의 배수인 자연수이고 공은 구별하지 않는다.)

세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우는 ‘(i) 세 상자에 공이 들어가는 모든 경우’에서 ‘(ii) 세 상자에 모두 같은 개수의 공이 들어가는 경우’와 ‘(iii) 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우’를 제외하면 된다.

(i)의 경우 : n 명의 사람이 각자 세 상자 중 공을 넣을 두 상자를 선택하는 경우의 수는 n 명의 사람이 각자 공을 넣지 않을 한 상자를 선택하는 경우의 수와 같다. 따라서 세 상자에서 중복을 허락하여 n 개의 상자를 선택하는 경우의 수인 $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.

(ii)의 경우 : 각 상자에 $\frac{2n}{3}$ 개의 공이 들어가는 경우뿐이므로 경우의 수는 1 이다.

(iii)의 경우 : 두 상자 A, B 에 같은 개수의 공이 들어가면 상자 C 에는 최대 n 개의 공을 넣을 수 있으므로 두 상자 A, B 에 각각 $\frac{n}{2}$ 개보다 작은 개수의 공이 들어갈 수 없다. 따라서 두 상자 A, B 에 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

그러므로 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 ${}_3C_2 \times (\boxed{\text{(나)}} - 1)$ 이다.

따라서 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n), h(n)$ 이라 할 때, $\frac{f(30)}{g(30)} + h(30)$ 의 값은? (2018. 9월 평가원)

- ① 481 ② 491 ③ 501 ④ 511 ⑤ 521



풀어보기(문제1) 정답 4

$$5x + xy + y^2 = 5$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$5 + y + x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y+5}{x+2y} \quad (\text{단, } x+2y \neq 0)$$

따라서 점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 기울기는 4 이다.

풀어보기(문제2) 정답 ⑤

타원 $\frac{x^2}{k^2} + y^2 = 1$ 은 네 점 $(k, 0), (-k, 0), (0, 1), (0, -1)$ 을 네 꼭짓점으로 하는 타원이다.

타원 $\frac{x^2}{k^2} + y^2 = 1$ 과 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 접할 때 k 의 값을 구하자.

$\frac{x^2}{k^2} + y^2 = 1$ 위의 점 $(x_1, y_1) (x_1 > 0)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{k^2 y} \text{ 이므로 접선의 기울기는 } -\frac{x_1}{k^2 y_1} \text{ 이고 접선의 방정식은}$$

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{k^2 y_1} (x - x_1) \quad (y_1 \neq 0)$$

$$\therefore y = -\frac{x_1}{k^2 y_1} x + \frac{1}{y_1}$$

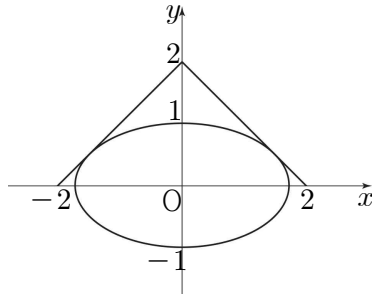
타원이 직선 $y = -x + 2$ 에 접하므로

$$\frac{x_1}{k^2 y_1} = 1, \quad \frac{1}{y_1} = 2$$

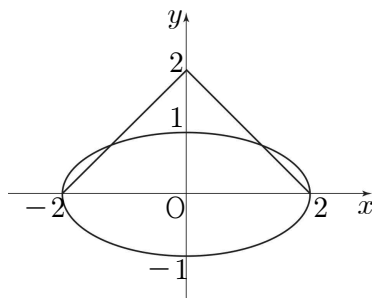
$$\therefore x_1 = \frac{k^2}{2}, \quad y_1 = \frac{1}{2}$$

점 (x_1, y_1) 은 $y = -x + 2$ 위의 점이므로

$$k^2 = 3 \quad \therefore k = \sqrt{3}$$



타원 $\frac{x^2}{k^2} + y^2 = 1$ 이 점 $(2, 0)$ 을 지날 때, $k = 2$



$$\therefore g(k) = \begin{cases} 0 & (1 < k < \sqrt{3}) \\ 2 & (k = \sqrt{3}) \\ 4 & (\sqrt{3} < k \leq 2) \\ 2 & (k > 2) \end{cases}$$

따라서 함수 $g(k)$ 는 $k = \sqrt{3}$, $k = 2$ 에서 불연속이고, 불연속이 되는 모든 k 의 값들의
제곱의 합은 $(\sqrt{3})^2 + 2^2 = 7$

풀어보기(문제3) 정답 ②

(i) 서로 다른 상자 4개에 넣은 공의 개수가 3, 1, 0, 0인 경우
서로 다른 4개의 공을 3개, 1개로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_3 \times {}_1C_1 = {}_4C_1 \times {}_1C_1 = 4 \times 1 = 4$$

3, 1, 0, 0을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

따라서 서로 다른 공 4개를 서로 다른 상자 4개에 넣은 공의 개수가 3, 1, 0, 0인 경
우의 수는 $4 \times 12 = 48$

(ii) 서로 다른 상자 4개에 넣은 공의 개수가 2, 1, 1, 0인 경우
서로 다른 4개의 공을 2개, 1개, 1개로 나누는 경우의 수는



$${}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 = 6 \times 2 \times 1 = 12$$

2, 1, 1, 0을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

따라서 서로 다른 공 4개를 서로 다른 상자 4개에 넣은 공의 개수가 2, 1, 1, 0인 경우의 수는 $12 \times 12 = 144$

(iii) 서로 다른 상자 4개에 넣은 공의 개수가 1, 1, 1, 1인 경우

서로 다른 공 4개를 서로 다른 상자 4개에 넣은 공의 개수가 1, 1, 1, 1인 경우의 수는 $4! = 24$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$48 + 144 + 24 = 216$$

풀어보기(문제4) 정답 ①

세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우는 ‘(i) 세 상자에 공이 들어가는 모든 경우’에서 ‘(ii) 세 상자에 모두 같은 개수의 공이 들어가는 경우’와 ‘(iii) 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우’를 제외하면 된다.

(i)의 경우 :

n 명의 사람이 각자 세 상자 중 공을 넣을 두 상자를 선택하는 경우의 수는 n 명의 사람이 각자 공을 넣지 않을 한 상자를 선택하는 경우의 수와 같다. 따라서 세 상자에서 중복을 허락하여 n 개의 상자를 선택하는 경우의 수인 $\boxed{(가)_3H_n}$ 이다.

(ii)의 경우 :

각 상자에 $\frac{2n}{3}$ 개의 공이 들어가는 경우뿐이므로 경우의 수는 1 이다.

(iii)의 경우 :

두 상자 A, B 에 같은 개수의 공이 들어가면 상자 C 에는 최대 n 개의 공을 넣을 수 있으므로 두 상자 A, B 에 각각 $\frac{n}{2}$ 개보다 작은 개수의 공이 들어갈 수 없다. 따라서 두 상자 A, B 에 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는

	A 상자	B 상자	C 상자
공 의 개 수	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	n
	$\frac{n}{2}+1$	$\frac{n}{2}+1$	$n-2$
	$\frac{n}{2}+2$	$\frac{n}{2}+2$	$n-4$
	\vdots	\vdots	\vdots
	$\frac{2n}{3}$	$\frac{2n}{3}$	$\frac{2n}{3}$
	\vdots	\vdots	\vdots
	n	n	0

위의 표와 같이 A, B, C 세 상자 모두 공의 개수가 같은 것을 포함하여

$$\boxed{\text{(나)} \frac{n}{2} + 1} \text{ 이다.}$$

그러므로 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times \left(\boxed{\text{(나)} \frac{n}{2} + 1} - 1 \right) \text{ 이다.}$$

따라서 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수는

$$\boxed{\text{(다)} {}_3H_n - \left(1 + \frac{3n}{2} \right)} \text{ 이다.}$$

이를 종합하면

$$f(n) = {}_3H_n, \quad g(n) = \frac{n}{2} + 1, \quad h(n) = {}_3H_n - \left(1 + \frac{3n}{2} \right) \text{ 이다.}$$

따라서

$$\begin{aligned} \frac{f(30)}{g(30)} + h(30) &= \frac{{}_3H_{30}}{\frac{30}{2} + 1} + {}_3H_{30} - \left(1 + \frac{3 \times 30}{2} \right) \\ &= 31 + 496 - (1 + 45) = 481 \end{aligned}$$

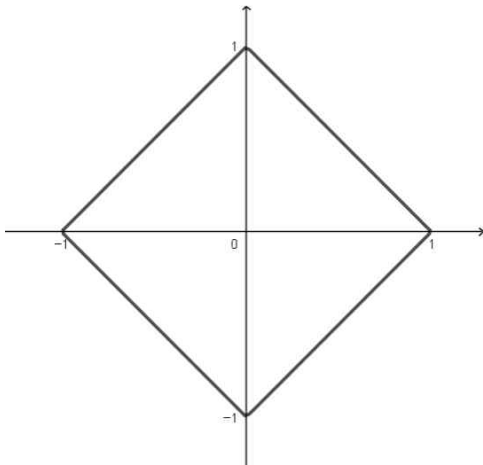
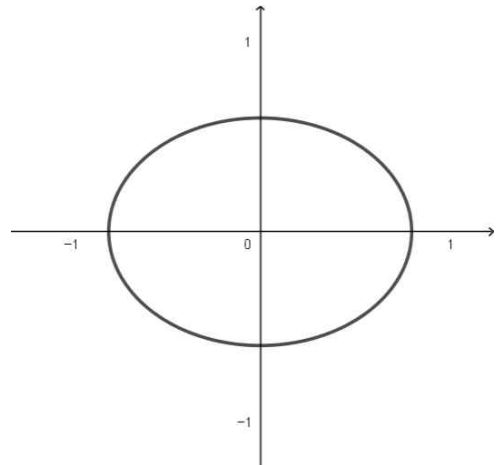
이다.



[문항1]

[수학1- i] (나침반 풀이)

C 는 타원 $\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1$ 위의 점의 집합이므로 두 집합 P 와 C 를 좌표평면 위에 나타내면 아래 그림과 같다.

<집합 P ><집합 C >

먼저 기울기가 -1 인 타원 $\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1$ 의 접선의 방정식을 구해보자.

접점의 좌표를 $(x_0, y_0) = (u \cos \theta_0, v \sin \theta_0)$ 라 하면 기울기가 -1 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{v \cos \theta}{-u \sin \theta} \text{ 이고 } \frac{dy}{dx} = -\frac{v \cos \theta_0}{u \sin \theta_0} = -1$$

에서

$$v \cos \theta_0 = u \sin \theta_0$$

이다. 그리고 접선의 방정식은

$$y = -(x - u \cos \theta_0) + v \sin \theta_0$$

$$y = -x + u \cos \theta_0 + v \sin \theta_0$$

이다. 한편,

$$\begin{aligned} & (u \cos \theta_0 + v \sin \theta_0)^2 \\ &= u^2 \cos^2 \theta_0 + v^2 \sin^2 \theta_0 + 2uv \cos \theta_0 \sin \theta_0 \\ &= u^2 (1 - \sin^2 \theta_0) + v^2 (1 - \cos^2 \theta_0) + 2uv \cos \theta_0 \sin \theta_0 \\ &= u^2 + v^2 - (u^2 \sin^2 \theta_0 + v^2 \cos^2 \theta_0 - 2uv \cos \theta_0 \sin \theta_0) \\ &= u^2 + v^2 - (u \sin \theta_0 - v \cos \theta_0)^2 \quad (v \cos \theta_0 = u \sin \theta_0 \text{ 이므로}) \\ &= u^2 + v^2 \end{aligned}$$

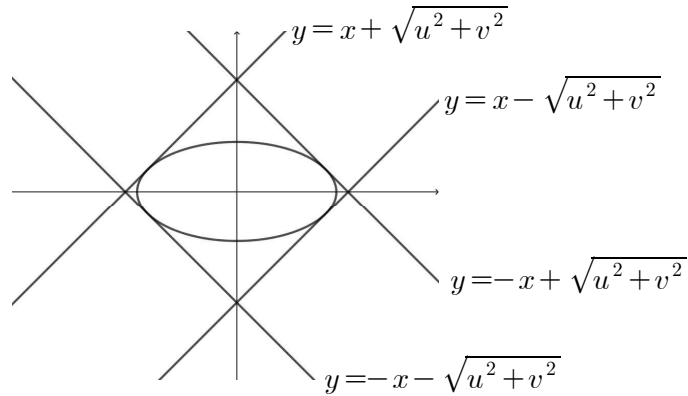
이므로 접선의 방정식은

$$y = -x \pm \sqrt{u^2 + v^2}$$

이다. 같은 방법으로 기울기가 1 인 접선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{u^2 + v^2}$$

이다.



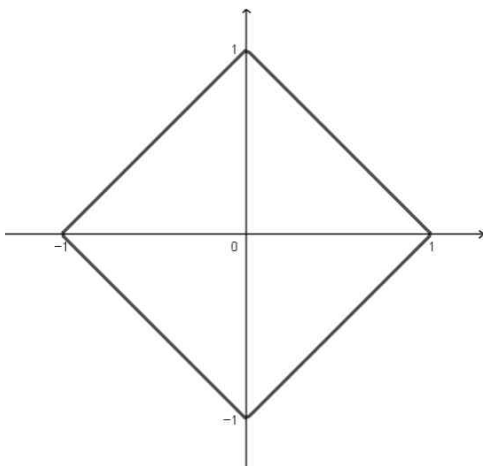
따라서 집합 P 와 집합 C 가 공집합이 아닌 교집합을 가지기 위해서는 $\sqrt{u^2 + v^2} \geq 1$ 이다. 한편, <제시문3>에서 $0 < u^2 + v^2 \leq 1$ 이므로

$$u^2 + v^2 = 1$$

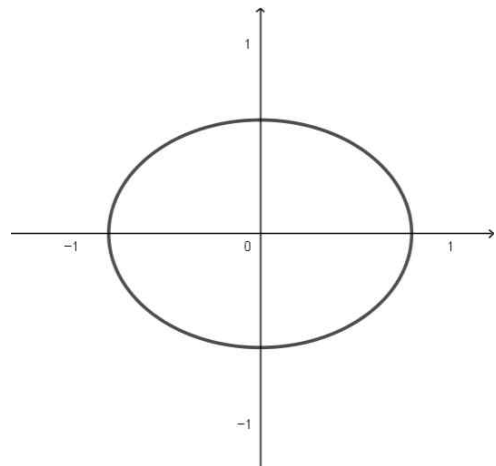
이다. 그러므로 집합 S 가 좌표평면 위에서 이루는 곡선의 길이는 2π 이다.

[다른 풀이1]

C 는 타원 $\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1$ 위의 점의 집합이므로 두 집합 P 와 C 를 좌표평면 위에 나타내면 아래 그림과 같다.



<집합 P >



<집합 C >

따라서 집합 P 와 집합 C 가 공집합이 아닌 교집합을 가지기 위해서는 직선



$y = -x + 1$ 과 타원 $\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1$ 의 교점이 존재하면 된다.

$$\frac{x^2}{u^2} + \frac{(-x+1)^2}{v^2} = 1$$

$$v^2x^2 + (-x+1)^2u^2 = u^2v^2$$

$$(v^2 + u^2)x^2 - 2u^2x + u^2 - u^2v^2 = 0$$

실근을 가져야 하므로

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= u^4 - (v^2 + u^2)(u^2 - u^2v^2) \\ &= u^4 - u^2v^2 + u^2v^4 - u^4 + u^4v^2 \\ &= u^2v^2(-1 + v^2 + u^2) \geq 0 \end{aligned}$$

에서

$$u^2 + v^2 \geq 1$$

이다. 한편, <제시문3>에서 $0 < u^2 + v^2 \leq 1$ 이므로

$$u^2 + v^2 = 1$$

이다. 그러므로 집합 S 가 좌표평면 위에서 이루는 곡선의 길이는 2π 이다.

[다른 풀이2]

S 의 원소 (u, v) 는 $(u, v) \in P \cap C$ 이므로 $|u \cos \theta| + |v \sin \theta| = 1$ 을 만족시킨다.

절대부등식의 성질에 의해

$$\begin{aligned} (u^2 + v^2)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) &\geq (|u \cos \theta| + |v \sin \theta|)^2 \\ u^2 + v^2 &\geq (|u \cos \theta| + |v \sin \theta|)^2 = 1 \end{aligned}$$

이다. 따라서 <제시문3>의 ii)에 의해 $u^2 + v^2 = 1$ 이므로 집합 S 가 좌표평면 위에서 이루는 곡선의 길이는 2π 이다.

[수학1-ii] (나침반 풀이)

곡선 C 는 타원 $\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1$ 이므로 두 점 F, F' 는 타원의 두 초점이다.

또한, 점 (u, v) 가 집합 S 에 속하므로 $u^2 + v^2 = 1$ 이고

$$\overline{FF'} = 2\sqrt{|u^2 - v^2|} = 2\sqrt{|2u^2 - 1|}$$

이다. 따라서,

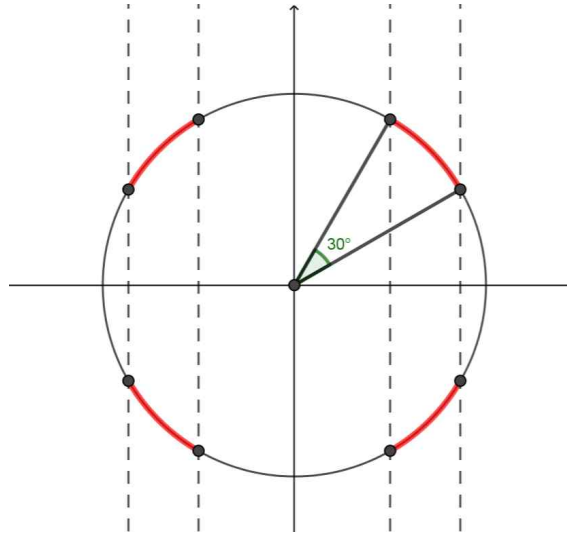
$$2\sqrt{|2u^2 - 1|} \leq \sqrt{2}$$

$$|2u^2 - 1| \leq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \leq 2u^2 - 1 \leq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq u \leq -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq u \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이다. 조건을 만족하는 점 (u, v) 의 집합을 좌표평면위에 나타내면 그림과 같다.



따라서, $\overline{FF'}$ 의 값이 $\sqrt{2}$ 이하가 되는 점 (u, v) 의 집합이 이루는 곡선의 길이의 합은

$$1 \times \frac{\pi}{6} \times 4 = \frac{2}{3}\pi$$

이다.

[문항2]

[수학2- i] (나침반 풀이)

1부터 n 까지의 숫자가 각각 적힌 n 개의 공을 세 개의 상자에 넣는 방법의 수는 각각 3이므로

$$S(7) = 3^7 = 2187$$

이다.

[수학2- ii] (나침반 풀이)

$7 = 1+1+5 = 1+2+4 = 1+3+3 = 2+2+3$ 이므로 네 가지의 경우로 나누어 생각해볼 수 있다.

i) (1개, 1개, 5개)로 분할하여 세 개의 상자 A, B, C 에 분배하는 경우



$${}_7C_1 \times {}_6C_1 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 126$$

ii) (1 개, 2 개, 4 개)로 분할하여 세 개의 상자 A, B, C 에 분배하는 경우

$${}_7C_1 \times {}_6C_2 \times {}_4C_4 \times 3! = 630$$

iii) (1 개, 3 개, 3 개)로 분할하여 세 개의 상자 A, B, C 에 분배하는 경우

$${}_7C_1 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 420$$

iv) (2 개, 2 개, 3 개)로 분할하여 세 개의 상자 A, B, C 에 분배하는 경우

$${}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 630$$

i), ii), iii), iv)에 의해

$$126 + 630 + 420 + 630 = 1806$$

이다.

[다른 풀이]

$n=7$ 일 때, $P(X)$ 를 상자 X 가 모든 공을 가지고 있을 경우의 수라 하고, $P(X^C)$ 을 상자 X 가 공을 가지고 있지 않을 경우의 수라 하자. (단, $X=A, B, C$)

$$P(X)=1^7=1, P(X^C)=2^7=128$$

이고, $n=7$ 일 때, A, B, C 세 개의 상자 모두 적어도 한 개의 공을 가지고 있을 경우의 수는

$$\begin{aligned} S(7) - \{P(A^C) + P(B^C) + P(C^C)\} + \{P(A) + P(B) + P(C)\} \\ = 2187 - (3 \times 128) + 3 \\ = 2187 - (3 \times 128) + 3 \\ = 1806 \end{aligned}$$

[수학2-iii] (나침반 풀이)

[수학2-ii]에서 iv)인 경우{(2 개, 2 개, 3 개)로 분할하여 세 개의 상자 A, B, C 에 분배하는 경우}이다. 따라서

$${}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 630$$

이다.



21

성균관대학교(자연 I) 수시²¹⁾

...



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
수학적 확률, 조건부확률, 정적분, 삼각함수의 적분	자연계(아래 3개 학과 제외) : 국어, 수학(가), 과탐(2과목 평균) 중 2개 등급합 4이내 및 영어 2· 한국사 4 이내 소프트웨어학, 반도체시스템공학, 글로벌바이오메디컬공학 : 수학(가), 과탐(1개 과목) 등급합 3이내 및 영어2· 한국사4 이내	수학(2문항), 과학(물리1, 화학1, 생명과학1 3문항 중 택1)	100분

[수학 1] 다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [수학1-i] ~ [수학1-iii]을 문항별로 풀이
와 함께 답하시오.

<제시문1>

표본공간 S 에서 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같을 때, 사건 A 가 일어날
수학적 확률은 다음과 같다.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

<제시문2>

사건 A 가 일어났을 때의 사건 B 의 조건부확률은 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 이다.

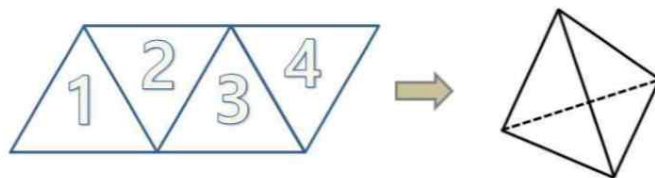
(단, $P(A) > 0$)

<제시문3>

아래 그림과 같이 각 면에 양의 정수 1, 2, 3, 4가 쓰여진 정사면체 모양의 주사위를 던
져서 밑에 깔린 숫자를 선택하자. 이때 각 숫자가 선택될 확률은 동일하다. 주사위를
10번 던져 숫자 n 이 선택된 횟수를 a_n 이라고 할 때, 함수 $f(x)$ 를

$f(x) = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$ 로 정의한다. 예를 들어, 선택된 숫자가 순서대로

$4 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 4$ 일 때, 함수 $f(x) = 4x + 6$ 이다.





[수학1- i] <제시문3>에서 $f(0)$ 의 값이 2일 확률을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학1- ii] <제시문3>에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선이 아니라고 할 때, 그 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 기울기가 100 이상일 확률을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학1- iii] <제시문3>에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=8$ 과 적어도 한 점에서 만날 확률을 구하고 그 이유를 논하시오.



[수학 2]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [수학2- i] ~ [수학2- iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

함수 $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.
그러나 그 역은 성립하지 않는다.

<제시문2>

함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 함수 $F(x)$ 가 $f(x)$ 의 한 부정적분일 때
다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

<제시문3>

양의 정수 n 에 대하여, 닫힌 구간 $[n\pi, (n+1)\pi]$ 에서 함수 $y=g(x)$ 는 다음을 만족한다.

$$g(x) = 2^n a_n \cos(x - n\pi) + (b_n + (-1)^n) \sin(x - n\pi) \quad (\text{단, } a_n \text{ 과 } b_n \text{ 은 실수})$$

함수 $y=g(x)$ 는 구간 (π, ∞) 에서 미분가능하며, $\int_{\pi}^{2\pi} g(x) dx = -6$ 과 $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{2}} g(x) dx = -2$
를 만족한다.

[수학2- i] <제시문3>의 함수 $y=g(x)$ 에 대하여, 상수 b_1 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학2- ii] <제시문3>의 함수 $y=g(x)$ 에 대하여, 정적분 $\int_{\pi}^{100\pi} g(x) dx$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학2- iii] <제시문3>의 함수 $y=g(x)$ 에 대하여, 정적분 $\int_{\pi}^{\frac{199\pi}{2}} g(x) dx$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.



문제1. 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수가 같으면 한 개의 동전을 4번 던지고, 나온 눈의 수가 다르면 한 개의 동전을 2번 던진다. 이 시행에서 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같을 때, 동전을 4번 던졌을 확률은?
(2018. 6월 평가원)

- ① $\frac{3}{23}$ ② $\frac{5}{23}$ ③ $\frac{7}{23}$ ④ $\frac{9}{23}$ ⑤ $\frac{11}{23}$

문제2. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = -1, a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-2}} \quad (n \geq 2)$$

이다. 구간 $[-1, 2)$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 모든 자연수 n 에 대하여

$$f(x) = \sin(2^n \pi x) \quad (a_n \leq x \leq a_{n+1})$$

이다. $-1 < \alpha < 0$ 인 실수 α 에 대하여 $\int_{\alpha}^t f(x) dx = 0$ 을 만족시키는 t ($0 < t < 2$) 의 값의 개수가 103 일 때, $\log_2(1 - \cos(2\pi\alpha))$ 의 값은? (2018. 9월 평가원)

- ① -48 ② -50 ③ -52 ④ -54 ⑤ -56



풀어보기(문제1) 정답 ①

두 개의 주사위가 같은 눈이 나오는 사건을 A , 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같은 사건을 B 라고 하면 구하는 확률은 $\frac{P(B|A)}{P(B|A)+P(B|A^c)}$ 이고, 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같을 때는 다음과 같은 2가지 경우가 있다.

i) 서로 다른 2개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 같을 때

두 주사위의 눈의 수가 같을 확률은 $\frac{1}{6}$ 이고

동전을 4번 던졌을 때, 앞면과 뒷면이 각각 2번씩 나올 확률은 ${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$ 이므로

구하는 확률 $P(B|A) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{16}$ 이다.

ii) 서로 다른 2개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 다를 때

두 주사위의 눈의 수가 다를 확률은 $\frac{5}{6}$ 이고 동전을 2번 던졌을 때, 앞면과 뒷면이

각각 1번씩 나올 확률은 ${}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ 이므로

구하는 확률 $P(B|A^c) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$ 이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16} + \frac{5}{12}} = \frac{3}{23}$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 ②

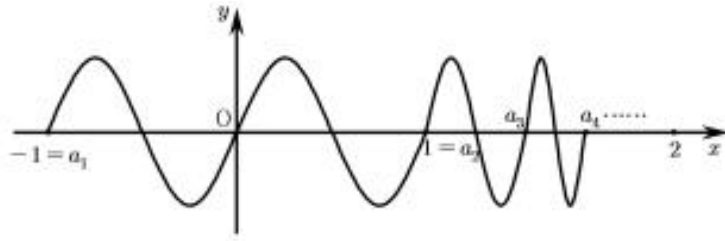
(i) $a_1 \leq x \leq a_2$ (즉, $-1 \leq x \leq 1$)일 때, $f(x) = \sin 2\pi x$

(ii) $a_2 \leq x \leq a_3$ (즉, $1 \leq x \leq 2 - \frac{1}{2}$)일 때, $f(x) = \sin 2^2 \pi x$

(iii) $a_3 \leq x \leq a_4$ (즉, $2 - \frac{1}{2} \leq x \leq 2 - \frac{1}{2^2}$)일 때, $f(x) = \sin 2^2 \pi x$

⋮

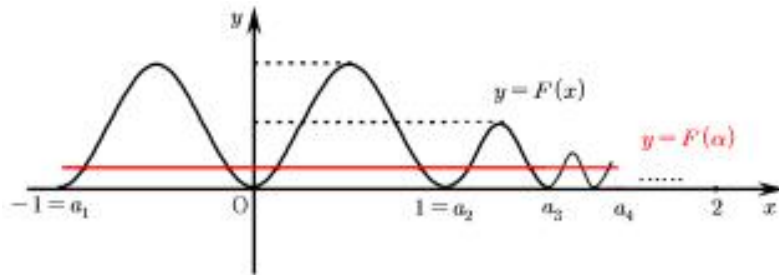
이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$F(t) = \int_0^t f(x)dx$ 라고 하면 $F'(t) = f(t)$ 이고

$\int_0^{a_2} f(t)dt = 0, \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)dt = 0, n \geq 2$ 이 성립하므로

$y = F(x)$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



방정식 $\int_{\alpha}^t f(x)dx = 0$ 을 만족시키는 t ($0 < t < 2$)의 값의 개수를 구하는 것은 방정식 $F(t) = F(\alpha)$ 을 만족하는 t 의 값의 개수를 구하는 것과 같다.

위의 그림에서 극댓값을 크기순으로 나열하면 $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2^2\pi}, \dots$ 이므로 t ($0 < t < 2$)의 개수가 103개가 되기 위해서는 $F(\alpha)$ 의 값이 52번째 극댓값과 같을 때이다.

따라서 $F(\alpha) = \frac{1}{2^{51}\pi}$ 이어야 한다.

즉, $\int_0^{\alpha} f(x)dx = \frac{1}{2^{51}\pi}$ 이고 $-1 < \alpha < 0$ 이므로

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha} \sin 2\pi x dx = \frac{1}{2^{51}\pi}$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{2\pi} \cos 2\pi x \right]_0^{\alpha} = \frac{1}{2^{51}\pi}$$

$$\Rightarrow 1 - \cos 2\pi\alpha = 2^{-50}$$

그러므로 $\log_2(1 - \cos 2\pi\alpha) = -50$



[수학1] 대학발표 예시답안

[수학1- i]

$f(0)=a_4$ 이므로, 숫자 4가 정확히 두 번 선택될 확률을 구하면 된다.

총 열 번의 주사위 던짐에서 숫자 4가 선택될 두 번의 횟수차를 선택하는 방법이 ${}_{10}C_2=45$ 이고 나머지 여덟 번의 횟수차에는 1, 2, 3의 숫자 중 어느 것이 선택되어도 되므로 확률을 다음과 같다.

$$45\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^8=5\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

[수학1- ii]

먼저 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선인 경우는 항상 3 혹은 4가 선택되는 경우이므로, 그 확률은 $\left(\frac{2}{4}\right)^{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ 이다. 따라서 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선이 아닐 확률은 $1-\frac{1}{2^{10}}$ 이다.

이제 $f'(2)=12a_1+4a_2+a_3 \geq 100$ 을 만족하면서 $a_1+a_2+a_3+a_4=10$ 인 음이 아닌 정수 a_1, a_2, a_3, a_4 를 찾아보자. 먼저 $a_1 \leq 7$ 이라면 $12a_1+4a_2+a_3 \leq 12 \times 7+4 \times 3=96$ 이 되어 항상 $a_1 \geq 8$ 임을 알 수 있다. 따라서 a_1 이 될 수 있는 숫자는 8, 9, 10 세 가지 밖에 없으며, 각각의 경우에 가능한 숫자 a_2, a_3, a_4 를 구해보면 다음의 일곱 가지 경우가 나온다.

$$(a_1, a_2, a_3, a_4)=(10, 0, 0, 0), (9, 1, 0, 0), (9, 0, 1, 0), (9, 0, 0, 1), \\ (8, 2, 0, 0), (8, 1, 1, 0), (8, 1, 0, 1)$$

여기서 어떠한 경우에도 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선이 아니다.

$(a_1, a_2, a_3, a_4)=(10, 0, 0, 0)$ 인 경우의 확률은 $\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ 이다.

$(a_1, a_2, a_3, a_4)=(9, 1, 0, 0), (9, 0, 1, 0), (9, 0, 0, 1)$ 인 경우 각각의 확률은

$${}_{10}C_1\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=10\left(\frac{1}{4}\right)^{10} \text{ 이다.}$$

$(a_1, a_2, a_3, a_4)=(8, 2, 0, 0)$ 인 경우의 확률은 ${}_{10}C_2\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=45\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ 이다.

$(a_1, a_2, a_3, a_4)=(8, 1, 1, 0), (8, 1, 0, 1)$ 인 경우 각각의 확률은 ${}_{10}P_2\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=90\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ 이다.

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선이 아니면서 $f'(2) \geq 100$ 을 만족할 확률은 다음과 같다.

$$(1+3 \times 10+45+2 \times 90)\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=256 \times\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=\left(\frac{1}{4}\right)^6$$

따라서 문제의 확률은 $\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^6}{1-\frac{1}{2^{10}}}=\frac{1}{4\left(2^{10}-1\right)}=\frac{1}{4092}$ 이다.



[수학1-iii]

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=8$ 이 만나지 않을 확률을 먼저 구하자.

3차 다항식의 그래프는 항상 x 축과 평행한 직선과 만나므로, $a_1=0$ 이어야 한다.

만약 $a_2=0$ 이라면, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선이 되고 이 직선이 직선 $y=8$ 과 만나지 않으려면 $(a_3, a_4) = (0, 10)$ 이어야 한다. 이 경우의 확률은 $\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ 이다.

만약 $a_2 \geq 1$ 일 때 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=8$ 이 만나지 않는 경우는 이차방정식 $a_2x^2 + a_3x + a_4 - 8 = 0$ 의 해가 존재하지 않는 경우와 같고, 이는 곧 $a_3^2 < 4a_2(a_4 - 8)$ 임을 의미한다. 이를 만족하는 숫자 a_2, a_3, a_4 의 순서쌍은 $(a_2, a_3, a_4) = (1, 0, 9)$ 이며, 이 경우의 확률은 ${}_{10}C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = 10 \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ 이다.

따라서 문제에서 구하고자 하는 확률은 $1 - (1+10) \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = 1 - 11 \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ 이다.

[수학 2]

[수학2-i]

조건 $\int_{\pi}^{2\pi} g(x) dx = -6$ 으로부터,

$$\int_{\pi}^{2\pi} g(x) dx = \int_{\pi}^{2\pi} (2a_1 \cos(x-\pi) + (b_1-1) \sin(x-\pi)) dx = 2(b_1-1) = -6 \text{ 을 얻게 된다.}$$

따라서 $b_1 = -2$ 이다.

[수학2-ii]

양의 정수 n 에 대하여 닫힌 구간 $[n\pi, (n+1)\pi]$ 에서

$$g(x) = 2^n a_n \cos(x-n\pi) + (b_n + (-1)^n) \sin(x-n\pi)$$

이므로,

$$g'(x) = -2^n a_n \sin(x-n\pi) + (b_n + (-1)^n) \cos(x-n\pi)$$

을 얻는다. 따라서 $g'(n\pi) = b_n + (-1)^n$ 임을 알 수 있다.

한편, 2 이상인 정수 n 에 대하여 닫힌 구간 $[(n-1)\pi, n\pi]$ 에서

$$g(x) = 2^{n-1} a_{n-1} \cos(x-(n-1)\pi) + (b_{n-1} + (-1)^{n-1}) \sin(x-(n-1)\pi)$$

이고, $g'(x) = -2^{n-1} a_{n-1} \sin(x-(n-1)\pi) + (b_{n-1} + (-1)^{n-1}) \cos(x-(n-1)\pi)$ 이 되어,

$g'(n\pi) = -(b_{n-1} + (-1)^{n-1})$ 이 됨을 알 수 있다.

따라서, $b_n + (-1)^n = -(b_{n-1} + (-1)^{n-1})$ 이 되고, $b_n = -b_{n-1}$ 이다. $b_1 = -2$ 로부터

$b_n = 2(-1)^n$ 임을 알 수 있다.

이제 정적분 $\int_{\pi}^{100\pi} g(x) dx$ 의 값은



$$\begin{aligned}
 \int_{\pi}^{100\pi} g(x) dx &= \sum_{n=1}^{99} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(x) dx \\
 &= \sum_{n=1}^{99} \left[2^n a_n \sin(x-n\pi) - (b_n + (-1)^n) \cos(x-n\pi) \right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} \\
 &= \sum_{n=1}^{99} 2(b_n + (-1)^n) \\
 &= 6 \sum_{n=1}^{99} (-1)^n = -6
 \end{aligned}$$

[수학2-iii]

단한 구간 $[n\pi, (n+1)\pi]$ 에서 $g(x) = 2^n a_n \cos(x-n\pi) + (b_n + (-1)^n) \sin(x-n\pi)$ 이고,

단한 구간 $[(n-1)\pi, n\pi]$ 에서

$g(x) = 2^{n-1} a_{n-1} \cos(x-(n-1)\pi) + (b_{n-1} + (-1)^{n-1}) \sin(x-(n-1)\pi)$ 이므로

$g(n\pi) = 2^n a_n = -2^{n-1} a_{n-1}$ 이 된다. 따라서 $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right) a_{n-1}$ 이 성립한다.

반면, 조건 $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{2}} g(x) dx = -2$ 로부터 $\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} g(x) dx = 4$ 를 얻게 되고

단한구간 $[2\pi, 3\pi]$ 에서 $g(x) = 2^2 a_2 \cos(x-2\pi) + (b_2 + 1) \sin(x-2\pi)$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} g(x) dx &= \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} (4a_2 \cos(x-2\pi) + (b_2 + 1) \sin(x-2\pi)) dx \\
 &= [4a_2 \sin(x-2\pi) - 3\cos(x-2\pi)]_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \\
 &= 4a_2 + 3
 \end{aligned}$$

이 되어, $a_2 = \frac{1}{4}$ 가 된다. 이로부터 $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 을 얻게 된다.

정적분 $\int_{\pi}^{\frac{199\pi}{2}} g(x) dx$ 의 값은 $\int_{\pi}^{100\pi} g(x) dx - \int_{\frac{199\pi}{2}}^{100\pi} g(x) dx$ 이다.

여기서 $\int_{\pi}^{100\pi} g(x) dx = -6$ 이고

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{199\pi}{2}}^{100\pi} g(x) dx &= \int_{\frac{199\pi}{2}}^{100\pi} (2^{99} a_{99} \cos(x-99\pi) + (b_{99} - 1) \sin(x-99\pi)) dx \\
 &= [2^{99} a_{99} \sin(x-99\pi) - (b_{99} - 1) \cos(x-99\pi)]_{\frac{199\pi}{2}}^{100\pi} \\
 &= -2^{99} a_{99} + (b_{99} - 1) = 1 - 3 = -2
 \end{aligned}$$

가 된다. 따라서 $\int_{\pi}^{\frac{199\pi}{2}} g(x) dx = -6 - (-2) = -4$ 이다.



22

성균관대학교(자연Ⅱ) 수시22)

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
이차곡선, 접선의 방정식, 수열의 극한, 수열의 수렴	자연계(아래 3개 학과 제외) : 국어, 수학(가), 과탐(2과목 평균) 중 2개 등급합 4이내 및 영어 2·한국사 4 이내 소프트웨어학, 반도체시스템공학, 글로벌바이오메디컬공학 : 수학(가), 과탐(1개 과목) 등급합 3이내 및 영어2·한국사4 이내	수학(2문항), 과학(물리1, 화학1, 생명과학1 3문항 중 택1)	100분

[수학 1]

다음 <제시문1> ~ <제시문2>을 읽고 [수학1-i] ~ [수학1-iv]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

쌍곡선 $x^2 - 2y^2 = -1$ 의 윗부분을 C_1 으로 하고, 아랫부분을 C_2 라고 하자. 쌍곡선 밖의 한 점 P에서 곡선 C_1 에 그은 접선의 접점을 Q, 점 P에서 곡선 C_2 에 그은 접선의 접점을 R로 표기하자.

<제시문2>

n 은 양의 정수라고 하자. <제시문1>에서 정의된 두 곡선 C_1, C_2 에 대하여, 점

$P_n(3n, n)$ 에서 곡선 C_1 에 그은 접선 위의 접점을 $Q_n\left(a, \sqrt{\frac{a^2+1}{2}}\right)$, 곡선 C_2 에 그은 접선 위의 접점을 $R_n\left(b, -\sqrt{\frac{b^2+1}{2}}\right)$ 이라 하자. (단, a, b 는 실수)

[수학1-i] <제시문1>에서 점 Q에서의 접선의 기울기를 m_1 이라고 하고, 점 R에서의 접선의 기울기를 m_2 라고 할 때, m_1 과 m_2 의 범위를 찾은 후, 접선의 기울기가 $\frac{1}{3}$ 이 되는 점들의 좌표를 구하고 그 이유를 논하시오.



[수학1-ii] <제시문2>에 있는 실수 a , b 와 양의 정수 n 에 대하여, a 와 b 를 n 에 대한 식으로 표현하고 그 이유를 논하시오.

[수학1-iii] <제시문2>의 실수 a 가 모든 양의 정수 n 에 대해서 부등식 $k \leq a < l$ 을 만족할 때, k 의 최댓값과 l 의 최솟값을 구하고 그 이유를 논하시오. (단, k , l 은 실수)

[수학1-iv] <제시문2>에 있는 세 점 P_n , Q_n , R_n 과 원점 $O(0,0)$ 에 대하여, 삼각형 P_nOQ_n 의 넓이와 삼각형 R_nOP_n 의 넓이의 합을 A_n 이라고 놓을 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n}$ 을 구하고 그 이유를 논하시오.



[수학 2]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [수학2- i] ~ [수학2-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

함수 $f(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (x \geq 0) \\ -\sqrt{-x} & (x < 0) \end{cases}$$

<제시문2>

양의 정수 n 과 <제시문1>에 정의된 함수 $f(x)$ 에 대하여, 두 곡선 $y=f(nx)$, $y=f(nx-1)$ 과 두 직선 $x=0$, $x=1$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 a_n 이라 하자.

<제시문3>

양의 정수 n 과 <제시문1>에 정의된 함수 $f(x)$ 에 대하여, 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=f(x-2n)-f(x-n)+f(n)$ 으로 정의하자. 이때 곡선 $y=g(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 b_n 이라 하자.

[수학2- i] <제시문2>에 주어진 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 n 에 대한 식으로 표현한 후,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sqrt{n^r} = 1$ 이 되도록 하는 양의 정수 r 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학2- ii] <제시문3>에 정의된 함수 $g(x)$ 가 증가하는 구간과 감소하는 구간을 표로 나타낸 후, 함수 $g(x)$ 의 최솟값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학2- iii] <제시문3>에 주어진 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 n 에 대한 식으로 표현한 후, 수

열 $\left\{ \frac{b_n}{n^s} \right\}$ 이 수렴하기 위한 실수 s 의 값의 범위와 그때의 극한값을 구하고 그 이유를 논하시오.



문제1. 쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$ 위의 점 A(4, 1)에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 B 라 하자.
이 쌍곡선의 두 초점 중 x 좌표가 양수인 점을 F 라 할 때, 삼각형 FAB 의 넓이는?
(2015. 6월 평가원)

- ① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

문제2. 다음은 모든 실수 x 에 대하여 $2x-1 \geq ke^{x^2}$ 을 성립시키는 실수 k 의 최댓값을 구하는 과정이다.

$f(x) = (2x-1)e^{-x^2}$ 이라 하자.

$$f'(x) = \left(\boxed{\text{(가)}} \right) \times e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 조사하면

함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

또한 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이므로

함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 그리면

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

따라서 $2x-1 \geq ke^{x^2}$ 을 성립시키는 실수 k 의 최댓값은

$\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $g(x)$, (나)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $g(2) \times p$ 의 값은?
(2016. 4월 전국연합)

- ① $\frac{10}{e}$ ② $\frac{15}{e}$ ③ $\frac{20}{\sqrt[4]{e}}$ ④ $\frac{25}{\sqrt[4]{e}}$ ⑤ $\frac{30}{\sqrt[4]{e}}$



풀어보기(문제1) 정답 ②

쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$ 위의 점 $A(4, 1)$ 에서의 접선의 방정식은 $\frac{4x}{8} - 1 \cdot y = 1$ 이다.

이 접선과 x 축과의 교점이 $B(2, 0)$ 이고

쌍곡선의 초점 중 x 의 좌표가 양수인 점은 $F(3, 0)$ 이다. $\triangle FAB$ 의 넓이를 구하면 $\triangle FAB$ 는 밑변의 길이가 1이고 높이가 1인 삼각형이므로 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 ③

$f(x) = (2x-1)e^{-x^2}$ 이라 하자.

$$f'(x) = \left(-4x^2 + 2x + 2 \right) \times e^{-x^2} = -2(2x+1)(x-1)e^{-x^2}$$

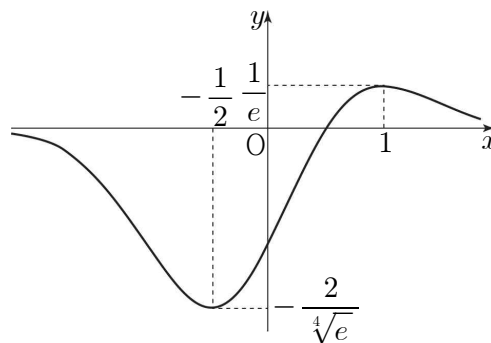
$$f'(x)=0 \text{에서 } x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	...	$-\frac{1}{2}$...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	$-\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$	\nearrow	$\frac{1}{e}$	\searrow

이므로 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $-\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$ 이다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 그리면



이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$ 이다.



$$(2x-1)e^{-x^2} \geq -\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \text{ 이므로 } k \leq -\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \text{ 이다.}$$

따라서 $2x-1 \geq ke^{x^2}$ 을 성립시키는 실수 k 의 최댓값은 $-\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$ 이다.

$$\text{그러므로 } g(x) = -4x^2 + 2x + 2, \quad p = -\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } g(2) \times p = \frac{20}{\sqrt[4]{e}} \text{ 이다.}$$

[수학 1] 대학발표 예시답안

[수학1-i]

점 Q의 좌표를 (x_1, y_1) 이라고 두면, 이 점에서의 접선의 방정식은 $x_1x - 2y_1y = -1$ 이고,

접선의 기울기 m_1 은 $m_1 = \frac{x_1}{2y_1} = \frac{x_1}{\sqrt{2(x_1^2+1)}}$ 이 되어 $-\frac{1}{\sqrt{2}} < m_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 을 만족하게

된다. 또한 위의 기울기에 대한 식으로부터 $m_1 = \frac{1}{3}$ 이 되는 점의 좌표는 $\left(\sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$

이 된다. 마찬가지로, 점 R의 좌표를 (x_2, y_2) 라고 두면, 이 점에서의 접선의 방정식은

$x_2x - 2y_2y = -1$ 이고, 접선의 기울기 m_2 는 $m_2 = \frac{x_2}{2y_2} = \frac{x_2}{\sqrt{2(x_2^2+1)}}$ 이 되어

$-\frac{1}{\sqrt{2}} < m_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 를 만족하게 된다. 또한 위의 기울기에 대한 식으로부터 $m_2 = \frac{1}{3}$ 이

되는 점의 좌표는 $\left(-\sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$ 이 된다.

[수학1-ii]

점 $\left(a, \sqrt{\frac{a^2+1}{2}}\right)$ 에서의 접선 $ax - 2\sqrt{\frac{a^2+1}{2}}y = -1$ 이 $(3n, n)$ 을 지나므로,

$3na - 2\sqrt{\frac{a^2+1}{2}}n = -1$ 이 성립한다. 이 식으로부터 $7n^2a^2 + 6na + (1-2n^2) = 0$ 을 얻는다.

따라서 a 는 이차방정식 $7n^2a^2 + 6na + (1-2n^2) = 0$ 의 한 근이 된다. 같은 방법으로 b 역시 같은 이차방정식의 근이 되고 $a > b$ 이므로, 근의 공식을 적용하면,

$$a = \frac{-3 + \sqrt{2(1+7n^2)}}{7n} \text{ 이 되고, } b = \frac{-3 - \sqrt{2(1+7n^2)}}{7n} \text{ 이 된다.}$$

[수학1-iii]

두 접선의 기울기가 $\frac{1}{3}$ 인 직선 위에 놓여있는 점들 중 1사분면에서 만나야 하므로,



$\left(a, \sqrt{\frac{a^2+1}{2}}\right)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{3}$ 보다 작아야 하고, 따라서 $a < \sqrt{\frac{2}{7}}$ 이어야 한다.

한편 $n=1$ 에 대응하는 a 의 값은 [수학1-ii]의 답으로부터 $\frac{1}{7}$ 이 된다. 따라서

$\frac{1}{7} \leq a < \sqrt{\frac{2}{7}}$ 이 되어, k 의 최댓값은 $\frac{1}{7}$ 이고 l 의 최솟값은 $\sqrt{\frac{2}{7}}$ 이 된다.

[수학1-iv]

선분 OP_n 의 길이는 $\sqrt{10}n$ 이고, 점 Q_n 에서 직선 $x-3y=0$ 까지 이르는 거리는

$$\begin{aligned} \frac{\left|a-3\sqrt{\frac{a^2+1}{2}}\right|}{\sqrt{10}} &= \frac{\left|a-3\frac{(3na+1)}{2n}\right|}{\sqrt{10}} = \frac{\frac{7}{2}a + \frac{3}{2n}}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{\frac{7}{2}\left(\frac{-3+\sqrt{2+14n^2}}{7n}\right) + \frac{3}{2n}}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{\sqrt{2+14n^2}}{2\sqrt{10}n} \end{aligned}$$

이므로, 삼각형 Q_nOP_n 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \sqrt{10}n \times \frac{\sqrt{2+14n^2}}{2\sqrt{10}n} = \frac{\sqrt{2+14n^2}}{4}$ 이 된다.

비슷한 방법으로, 점 R_n 에서 직선 $x-3y=0$ 까지 이르는 거리는

$$\begin{aligned} \frac{\left|b+3\sqrt{\frac{b^2+1}{2}}\right|}{\sqrt{10}} &= \frac{b-3\frac{(3nb+1)}{2n}}{\sqrt{10}} = \frac{-\frac{7}{2}b - \frac{3}{2n}}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{\left(-\frac{7}{2}\right)\left(\frac{-3-\sqrt{2+14n^2}}{7n}\right) - \frac{3}{2n}}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{\sqrt{2+14n^2}}{2\sqrt{10}n} \end{aligned}$$

이므로, 삼각형 R_nOP_n 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \sqrt{10}n \times \frac{\sqrt{2+14n^2}}{2\sqrt{10}n} = \frac{\sqrt{2+14n^2}}{4}$ 이 된다.

따라서 $A_n = \frac{\sqrt{2+14n^2}}{2}$ 이 되므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n} = \frac{\sqrt{14}}{2}$ 가 된다.

[수학 2]

[수학2-i]

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 (f(nx) - f(nx-1)) dx \\ &= \int_0^1 f(nx) dx - \int_0^{\frac{1}{n}} f(nx-1) dx - \int_{\frac{1}{n}}^1 f(nx-1) dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \sqrt{nx} \, dx + \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{1-nx} \, dx - \int_{\frac{1}{n}}^1 \sqrt{nx-1} \, dx \\
 &= \left[\frac{2}{3n} (nx)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + \left[-\frac{2}{3n} (1-nx)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{n}} - \left[\frac{2}{3n} (nx-1)^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{n}}^1 \\
 &= \frac{2}{3} \sqrt{n} - \frac{2}{3n} (n-1) \sqrt{n-1} + \frac{2}{3n}
 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 a_n \sqrt{n^r} &= \left(\frac{2}{3} \frac{n\sqrt{n} - (n-1)\sqrt{n-1} + 1}{n} \right) \sqrt{n^r} \\
 &= \frac{2}{3} \left(\sqrt{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sqrt{n-1} + \frac{1}{n} \right) \sqrt{n^r} \\
 &= \frac{2}{3} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1} + \frac{1}{n} \sqrt{n-1} + \frac{1}{n} \right) \sqrt{n^r} \\
 &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} + \frac{1}{n} \sqrt{n-1} + \frac{1}{n} \right) \sqrt{n^r} \\
 &= \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{n^r}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^{2-r}}} + \frac{1}{\sqrt{n^{2-r}}} \right)
 \end{aligned}$$

이므로 $r=1$ 인 경우에 수렴하게 되고, 그 때 극한값은 1이다.

[수학2-ii]

$x > 2n$ 인 경우,

$g(x) = \sqrt{x-2n} - \sqrt{x-n} + \sqrt{n}$ 이므로,

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2n}} - \frac{1}{2\sqrt{x-n}} > 0$ 이 되어, 이 구간에서 함수 $g(x)$ 는 증가하게 된다.

$\frac{3n}{2} < x < 2n$ 인 경우,

$g(x) = -\sqrt{2n-x} - \sqrt{x-n} + \sqrt{n}$ 이므로,

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2n-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-n}} > 0$ 이 되어, 이 구간에서 함수 $g(x)$ 는 증가하게 된다.

$n < x < \frac{3n}{2}$ 인 경우,

$g(x) = -\sqrt{2n-x} - \sqrt{x-n} + \sqrt{n}$ 이므로,

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2n-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-n}} < 0$ 이 되어, 이 구간에서 함수 $g(x)$ 는 감소하게 된다.

$x < n$ 인 경우,

$g(x) = -\sqrt{2n-x} + \sqrt{n-x} + \sqrt{n}$ 이므로,



$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2n-x}} - \frac{1}{2\sqrt{n-x}} < 0$ 이 되어, 이 구간에서 함수 $g(x)$ 는 감소하게 된다.

또한, $\lim_{x \rightarrow 2n} g'(x) = \infty$ 이고, $\lim_{x \rightarrow n} g'(x) = -\infty$, $g'\left(\frac{3n}{2}\right) = 0$ 이므로, 이를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	n	...	$\frac{3n}{2}$...	$2n$...
$g'(x)$	-		-	0	+		+
$g(x)$	\searrow	0	\searrow	$(1-\sqrt{2})\sqrt{n}$	\nearrow	0	\nearrow

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x < \frac{3n}{2}$ 일 때 감소하고, $x > \frac{3n}{2}$ 일 때 증가하게 되므로

$x = \frac{3n}{2}$ 일 때, 최솟값 $g\left(\frac{3n}{2}\right) = -\sqrt{2n} + \sqrt{n}$ 을 갖는다.

[수학2-iii]

$$\begin{aligned}
 b_n &= -\int_n^{2n} g(x) dx = -\int_n^{2n} (-\sqrt{2n-x} - \sqrt{x-n} + \sqrt{n}) dx \\
 &= -\left[\frac{2}{3}(2n-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(x-n)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{n}x \right]_n^{2n} \\
 &= \frac{4}{3}n^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}n^{\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

이므로, $s \geq \frac{3}{2}$ 일 때, 수열 $\left\{ \frac{b_n}{n^s} \right\}$ 는 수렴하게 된다.

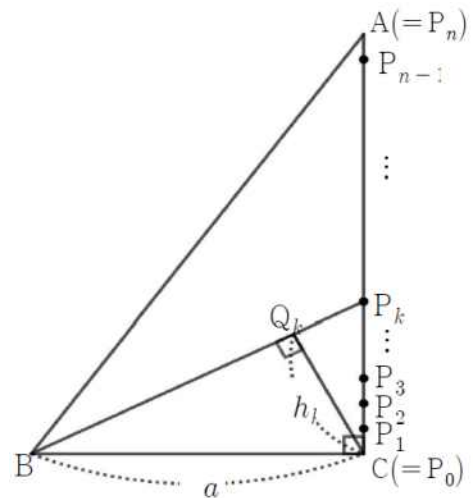
$s = \frac{3}{2}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^s} = \frac{1}{3}$ 이 되고, $s > \frac{3}{2}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^s} = 0$ 이 된다.

23

연세대학교(오전) 수시23)

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
정적분, 급수, 치환적분법, 수열의 합, 수열의 극한, 부분합, 평면벡터, 중점, 타원, 공간좌표, 이면각, 정사영	수능최저학력기준 적용하지 않음.	수학(4문항, 6문제) 과학(물리, 화학, 생명, 지학 중 택1, II수준까지 출제 가능)	150분

[문제 1] 그림과 같이 $\overline{AC}=1$, $\overline{BC}=a(a>0)$ 이고 $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 자연수 n 에 대하여 선분 CA를 n 등분한 각 분점을 점 C에서 가까운 것부터 차례로 $P_0(=C)$, P_1 , P_2 , P_3 , ..., P_{n-1} , $P_n(=A)$ 이라 하자. $1 \leq k \leq n$ 인 자연수 k 에 대하여 점 C에서 선분 BP_k 에 내린 수선의 발을 Q_k 라 하고, 선분 CQ_k 의 길이를 h_k 라 하자. h_k 의 평균을 H_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n$ 을 구하시오. [10점]



[문제 2] 급수 $1^2 + m \times 2^2 + 3^2 + m \times 4^2 + 5^2 + m \times 6^2 + \dots$ 에서 첫째 항부터 제 n 번째 항까지의 부분합을 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3}$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수 m 의 형태를 나타내시오. [10점]



[문제 3] 다음 물음에 답하시오.

좌표평면에서 벡터 \vec{a} 에 대한 다음의 두 명제 p_1, p_2 가 있다.

$p_1 : \vec{a} + \vec{b} = \vec{v}$ 와 $|\vec{v}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \leq 2|\vec{v}|$ 를 만족시키는 벡터 \vec{b} 가 존재한다.

$p_2 : \vec{a} + \vec{b} = \vec{v}$ 와 $|\vec{a}| = m, |\vec{b}| = n$ 을 만족시키는 벡터 \vec{b} 가 존재한다.

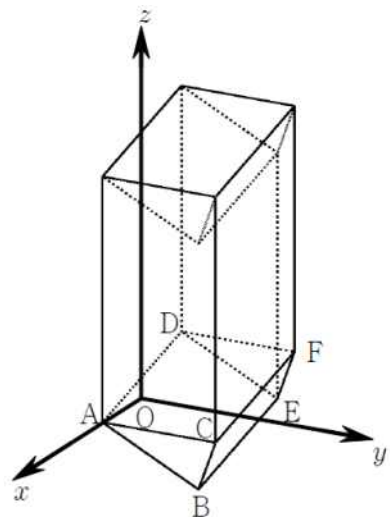
(단, m 과 n 은 $0 < m < n$ 인 고정된 실수이다.)

[문제 3-1] 벡터 $\vec{v} = (c, 0)$ 일 때, 명제 p_1 을 만족시키는 위치벡터 \vec{a} 의 종점이 이루는 도형을 c 를 이용하여 나타내시오. (단, c 는 양의 실수이다.) [10점]

[문제 3-2] 명제 p_2 를 만족시키는 벡터 \vec{a} 의 집합을 S 라고 할 때, 집합 S 의 원소의 개수가 2가 되는 벡터 \vec{v} 의 조건을 m 과 n 을 사용하여 나타내시오. [10점]

[문제 4] 다음 물음에 답하시오.

그림과 같이 좌표공간에서 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, -2)$, $C(1, 2, 0)$, $D(-1, 0, 1)$, $E(-2, 1, -1)$, $F(-1, 2, 1)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각기둥 $ABC-DEF$ 를 z 축의 방향으로 6만큼 평행이동하는 동안 삼각기둥 $ABC-DEF$ 가 그리는 다면체를 V 라 하자.



[문제 4-1] 다면체 V 와 평면 $z=3$ 이 만나서 생기는 단면의 모양과 넓이를 구하시오.

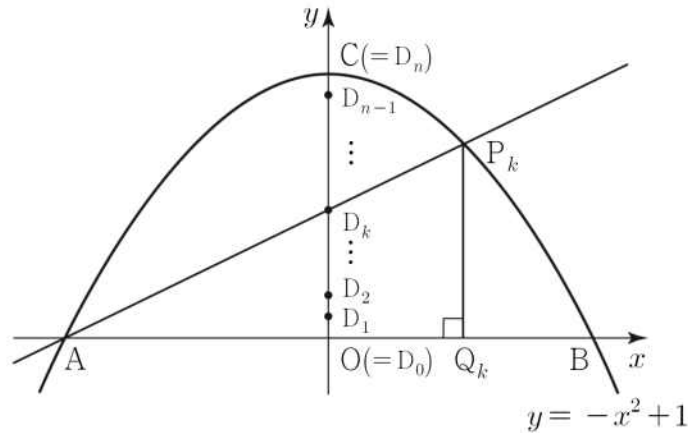
[10점]

[문제 4-2] 다면체 V 의 부피를 구하시오. [10점]



풀어보기

문제1. 그림과 같이 곡선 $y = -x^2 + 1$ 위에 세 점 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ 이 있다. 2이상의 자연수 n 에 대하여 선분 OC 를 n 등분할 때, 양 끝점을 포함한 각 분점을 차례로 $O = D_0, D_1, D_2, \dots, D_{n-1}, D_n = C$ 라 하자. 직선 AD_k 가 곡선과 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 P_k 라 하고, 점 P_k 에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q_k 라 하자. ($k=1, 2, \dots, n$) 삼각형 AP_kQ_k 의 넓이를 S_k 라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k = \alpha$ 이다. 24α 의 값을 구하시오. [4점] (2014. 4월 전국연합)



문제2. 수열 $\{(-1)^{n-1}\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, <보기>의 수열 중 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점] (2009. 3월 전국연합)

< 보 기 >

㉠. $\{S_n\}$

㉡. $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$

㉢. $\left\{\frac{S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n}{n}\right\}$

① ㉡

② ㉢

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢



풀어보기(문제1) 정답 11

점 $D_k\left(0, \frac{k}{n}\right)$ 이므로 직선 AD_k 의 방정식은 $y = \frac{k}{n}x + \frac{k}{n}$ 이다.

직선 AD_k 와 곡선 $y = -x^2 + 1$ 과의 교점 P_k 는 $P_k\left(1 - \frac{k}{n}, \frac{2k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$ 이므로 $\triangle AP_kQ_k$ 의

밑변의 길이는 $2 - \frac{k}{n}$ 이고 높이는 $\frac{2k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^2$ 이다.

$$\therefore S_k = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{k}{n}\right) \left\{ \frac{2k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^2 \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(2 - \frac{k}{n}\right) \left\{ \frac{2k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^2 \right\} = \int_0^1 \frac{1}{2} (2-x)(2x-x^2) dx = \frac{11}{24}$$

따라서 $\alpha = \frac{11}{24}$ 이고 $24\alpha = 11$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 ⑤

$n = 2m$ 일 때, $S_n = S_{2m} = 0$

$n = 2m-1$ 일 때, $S_n = S_{2m-1} = 1$

ㄱ. $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} \neq \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m-1}$ 이므로 수열 $\{S_n\}$ 은 발산한다.

ㄴ. $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S_{2m}}{2m} = 0, \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S_{2m-1}}{2m-1} = 0$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 0$ (수렴)

ㄷ. $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_{2m}}{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$ 이고,

$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_{2m-1}}{2m-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{2m-1} = \frac{1}{2}$ 이므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n}{n} = \frac{1}{2}$ (수렴)

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.



[수학, 문제1] 대학발표 예시답안

삼각형 P_kBC 의 넓이를 두 가지 방법으로 계산하면, $h_k \times \sqrt{a^2 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = a \times \frac{k}{n}$ 이므로

$$h_k = \frac{ak}{n} \times \frac{1}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}} \text{를 얻는다.}$$

$$\text{따라서 } H_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{ak}{n}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}} \text{ 이고,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{ak}{n}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = a(\sqrt{a^2 + 1} - a)$$

이다. 또는 $a\sqrt{a^2 + 1} - a^2$ 이다.

[수학, 문제2] 대학발표 예시답안

$$\begin{aligned} S_{2n-1} &= 1^2 + m \times 2^2 + 3^2 + m \times 4^2 + \cdots + m \times (2n-2)^2 + (2n-1)^2 \\ &= 1^2 + \cdots + (2n-1)^2 + m \{2^2 + \cdots + (2n-2)^2\} \\ &= \sum_{k=1}^n \{(2k-1)^2 + 4m(k-1)^2\} \\ &= \frac{n(2n-1)}{3} \{2(m+1)n - (2m-1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1^2 + m \times 2^2 + 3^2 + m \times 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 + m \times (2n)^2 \\ &= 1^2 + \cdots + (2n-1)^2 + m \{2^2 + \cdots + (2n)^2\} \\ &= \sum_{k=1}^n \{(2k-1)^2 + 4mk^2\} \\ &= \frac{n(2n+1)}{3} \{2(m+1)n + (2m-1)\} \end{aligned}$$

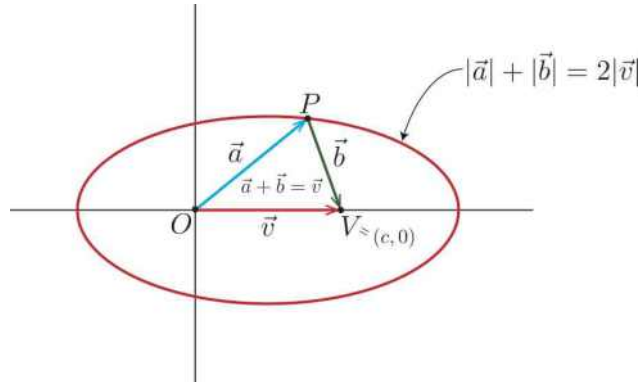
그러므로 극한을 계산하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3} = \frac{m+1}{6}$ 이 자연수가 되어야 한다.

따라서 $m = 6k - 1$ (k 는 자연수) 또는 $m = 6k + 5$ (k 는 0 이상의 정수)의 형태이다.



[수학, 문제3] 대학발표 예시답안

[3-1] 부등식의 경계인 $|\vec{a}| + |\vec{v}-\vec{a}| = 2|\vec{v}|$ 를 직접 \vec{a} 에 대해 계산하여 얻을 수도 있다.



즉, $\vec{a} = (x, y)$ 라 두면 $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2c$ 를 얻고,

$$(c-x)^2 + y^2 = (2c - \sqrt{x^2 + y^2})^2 = 4c^2 - 4c\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2$$

과 같이 근호를 차례로 제거하여 정리하면,

$$\frac{\left(x - \frac{c}{2}\right)^2}{c^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)^2} = 1.$$

이 방정식은 장축의 길이가 $2c$, 단축의 길이가 $\sqrt{3}c$ 인 타원이므로, 구하려는 도형은 이 경계선을 포함한 타원의 내부이다.

[나침반 풀이]

$\vec{v} = \overrightarrow{OV}$, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 라 하면 $\vec{b} = \vec{v} - \vec{a} = \overrightarrow{OV} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AV}$ 이다.

(i) $|\vec{v}| = |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ 인 경우는 선분 OV 위에 점 A 가 있는 경우이다.

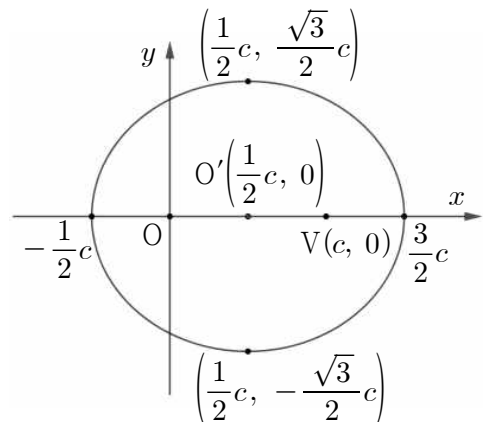
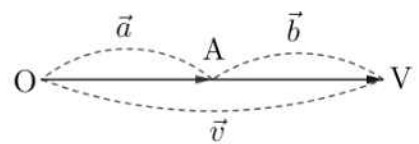
(ii) $|\vec{a}| + |\vec{b}| = 2|\vec{v}|$ 인 경우 $\vec{b} = \vec{v} - \vec{a}$ 를 대입하면

$$|\vec{a}| + |\vec{v} - \vec{a}| = 2|\vec{v}|, \quad \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AV} = 2\vec{c} \text{ (일정)}$$

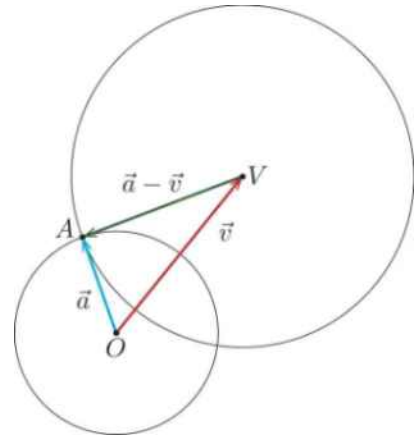
따라서 점 A 는 점 O 와 점 V 를 초점으로 하는 타원이다.

$\overrightarrow{OV} = \frac{c}{2}$ 이므로 단축의 길이는 $\sqrt{3}c$ 이다.

(i), (ii)에 의해 위치벡터 \vec{a} 의 종점이 이루는 도형은 장축의 길이가 $2c$, 단축의 길이가 $\sqrt{3}c$ 인 타원의 내부와 경계이다.



[3-2] 벡터 \vec{a} 가 집합 S 의 원소이므로 \vec{a} 가 $|\vec{a}|=m$ 과 $|\vec{a}-\vec{v}|=n$ 을 만족하는 서로 다른 2개의 \vec{a} 가 존재한다. \vec{v} 의 시점과 종점을 연결한 선분을 OV라 하고 \vec{a} 의 시점과 종점을 연결한 선분을 OA라 했을 때, $\vec{a}-\vec{v}$ 를 나타내는 선분은 VA이다.



경우1. 선분 OV와 선분 OA가 한 직선상에 놓이지 않은 경우를 생각하자. 삼각형 OVA의 두 변의 길이의 합이 나머지 한 변의 길이보다 크기 때문에

$$|\vec{v}-\vec{a}|-|\vec{a}|<|\vec{v}|<|\vec{v}-\vec{a}|+|\vec{a}| \text{ 이 항상 성립한다.}$$

$$\text{따라서 } n-m=|\vec{v}-\vec{a}|-|\vec{a}|<|\vec{v}|<|\vec{v}-\vec{a}|+|\vec{a}|=n+m$$

경우2. 선분 OV와 선분 OA가 평행하여 한 직선상에 놓인 경우를 생각하자.

1) \vec{a} 와 $\vec{v}-\vec{a}$ 가 같은 방향인 경우

명제 p_2 를 만족하는 \vec{a} 는 벡터 \vec{v} 의 방향과 일치하고 $|\vec{a}|=m$ 인 하나의 벡터밖에 없다.

2) \vec{a} 와 $\vec{v}-\vec{a}$ 가 반대 방향인 경우

명제 p_2 를 만족하는 \vec{a} 는 벡터 \vec{v} 의 방향과 반대이고 $|\vec{a}|=m$ 인 하나의 벡터밖에 없다.

따라서 \vec{a} 가 $|\vec{a}|=m$ 과 $|\vec{a}-\vec{v}|=n$ 을 만족하는 서로 다른 2개의 \vec{a} 가 있을 필요충분조건은 경우 1의 $n-m<|\vec{v}|<n+m$ 이다.

[수학, 문제4] 대학발표 예시답안

[4-1] 먼저 삼각기둥 ABC-DEF를 이루는 면들에 대해 법선벡터와 넓이를 구하여 보자.

(i) 앞면 삼각형 ABC는 세 변의 길이가 각각 2, $\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$ 인 이등변삼각형이므로 피타고라스의 정리를 이용하여 높이가 $\sqrt{5}$ 임을 알 수 있고, 따라서 그 넓이는 $\sqrt{5}$ 이다. 세 점 (1, 0, 0), (1, 2, 0), (0, 1, -2)가 이루는 평면의 방정식을 생각하면, 이에 수직인 벡터는 (-2, 0, 1)이다.

(ii) 마찬가지로, 사각형 ACFD의 넓이는 $2\sqrt{5}$ 이고, 세 꼭짓점을 골라 평면의 방정식을 생각하면, 이는 벡터 (1, 0, 2)와 수직임을 알 수 있다.



잘린 면의 모양은 오각형이며, 그 넓이는 (i), (ii)에서 구한 두 다각형을 평면 $z=3$ 에 정사영하여 얻을 수 있다.

먼저 삼각형 ABC와 $z=3$ 이 이루는 이면각을 θ_1 이라 두면,

$$\cos(\theta_1) = \frac{(0, 0, 1) \cdot (-2, 0, 1)}{|(0, 0, 1)| |(-2, 0, 1)|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

이다. 마찬가지로 사각형 ACFD와 $z=3$ 이 이루는 각을 θ_2 라 두면,

$$\cos(\theta_2) = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\because \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \right)$$

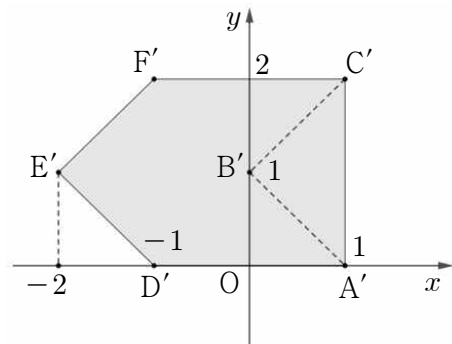
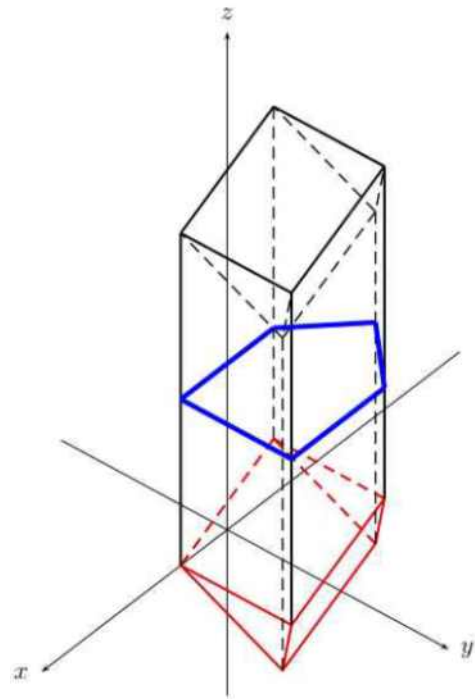
이다. 따라서 구하려는 잘린면의 넓이는

$$\sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 5 \text{가 된다.}$$

[나침반 풀이]

점 B를 z 축의 방향으로 6만큼 이동한 점이 $(0, 1, 4)$ 이므로 삼각기둥 ABC-DEF와 $z=3$ 이 만나서 생기는 도형을 xy 평면에 정사영하여 얻은 도형은 오른쪽 그림과 같다.

이 때, 점 B'은 정사영하여 얻은 도형에 포함되므로 구하는 단면의 모양은 오각형이고, 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 + 2 \times 2 = 5$ 이다.



[4-2] 그림에 있는 다면체 V 내부에서 위쪽에 보이는 삼각기둥 모양을 제외한 것을 V' 이라 하자. 평면 $z=1$ 로 자른 아래 부분을 입체도형의 위쪽으로 끼워넣는다고 생각하면 V' 은 [문제 4-1]의 오각형을 단면으로 하고 높이가 6인 오각기둥과 같은 부피를 갖는다. 따라서 V 의 부피는

$$6 \times (D \text{의 넓이}) + (\text{삼각기둥의 부피}) = 6 \times 5 + \frac{1}{2} \times 2 \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 35$$

이다.



24

연세대학교(오후) 수시24)

...



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
합성함수, 치환적분법, 원과 직선의 위치관계, 삼각함수의 극한, 정적분, 평균값의 정리, 치환적분법, 부등식의 영역, 벡터의 내적	수능최저학력기준 적용하지 않음.	수학(4문항, 6문제) 과학(물리, 화학, 생명, 지학 중 택1, II수준까지 출제 가능)	150분

[문제 1] 합성함수가 정의될 수 있는 범위에서 함수 $f(x)$ 에 대한 합성함수를 다음과 같이 나타내자.

$$(f \circ f)(x) = f^{<2>}(x), (f \circ f \circ f)(x) = f^{<3>}(x), \dots,$$

$$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_n(x) = f^{<n>}(x)$$

편의상 $f^{<i>}(x)$ 를 $f^{<i>}$ 라 하고, $f^{<0>} = x$ 라 하자.

함수 $f(x) = \ln(x)$ 라 할 때, 부정적분 $\int \frac{f^{<n>}}{f^{<0>} f^{<1>} f^{<2>} \dots f^{<n-2>}} dx$ 를

$f^{<i>}$ ($i=0, 1, \dots, n$)로 나타내고, 그 이유를 설명하시오.

(단, $n \geq 2$ 인 자연수이다.) [10점]

[문제 2] 좌표평면 위에 원 $C: (x-a)^2 + y^2 = 1$ 이 있다. 원점 O에서 원 C에 그은 두 접선이 원과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 원점 O를 지나는 임의의 직선이 원 C와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 이 두 점의 중점을 M이라 하자. 두 점 P, Q를 포함하여 점 M이 나타내는 도형을 곡선 L이라 하자. $\angle POQ = \theta$ 일 때, 곡선 L의 길이 l 을 θ 를 이용하여 나타내고, $\lim_{\theta \rightarrow 0+} l$ 의 값을 구하시오. (단, $a > 1$ 인 실수이다.) [10점]



- [문제 3] 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $I = \int_{-1}^{-b} \frac{f(a+x)}{x} dx + \int_b^1 \frac{f(a+x)}{x} dx$ (단, a 와 b 는 실수이고, $0 < b < 1$ 이다.)라 하자.
 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)$ 의 도함수가 $|f'(x)| \leq 1$ 을 만족시킬 때, a 와 b 의 값에 관계없이 $|I| \leq 2$ 임을 보이시오. [20점]

[문제 4] 다음 물음에 답하시오.

좌표평면 위의 영역 $C = \left\{ (a, b) \mid \frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{2}}b \geq 0, \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b \geq 0 \right\}$ 가 있다. 영역 C 에 있는 모든 점 (a, b) 에 대하여 $ax + by \geq 0$ 을 만족시키는 점 (x, y) 로 이루어진 영역을 D 라 하자.

[문제 4-1] 영역 D 의 경계선을 구하시오. [7점]

[문제 4-2] 영역 $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 일 때, 두 영역 B, C 의 공통부분의 넓이와 두 영역 B, D 의 공통부분의 넓이의 합을 구하시오. [7점]

[문제 4-3] 영역 $C' = \{(a, b) \mid (\cos\theta)a + (\sin\theta)b \geq 0, (\cos\omega)a + (\sin\omega)b \geq 0\}$ 에 있는 모든 점 (a, b) 에 대하여 $ax + by \geq 0$ 을 만족시키는 점 (x, y) 로 이루어진 영역을 D' 라 할 때, 영역 D' 의 경계선을 구하시오. (단, $0 < \theta < \omega < \frac{\pi}{2}$) [6점]



문제1. 열린 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \ f'(x) = 1 + \{f(x)\}^2$$

$$(나) \ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

함수 $g(x) = \ln f'(x)$ 에 대하여 $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 의 값은? [3점] (2012. 3월 전국연합)

① 1

② $\frac{3}{2}$

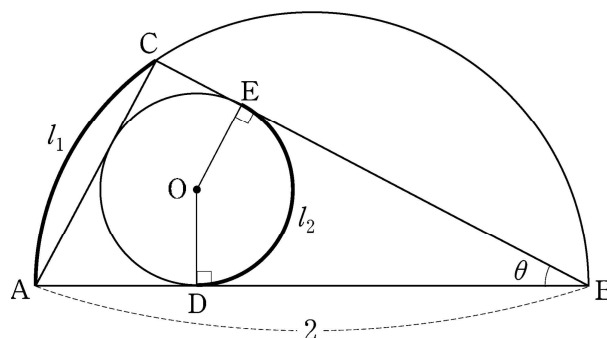
③ 2

④ $\frac{5}{2}$

⑤ 3

문제2. 그림과 같이 지름의 길이가 2이고, 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 반원 위에 점 C가 있다. 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 중심 O에서 선분 AB와 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자. $\angle ABC = \theta$ 이고, 호 AC의 길이를 l_1 , 호 DE의 길이를 l_2 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{l_1}{l_2}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.) [3점]

(2008. 6월 평가원)



① 1

② $\frac{\pi}{4}$

③ $\frac{\pi}{3}$

④ $\frac{2}{\pi}$

⑤ $\frac{3}{\pi}$



문제3. 함수 $f(x) = x + \sin x$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = (f \circ f)(x)$$

로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점] (2008. 대수능)

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$ 의 그래프는 열린 구간 $(0, \pi)$ 에서 위로 볼록하다.

ㄴ. 함수 $g(x)$ 는 열린 구간 $(0, \pi)$ 에서 증가한다.

ㄷ. $g'(x) = 1$ 인 실수 x 가 열린 구간 $(0, \pi)$ 에 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제4. 함수 $f(x) = e^{-x} \int_0^x \sin(t^2) dt$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점] (2017. 대수능)

<보 기>

ㄱ. $f(\sqrt{\pi}) > 0$

ㄴ. $f'(a) > 0$ 을 만족시키는 a 가 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$ 에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $f'(b) = 0$ 을 만족시키는 b 가 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$ 에 적어도 하나 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



풀어보기(문제1) 정답 ①

$g(x) = \ln f'(x) = \ln(1 + \{f(x)\}^2)$ 에서

$$g'(x) = \frac{2f(x)f'(x)}{1 + \{f(x)\}^2} = \frac{2f(x)[1 + \{f(x)\}^2]}{1 + \{f(x)\}^2} = 2f(x)$$

$$\therefore g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot 1 = 2$$

[다른 풀이]

$g(x) = \ln f'(x)$ 이므로

$$g'(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{2f(x)f'(x)}{f'(x)} = 2f(x)$$

$$\therefore g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot 1 = 2$$

[참고] 함수 $y = \tan x$ 는 주어진 조건을 만족시킨다.

풀어보기(문제2) 정답 ④

(i) $\angle ABC = \theta$ 라 하면 $\angle AOC = 2\theta$ 이고 $l_1 = 1 \cdot 2\theta = 2\theta$ 이다.

(ii) $\overline{AC} = 2\sin\theta$, $\overline{BC} = 2\cos\theta$ 이므로

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BC} = \frac{r}{2} (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA})$$

$$\frac{1}{2} \times 2\sin\theta \times 2\cos\theta = \frac{r}{2} (2 + 2\sin\theta + 2\cos\theta)$$

$$\therefore r = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta}$$

□ODBE 에서 $\angle DOE$ 는 $\pi - \theta$ 이므로

$$l_2 = r \cdot (\pi - \theta) = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} (\pi - \theta)$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{l_1}{l_2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\theta}{\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} (\pi - \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta(1 + \sin\theta + \cos\theta)}{\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot (\pi - \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 + \sin\theta + \cos\theta}{(\pi - \theta)\cos\theta} = \frac{1 + 0 + 1}{\pi \cdot 1} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$



풀어보기(문제3) 정답 ⑤

ㄱ. $f(x) = x + \sin x$ 에서 $f'(x) = 1 + \cos x$, $f''(x) = -\sin x$

$0 < x < \pi$ 에서 $0 < \sin x < 1$ 이다.

$$\therefore -1 < f''(x) < 0$$

따라서, $f(x)$ 는 $0 < x < \pi$ 에서 위로 볼록하다. (참)

ㄴ. $g'(x) = f'(f(x))f'(x) = (1 + \cos f(x))(1 + \cos x)$

$0 < x < \pi$ 에서 $-1 < \cos x < 1$, $\cos f(x) > 0$ 이므로

$$1 + \cos f(x) > 0, 1 + \cos x > 0$$

$$\therefore g'(x) > 0$$

따라서, $g(x)$ 는 $0 < x < \pi$ 에서 증가한다. (참)

ㄷ. $g(0) = f(f(0)) = f(0) = 0$, $g(\pi) = f(f(\pi)) = f(\pi) = \pi$ 이다.

$g(x)$ 가 $[0, \pi]$ 에서 연속이고, $(0, \pi)$ 에서 미분가능하므로

$$f'(x) = \frac{g(\pi) - g(0)}{\pi - 0} = 1$$

인 x ($0 < x < \pi$) 가 적어도 하나 존재한다. (평균값 정리) (참)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

풀어보기(문제4) 정답 ⑤

ㄱ. $0 < x < \sqrt{\pi}$ 에서 $e^{-x} > 0$, $\sin(x^2) \geq 0$ 이고 $\sin 0 = \sin \pi = 0$ 이므로

$$f(\sqrt{\pi}) = e^{-\pi} \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2) dt > 0 \quad (\text{참})$$

ㄴ. $f'(x) = -e^{-x} \int_0^x \sin(t^2) dt + e^{-x} \sin(x^2)$

$$f'(0) = -e^{-0} \int_0^0 \sin(t^2) dt + e^{-0} \sin 0^2 = 0$$

$$f'(\sqrt{\pi}) = -e^{-\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2) dt + e^{-\sqrt{\pi}} \sin \pi = -f(\sqrt{\pi}) < 0$$

함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[0, \sqrt{\pi}]$ 에서 연속이고, 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$f'(a) = \frac{f(\sqrt{\pi}) - f(0)}{\sqrt{\pi} - 0} > 0$$

를 만족시키는 a 가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$ 에서 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄷ. ㄴ을 만족시키는 a ($0 < a < \sqrt{\pi}$) 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, \sqrt{\pi}]$ 에서 연속이고 $f'(a) > 0$, $f'(\sqrt{\pi}) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의해 $f'(b) = 0$ 이 되는 b 가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$ 에서 적어도 하나 존재한다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

[수학, 문제1] 대학발표 예시답안

합성함수 미분법에 의하여,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f^{<n-1>} &= \frac{d}{dx} \ln(\ln \dots (\ln(\ln x)) \dots) \\ &= \frac{1}{\ln(\ln \dots (\ln(\ln x)) \dots)} \times \dots \times \frac{1}{\ln x} \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{f^{<n-2>} \dots f^{<1>} f^{<0>}} \end{aligned}$$

이를 이용하여 직접 치환적분을 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int f(f^{<n-1>}) \frac{d}{dx}(f^{<n-1>}) dx &= \int f(y) dy = y(\ln y - 1) + C \\ &= f^{<n-1>}(\ln(f^{<n-1>}) - 1) + C \\ &= f^{<n-1>}(f^{<n>} - 1) + C \end{aligned}$$

정답 : $f^{<n-1>}[f^{<n>} - 1] + C$ (단, C 는 적분상수) 또는

$$e^{f^{<n>}}(f^{<n>} - 1) + C(e^{\ln x} = x \text{ 이므로}) \text{이다.}$$

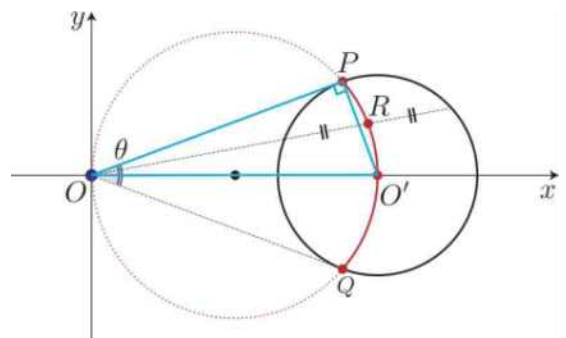
[수학, 문제2] 대학발표 예시답안

주어진 원의 중심을 $O'(a, 0)$ 이라 하면, $\overline{OO'} = a$ 이다.

직각삼각형 OO'P로부터, $a = \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ 이다.

또한, 점 O' 과 곡선 L 위의 임의의 점 R 을 이 으면, 두 선분 $O'R$ 와 OR 가 서로 수직임을 쉽 게 알 수 있다. 왜냐하면 R 이 해당하는 현의 중점이기 때문이다.

따라서 L 은 선분 OO' 을 지름으로 하는 원 위의 점들 중 주어진 원 C 의 내부에 있는 호이다. 중심각이 2θ 이고 반지름은 $\frac{a}{2}$ 인 호 L



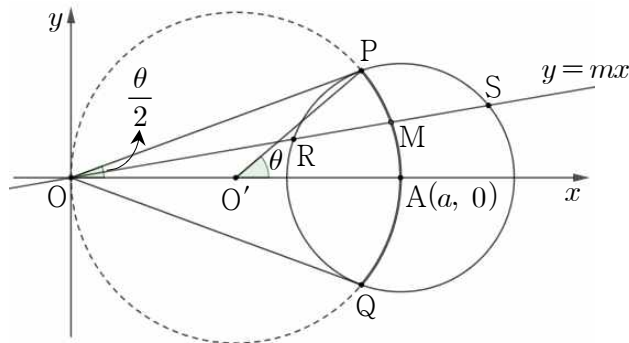
의 길이는 $\frac{a}{2} \times 2\theta = \frac{\theta}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ 로 주어진다. 따라서 $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2 \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2$ 이다.

**[나침반 풀이]**

원점을 지나는 직선을 $l: y=mx$ 라 하고 원 C 와 만나는 두 점을 $R(\alpha, m\alpha)$, $S(\beta, m\beta)$ 라 하자. 직선 l 을 원 C 에 대입하여 정리하면

$$(m^2+1)x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$$

이고, 방정식의 두 근이 α, β 이므로 $\alpha+\beta = \frac{2a}{m^2+1}$ 이다.



따라서 \overline{RS} 의 중점의 좌표 $M(x, y) = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{m(\alpha+\beta)}{2}\right)$ 에서 $x = \frac{a}{m^2+1}$, $y = \frac{ma}{m^2+1}$ 이

고, $m = \pm \sqrt{\frac{a-x}{x}}$ 이므로 곡선 L 을 만족하는 식은 $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ 중 호 PQ 의 길이의 값이 작은 부분이다.

한편, $\angle AOP = \frac{\theta}{2}$ 에서 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{a}$ 이고, $\angle AO'P = \theta$ 이므로 곡선 L 의 길이 l 은

$$l = \frac{a}{2} \times 2\theta = a\theta = \frac{\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

이다. 따라서 $\lim_{\theta \rightarrow 0+} l = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} = 2$ 이다.

[수학, 문제3] 대학발표 예시답안

치환하여 다음과 같이 정리한다.

$$I = \int_{-1}^{-b} \frac{f(a+x)}{x} dx + \int_b^1 \frac{f(a+x)}{x} dx = \int_b^1 \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x} dx$$

이다.

평균값의 정리에 의해 함수 $f(x)$ 가 구간 $[a-x, a+x]$ 에서 연속이고 구간 $(a-x, a+x)$ 에서 미분가능하므로 $\frac{f(a+x) - f(a-x)}{2x} = f'(c)$ 인 c 가 구간 $(a-x, a+x)$ 에 존재한다.

$$\frac{f(a+x) - f(a-x)}{x} = 2f'(c) \text{ 이므로 } -2 \leq \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x} \leq 2 \text{ 이다.}$$



$$\int_b^1 (-2) dx \leq \int_b^1 \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x} dx \leq \int_b^1 2 dx$$

$$-2(1-b) \leq \int_b^1 \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x} dx \leq 2(1-b)$$

따라서 $0 < b < 1$ 이므로 $-2 \leq \int_b^1 \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x} dx \leq 2$ 이다.

[수학, 문제4] 대학발표 예시답안

[4-1] 영역 C 를 표현하면 $\{(a, b) \mid b \geq -\sqrt{3}a, a \leq 0\} \cup \{(a, b) \mid b \geq -a, a \geq 0\}$ 이다. 경계

선 위의 점 $(a, b) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ 을 대입하고 $(a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 을 대입하여

$ax + by \geq 0$ 을 만족하는 (x, y) 는 $-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y \geq 0$ 과 $\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \geq 0$ 을 만족한다. 이러한 조건을 만족하는 (x, y) 의 집합이 D 이다.

$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x, x \geq 0 \right\}$ 이며 경계선은 $D_1 = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{x}{\sqrt{3}}, x \geq 0 \right\}$ 과

$D_2 = \{(x, y) \mid y = x, x \geq 0\}$ 이다.

[나침반 풀이]

$\vec{p}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{p}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\vec{p} = (a, b)$, $\vec{q} = (x, y)$ 라 하자.

$$\vec{p} \cdot \vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{2}}b \geq 0, \quad \vec{p} \cdot \vec{p}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b \geq 0$$

벡터 \vec{p} 와 x 축의 양의 방향과 이루는 각을 θ 라

하면 벡터 \vec{p}_1 일 때 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$, 벡터 \vec{p}_2 일

때, $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$ 이므로 만족하는 θ 의 범위는

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi \text{ 이다.}$$

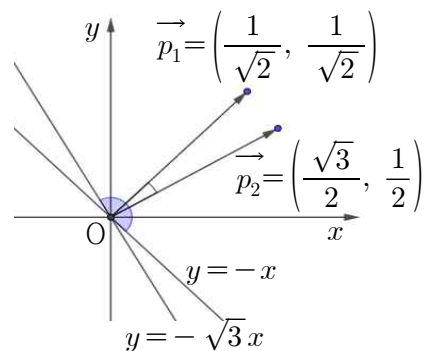
또, 영역 D 의 원소 $\vec{q} = (x, y)$ 와 x 축 사이의

각을 θ' 라 하자. 벡터 \vec{p} 의 각 θ 의 범위

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi \text{ 이고 } \vec{p} \cdot \vec{q} = ax + by \geq 0 \text{ 이므로 만족하는 } \theta' \text{ 의 범위는 } \frac{\pi}{6} \leq \theta' \leq \frac{\pi}{4}$$

이다.

따라서 영역 D 의 경계선은 $\{(x, y) \mid y = x, x \geq 0\} \cup \left\{ (x, y) \mid y = \frac{1}{\sqrt{3}}x, x \geq 0 \right\}$ 이다.





[4-2] 영역 $B \cap D$ 가 나타내는 도형은 부채꼴이고, 이 부채꼴의 중심각의 크기는

$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$ 이다. 따라서 이 부채꼴의 반지름의 길이는 1 이므로 영역 $B \cap D$ 의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{24}$ 이다.

그리고 영역 $B \cap C$ 가 나타내는 도형은 부채꼴이고, 이 부채꼴의 중심각의 크기는

$\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{11}{12}\pi$ 이다. 따라서 이 부채꼴의 반지름의 길이는 1 이므로 영역 $B \cap C$ 의

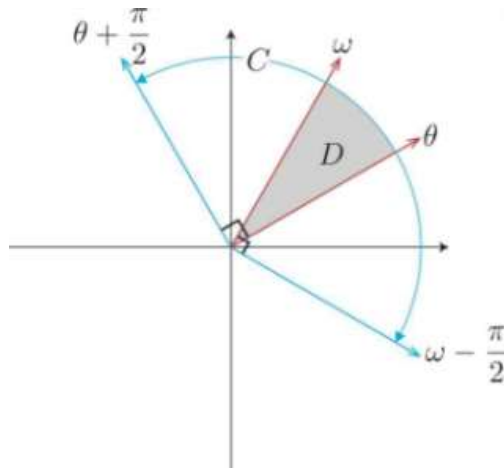
넓이는 $\frac{1}{2} \times \frac{11}{12}\pi = \frac{11}{24}\pi$ 이다. 따라서 구하는 답은 $\frac{\pi}{24} + \frac{11}{24}\pi = \frac{\pi}{2}$ 이다.

[4-3] [문제 4-1]과 같은 원리를 적용하면 경계선

$$D'_1 = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}x, x \geq 0 \right\},$$

$$D'_2 = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{\sin\omega}{\cos\omega}x, x \geq 0 \right\}$$

을 얻는다.



[나침반 풀이]

$\vec{r}_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\vec{r}_2 = (\cos\omega, \sin\omega)$ 로 두면 영역 C 는

$$\vec{p} \cdot \vec{r}_1 = (\cos\theta)a + (\sin\theta)b \geq 0, \quad \vec{p} \cdot \vec{r}_2 = (\cos\omega)a + (\sin\omega)b \geq 0$$

을 만족하는 점 (a, b) 이다.(위 그림 참고)

따라서 $\vec{p} \cdot \vec{q} = ax + by \geq 0$ 을 만족하는 영역 D' 는 두 벡터 $t_1\vec{r}_1$, $t_2\vec{r}_2$ (단, $t_1, t_2 > 0$ 인 실수) 사이이므로 만족하는 영역 D' 의 경계선은

$$\{(x, y) \mid y = (\tan\theta)x, x \geq 0\} \cup \{(x, y) \mid y = (\tan\omega)x, x \geq 0\}$$

이다.



25

이화여자대학교(자연계열 I) 모의25

...



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
수학적 귀납법, 미분법의 활용, 증가함수, 감소함수, 함수의 극한, 벡터, 평면의 방정식, 구의 방정식, 적분법, 정사영, 이면각, 삼각함수의 덧셈정리, 벡터의 내적	국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 3개 영역 등급 합 6 이내, 의예과는 4개 영역 등급 합 5이내 [탐구영역]응시한 과목 중 상위 1과목의 등급으로 반영	수학 3문항	100분

[문항1] [35점]

- (1) 수학적 귀납법을 이용하여 n 이 자연수이고 x 가 -1 보다 같거나 큰 실수이면 다음의 부등식이 성립함을 보여라.

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

- (2) n 이 1보다 큰 홀수이고 $x \geq -2$ 이면 다음이 성립함을 보여라.

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

- (3) $x > -1$ 이면 다음이 성립함을 보여라.

$$0 < r < 1 \text{ 이면 } (1+x)^r \leq 1+rx$$

$$r < 0 \text{ 또는 } r > 1 \text{ 이면 } (1+x)^r \geq 1+rx$$

[문항2] 좌표공간에 중심이 $C(0, 0, 10)$ 이고 반지름이 1인 구를 S 라고 하자. 점 C 의 위치

벡터를 \vec{c} 라 하고, 점 C 를 지나고 단위벡터 $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 와 평행한 직선을

l 이라 하자. 실수 t 에 대하여 벡터 $\vec{c} + t\vec{n}$ 을 위치벡터로 갖는 점 A_t 를 지나고 l 에 수직인 평면을 P_t 라고 하자. [35점]

- (1) 평면 P_t 와 구 S 가 한 개보다 많은 점에서 만나도록 하는 t 의 범위를 구하고, 이 범위 안의 실수 t 에 대하여, S 와 P_t 가 만나서 생기는 원 W_t 의 반지름의 길이를 $f(t)$ 라고 할 때, $f(t)$ 를 구하여라.
- (2) 문제(1)에서 구한 범위 안의 실수 t 에 대하여, 구 S 로 둘러싸인 영역을 평면 P_t 가



두 부분으로 나눈다. 이 두 부분의 부피를 구하여 t 에 관한 식으로 표현하여라.

- (3) $f(t)$ 가 $t=t_0$ 에서 최대라 할 때 평면 P_{t_0} 로 나누어진 구 S 의 조각 중 점 $(0,0,11)$ 을 포함하는 조각을 xy 평면으로 정사영하여 얻어지는 도형의 넓이를 구하여라. (단, 이 조각은 원 W_{t_0} 를 포함하는 것으로 생각함.)

[문항3] 좌표평면에 길이 10인 선분을 $I=\{(x,0) \mid -5 \leq x < 5\}$ 로 정하고 선분 밖에 있는 점 P 와 선분 I 의 두 점 A, B 가 이루는 각을 $\angle APB=\theta$ ($0 \leq \theta < \pi$)라고 할 때 다음 물음에 답하여라. [30점]

- (1) 선분 밖의 점 P 가 y 축의 점이고 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 가 되도록 선분 I 의 두 점 A, B 를 선택할 수 있을 때, 점 P 의 집합을 J 라 하자. 집합 $J \cup \{(0,0)\}$ 이 나타내는 그림의 길이를 구하여라.

- (2) 선분 I 의 양 끝점 $(-5,0), (5,0)$ 와 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 가 되는 선분 밖의 점 P 의 집합을 S 라 하자. 집합 $S \cup \{(-5,0), (5,0)\}$ 이 나타내는 그림의 길이를 구하여라.

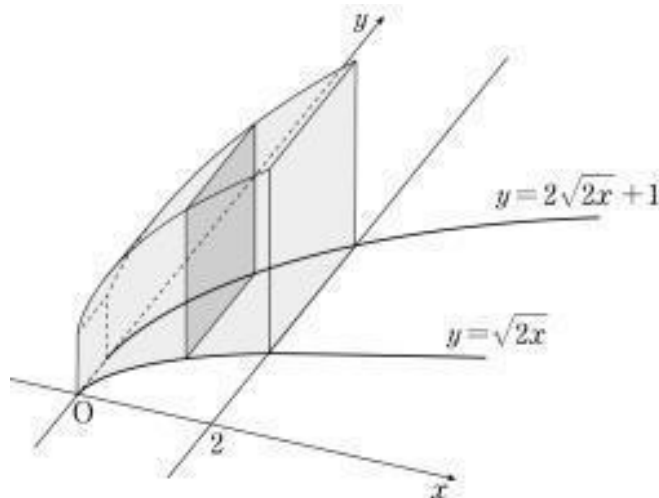
- (3) 선분 밖의 점 P 가 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 가 되도록 선분 I 의 두 점 A, B 를 선택할 수 있을 때 점 P 를 집합 V 의 원소라 하자. 집합 $V \cup I$ 를 나타내는 그림의 넓이를 구하여라.



문제1. 함수 $f(x) = \sin(x+\alpha) + 2\cos(x+\alpha)$ 에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ 일 때, $\tan\alpha$ 의 값은? (단, α 는 상수이다.) [3점] (2019. 6월 평가원)

- ① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

문제2. 그림과 같이 두 곡선 $y = 2\sqrt{2x} + 1$, $y = \sqrt{2x}$ 와 y 축 및 직선 $x = 2$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피를 V 라 하자. $30V$ 의 값을 구하시오. [4점] (2019. 3월 전국연합)



문제3. 좌표공간에서 두 점 $A(3, -3, 3)$, $B(-2, 7, -2)$ 에 대하여 선분 AB 를 포함하고 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 에 접하는 두 평면을 α , β 라 하자. 두 평면 α , β 와 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 의 접점을 각각 C , D 라 할 때, 사면체 $ABCD$ 의 부피는 $\frac{q\sqrt{3}}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점] (2019. 대수능)



풀어보기(문제1) 정답 ④

$f'(x) = \cos(x + \alpha) - 2\sin(x + \alpha)$ 이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 0$$

즉, $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ 에서 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\alpha}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha} = \frac{1}{2}$$

$2(1 + \tan\alpha) = 1 - \tan\alpha$ 이므로 $\tan\alpha = -\frac{1}{3}$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 340

입체도형을 직선 $x = t$ ($0 \leq t \leq 2$)를 포함하고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $(2\sqrt{2t} + 1) - \sqrt{2t} = \sqrt{2t} + 1$ 인 정사각형이므로 단면의 넓이 $S(t)$ 는

$$S(t) = (\sqrt{2t} + 1)^2 = 2t + 2\sqrt{2t} + 1$$

구하는 입체도형의 부피 V 는

$$V = \int_0^2 (2t + 2\sqrt{2t} + 1) dt = \left[t^2 + \frac{4\sqrt{2}}{3} t\sqrt{t} + t \right]_0^2 = \left(4 + \frac{16}{3} + 2 \right) - 0 = \frac{34}{3}$$

따라서 $30V = 340$

풀어보기(문제3) 정답 29

구의 중심 $O(0, 0, 0)$ 에서 선분 AB 로 내린 수선의 발을 H 라 하자.

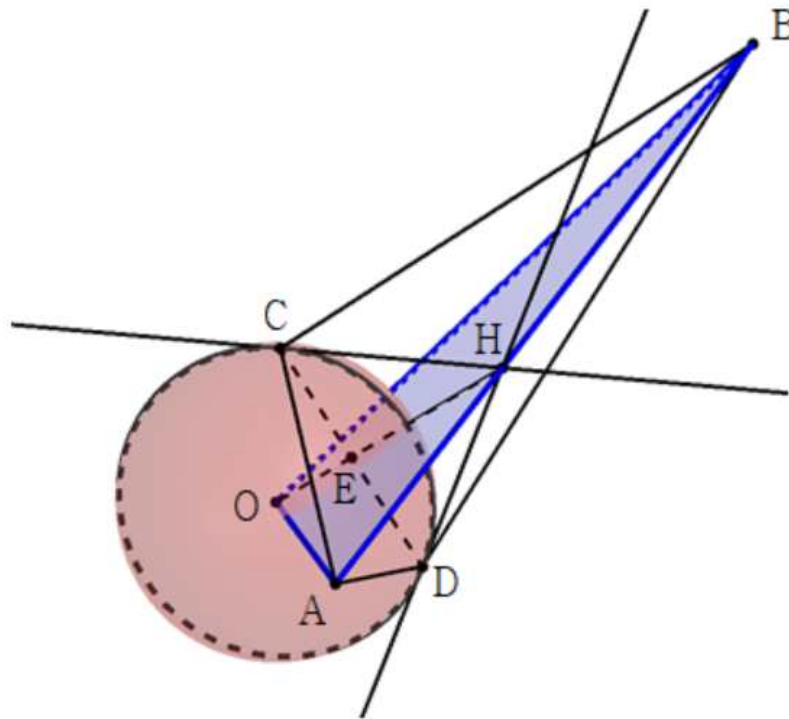
두 점 A, B 를 지나는 직선의 방정식은 $\overrightarrow{BA} = (5, -10, 5) = 5(1, -2, 1)$ 과 평행하고 점 $A(3, -3, 3)$ 을 지나는 직선이므로

$$x - 3 = \frac{y + 3}{-2} = z - 3$$

이다. 이 직선 위의 점 $H(3+t, -3-2t, 3+t)$ 는 $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$ 이므로

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = (3+t, -3-2t, 3+t) \cdot (1, -2, 1) = 6t + 12 = 0$$

따라서 $t = -2$ 이므로 $H(1, 1, 1)$ 이다.



평면 ABO 와 선분 \overline{CD} 의 교점을 E 라 하자. 사면체 ABCD 는 ABE 를 밑면으로 하는 삼각뿔 C-ABE 와 D-ABE 로 나눌 수 있고 그 $\overline{CE} = \overline{DE}$ 이므로 부피는 같다.

$$\overline{OH} = \sqrt{3} \text{ 이고 } \overline{OC} = 1 \text{ 이므로 } \overline{CH} = \sqrt{2}, \overline{CE} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ 이며}$$

$$\overline{HE} = \sqrt{\overline{CH}^2 - \overline{CE}^2} = \sqrt{2 - \frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\overline{AB} = 5\sqrt{6}$ 이므로 구하는 부피는

$$\frac{1}{3} \times (\triangle ABE \text{ 의 넓이}) \times \overline{CD} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 5\sqrt{6} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{9}$$

따라서 $p+q=20+9=29$ 이다.

(다른 풀이) 구의 중심 $O(0, 0, 0)$ 에서 선분 \overline{AB} 로 내린 수선의 발을 H 라 하자.

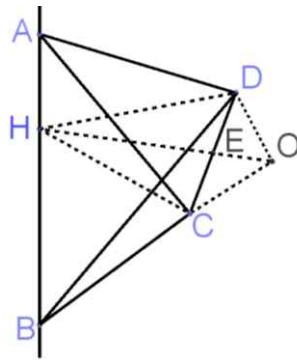
두 점 A, B 를 지나는 직선의 방정식은 $\overrightarrow{BA} = (5, -10, 5) = 5(1, -2, 1)$ 과 평행하고 점 $A(3, -3, 3)$ 을 지나는 직선이므로

$$x-3 = \frac{y+3}{-2} = z-3$$

이다. 이 직선 위의 점 $H(3+t, -3-2t, 3+t)$ 는 $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$ 이므로

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = (3+t, -3-2t, 3+t) \cdot (1, -2, 1) = 6t+12=0$$

따라서 $t = -2$ 이므로 $H(1, 1, 1)$ 이다.



평면 ABO와 선분 \overline{CD} 의 교점을 E라 하자. 사면체 ABCD는 HCD를 밑면으로 하는 삼각뿔 A-HCD와 B-HCD로 나눌 수 있다.

$$\overline{OH} = \sqrt{3} \text{ 이고 } \overline{OC} = 1 \text{ 이므로 } \overline{CH} = \sqrt{2} \text{ 이고 } \overline{CE} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ 이므로 } \overline{CD} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\overline{HE} = \sqrt{\overline{CH}^2 - \overline{CE}^2} = \sqrt{2 - \frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\overline{AB} = 5\sqrt{6}$ 이므로 구하는 부피는

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \times (\triangle HCD \text{의 넓이}) \times \overline{AH} + \frac{1}{3} \times (\triangle HCD \text{의 넓이}) \times \overline{BH} \\ &= \frac{1}{3} \times (\triangle HCD \text{의 넓이}) \times \overline{AB} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \times 5\sqrt{6} = \frac{20\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

따라서 $p+q=20+9=29$ 이다.

[문항1] 대학발표 예시답안

(1) n 이 1일 때 위의 부등식이 자명하게 성립한다.

위의 부등식이 $n=k$ 일 때 성립한다고 가정하고, $n=k+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$$

따라서 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n 과 $x \geq -1$ 에 대하여 $(1+x)^n \geq 1+nx$ 가 성립한다. 참고로, 위의 전개식에서, 첫 번째 부등식이 성립하는 이유는 $n=k$ 일 때 $(1+x)^k \geq 1+kx$ 라고 가정하였고 $1+x \geq 0$ 이기 때문이며, 두 번째 부등식이 성립하는 이유는 모든 자연수 k 와 실수 x 에 대하여 $kx^2 \geq 0$ 이기 때문이다.

(나침반 다른 풀이)

i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변})=1+x, (\text{우변})=1+x$$

이므로 성립한다.

ii) $n=k$ 일 때 성립한다고 가정하면

$$(1+x)^k \geq 1+kx$$



이다.

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x) \\ &\geq (1+kx)(1+x) = 1 + (1+k)x + kx^2 \\ &\geq 1 + (1+k)x \quad (kx^2 > 0 \text{ 이므로})\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때 성립한다.

i), ii)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

(2) 함수 $f(x)=(1+x)^n-nx-1$ 에 대하여, $x \geq -2$ 이면 $f(x) \geq 0$ 임을 보이면 된다.

$f(x)$ 가 미분가능한 함수이고 $f'(x)=n(1+x)^{n-1}-n=0$ 이 성립하는 x 는 -2 와 0 이다. 구간 $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, \infty)$ 에서 $f'(x)$ 의 부호를 계산하면, $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 극댓값을 가지고 $x=0$ 에서 극솟값을 가짐을 알 수 있다. 그리고 $x \geq -2$ 에서 $f'(x)$ 의 부호를 이용하여 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 확인하면, 구간 $(-2, 0)$ 에서 $f(x)$ 가 감소하고 구간 $(0, \infty)$ 에서 증가함을 알 수 있다. 따라서 $x \geq -2$ 일 때 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(0)=0$ 이므로 $f(x)=(1+x)^n-nx-1 \geq 0$ 이 성립한다.

그러므로 $x \geq -2$ 일 때, 부등식 $(1+x)^n \geq 1+nx$ 가 성립한다.

(별해) 수학적 귀납법으로 위의 부등식을 보일 수 있다.

(1)에 의하여 $x \geq -1$ 이면 $(1+x)^n \geq 1+nx$ 가 성립하기 때문에, 우리는 n 이 1보다 큰 홀수이고 $-2 \leq x \leq -1$ 일 때, $(1+x)^n \geq 1+nx$ 가 성립함을 보이면 된다.

n 이 1보다 큰 홀수이고 $-2 \leq x \leq -1$ 일 때, $(1+x)^n \geq 1+nx$ 가 성립한다고 가정한다면 다음에 $(1+x)^{n+2} \geq 1+(n+2)x$ 가 성립함을 보이자.

$(1+x)^{n+2}$ 을 전개시키면 아래의 부등식을 얻는다.

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+2} &= (1+x)^n(1+x)^2 \geq (1+nx)(1+x)^2 = (1+nx)(1+2x+x^2) \\ &= 1 + (n+2)x + (2n+1)x^2 + nx^3\end{aligned}$$

여기에서 $-2 \leq x \leq -1$ 일 때, $(2n+1)x^2 + nx^3 \geq 0$ 임을 보이면 된다.

$(2n+1)x^2 + nx^3 = x^2(2n+1+nx)$ 이고 x^2 은 $-2 \leq x \leq -1$ 에서 양수이므로,

$(2n+1)x^2 + nx^3 = x^2(2n+1+nx)$ 의 부호는 $2n+1+nx$ 에 의해 결정된다.

$-2 \leq x \leq -1$ 일 때 $(2n+1+nx)$ 의 최솟값은 $x=-2$ 일 때의 1이므로

$(2n+1)x^2 + nx^3 = x^2(2n+1+nx) \geq x^2 \cdot 1 \geq 0$ 이 성립한다.

그러므로 $-2 \leq x \leq -1$ 에서

$(1+x)^{n+2} \geq 1 + (n+2)x + (2n+1)x^2 + nx^3 \geq 1 + (n+2)x$ 가 성립하고, 수학적 귀납법에 의하여 1보다 큰 홀수 n 과 $x \geq -2$ 에 대하여 $(1+x)^n \geq 1+nx$ 가 성립한다.

(3) r 이 0또는 1이 아닌 실수일 때, 함수 $f(x)=(1+x)^r-rx-1$ 는 $x > -1$ 에서 미분가능하고, 그 도함수는 $f'(x)=r(1+x)^{r-1}-r$ 이며, $x > -1$ 에서 $f'(x)=0$ 가 성립하는 x 는



0 밖에 없음은 자명하다.

$0 < r < 1$ 의 경우: 먼저 $r-1 < 0$ 이므로 $g(t)=t^{r-1}$ 은 $t \in (0, \infty)$ 에 대하여 감소함수이다.

구간 $(-1, 0)$ 에서 $0 < 1+x < 1$ 이므로 $1^{r-1}=1 < (1+x)^{r-1}$ 이 성립하고

$r > 0$ 이기 때문에 $-1 < x < 0$ 에 대하여 $f'(x)=r\{(1+x)^{r-1}-1\} > 0$ 이다.

그리고 구간 $(0, \infty)$ 에서는 $1 < 1+x$ 이므로 $(1+x)^{r-1} < 1$ 이고 $f'(x)=r\{(1+x)^{r-1}-1\} < 0$ 이 성립한다. 따라서 함수 $f(x)=(1+x)^r - rx - 1$ 는 $x=0$ 에서 극대이고 최대이다.

그러므로 $x > -1$ 인 모든 실수에 대하여 $f(x)=(1+x)^r - rx - 1 \leq f(0)=0$ 이고 부등식 $(1+x)^r \leq 1+rx$ 가 성립한다.

$r < 0$ 인 경우: $0 < r < 1$ 인 경우와 마찬가지로 $r-1 < -1 < 0$ 이기 때문에 $g(t)=t^{r-1}$ 은 $t \in (0, \infty)$ 에 대하여 감소함수이다. 그러므로 구간 $(-1, 0)$ 에서 $1^{r-1}=1 < (1+x)^{r-1}$ 이 성립하고, $r < 0$ 이므로 $f'(x)=r\{(1+x)^{r-1}-1\} < 0$ 이다.

또한 구간 $(0, \infty)$ 에서 $(1+x)^{r-1} < 1$ 이 성립하고 $f'(x)=r\{(1+x)^{r-1}-1\} > 0$ 이다.

따라서 함수 $f(x)=(1+x)^r - rx - 1$ 은 $x=0$ 에서 극소이고 최소이다.

그러므로 $x > -1$ 인 모든 실수에 대하여 $f(x)=(1+x)^r - rx - 1 \geq f(0)=0$ 이고 부등식 $(1+x)^r \geq 1+rx$ 가 성립한다.

$r > 1$ 인 경우: $r-1 > 0$ 이기 때문에 $g(t)=t^{r-1}$ 은 $t \in (0, \infty)$ 에 대하여 증가함수이다.

구간 $(-1, 0)$ 에서 $0 < 1+x < 1$ 이므로 $(1+x)^{r-1} < 1=1^{r-1}$ 이 성립하고,

$r > 0$ 이기 때문에 $-1 < x < 0$ 에 대하여 $f'(x)=r\{(1+x)^{r-1}-1\} < 0$ 이다.

그리고 구간 $(0, \infty)$ 에서는 $1 < 1+x$ 이므로 $1 < (1+x)^{r-1}$ 이고

$f'(x)=r\{(1+x)^{r-1}-1\} > 0$ 이 성립한다.

따라서 함수 $f(x)=(1+x)^r - rx - 1$ 은 $x=0$ 에서 극소이고 최소이다.

그러므로 $x > -1$ 인 모든 실수에 대하여 $f(x)=(1+x)^r - rx - 1 \geq f(0)=0$ 이고 부등식 $(1+x)^r \geq 1+rx$ 가 성립한다.

[문항2] 대학발표 예시답안

- (1) $\overrightarrow{CA_t} = (\overrightarrow{c} + t\vec{n}) - \vec{c} = t\vec{n}$ 으로, $t \neq 0$ 의 경우는 이 벡터가 평면 P_t 와 수직이고, 따라서 A_t 는 C에서 P_t 에 내린 수선의 발이다.

따라서 C와 평면 P_t 와의 거리는 $\overline{CA_t} = |t\vec{n}| = |t|$ 이다. (\vec{n} 은 단위벡터이므로 길이가 1)

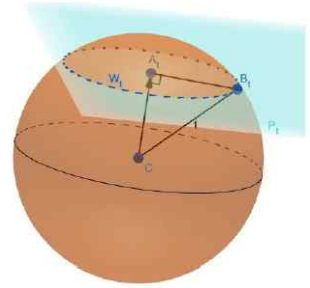
$t=0$ 인 경우, $C=A_t$ 이므로 C와 P_t 의 거리는 $0=|t|$ 이다.



한편, 구 S 상의 임의의 점과 C 와의 거리는 1이다. 따라서 $|t|=1$ 일 때 구와 평면은 접하여 한 개의 점에서 만나고, $|t|>1$ 일 때 구와 평면은 만나지 않으며, $|t|<1$ 일 때 구와 평면은 원에서 만난다. 따라서 구하는 범위는 $-1<t<1$ 이다.

S 와 P_t 가 만나 이루는 교선을 W_t 라 하고, B_t 를 W_t 상의 임의의 점이라고 하자. 선분 CA_t 는 P_t 에 수직이므로, 선분 A_tB_t 와도 수직이다. 또한 B_t 는 구 S 상의 점이므로 $\overline{CB_t}=1$ 이다.

$\angle CA_tB_t = \frac{\pi}{2}$ 이므로, 피타고라스 정리에 의해 $\overline{A_tB_t}^2 = \overline{CB_t}^2 - \overline{CA_t}^2 = 1^2 - |t|^2 = 1 - t^2$ 이다. 즉, A_t 에서 W_t 의 임의의 점까지의 거리가 $\sqrt{1-t^2}$ 으로 일정하므로, 원 W_t 의 중심은 A_t 이고 반지름은 $\sqrt{1-t^2}$ 이다. 따라서 답은 $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ 이다.



- (2) 직선 l 을 축으로 생각하자. 점 A_t 는 점 C 로부터 단위벡터 \vec{n} 방향으로 길이 t 만큼 간 곳에 위치해 있다. (이 때, t 가 음수이면 $-\vec{n}$ 방향으로 길이 $|t|$ 만큼 갔다고 여기면 된다.) l 상의 이 점 A_t 에서 우리가 부피를 구하고자 하는 영역의 수직 단면은 반지름 $f(t)$ 인 원이므로, 넓이가 $\pi \cdot f(t)^2 = \pi(1-t^2)$ 이다. 따라서 영역의 부피는 이 넓이의 식을 범위에 맞게 적분하면 된다.

편의를 위하여 t 대신 s 를 쓰자. 즉 l 상에서 \vec{n} 방향으로 길이 s 만큼 간 곳에서의 단면의 넓이는 $\pi(1-s^2)$ 이다.

첫째 영역은 s 가 t 에서 1까지 움직일 때이므로 부피가 $\int_t^1 \pi(1-s^2)ds$ 이고, 계산하면

$\left[\pi \left(s - \frac{s^3}{3} \right) \right]_t^1 = \pi \left(\frac{2}{3} - t + \frac{t^3}{3} \right)$ 이다. 나머지 영역은 s 가 -1 에서 t 까지 움직이므로, 부

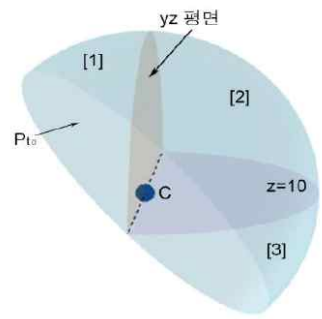
피는 $\int_{-1}^t \pi(1-s^2)ds = \left[\pi \left(s - \frac{s^3}{3} \right) \right]_{-1}^t = \pi \left(\frac{2}{3} + t - \frac{t^3}{3} \right)$ 이다. (혹은 구의 부피 $\frac{4}{3}\pi$ 에서 첫 번째 부피를 빼도 된다.)

따라서 부피는 각각 $\pi \left(\frac{2}{3} - t + \frac{t^3}{3} \right)$ 와 $\pi \left(\frac{2}{3} + t - \frac{t^3}{3} \right)$ 이다.

- (3) $f(t) = \sqrt{1-t^2}$, $-1 < t < 1$. 이때 $t^2 \geq 0$ 이 항상 성립하여 $1-t^2 \leq 1$ 이고, 등호가 $t=0$ 일 때만 성립하므로, 우리의 범위 내에서 $f(t)$ 는 $t=0$ 일 때 최댓값 1을 갖는다. 따라서 $t_0=0$ 이다. $t=t_0=0$ 일 때 평면 P_{t_0} 는 구의 중심인 $C=A$ 를 지나므로 P_{t_0} 가 구 S 를 두 반구로 나눌 수 있고, 점 $(0,0,1)$ 은 두 반구 중 P_{t_0} 의 위쪽에 위치한 반구임을 알 수 있다.



이 위쪽 반구는 $z=10$ 인 평면과 yz 평면에 의해 그림과 같이 세 부분 [1], [2], [3]으로 나뉜다. (여기서 $z=10$ 평면은 C 를 지나며 xy 평면에 평행하고, yz 평면은 C 를 지나며 xy 평면 및 $z=10$ 평면에 수직이다.) 그림의 [2]부분의 xy 평면으로의 정사영은 [2]의 밑면에 해당하는 반원꼴 도형을 xy 평면으로 정사영한 것과 같고, 이 밑면은 xy 평면과 평행한 $z=10$ 평면상의 도형이므로, xy 평면으로의 정사영의 넓이는 이 밑면의 넓이 그대로이다. 이 밑면은 $z=10$



평면 내에서 반지름이 1인 원의 반원 부분이므로, 넓이가 $\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$ 이다.

[3]의 정사영은 [2]의 정사영에 포함되므로 고려하지 않아도 된다. [1]의 정사영은 [1]의 밑면의 정사영과 같다. [1]의 밑면은 평면 P_{t_0} 상의 반지름 1인 원의 반원 부분이

므로, 넓이가 $\frac{\pi}{2}$ 이다. 평면 P_{t_0} 의 법선벡터 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ 과 xy 평면의 법선벡터 $(0, 0, 1)$ 을 이용하여 평면 P_{t_0} 와 xy 평면 사이의 이면각 θ 를 구하면

$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) \cdot (0, 0, 1)}{\left| \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) \right| |(0, 0, 1)|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1^2 + 1^2} \sqrt{1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

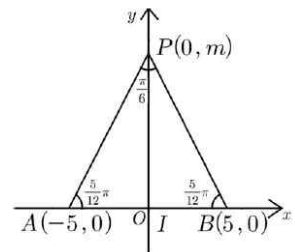
따라서 [1]의 밑면의 xy 평면으로의 정사영의 넓이는 [1]의 밑면의 넓이와 $\cos\theta$ 의 곱인 $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

따라서 문제의 반구의 xy 평면으로의 정사영의 넓이는 $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \pi$ 이다.

[문항3] 대학발표 예시답안

(1)

(i) 선분 I 의 양 끝 점을 두 점 A, B 로 각각 선택하고, $\theta = \frac{\pi}{6}$ 가 되도록 y 축의 점 $P(0, \pm m)$ ($m > 0$)을 잡으면 m 은 밑변의 길이가 10이고 두 밑각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$ 인 이등변삼각형의 높이이다.



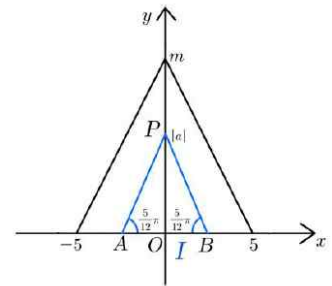
따라서 꼭짓점 $(0, m)$ 은 $\tan \frac{5\pi}{12} = \frac{m}{5}$ 을 만족하므로 삼각함수의 덧셈정리에 따라



$$m = 5 \tan \frac{5\pi}{12} = 5 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = 5 \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = 5 \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right)$$

- (ii) y 축의 점 $P(0, a)$ ($|a| > 5 \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right)$)을 선택하면 선분 I 의 양 끝 점을 두 점 A, B 로 각각 선택하였을 때 θ 의 크기가 가장 크다. 이때 $\triangle PAB$ 는 두 밑각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$ 보다 큰 이등변삼각형이므로 $\theta < \frac{\pi}{6}$ 이다. 따라서 이때 점 P 는 집합 J 의 원소가 아니다.

- (iii) y 축의 점 $P(0, a)$ ($0 < |a| < 5 \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right)$)을 선택하면 짧은꼴의 성질을 활용하여 $\triangle PAB$ 가 높이가 $|a|$ 이고 두 밑각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$ 인 이등변삼각형이 되도록 선분 I 의 두 점 A, B 를 잡을 수 있다.



$5 : 5 \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right) = x : |a|$ 에서 $x = \frac{|a|(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} + 1}$ 이므로 두 점 A, B 의 좌표는 각각

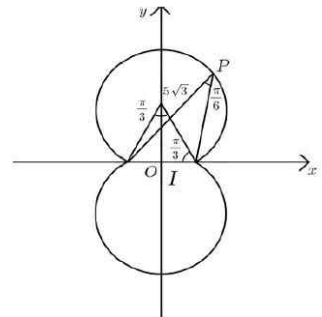
$$A \left(\frac{-|a|(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} + 1}, 0 \right), B \left(\frac{|a|(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} + 1}, 0 \right)$$

이다.

따라서 구하는 집합 J 는 $J = \left\{ (0, y) \mid 0 < |y| \leq 5 \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right) \right\}$

(i) ~ (iii)에서 $J \cup \{(0, 0)\}$ 이 나타내는 그림의 길이는 $10 \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right)$ 이다.

- (2) 선분 I 의 양 끝점을 선택하여 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 가 되도록 하는 좌표평면의 점들을 찾으면 이 점들은 원주각의 성질에 의하여 선분 I 를 현으로 하고 원주각이 $\frac{\pi}{6}$ 가 되는 원위의 점들이다. 이때 원의 중심은 $(0, \pm 5\sqrt{3})$ 이고, 반지름의 길이는 10이므로 구하는 점 P 의 집합은



$$S = \{(x, y) \mid x^2 + (y - 5\sqrt{3})^2 = 10^2, y > 0\} \cup \{(x, y) \mid x^2 + (y + 5\sqrt{3})^2 = 10^2, y < 0\}$$

따라서 집합 $S \cup \{(-5, 0), (5, 0)\}$ 이 나타내는 그림은 반지름의 길이가 10이고 중심각



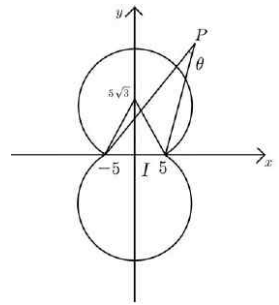
이 $\frac{5\pi}{3}$ 인 호 두 개가 붙어 있는 형태이므로 구하는 길이는 $2\left(10\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{100\pi}{3}$ 이다.

(3) 문제(2)에서 구한 $S \cup \{(-5, 0), (5, 0)\}$ 의 내부 중 선분 I 밖에 있는 점들의 집합은

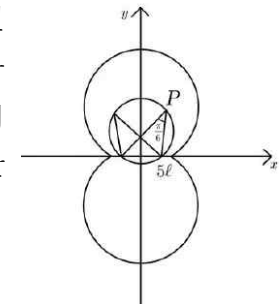
$$B = \{(x, y) | x^2 + (y - 5\sqrt{3})^2 < 10^2, y > 0\} \cup \{(x, y) | x^2 + (y + 5\sqrt{3})^2 < 10^2, y < 0\}$$

이다.

(i) 집합 $S \cup \{(-5, 0), (5, 0)\}$ 외부의 점 P 를 잡으면 선분 I 의 양 끝 점을 두 점 A, B 로 잡을 때 θ 의 크기가 가장 크다. 이때 점 P 는 집합 $S \cup \{(-5, 0), (5, 0)\}$ 의 밖에 있으므로 원주각의 성질에 따라 $\theta < \frac{\pi}{6}$ 이다. 따라서 이들 점 P 는 집합 V 의 원소가 아니다.



(ii) 이제 집합 B 의 임의의 한 점 $P(\alpha, \beta)$, ($\beta > 0$)가 집합 V 의 원소인 것을 다음과 같이 보인다. 문제(2)와 닮음꼴의 성질을 활용하면 이 점이 반지름의 길이가 $10l$ 이고 중심이 $(0, 5\sqrt{3}l)$ 인 원 위의 점이고, 선분 I 의 두 점 $(-5l, 0), (5l, 0)$ 을 현의 끝점으로 할 때 원주각이 $\frac{\pi}{6}$ 가 됨을 알 수 있다.



주어진 조건의 l 이 $0 < l < 1$ 인 것을 확인하기 위하여

원의 방정식 $\alpha^2 + (\beta - 5\sqrt{3}l)^2 = (10l)^2$ 을 정리하면

$$25l^2 + 10\sqrt{3}\beta l - (\alpha^2 + \beta^2) = 0 \text{이다.}$$

$f(l) = 25l^2 + 10\sqrt{3}\beta l - (\alpha^2 + \beta^2)$ 으로 두고 방정식 $f(l)$ 이 $0 < l < 1$ 인 근을 가지는 것을 보이기로 한다.

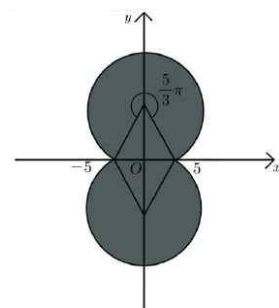
$f(0) = -(\alpha^2 + \beta^2) < 0$ 이고 (α, β) ($\beta > 0$)이 집합 B 의 원소이므로

$$f(1) = 25 + 10\sqrt{3}\beta - (\alpha^2 + \beta^2) = 10^2 - \alpha^2 - (\beta - 5\sqrt{3})^2 > 0 \text{이다.}$$

따라서 $0 < l < 1$ 인 근이 존재한다.

같은 이유로 B 의 점 (α, β) ($\beta < 0$)도 V 의 원소이다.

따라서 구하는 집합 V 는 집합 $B \cup S$ 이고 $V \cup I$ 는 오른쪽 그림처럼 나타나며 반지름 10이고 원주각 $\frac{5\pi}{3}$ 인 부채꼴 두 개와 한 변의 길이가 10인 정삼각형이 두 개 있는 모양으로 분해할 수 있다.



$$\text{따라서 } 2\left(\frac{1}{2}10^2\frac{5\pi}{3} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}10^2\right) = 100\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{이다.}$$

26 이화여자대학교(자연계열 II) 모의26)

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
수학적 귀납법, 미분법의 활용, 증가함수, 감소함수, 함수의 극한, 벡터, 평면의 방정식, 구의 방정식, 적분법, 정사영, 이면각, 삼각함수의 덧셈정리, 벡터의 내적	국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 3개 영역 등급 합 6 이내, 의예과는 4개 영역 등급 합 5이내 [탐구영역]응시한 과목 중 상위 1과목의 등급으로 반영	수학 3문항	100분

[문항1] [35점]

- (1) 수학적 귀납법을 이용하여 n 이 자연수이고 x 가 -1 보다 같거나 큰 실수이면 다음의 부등식이 성립함을 보여라.

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

- (2) n 이 임의의 자연수일 때, 위의 부등식을 이용하여 다음이 성립함을 보여라.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

- (3) 임의의 두 자연수 m 과 n 에 대하여 다음이 성립함을 보여라.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

- (4) n 이 임의의 자연수일 때, 다음이 성립함을 보여라.

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$



[문항2] 좌표공간에 중심이 $C(0, 0, 10)$ 이고 반지름이 1인 구를 S 라고 하자. 점 C 의 위치 벡터를 \vec{c} 라 하고, 점 C 를 지나고 벡터 $\vec{v} = (1, 1, 1)$ 과 평행한 직선을 l 이라 하자. 실수 t 에 대하여 벡터 $\vec{c} + t\vec{v}$ 를 위치벡터로 갖는 점 A_t 를 지나고 l 에 수직인 평면을 P_t 라고 하자. [35점]

- (1) 평면 P_t 와 구 S 가 한 개보다 많은 점에서 만나도록 하는 t 의 범위를 구하고, 이 범위 안의 실수 t 에 대하여, S 와 P_t 가 만나서 생기는 원 W_t 의 반지름의 길이를 $f(t)$ 라고 할 때, $f(t)$ 를 구하여라.
- (2) 문제(1)에서 구한 범위 안의 실수 t 에 대하여, 구 S 로 둘러싸인 영역을 평면 P_t 가 두 부분으로 나눈다. 이 두 부분의 부피를 구하여 t 에 관한 식으로 표현하여라.
- (3) $f(t_0) = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 인 양수 t_0 에 대하여 평면 P_{t_0} 로 나누어진 구 S 의 조각 중 평면 P_{t_0} 에서 벡터 \vec{v} 방향에 위치한 조각을 xy 평면으로 정사영하여 얻어지는 도형의 넓이를 구하여라. (단, 이 조각은 원 W_{t_0} 를 포함하는 것으로 생각함.)

[문항3] 좌표공간에 길이 10인 선분을 $I = \{(x, 0, 0) \mid -5 \leq x < 5\}$ 로 정하고 선분 밖에 있는 점 P 와 선분 I 의 두 점 A, B 가 이루는 각을 $\angle APB = \theta$ ($0 \leq \theta < \pi$)라고 할 때 다음 물음에 답하여라. [30점]

- (1) 선분 밖의 점 P 가 y 축의 점이고 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 가 되도록 선분 I 의 두 점 A, B 를 선택할 수 있을 때, 점 P 의 집합을 J 라 하자. 집합 $J \cup \{(0, 0, 0)\}$ 이 나타내는 그림의 길이를 구하여라.
- (2) 선분 밖의 점 P 가 yz 평면에 있고 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 가 되도록 선분 I 위의 두 점 A, B 를 선택할 수 있을 때 점 P 의 집합을 S 라 하자. 집합 $S \cup \{(0, 0, 0)\}$ 이 나타내는 그림의 넓이를 구하여라.
- (3) 선분 밖의 점 P 가 xy 평면에 있고 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 가 되도록 선분 I 위의 두 점 A, B 를 선택할 수 있을 때 점 P 의 집합을 U 라 하자. 집합 $U \cup I$ 이 나타내는 그림의 넓이를 구하여라.



문제1. 일반항이 $a_n = n^2$ 인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$(n+1)S_n - \sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n k^3 \quad \dots\dots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때,

(좌변) $= 2S_1 - S_1 = 1$, (우변) $= 1$ 이므로

(*)이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$$(m+1)S_m - \sum_{k=1}^m S_k = \sum_{k=1}^m k^3 \text{ 이다.}$$

$n=m+1$ 일 때 (*)이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} & (m+2)S_{m+1} - \sum_{k=1}^{m+1} S_k \\ &= \boxed{\text{(가)}} S_{m+1} - \sum_{k=1}^m S_k \\ &= \boxed{\text{(가)}} S_m + \boxed{\text{(나)}} - \sum_{k=1}^m S_k \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} k^3 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$ 이라 할 때, $f(2)+g(1)$ 의 값은?

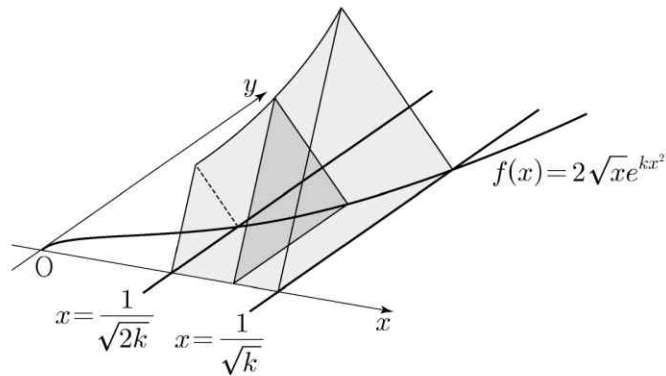
(2019. 9월 고2 전국연합)

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

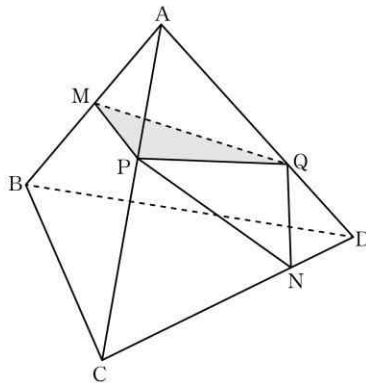


문제2. 그림과 같이 양수 k 에 대하여 함수 $f(x)=2\sqrt{x}e^{kx^2}$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=\frac{1}{\sqrt{2k}}$, $x=\frac{1}{\sqrt{k}}$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형인 입체도형의 부피가 $\sqrt{3}(e^2-e)$ 일 때, k 의 값은?
(2019. 9월 평가원)

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$



문제3. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정사면체 ABCD에서 선분 AB의 중점을 M, 선분 CD를 3:1로 내분하는 점을 N이라 하자. 선분 AC 위에 $\overline{MP} + \overline{PN}$ 의 값이 최소가 되도록 점 P를 잡고, 선분 AD 위에 $\overline{MQ} + \overline{QN}$ 의 값이 최소가 되도록 점 Q를 잡는다. 삼각형 MPQ의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이는?
[4점] (2019. 10월 전국연합)



- ① $\frac{\sqrt{3}}{30}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{15}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{10}$ ④ $\frac{2\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{6}$



풀어보기(문제1) 정답 ⑤

일반항이 $a_n = n^2$ 인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$(n+1)S_n - \sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n k^3 \dots\dots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때,
 (좌변) $= 2S_1 - S_1 = 1$, (우변) $= 1$ 이므로
 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$$(m+1)S_m - \sum_{k=1}^m S_k = \sum_{k=1}^m k^3 \text{ 이다.}$$

$n=m+1$ 일 때 (*)이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} & (m+2)S_{m+1} - \sum_{k=1}^{m+1} S_k \\ &= (m+2)S_{m+1} - \left(\sum_{k=1}^m S_k + S_{m+1} \right) \\ &= \boxed{(m+1)} S_{m+1} - \sum_{k=1}^m S_k \\ &= (m+1)(S_m + a_{m+1}) - \sum_{k=1}^m S_k \\ &= \boxed{(m+1)} S_m + \boxed{(m+1)^3} - \sum_{k=1}^m S_k \\ &= \sum_{k=1}^m k^3 + (m+1)^3 \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} k^3 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

$$f(m) = m+1, \quad g(m) = (m+1)^3$$

$$f(2) + g(1) = 11$$



풀어보기(문제2) 정답 ③

$\frac{1}{\sqrt{2k}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ 인 실수 x 에 대하여

$f(x) = 2\sqrt{x}e^{kx^2}$ 이고 이 값을 한 변의 길이로 갖는 정삼각형의 넓이는

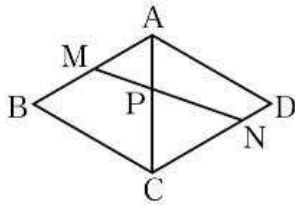
$\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{x}e^{kx^2})^2 = \sqrt{3}xe^{2kx^2}$ 이다.

따라서 입체 도형의 부피는

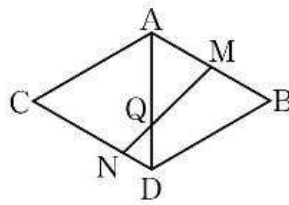
$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2k}}}^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \sqrt{3}xe^{2kx^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{4k} \int_{\frac{1}{\sqrt{2k}}}^{\frac{1}{\sqrt{k}}} 4kx \cdot e^{2kx^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{4k} [e^{2kx^2}]_{\frac{1}{\sqrt{2k}}}^{\frac{1}{\sqrt{k}}} = \frac{\sqrt{3}}{4k} (e^2 - e) = \sqrt{3}(e^2 - e)$$

그러므로 $k = \frac{1}{4}$ 이다.

풀어보기(문제3) 정답 ②



[그림 1]



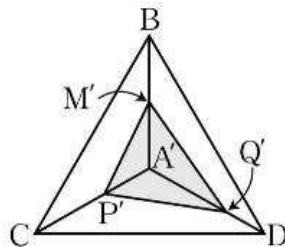
[그림 2]

[그림 1]과 같이 네 점 A, B, C, D가 한 평면에 있도록 전개하면 조건을 만족하는 점 P는 선분 AC와 선분 MN이 만나는 점이다.

사각형 ABCD는 평행사변형이므로 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 이다.

따라서 삼각형 AMP와 삼각형 CNP는 닮음이고 $\overline{AM} = \frac{1}{2}$, $\overline{CN} = \frac{3}{4}$ 이므로 점 P는 선분 AC를 2:3으로 내분하는 점이다.

같은 방법으로 [그림 2]에서 점 Q는 선분 AD를 2:1로 내분하는 점임을 알 수 있다.



네 점 A, M, P, Q의 평면 BCD 위로의 정사영을 각각 A', M', P', Q'이라 하면 점



M' 은 선분 $A'B$ 의 중점이고, 점 P' 은 선분 $A'C$ 를 $2:3$ 으로 내분하는 점이고, 점 Q' 은 선분 $A'D$ 를 $2:1$ 로 내분하는 점이다.

이때 점 A' 은 정삼각형 BCD 의 무게중심이므로

$$\overline{A'B} = \overline{A'C} = \overline{A'D} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 이고, } \overline{A'M'} = \frac{1}{2} \overline{A'B} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\overline{A'P'} = \frac{2}{5} \overline{A'C} = \frac{2\sqrt{3}}{15}, \quad \overline{A'Q'} = \frac{2}{3} \overline{A'D} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

삼각형 $M'P'Q'$ 의 넓이 S 는 세 삼각형 $A'M'P'$, $A'P'Q'$, $A'Q'M'$ 의 넓이의 합이므로

$$S = \frac{1}{2} \times \sin \frac{2}{3} \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{2\sqrt{3}}{15} + \frac{2\sqrt{3}}{15} \times \frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{15}$$

[문항1] 대학발표 예시답안

(1) n 이 1일 때 위의 부등식이 자명하게 성립한다.

위의 부등식이 $n=k$ 일 때 성립한다고 가정하고, $n=k+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$$

따라서 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n 과 $x \geq -1$ 에 대하여 $(1+x)^n \geq 1+nx$ 가 성립한다. 참고로, 위의 전개식에서, 첫 번째 부등식이 성립하는 이유는 $n=k$ 일 때 $(1+x)^k \geq 1+kx$ 라고 가정하였고 $1+x \geq 0$ 이기 때문이며, 두 번째 부등식이 성립하는 이유는 모든 자연수 k 와 실수 x 에 대하여 $kx^2 \geq 0$ 이기 때문이다.

(2) 임의의 자연수 n 에 대하여 $1 \leq \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$ 을 보이자.

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ 이고,} \end{aligned}$$

$x = -\frac{1}{(n+1)^2} > -1$ 에 대하여 (1)의 부등식에 의하여

$$\left(1 + \frac{-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot \frac{-1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ 이 성립한다. 그러므로}$$



$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1$$

이 참이고, 부등식 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ 이 성립한다.

(별해) x 가 양의 실수일 때 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$ 가 증가함수임을 보인다.

$f(x)$ 를 미분하면 $f'(x) = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \left\{ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right\}$ 이고

양의 실수 x 에 대하여 $e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > 0$ 이므로 $f(x)$ 가 증가함수임을 보이려면

$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \geq 0$ 을 보이면 된다.

$g(x)$ 를 미분하면 양의 실수 x 에 대하여

$g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{x(1+x)} = -\frac{1}{x(1+x)^2} < 0$ 이므로 $g(x)$ 는 감소함수이다.

그리고 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right\} = 0$ 이다.

따라서 임의의 양수 x 에 대하여 $g(x) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ 이 성립한다.

그러므로 $f(x)$ 는 증가함수이고 임의의 자연수 n 에 대하여

$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = f(n+1)$ 이 참이다.

(3) $n = m$ 인 경우: $1 < 1 + \frac{1}{m}$ 이므로

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}$ 이 성립한다.

$n < m$ 인 경우: $m = n + k$ 이면 (2)의 부등식에 의하여

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \leq \dots \leq \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^{n+k} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ 이 참이고,

$1 < 1 + \frac{1}{m}$ 이므로 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}$ 이 성립한다.

$n > m$ 인 경우: $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ 에 대하여 (2)의 풀이를 그대로 반복하면



$$\begin{aligned}
 \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} &= \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n-1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
 &= \left(\frac{n^2 - 1 + 1}{n^2 - 1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
 &= \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{ 이고,}
 \end{aligned}$$

$x = \frac{1}{n^2 - 1} > -1$ 에 대하여 (1)의 부등식에 의하여

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n^2 - 1} = 1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1} \text{ 이 성립하고}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \geq \frac{n}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ 이다.}$$

그러므로 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ 이 성립함을 알 수 있다.

$$\text{한편 } \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1} = \frac{1}{\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}} \text{ 이므로 위의 부등식에}$$

$$\text{의하여 } \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}} \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m} = \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m \text{ 이 참이다.}$$

그러므로 $n > m$ 이어서 $n = m+k$ 로 주어진다면,

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{m+k}\right)^{m+k+1} \leq \left(1 + \frac{1}{m+k-1}\right)^{m+k} \\
 &\leq \left(1 + \frac{1}{m+k-2}\right)^{m+k-1} \leq \dots \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}
 \end{aligned}$$

이 성립한다.

(4) (2)에 의하여 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 은 증가하는 수열이고 x_n 의 극한이 자연상수 e 이다.

그러므로 모든 자연수 n 에 대하여 $2 = x_1 \leq x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e < 3$ 이 성립한다.

(별해) (2)에 의하여 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 은 증가하는 수열이다.

그러므로 모든 자연수 n 에 대하여 $2 = x_1 \leq x_n$ 이 성립한다.

그리고 (3)의 부등식에서 $m=5$ 를 계산하면 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{5}\right)^6 = 2.985984 < 3$ 을 알 수 있다.



[문제2]

- (1) $\overrightarrow{CA_t} = (\vec{c} + t\vec{v}) - \vec{c} = t\vec{v}$ 으로, $t \neq 0$ 의 경우는 이 벡터가 평면 P_t 와 수직이고, 따라서 A_t 는 C 에서 P_t 에 내린 수선의 발이다. C 와 평면 P_t 와의 거리는

$$|t\vec{v}| = |t| |\vec{v}| = |t| \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} |t| \text{ 이다.}$$

$t=0$ 인 경우, $C = A_t$ 이므로 C 와 P_t 의 거리는 $0 = \sqrt{3} |t|$ 이다.

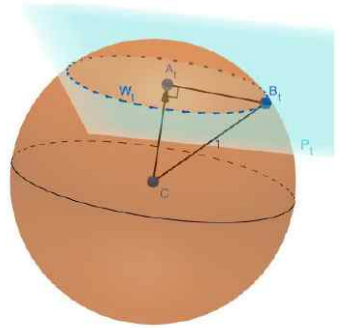
한편, 구 S 상의 임의의 점과 C 와의 거리는 1이다. 따라서

$\sqrt{3} |t| < 1$ 일 때만 구와 평면은 원에서 만난다. 따라서 구하는 범위는 $-\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

S 와 P_t 가 만나 이루는 교선을 W_t 라 하고, B_t 를 W_t 상의 임의의 점이라고 하자. 선분 CA_t 는 P_t 에 수직이므로, 선분 A_tB_t 와도 수직이다. 또한 B_t 는 구 S 상의 점이므로

$\overline{CB_t} = 1$ 이다. $\angle CA_tB_t = \frac{\pi}{2}$ 이므로, 피타고라스 정리에 의해

$\overline{A_tB_t}^2 = \overline{CB_t}^2 - \overline{CA_t}^2 = 1^2 - |\sqrt{3}t|^2 = 1 - 3t^2$ 이다. 즉, A_t 에서 W_t 의 임의의 점까지의 거리가 $\sqrt{1-3t^2}$ 로 일정하므로, 원 W_t 의 중심은 A_t 이고 반지름은 $\sqrt{1-3t^2}$ 이다. 따라서 답은 $f(t) = \sqrt{1-3t^2}$ 이다.



- (2) 직선 l 을 축으로 생각하자. $t \geq 0$ 이면 점 A_t 는 점 C 로부터 벡터 \vec{v} 방향으로 길이 $|\vec{v}| = \sqrt{3} |t|$ 만큼 간 곳에 위치해 있고, $t < 0$ 이면 $-\vec{v}$ 방향으로 길이 $\sqrt{3} |t|$ 만큼 간 곳에 있다. $s = \sqrt{3}t$ 라고 두자. 직선 l 상에서 C 로부터 \vec{v} 방향으로 길이 s 만큼의 위치에 A_t 가 있다고 할 수 있다. s 가 음수이면 반대인 $-\vec{v}$ 방향으로 길이 $|s|$ 만큼 간 것으로 이해한다. 직선 l 상의 이 점 A_t 에서 우리가 부피를 구하고자 하는 영역의 수직 단면은 반지름 $f(t)$ 인 원이므로, 넓이가 $\pi \cdot f(t)^2 = \pi(1-3t^2) = \pi(1-s^2)$ 이다. 영역의 부피는 이 넓이의 식을 범위에 맞게 적분하면 된다.

첫째 영역은 s 가 $\sqrt{3}t$ 에서 1까지 움직일 때이므로 부피가 $\int_{\sqrt{3}t}^1 \pi(1-s^2)ds$ 이고, 계산

하면 $\left[\pi \left(s - \frac{s^3}{3} \right) \right]_{\sqrt{3}t}^1 = \pi \left(\frac{2}{3} - \sqrt{3}t + \sqrt{3}t^3 \right)$ 이다. 나머지 영역은 구의 부피 $\frac{4}{3}\pi$ 에서 첫 번째 부피를 빼면 된다.

따라서 부피는 각각 $\pi \left(\frac{2}{3} - \sqrt{3}t + \sqrt{3}t^3 \right)$ 과 $\pi \left(\frac{2}{3} + \sqrt{3}t - \sqrt{3}t^3 \right)$ 이다.

(3) $f(t_0) = \sqrt{1-3t_0^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이면 $1-3t_0^2 = \frac{6}{9}$ 이고 $t_0^2 = \frac{1}{9}$ 이므로 $t_0 = \frac{1}{3}$ 이다. ($t_0 > 0$). C 와

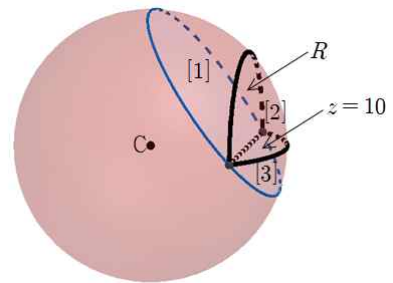
P_{t_0} 의 거리는 $\overline{CA_{t_0}} = \sqrt{3}|t_0| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다. 편의상 $A = A_{t_0}$, $P = P_{t_0}$, $W = W_{t_0}$ 로 표기하자.

C를 지나는 평면 $z=10$ 과 평면 P 의 교선을 m 이라 하고, 점 A에서 m 에 내린 수선의 발을 F라고 하자. 선분 AF는 평면 P 에 속해 있으며 선분 CF는 $z=10$ 평면에 속해 있고, 두 선분이 모두 m 에 수직이므로, 선분 AF와 선분 CF의 사잇각은 평면 P 와 $z=10$ 평면의 이면각 θ 와 같다. 평면 $z=10$ 의 법선벡터 $(0, 0, 1)$ 과 평면 P 의 법선벡터 $(1, 1, 1)$ 을 이용하면 $\cos \theta = \frac{(0, 0, 1) \cdot (1, 1, 1)}{|(0, 0, 1)| |(1, 1, 1)|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 을 얻는다.

\overline{CA} 와 $\cos \theta$, $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 를 이용하면 $\overline{CF} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\overline{AF} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ 을 얻는다.

구 S 와 평면 $z=10$ 의 교선은 C를 중심으로 하고 반지름이 1인 원 U 이고, $\overline{CF} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ 이므로, 그림과 같이 평면 $z=10$ 상에서 F가 U 의 내부에 위치한다.

직선 m 을 포함하며 평면 $z=10$ 에 수직인 평면을 R 라 하자. xy 평면으로의 정사영의 넓이를 구하고자 하는 구의 조각은 평면 $z=10$ 과 평면 R 에 의해서 세 부분 [1], [2], [3]으로 그림과 같이 나뉜다. [3]의 정사영은 [2]의 정사영에 포함된다. [2]의 정사영은 [2]의 밑면에 해당하는 활꼴 도형의 정사영과 같으며, [1]의 정사영은 [1]의 밑면에 해당하는 활꼴 도형의 정사영과 같다.



[2] 부분의 밑면은 원 U 내부에서 그림의 빗금친 부분이다. 직선 m 과 이 원의 교점들을 I, J라 하자. $\angle ICF = \alpha$ 라고 두면, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 로부터 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 를 얻는다. 따라서 각 2α 에 해당하는

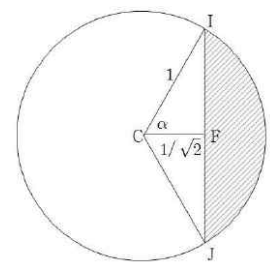
부채꼴 CIJ의 넓이는 $\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{2\alpha}{2\pi} = \frac{\pi}{4}$ 이다. $\overline{FI} = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이며,

$\angle JCF = \alpha$ 이므로 $\overline{JF} = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다. 따라서 삼각형 CIJ의 넓이는

$\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 이고, 구하고자 하는 활꼴의 넓이는 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ 이다. 한편 평면 $z=10$ 은

xy 평면과 평행이므로, [2]의 밑면의 xy 평면으로의 정사영의 넓이 역시 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ 이다.

[1]의 밑면은 원 W 의 내부에서 그림의 빗금친 부분이다.





$$\angle IAF = \angle JAF = \beta \text{ 라고 두면, } \cos \beta = \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$\beta = \frac{\pi}{3}$ 이다. 각도 $2\pi - 2\beta$ 에 해당하는 부채꼴 AIJ의 넓이는

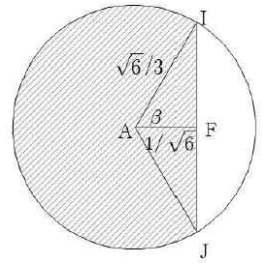
$$\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \right)^2 \cdot \frac{2\pi - 2 \cdot \frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{4}{9}\pi \text{ 이다. } \overline{IJ} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ 이므로 삼각형 AIJ}$$

의 넓이는 $\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 이고, 따라서 빗금친 부분의 넓이는 $\frac{4}{9}\pi + \frac{\sqrt{3}}{6}$ 이다. 평

면 P 와 xy 평면의 이면각 θ 에 대하여 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이 성립하므로,

$$\begin{aligned} ([1] \text{의 밑면의 } xy \text{평면으로의 정사영의 넓이}) &= ([1] \text{의 밑면의 넓이}) \cdot \cos \theta \\ &= \left(\frac{4}{9}\pi + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

답은 [2]의 정사영의 넓이와 [1]의 정사영의 넓이의 합인 $\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{4\sqrt{3}}{27} \right) - \frac{1}{3}$ 이다.



[문제3]

(1) 먼저 y 축의 점이고 선분 I 의 양 끝점을 선택하여 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 가 되도록 하는 점

$(0, \pm m, 0) (m > 0)$ 을 찾으면 m 이 밑면의 길이가 10이고 두 밑각이 $\frac{5\pi}{12}$ 인 이등변

삼각형의 높이이다. 꼭짓점 $(0, m, 0)$ 은 $\tan \frac{5\pi}{12} = \frac{m}{5}$ 을 만족한다. 탄젠트 함수의 덧셈 공식에 따라

$$m = 5 \tan \frac{5\pi}{12} = 5 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = 5 \left(\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} \right) = 5 \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right)$$

이다.

y 축의 점 $(0, a, 0) (|a| > 5 \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right))$ 을 선택하면 선분 I 의 양 끝점을 선택하였을 때

θ 가 가장 큰 각이 되고 점 $(0, a, 0)$ 과 선분 I 의 양 끝점이 두 밑각이 $\frac{5\pi}{12}$ 보다 큰 이등변 삼각형이 되므로 집합 J 의 원소가 아니다.

y 축의 점 $(0, a, 0) (0 < |a| < 5 \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right))$ 을 선택하면 닮음꼴의 성질을 활용하여 높이



가 $|a|$ 이고 두 밑각이 $\frac{5\pi}{12}$ 인 이등변 삼각형이 되는 선분의 두 점

$\left(\frac{-|a|(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}, 0, 0\right), \left(\frac{|a|(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}, 0, 0\right)$ 을 선분 I 에서 선택할 수 있다.

따라서 구하는 집합 J 는 $J = \left\{(0, y, 0) \mid 0 < |y| \leq 5\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)\right\}$ 이고

$J \cup \{(0, 0, 0)\}$ 의 나타내는 그림의 길이는 $10\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$ 이다.

- (2) yz 평면과 선분 I 를 포함하는 x 축이 수직이므로 yz 평면의 한 점 $(0, a, b)$ 와 x 축의 선분 I 의 두 점에 대한 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 에 관한 문제는 $(0, a, b)$ 를 x 축을 중심으로 회전하여 y 축의 점으로 옮겨서 문제(1)과 같이 풀 수 있다.

따라서 집합 $S = \left\{(0, a, b) \mid 0 < a^2 + b^2 \leq 25\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^2\right\}$ 이다.

그러므로 $S \cup \{(0, 0, 0)\}$ 의 넓이는 $25\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^2 \pi$ 이다.

- (3) 먼저 선분 I 의 양 끝점을 선택하여 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 가 되도록 하는 xy 평면의 점들을 찾으면 원

주각의 성질에 의하여 선분 I 를 현으로 하고 원주각이 $\frac{\pi}{6}$ 가 되는 원위의 점들이다.

중심각이 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 구하는 원은 반지름이 10이고 중심이 $(0, \pm 5\sqrt{3}, 0)$ 이다. 따라서 대응되는 점들의 집합은

$B = \{(x, y, 0) \mid x^2 + (y - 5\sqrt{3})^2 = 10^2, y > 0\} \cup \{(x, y, 0) \mid x^2 + (y + 5\sqrt{3})^2 = 10^2, y < 0\}$
이고 집합 B 의 모든 원소가 U 에 속한다.

xy 평면의 점 중에서 $B \cup \{(-5, 0, 0), (5, 0, 0)\}$ 외부의 한 점을 잡으면 선분 I 의 양 끝점을 잡을 때 θ 가 가장 크고 집합 $B \cup \{(-5, 0, 0), (5, 0, 0)\}$ 의 밖에 있으므로 원주각의 성질에 따라 $\theta < \frac{\pi}{6}$ 이다. 따라서 이들 점은 집합 U 의 원소가 아니다.

xy 평면의 점 중에서 $B \cup \{(-5, 0, 0), (5, 0, 0)\}$ 의 내부에 있고 선분 밖에 있는 점의 집합은

$C = \{(x, y, 0) \mid x^2 + (y - 5\sqrt{3})^2 < 10^2, y > 0\} \cup \{(x, y, 0) \mid x^2 + (y + 5\sqrt{3})^2 < 10^2, y < 0\}$
이다.

이제 집합 C 의 임의의 한 점 $(\alpha, \beta, 0) (\beta > 0)$ 이 집합 U 의 원소인 것을 다음과 같이 보인다. 닮음꼴을 활용하면 이 점이 반지름이 $10l$ 이고 중심이 $(0, 5\sqrt{3}l, 0)$ 인 xy 평면의 원의 점이고 선분 I 의 두 점 $(-5l, 0, 0), (5l, 0, 0)$ 을 현의 끝점으로 할 때 원주



각이 $\frac{\pi}{6}$ 가 됨을 알 수 있다. 주어진 조건의 l 이

$0 < l < 1$ 인 것을 확인하기 위하여 원의 방정식 $\alpha^2 + (\beta - 5\sqrt{3}l)^2 = (10l)^2$ 을 풀어서

$f(l) = 25l^2 + 10\sqrt{3}\beta l - (\alpha^2 + \beta^2)$ 가 $0 < l < 1$ 인 근을 가지는 것을 보이기로 한다.

$f(0) = -(\alpha^2 + \beta^2) < 0$ 이고 점 $(\alpha, \beta, 0)$ ($\beta > 0$)가 집합 C 의 원소이므로

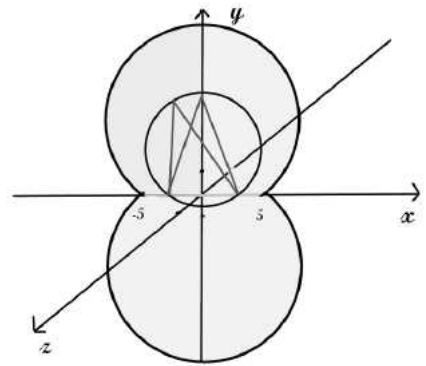
$f(1) = 25 + 10\sqrt{3}\beta - (\alpha^2 + \beta^2) = 10^2 - \alpha^2 - (\beta - 5\sqrt{3})^2 > 0$ 이다.

따라서 $0 < l < 1$ 인 근이 존재한다. 같은 이유로 C 의 한 점 $(\alpha, \beta, 0)$ ($\beta < 0$)도 U 의 원소이다. 따라서 구하는 집합 U 는 집합 $B \cup C$ 이다. 집합 $U \cup I$ 는 위 그림처럼 나타

나며 반지름 10이고 원주각 $\frac{5\pi}{3}$ 인 부채꼴 두 개와 한 변의 길이가 10인 정삼각형이

두 개 있는 모양으로 분해할 수 있다. 따라서

$$2\left(\frac{1}{2} 10^2 \frac{5\pi}{3} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} 10^2\right) = 100\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ 이다.}$$





27

이화여자대학교(자연계열 I) 수시27)

...



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
극대, 최댓값, 미분, 적분, 지수함수, 삼각함수, 연속성, 합성함수, 일대일대응, 부정적분, 도함수, 원, 내분점	국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 3개 영역 등급 합 6 이내 [탐구영역] 응시한 과목 중 상위 1과목의 등급으로 반영	수학 3문항	100분

[문항 1] 닫힌구간 $[0, \pi]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = e^x \sin x$ 가 있다. $f(x)$ 가 $x = \theta$ 에서 최댓값 M 을 가질 때 다음 물음에 답하시오.(35점)

[1-1] θ 와 M 의 값을 구하시오.

[1-2] $n \geq 4$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$f\left(\theta + \frac{1}{n}\pi\right) = M e^{\frac{1}{n}\pi} \left(\cos \frac{1}{n}\pi - \sin \frac{1}{n}\pi \right)$$

[1-3] $n \geq 4$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$M^n e^{\pi} \left(\cos \frac{1}{n}\pi - \sin \frac{1}{n}\pi \right)^n \frac{1}{n}\pi < \int_0^{\pi} \{f(x)\}^n dx < M^n \pi$$

[1-4] $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\pi} \{f(x)\}^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = M$ 임을 보이시오.

(단, n 은 4 이상의 자연수 이고, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ 이다.)



[문항 2] 정의역과 공역이 실수 전체의 집합이며 일대일대응인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 a, b 에 대하여 다음 등식을 만족시킨다.

$$f(a+f(b))=f(a)+b$$

다음 물음에 답하시오.(35점)

[2-1] $f(0)$ 의 값을 구하고, 모든 실수 b 에 대하여 $f(f(b))=b$ 임을 보이시오.

[2-2] 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속일 때, $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속임을 보이시오.

[2-3] 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능할 때, $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능함을 보이고, 함수 $f(x)$ 를 모두 구하시오.

[문항 3] 좌표평면에서 두 집합 $A=\{(-3, t) \mid -3 \leq t \leq 3\}$ 과

$B=\{(3\cos\theta+6, 3\sin\theta) \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.(30점)

[3-1] 좌표평면 위의 한 점 $P(a, b)$ 와 집합 B 의 임의의 점 Q 에 대하여 선분 PQ 를 1:2로 내분하는 점을 원소로 하는 집합이 원을 나타냄을 보이고, 이 원의 중심을 a, b 에 대한 식으로 나타내고 반지름의 길이를 구하시오.
(단, 점 P 는 집합 B 의 원소가 아니다.)

[3-2] 집합 A 의 임의의 점 P 와 점 $C(6, 0)$ 에 대하여 선분 PC 를 1:2로 내분하는 점을 원소로 하는 집합을 구하시오.

[3-3] 집합 A 의 임의의 점 P 와 집합 B 의 임의의 점 Q 에 대하여 선분 PQ 를 1:2로 내분하는 점이 나타내는 영역의 넓이를 구하시오.



문제1. 열린구간 $(0, 2\pi)$ 에서 정의된 함수 $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$ 의 극댓값을 M , 극솟값을 m 이라 할 때, Mm 의 값은? (2013. 4월 전국연합)

- ① $-e^{2\pi}$ ② $-e^\pi$ ③ $\frac{1}{e^{3\pi}}$ ④ $\frac{1}{e^{2\pi}}$ ⑤ $\frac{1}{e^\pi}$

문제2. 두 함수 $f(x) = \begin{cases} ax & (x < 1) \\ -3x+4 & (x \geq 1) \end{cases}$, $g(x) = 2^x + 2^{-x}$ 에 대하여 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 곱은? (2015. 6월 평가원)

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

문제3. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = (f \circ g)(x)$ 라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)+1}{x-1} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)-2}{x-1} = 12$$

일 때, $f(-1) + f'(-1)$ 의 값은? (2019. 10월 전국연합)

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

문제4. 함수 $f(x)$ 가 $x > -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$\ln(1+x) \leq f(x) \leq \frac{1}{2}(e^{2x}-1) \text{ 을 만족시킬 때, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x} \text{의 값은? (2012. 6월 평가원)}$$

- ① 1 ② e ③ 3 ④ 4 ⑤ $2e$



풀어보기(문제1) 정답 ①

$f'(x) = 2e^x \cos x = 0$ ($0 < x < 2\pi$)에서 $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}\pi$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 증감표는 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{\pi}{2}$...	$\frac{3}{2}\pi$...	(2π)
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	$e^{\frac{\pi}{2}}$	↘	$-e^{\frac{3}{2}\pi}$	↗	

함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 극댓값 $M = e^{\frac{\pi}{2}}$, $x = \frac{3}{2}\pi$ 에서 극솟값 $m = -e^{\frac{3}{2}\pi}$ 을 갖는다.
따라서 $Mm = -e^{2\pi}$

풀어보기(문제2) 정답 ⑤

$$(g \circ f)(1) = g(1) = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (g \circ f)(x) = g(1) = \frac{5}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} (g \circ f)(x) = g(a) = 2^a + 2^{-a}$$

$(g \circ f)(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$(g \circ f)(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (g \circ f)(x)$$

그러므로 $2^a + 2^{-a} = \frac{5}{2}$ 이다.

$$2 \cdot 2^{2a} - 5 \cdot 2^a + 2 = 0$$

$$(2 \cdot 2^a - 1)(2^a - 2) = 0$$

$$2^a = \frac{1}{2}, 2$$

$$a = -1, 1$$

그러므로 모든 실수 a 의 곱은 -1 이다.

풀어보기(문제3) 정답 ⑤

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)+1}{x-1} = 2$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이면 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로



$$\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x) + 1\} = g(1) + 1 = 0, \quad g(1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - 2}{x - 1} = 12 \text{ 에서 } x \rightarrow 1 \text{ 일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{ 이면 (분자)} \rightarrow 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{h(x) - 2\} = h(1) - 2 = 0, \quad h(1) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = h'(1) = 12$$

$$h(x) = (f \circ g)(x) \text{ 에서 } x = 1 \text{ 일 때 } h(1) = f(g(1)) = f(-1) = 2$$

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) \text{ 에서 } x = 1 \text{ 일 때 } h'(1) = f'(g(1))g'(1) = f'(-1) \times 2 = 12$$

$$\text{즉 } f'(-1) = 6$$

$$\text{따라서 } f(-1) + f'(-1) = 2 + 6 = 8$$

풀어보기(문제4) 정답 ③

$x > 0$ 일 때

$$\frac{\ln(1+3x)}{x} \leq \frac{f(3x)}{x} \leq \frac{\frac{1}{2}(e^{6x} - 1)}{x}$$

이고 $-1 < x < 0$ 일 때

$$\frac{\ln(1+3x)}{x} \geq \frac{f(3x)}{x} \geq \frac{\frac{1}{2}(e^{6x} - 1)}{x}$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x} = 3$$



[문항1] 대학발표 예시답안

[1-1] 함수 $f(x) = e^x \sin x$ 를 미분하면 $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$ 이고,

$x = \frac{3}{4}\pi$ 에서만 $f'(x) = 0$ 이다. $x < \frac{3}{4}\pi$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 이 구간에서 $f(x)$ 가 증가하고 $x > \frac{3}{4}\pi$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 이 구간에서 $f(x)$ 가 감소한다. 그러므로 $f(x)$ 는 $x = \frac{3}{4}\pi$ 에서 최댓값 $f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = e^{\frac{3}{4}\pi} \sin \frac{3}{4}\pi = e^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}$ 을 가진다.

따라서 $\theta = \frac{3}{4}\pi$ 이고 $M = e^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

[1-2] [1-1]에 의해 $\theta = \frac{3}{4}\pi$ 이고 $M = e^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 지수함수의 성질과 삼각함수의 덧셈 정리에 의하여 아래의 등식을 얻는다.

$$\begin{aligned} f\left(\theta + \frac{1}{n}\pi\right) &= e^{\theta + \frac{1}{n}\pi} \sin\left(\theta + \frac{1}{n}\pi\right) \\ &= e^{\theta + \frac{1}{n}\pi} \left\{ \sin \theta \cos \frac{1}{n}\pi + \cos \theta \sin \frac{1}{n}\pi \right\} \\ &= e^{\frac{3}{4}\pi} \cdot e^{\frac{1}{n}\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{n}\pi - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{1}{n}\pi \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{3}{4}\pi} \cdot e^{\frac{1}{n}\pi} \left\{ \cos \frac{1}{n}\pi - \sin \frac{1}{n}\pi \right\} \\ &= M e^{\frac{1}{n}\pi} \left\{ \cos \frac{1}{n}\pi - \sin \frac{1}{n}\pi \right\} \end{aligned}$$

[1-3] $x \in [0, \pi]$ 에 대하여 $0 \leq f(x) \leq M$ 이므로 $0 \leq \{f(x)\}^n \leq M^n$ 이 성립하고 $f(x)$ 가 상수함수가 아니므로, 구간 $[0, \pi]$ 에서 적분하면

$$\int_0^\pi \{f(x)\}^n dx < \int_0^\pi M^n dx = M^n \pi$$

이다.

$n \geq 4$ 일 때, $\frac{3}{4}\pi < \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi \leq \pi$ 이고 $f(x)$ 가 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi, \pi\right]$ 에서 감소하므로 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi\right]$ 에 속한 x 에 대하여 $f(\pi) \leq f\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi\right) \leq f(x)$ 이다.

따라서



$$0 \leq M e^{\frac{1}{n}\pi} \left(\cos \frac{1}{n}\pi - \sin \frac{1}{n}\pi \right) \leq f(x)$$

가 성립한다. 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi \right]$ 에서

$$\left\{ M e^{\frac{1}{n}\pi} \left(\cos \frac{1}{n}\pi - \sin \frac{1}{n}\pi \right) \right\}^n = M^n e^{\pi} \left(\cos \frac{1}{n}\pi - \sin \frac{1}{n}\pi \right)^n \leq \{f(x)\}^n$$

이므로 위의 부등식을 적분하면

$$M^n e^{\pi} \left(\cos \frac{1}{n}\pi - \sin \frac{1}{n}\pi \right)^n \frac{1}{n}\pi = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi} M^n e^{\pi} \left(\cos \frac{1}{n}\pi - \sin \frac{1}{n}\pi \right)^n dx \leq \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi} \{f(x)\}^n dx$$

가 성립한다. 그리고 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi \right]$ 가 $[0, \pi]$ 의 부분집합이고 $f(x) \geq 0$ 이므로

$$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi} \{f(x)\}^n dx < \int_0^{\pi} \{f(x)\}^n dx$$

가 성립한다. 위의 두 부등식으로부터

$$M^n e^{\pi} \left(\cos \frac{1}{n}\pi - \sin \frac{1}{n}\pi \right)^n \frac{1}{n}\pi < \int_0^{\pi} \{f(x)\}^n dx$$

를 얻는다. 그러므로 $n \geq 4$ 에 대하여

$$M^n e^{\pi} \left(\cos \frac{1}{n}\pi - \sin \frac{1}{n}\pi \right)^n \frac{1}{n}\pi < \int_0^{\pi} \{f(x)\}^n dx < M^n \pi$$

가 성립한다.

[별해]

$$M^n e^{\pi} \left(\cos \frac{1}{n}\pi - \sin \frac{1}{n}\pi \right)^n = \left\{ f\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi\right) \right\}^n \text{ 이다.}$$

$n \geq 4$ 에 대하여 $y = \{f(x)\}^n$ 의 도함수는

$$\begin{aligned} y' &= n\{f(x)\}^{n-1} \cdot f'(x) \\ &= n \cdot e^{n\pi} \sin^n x + n \cdot e^{nx} \sin^{(n-1)} x \cos x \\ &= n \cdot e^{nx} \sin^{(n-1)} x (\sin x + \cos x) \end{aligned}$$

이고, $y' = 0$ 이면 $x = 0, \frac{3}{4}\pi, \pi$ 이다.

$0 \leq x \leq \pi$ 에서 $y = \{f(x)\}^n$ 의 증가, 감소를 알아보기 위해 y' 의 부호를 표로 만들면

x	0	...	$\frac{3}{4}\pi$...	π
y'	0	+	0	-	0
y	0	↗ 또는 증가	M^n	↘ 또는 감소	0



이므로 $y = \{f(x)\}^n$ 는 구간 $[0, \pi]$ 에서 $x = \frac{3}{4}\pi$ 일 때 최댓값 M^n 을 가진다.

구간 $[0, \pi]$ 에서 $y = \{f(x)\}^n$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분은 밑변이 $[0, \pi]$ 이고 높이가 M^n 인 직사각형에 포함되므로

$$\int_0^{\pi} \{f(x)\}^n dx < \int_0^{\pi} M^n dx = M^n \pi$$

가 성립한다.

$M^n e^{\pi} \left(\cos \frac{1}{n} \pi - \sin \frac{1}{n} \pi \right)^n \frac{1}{n} \pi$ 는 밑변이 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi \right]$ 이고

높이가 $M^n e^{\pi} \left(\cos \frac{1}{n} \pi - \sin \frac{1}{n} \pi \right)^n = \left\{ f\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi\right) \right\}^n$ 인 직사각형의 넓이이다.

이 직사각형은 함수 $y = \{f(x)\}^n$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분에 포함되어 있으므로

$$M^n e^{\pi} \left(\cos \frac{1}{n} \pi - \sin \frac{1}{n} \pi \right)^n \frac{1}{n} \pi < \int_0^{\pi} \{f(x)\}^n dx$$

가 성립한다.

[1-4] 문항 [1-3]의 부등식

$$M^n e^{\pi} \left(\cos \frac{1}{n} \pi - \sin \frac{1}{n} \pi \right)^n \frac{1}{n} \pi < \int_0^{\pi} \{f(x)\}^n dx < M^n \pi$$

에 $\sqrt[n]{}$ 를 적용하면

$$\left(M^n e^{\pi} \left(\cos \frac{1}{n} \pi - \sin \frac{1}{n} \pi \right)^n \frac{1}{n} \pi \right)^{\frac{1}{n}} < \left(\int_0^{\pi} \{f(x)\}^n dx \right)^{\frac{1}{n}} < (M^n \pi)^{\frac{1}{n}} = M \cdot \pi^{\frac{1}{n}}$$

이다. 위 부등식의 왼쪽 부분을 정리하면

$$\left(M^n e^{\pi} \left(\cos \frac{1}{n} \pi - \sin \frac{1}{n} \pi \right)^n \frac{1}{n} \pi \right)^{\frac{1}{n}} = M e^{\frac{\pi}{n}} \left(\cos \frac{1}{n} \pi - \sin \frac{1}{n} \pi \right) \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \pi^{\frac{1}{n}}$$

이므로 위의 부등식을 다시 쓰면

$$M e^{\frac{\pi}{n}} \left(\cos \frac{1}{n} \pi - \sin \frac{1}{n} \pi \right) \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \pi^{\frac{1}{n}} < \left(\int_0^{\pi} \{f(x)\}^n dx \right)^{\frac{1}{n}} < M \cdot \pi^{\frac{1}{n}}$$

이고, 극한값의 대소관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M e^{\frac{\pi}{n}} \left(\cos \frac{1}{n} \pi - \sin \frac{1}{n} \pi \right) \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \pi^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\pi} \{f(x)\}^n dx \right)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M \cdot \pi^{\frac{1}{n}}$$

이 된다.

여기에서 π 와 e 는 상수이므로



$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\pi}{n}} = 1 \text{ 과 } \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{\frac{1}{n}} = 1$$

을 얻고, 또한

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{n} \pi - \sin \frac{1}{n} \pi \right) = \cos 0 - \sin 0 = 1$$

이며, 주어진 조건에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

이다. 그러므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M e^{\frac{\pi}{n}} \left(\cos \frac{1}{n} \pi - \sin \frac{1}{n} \pi \right) \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \pi^{\frac{1}{n}} = M$$

이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \cdot n^{\frac{1}{n}} = M$$

이다. 따라서 위의 부등식은

$$M \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\pi \{f(x)\}^n dx \right)^{\frac{1}{n}} \leq M$$

이다. 그러므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\pi \{f(x)\}^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = M$ 이다.

[문항2] 대학발표 예시답안

[2-1] 등식 $f(a+f(b))=f(a)+b$ 에 $a=0$ 을 대입하면 모든 실수 b 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$f(f(b))=f(0)+b$$

이 등식에 $b=0$ 을 대입하면 $f(f(0))=f(0)$ 을 얻는다. $f(0)$ 이 0이 아닌 수 k 라 하면 $f(0)=k$ 이고 $f(f(0))=f(0)$ 에서 $f(k)=k$ 이므로 일대일대응이라는 사실에 모순이다. 따라서 $f(0)=0$ 이다.

이제 $f(0)=0$ 이므로 모든 실수 b 에 대하여 등식 $f(f(b))=f(0)+b=b$ 가 성립함을 알 수 있다.

[2-2] 임의의 실수 a 에 대하여 등식 $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h)=f(a)$ 가 성립하면 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이다.

임의의 실수 c, d 에 대하여, f 가 일대일대응이므로 $d=f(b)$ 인 실수 b 가 있고, 주어진 등식으로부터

$$f(c+d)=f(c+f(b))=f(c)+b$$



임을 알 수 있다. 그런데 $d=f(b)$ 이므로 문항 [2-1]에 의하여 $f(d)=f(f(b))=b$ 이다. 따라서

$$f(c+d)=f(c)+f(d)$$

이고 이 등식은 모든 실수 c, d 에 대하여 성립한다.

위에서 얻은 등식을 활용하면, 임의의 실수 a 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \{f(a)+f(h)\} = f(a) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h)$$

이다. $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(0) = 0$ 이다. 따라서

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$$

이므로 함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 $x=a$ 에서 연속이다.

[2-3] 임의의 실수 a 에 대하여 극한 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 가 존재하면 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하다.

문항 [2-2]의 풀이에서 $f(a+h)=f(a)+f(h)$ 와 $f(0)=0$ 을 활용하면, $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a)+f(h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = f'(0)$$

이다. 따라서 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하고 $f'(a)=f'(0)$ 이다.

$f'(0)$ 을 k 라 두고 도함수 $f'(x)=k$ 를 적분하면 $f(0)=0$ 이므로

$$f(x) = kx$$

이다. 이 식을 등식 $f(a+f(b))=f(a)+b$ 에 대입하면

$$ka+k^2b=ka+b$$

이므로 $k^2=1$ 이다. 즉 $k=1$ 또는 $k=-1$.

따라서 $f(x)=x$ 또는 $f(x)=-x$ 이다.

[문항3] 대학발표 예시답안

[3-1] 좌표평면의 한 점 $P(a, b)$ 와 집합 B 의 임의의 한 점 $Q(3\cos\theta+6, 3\sin\theta)$ 를 이은 선분 PQ 를 1:2로 내분하는 점 (x, y) 를 구하면

$$(x, y) = \left(\frac{2a+(3\cos\theta+6)}{3}, \frac{2b+3\sin\theta}{3} \right)$$

이다. 삼각함수에 대한 식으로 쓰면

$$(\cos\theta, \sin\theta) = \left(x - \frac{2a+6}{3}, y - \frac{2b}{3} \right)$$

이고

$$\left(x - \frac{2a+6}{3} \right)^2 + \left(y - \frac{2b}{3} \right)^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$



이므로 중심이 $\left(\frac{2a}{3}+2, \frac{2b}{3}\right)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원을 나타낸다.

[3-2] 점 $P(-3, t)$ 와 점 $C(6, 0)$ 을 이은 선분 PC 를 1:2로 내분하는 점을 구하면

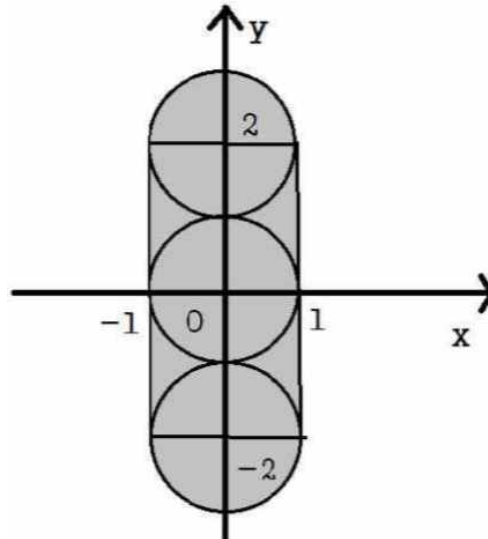
$$\left(\frac{2 \cdot (-3) + 1 \cdot 6}{3}, \frac{2 \cdot t + 1 \cdot 0}{3}\right) = \left(0, \frac{2t}{3}\right)$$

이다. 따라서 구하는 집합은

$$\left\{\left(0, \frac{2}{3}t\right) \mid -3 \leq t \leq 3\right\}$$

이다.

[3-3] 집합 A 의 한 점 $(-3, t)$ 를 정하고 집합 B 의 임의의 점과 이루는 선분을 1:2로 내분하는 점으로 구성된 집합을 S 라 하면 집합 S 는 문항 [3-1]에 따라 중심이 $\left(0, \frac{2}{3}t\right)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원을 t 에 의해 모은 영역으로 나타난다. 범위 $-3 \leq t \leq 3$ 에서 중심이 $\left(0, \frac{2}{3}t\right)$ 인 원을 살펴보면 집합 S 의 영역은 아래와 같이 나타난다.



집합 S 가 나타내는 영역은 반지름의 길이가 1인 반원 2개와 변의 길이가 4, 2인 직사각형으로 나누어지므로 집합 S 가 나타내는 영역의 넓이는 $1^2\pi + 4 \cdot 2 = \pi + 8$ 이다.



28

이화여자대학교(자연계열 II) 수시28)



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
극대, 최댓값, 미분, 적분, 지수함수, 삼각함수, 연속성, 합성함수, 일대일대응, 부정적분, 도함수, 원, 내분점	국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 3개 영역 등급 합 6 이내 [탐구영역] 응시한 과목 중 상위 1과목의 등급으로 반영	수학 3문항	100분

※ [문항 1]은 이화여자대학교(자연계열 I) [문항 1]과 일치하므로 생략합니다.

[문항 2] 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 a, b 에 대하여 다음 등식을 만족시킨다.

$$f(f(a)+b) = a + f(b)$$

다음 물음에 답하십시오.(35점)

[2-1] $f(0)$ 의 값을 구하고, 모든 실수 a 에 대하여 $f(f(a)) = a$ 임을 보이시오.

[2-2] 함수 $f(x)$ 가 $x = 2020$ 에서 연속일 때, $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속임을 보이시오.

[2-3] 함수 $f(x)$ 가 $x = 2020$ 에서 미분가능할 때, $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능함을 보이고, 함수 $f(x)$ 를 모두 구하십시오.



[문항 3] 좌표평면에서 두 집합 $A = \{(5, t) \mid -2 \leq t \leq 2\}$ 과

$B = \{(3 \cos \theta + 6, 3 \sin \theta) \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오. (30점)

[3-1] 좌표평면 위의 한 점 $P(a, b)$ 와 집합 B 의 임의의 점 Q 에 대하여 선분 PQ 를 1:2로 내분하는 점을 원소로 하는 집합이 원을 나타냄을 보이고, 이 원의 중심을 a, b 에 대한 식으로 나타내고 반지름의 길이를 구하시오.

(단, 점 P 는 집합 B 의 원소가 아니다.)

[3-2] 집합 A 의 임의의 점 P 와 점 $C(6, 0)$ 에 대하여 선분 PC 를 1:2로 내분하는 점을 원소로 하는 집합을 구하시오.

[3-3] 집합 A 의 임의의 점 P 와 집합 B 의 임의의 점 Q 에 대하여 선분 PQ 를 1:2로 내분하는 점이 나타내는 영역의 넓이를 구하시오.





[문항2] 대학발표 예시답안

[2-1] 등식 $f(f(a)+b)=a+f(b)$ 에 $b=0$ 을 대입하면

$$f(f(a))=a+f(0)$$

을 얻는다. 이 등식에 $a=0$ 을 대입하면 $f(f(0))=f(0)$ 을 얻는다. 이 등식이 모든 실수 a 에 대하여 성립하므로 $f(0)$ 을 a 에 대입하면

$$f(f(f(0)))=f(0)+f(0)=2f(0)$$

이 성립한다. $f(f(0))=f(0)$ 을 활용하면 $f(f(f(0)))=f(f(0))=f(0)$ 이므로 $f(0)=2f(0)$ 을 얻고 따라서 $f(0)=0$ 이다.

이제 $f(0)=0$ 이므로 모든 실수 a 에 대하여 등식 $f(f(a))=a+f(0)=a$ 가 성립함을 알 수 있다.

[2-2] 임의의 실수 a 에 대하여 등식

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$$

가 성립하면 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이다.

임의의 실수 c, d 에 대하여 $f(c)$ 와 d 를 등식의 a, b 에 각각 대입하면

$$f(f(f(c))+d)=f(c)+f(b)$$

이다. 문항 [2-1]에 의하여 $f(f(c))=c$ 가 성립하므로, $f(f(f(c))+d)=f(c+b)$ 이다. 따라서, 모든 실수 c, d 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$f(c+d)=f(c)+f(d)$$

위에서 얻은 등식을 활용하면, 임의의 실수 a 에 대하여

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(a-2020+2020+h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \{f(a-2020)+f(2020+h)\} \\ &= f(a-2020) + \lim_{h \rightarrow 0} f(2020+h) \end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

$f(x)$ 가 $x=2020$ 에서 연속이므로 $\lim_{h \rightarrow 0} f(2020+h)=f(2020)$ 이다. 따라서

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a-2020) + f(2020) = f(a)$$

이므로 함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 $x=a$ 에서 연속이다.



[2-3] 임의의 실수 a 에 대하여 극한

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

가 존재하면 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하다.

문항 [2-2]의 풀이에서 $f(c+d) = f(c) + f(d)$ 를 활용하면

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) + f(h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$$

이다. 위 등식은 특별히 $a=2020$ 일 때에도 성립하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2020+h) - f(2020)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$$

이다. $f(x)$ 가 $x=2020$ 에서 미분가능하므로 좌변의 극한이 존재하고 극한값은

$f'(2020)$ 이며, 따라서 우변의 극한도 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = f'(2020)$ 이다. 그러므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = f'(2020)$$

이다. 따라서 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하고 $f'(a) = f'(2020)$ 이다.

$f'(2020)$ 을 k 라고 두고 도함수 $f'(x) = k$ 를 적분하면 $f(0) = 0$ 이므로

$$f(x) = kx$$

이다. 이 식을 등식 $f(f(a)+b) = a + f(b)$ 에 대입하면

$$k^2a + kb = a + kb$$

이므로 $k^2 = 1$ 이다. 즉 $k=1$ 또는 $k=-1$.

따라서 $f(x) = x$ 또는 $f(x) = -x$ 이다.

[문항3] 대학발표 예시답안

[3-1] 좌표평면의 한 점 $P(a, b)$ 와 집합 B 의 임의의 한 점 $Q(3\cos\theta + 6, 3\sin\theta)$ 를 이은 선분 PQ 를 1:2로 내분하는 점 (x, y) 를 구하면

$$(x, y) = \left(\frac{2a + (3\cos\theta + 6)}{3}, \frac{2b + 3\sin\theta}{3} \right)$$

이다. 삼각함수에 대한 식으로 쓰면

$$(\cos\theta, \sin\theta) = \left(x - \frac{2a+6}{3}, y - \frac{2b}{3} \right)$$

이고

$$\left(x - \frac{2a+6}{3} \right)^2 + \left(y - \frac{2b}{3} \right)^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

이므로 중심이 $\left(\frac{2a}{3} + 2, \frac{2b}{3} \right)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원을 나타낸다.



[3-2] 점 $P(5, t)$ 와 점 $C(6, 0)$ 을 이은 선분 PC 를 $1:2$ 로 내분하는 점을 구하면

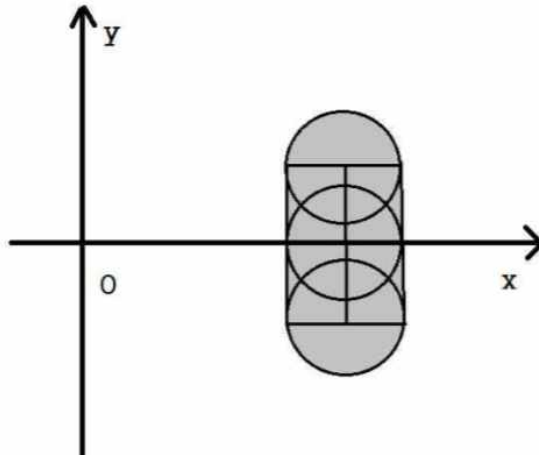
$$\left(\frac{2 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{3}, \frac{2 \cdot t + 1 \cdot 0}{3} \right) = \left(\frac{16}{3}, \frac{2t}{3} \right)$$

이다. 따라서 구하는 집합은

$$\left\{ \left(\frac{16}{3}, \frac{2}{3}t \right) \mid -2 \leq t \leq 2 \right\}$$

이다.

[3-3] 집합 A 의 한 점 $(5, t)$ 를 정하고 집합 B 의 임의의 점과 이루는 선분을 $1:2$ 로 내분하는 점으로 구성된 집합을 S 라 하면 집합 S 는 문항 [3-1]에 따라 중심이 $\left(\frac{16}{3}, \frac{2}{3}t \right)$ 이고 반지름의 길이가 1 인 원을 t 에 의해 모은 영역으로 나타난다. 범위 $-2 \leq t \leq 2$ 에서 중심이 $\left(\frac{16}{3}, \frac{2}{3}t \right)$ 인 원을 살펴보면 집합 S 의 영역은 아래와 같이 나타난다.



집합 S 가 나타내는 영역은 반지름의 길이가 1 인 반원 2 개와 변의 길이가 $\frac{8}{3}$, 2 인 직사각형으로 나누어지므로 집합 S 가 나타내는 영역의 넓이는 $1^2\pi + \frac{8}{3} \cdot 2 = \pi + \frac{16}{3}$ 이다.

29 인하대학교 모의29)

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
극대, 극소, 정적분, 치환적분법, 극한(값), 평균값 정리, 쌍곡선(초점, 점근선), 음함수, 이차곡선	의예과 제외 미적용 단, 의예과는 국어, 수학(가), 영어, 과학탐구(2과목) 중 3개 영역 각 1등급 ※ 과학탐구는 2개 과목 평균 적용	수학 3문항	120분

[문항 1] (30점) 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f'(a)=0$ 이고 $x=a$ 의 좌우에서

(1) $f'(x)$ 의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$ 이다.

(2) $f'(x)$ 의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$ 이다.

(나) 미분가능한 함수 $t=g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 가 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 연속이고, 함수 $f(t)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, $g(\alpha)=a, g(\beta)=b$ 이면

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

(다) 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 영역의 넓이 S 는

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

이다.

※ 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ 의 좌표가 매개변수 t 의 함수 $x=2\cos^2 t, y=\sin 2t$ 로 주어졌다. 점 $A(0, \overline{OP})$ 와 점 P 를 지나는 직선이 x 축과 만나는 점을 $B(k, 0)$ 라 하고 삼각형 OAB 의 무게중심을 G 라 하자. $\left(\text{단, } 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, O \text{ 는 원점} \right)$



[1-1] G가 나타내는 곡선의 방정식을 구하시오. (10점)

[1-2] 삼각형 OAB의 넓이를 t 에 관한 식으로 나타내고 점 O, G, P가 한 직선 위에 있을 때 이 넓이가 최대가 됨을 보이시오. (10점)

[1-3] 매개변수 t 로 좌표가 주어지는 두 점 P, G가 그리는 두 곡선과 점 O, G, P가 한 직선 위에 있을 때의 직선 OP 그리고 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오. (10점)

[문항 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) [평균값 정리] 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

를 만족하는 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

(나) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때, $\sin x < x$ 이 항상 성립한다.

(다) 세 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 가 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq b_n \leq c_n$ 을 만족하고 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$ 이면, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ 이다.

※ 자연수 n 에 대하여 방정식 $\sin x = \frac{1}{x}$ 는 구간 $\left(2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 유일한 해 $x = a_n$ 을 갖는다.

[2-1] 모든 자연수 n 에

$$2n\pi < a_{n+1} - 2\pi < a_n$$

가 성립함을 보이시오. (10점)

[2-2] 각 자연수 n 에 대하여

$$a_n - a_{n+1} + 2\pi = \frac{1}{\cos b_n} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

을 만족하는 b_n 이 $a_{n+1} - 2\pi$ 와 a_n 사이에 존재함을 보이시오. (10점)

[2-3] $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sin(a_{n+1} - a_n) = 0$ 임을 보이시오. (15점)



[문항 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 두 초점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ 으로부터 거리의 차이가 $2a$ 인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 이다. (단, } c > a > 0, b^2 = c^2 - a^2 \text{)}$$

(나) 곡선 $f(x, y) = 0$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 기울기는 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한 후 $x = x_1, y = y_1$ 을 대입하여 구할 수 있다. 예를 들어 쌍곡선

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 위의 점 } (x_1, y_1) \text{에서의 접선의 기울기는 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 의 양변을 } x \text{에}$$

대하여 미분하면 $\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$ 즉, $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$ 이므로 $x = x_1, y = y_1$ 을 대입하면

$$\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \text{ 이다.}$$

(다) 쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 y 에 대하여 풀면 $y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$ 이다. 이 때

$|x|$ 의 값이 한없이 커지면 $\frac{a^2}{x^2}$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로, 쌍곡선은 두

직선 $y = \frac{b}{a}x$ 와 $y = -\frac{b}{a}x$ 에 한없이 가까워진다. 이 두 직선을 쌍곡선

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{의 점근선이라 한다.}$$

[3-1] 원 $x^2 + (y - c)^2 = r^2$ 과 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 한 점에서 공통의 접선을 가질 때, 원의 반지름 r 을 a, b, c 의 식으로 나타내시오. (10점)

[3-2] 두 점 $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$ 과 중심이 $(0, 5)$ 인 원 C 에 대하여 점 X 가 원 C 위를 움직일 때, $\overline{F'X} - \overline{FX}$ 의 최댓값을 8이라 한다. 이 때 원 C 의 반지름을 구하시오. (10점)

[3-3] 두 점 $F(5\sqrt{2}, 0)$, $F'(-5\sqrt{2}, 0)$ 과 $\alpha > 4$ 에 대하여 $f(\alpha)$ 는 다음 조건을 만족하는 양의 실수이다.

(조건) 중심이 $(\alpha, f(\alpha))$ 인 원 C 중에서 $\overline{F'X} - \overline{FX}$ ($X \in C$)의 최댓값과 최솟값이 각각 14, 10이 되도록 하는 C 가 존재한다.

이 때, 극한값 $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{f(\alpha)}{\alpha}$ 을 구하시오. (15점)



문제1. 실수 t 에 대하여 좌표평면에서 원점을 지나고 기울기가 $\tan(\sin t)$ 인 직선과 원 $x^2 + y^2 = e^{2t}$ 이 만나는 점 중에서 x 좌표가 양수인 점을 P 라 하고, 점 P 가 나타내는 곡선을 C 라 하자. $t = \pi$ 일 때, 곡선 C 위의 점 P 에서의 접선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $a \times e^{b\pi}$ 이다. $10(a+b)$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 유리수이다.) (2014. 3월 전국연합)

문제2. 함수 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(2016. 3월 전국연합)

ㄱ. $f'(0) = 1$

ㄴ. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq -\frac{1}{2}$ 이다.

ㄷ. $0 < a < b < 1$ 일 때, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 1$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제3. 0이 아닌 실수 p 에 대하여 좌표평면 위의 두 포물선

$$x^2 = 2y \text{ 와 } \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 4px \text{에 동시에 접하는 직선의 개수를 } f(p) \text{라 하자.}$$

$\lim_{p \rightarrow k^+} f(p) > f(k)$ 를 만족시키는 실수 k 의 값은? (2018. 6월 평가원)

- ① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{9}$ ④ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$



풀어보기(문제1) 정답 25

원점을 지나고 기울기가 $\tan(\sin t)$ 인 직선의 방정식은

$$y = \tan(\sin t)x \cdots \textcircled{7}$$

점 P 는 원과 직선의 교점이므로 원의 방정식 $x^2 + y^2 = e^{2t}$ 과 연립하면

$$x^2 + \{\tan(\sin t)x\}^2 = e^{2t}$$

$$\{1 + \tan^2(\sin t)\}x^2 = e^{2t}$$

$$\frac{x^2}{\cos^2(\sin t)} = e^{2t}$$

$$x^2 = e^{2t} \cos^2(\sin t)$$

$$x = e^t \cos(\sin t) \quad (\because x > 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } y = e^t \sin(\sin t)$$

$$\text{그러므로 점 P의 좌표를 } (x, y) \text{라 하면 } x = e^t \cos(\sin t), y = e^t \sin(\sin t)$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos(\sin t) - \{e^t \sin(\sin t)\} \cos t = e^t \{\cos(\sin t) - \sin(\sin t) \times \cos t\}$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin(\sin t) + \{e^t \cos(\sin t)\} \cos t = e^t \{\sin(\sin t) + \cos(\sin t) \times \cos t\}$$

$$t = \pi \text{일 때, 점 P의 좌표는 } (e^\pi \cos(\sin \pi), e^\pi \sin(\sin \pi)) \text{이므로 } P(e^\pi, 0)$$

$t = \pi$ 일 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^\pi \{\sin(\sin \pi) + \cos(\sin \pi) \times \cos \pi\}}{e^\pi \{\cos(\sin \pi) - \sin(\sin \pi) \times \cos \pi\}} = \frac{-e^\pi}{e^\pi} = -1$$

그러므로 점 P에서의 접선의 방정식은

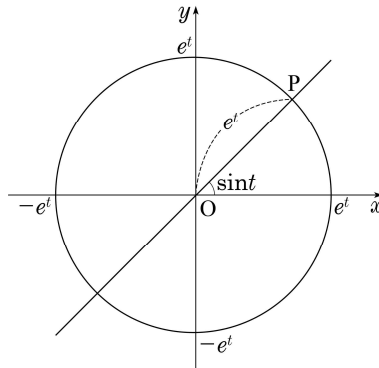
$$y = -(x - e^\pi)$$

이때 접선의 x절편은 e^π , y절편은 e^π 이므로 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times e^\pi \times e^\pi = \frac{1}{2} e^{2\pi}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{2}, b = 2 \text{이므로 } 10(a+b) = 10\left(\frac{1}{2} + 2\right) = 25$$

[참고]



원 $x^2 + y^2 = (e^t)^2$ 은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 e^t 인 원이고, 점 P 가 원 위의 점이므로 $\overline{OP} = e^t$ 이다.

직선 OP 의 기울기가 $\tan(\sin t)$ 이므로 직선 OP 와 x 축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 $\sin t$ 이다.

따라서 점 P 의 좌표는 $P(e^t \cos(\sin t), e^t \sin(\sin t))$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 ③

$$\text{함수 } f(x) = \frac{x}{x^2+1} \text{ 에서 } f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2x)(x^2+1)^2 - (1-x^2)\{2(x^2+1) \cdot 2x\}}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$\neg. f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \text{ 에서 } f'(0) = \frac{1}{1} = 1 \quad (\text{참})$$

$$\sqcup. f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \text{ 에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	$-\frac{1}{2}$	\nearrow	$\frac{1}{2}$	\searrow

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극솟값 $-\frac{1}{2}$ 을 갖고 $x = 1$ 에서 극댓값 $\frac{1}{2}$ 을 갖는다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

$x > 0$ 일 때, $f(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극소이면서 최소이다. 따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq -\frac{1}{2}$ 이다. (참)



$$\therefore f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \text{ 이므로}$$

$f''(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$
 $f'(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\sqrt{3}$...	0	...	$\sqrt{3}$...
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f'(x)$	\searrow	$-\frac{1}{8}$	\nearrow	1	\searrow	$-\frac{1}{8}$	\nearrow

따라서 함수 $f'(x)$ 는 $x < -\sqrt{3}$ 또는 $0 < x < \sqrt{3}$ 에서 감소하고,
 $-\sqrt{3} < x < 0$ 또는 $x > \sqrt{3}$ 에서 증가하므로 함수 $f'(x)$ 는 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 감소한다.

따라서 $0 < x < 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) < f'(0) = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

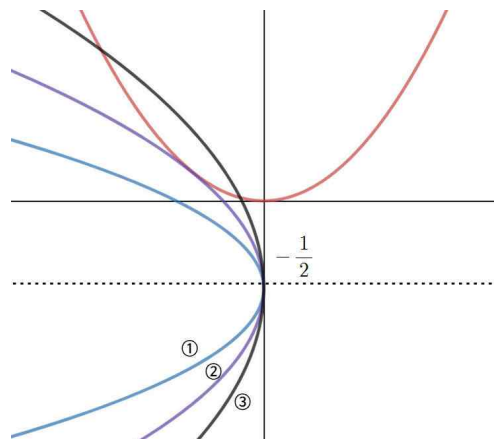
함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고, 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여 $0 < a < b < 1$ 인 모든 실수 a, b 에 대하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \text{ 를 만족시키는 } c \text{ 가 열린 구간 } (0, 1) \text{ 에 적어도 하나 존재한다. } \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $0 < a < b < 1$ 일 때, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(0) = 1$ 이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

풀어보기(문제3) 정답 ③



이차곡선 $\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 4px$ 이 위 그림에서

- ① 의 경우 공통접선이 3개
- ② 의 경우 공통접선이 2개
- ③ 의 경우 공통접선이 1개 이므로

$\lim_{p \rightarrow k+} f(p) > f(k)$ 를 만족하는 경우는 p 의 크기가 증가하며 ① \rightarrow ② 임을 알 수 있다.

따라서 p 는 음수이고 극한값 k 는 두 이차곡선이 접할 때 p 의 값이 된다.

두 곡선의 접점을 (x_1, y_1) 이라고 하면

$$x^2 = 2y \text{에서 } \frac{dy}{dx} = x_1 \text{이고,}$$

$$\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 4px \text{에서 } \frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y_1 + \frac{1}{2}} \text{이므로 두 식을 연립하면}$$

$$2p = x_1 \left(y_1 + \frac{1}{2}\right) \text{이고 이 식을 } \left(y_1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 4px_1 \text{에 대입하면}$$

$$y_1 = \frac{1}{6}, x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \text{가 된다. } p \text{가 음수이므로}$$

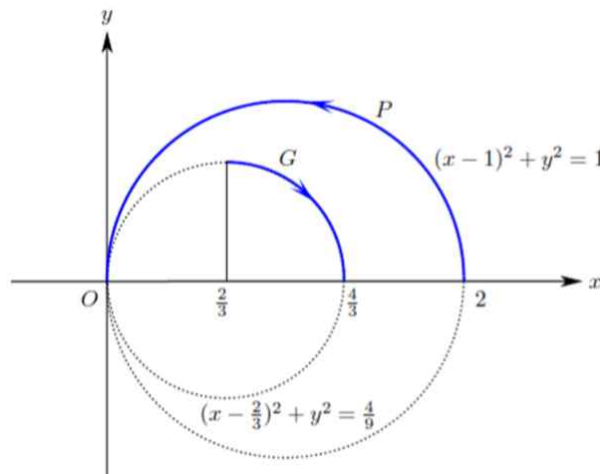
$$\therefore p = -\frac{\sqrt{3}}{9}$$

[문항1] 대학발표 예시답안

[1-1] $y^2 = (\sin 2t)^2 = (2\sin t \cos t)^2 = 4(1 - \cos^2 t)\cos^2 t = 2x - x^2$ 이므로 주어진 매개변수로 나타낸 곡선은 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ($x > 0, y \geq 0$)이다. 한 편 $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2} = 2\cos t$ 이고 P 를 x 축에 내린 수선의 발을 P' 라고 하면 삼각형 OAB 과 삼각형 $P'PB$ 는 닮음이므로 $k = \frac{2\cos^2 t}{1 - \sin t}$ 이다.

즉, $A(0, 2\cos t), B\left(\frac{2\cos^2 t}{1 - \sin t}, 0\right) = (2 + 2\sin t, 0)$ 이므로 $G\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sin t, \frac{2}{3}\cos t\right)$ 이다.

따라서 G 가 나타내는 곡선의 방정식은 $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ ($x \geq \frac{2}{3}, y > 0$)이다.





(나침반 풀이)

점 $P(x, y) = (2\cos^2 t, \sin 2t)$ 이고, $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2} = 2\cos t$ 이므로

$$A(0, \overline{OP}) = (0, 2\cos t)$$

두 점 A, P를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{\sin 2t - 2\cos t}{2\cos^2 t}x + 2\cos t = \frac{\sin t - 1}{\cos t}x + 2\cos t \text{ 이다.}$$

이 직선의 x 절편이 B 이므로 $B\left(\frac{2\cos^2 t}{1 - \sin t}, 0\right) = (2 + 2\sin t, 0)$ 이고

$$G\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sin t, \frac{2}{3}\cos t\right) \text{ 이다.}$$

따라서 G가 나타내는 곡선의 방정식은

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(x \geq \frac{2}{3}, y > 0\right) \text{ 이다.}$$

[1-2] 삼각형 OAB의 넓이 $S(t) = \frac{2\cos^3 t}{1 - \sin t}$ 이고 $S'(t) = \frac{2\cos^2 t(1 - 2\sin t)}{1 - \sin t}$ 이므로 제시문

(가)에 의해 $1 - 2\sin t = 0$, $t = \frac{\pi}{6}$ 일 때 극대, 즉, 최대가 된다.

한편, 점 O, G, P가 한 직선위에 있을 때는 $\overrightarrow{OP} = (2\cos^2 t, 2\sin t \cos t)$,

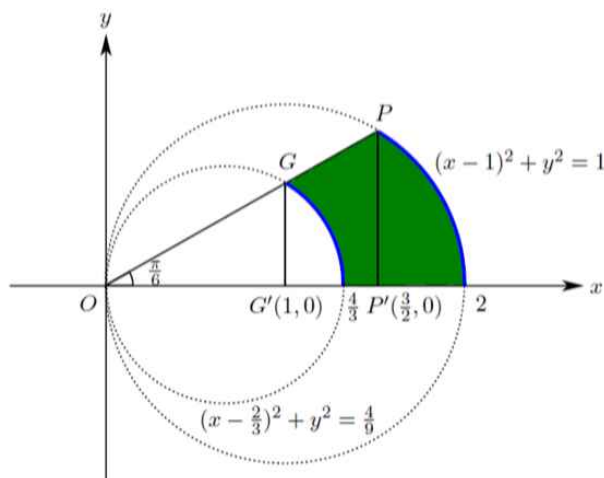
$$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{2\cos^2 t}{3(1 - \sin t)}, \frac{2}{3}\cos t\right) \text{가 평행이고, 이는 } 1 - \sin t = \sin t \text{ 즉, } t = \frac{\pi}{6} \text{ 일 때이다.}$$

따라서, 점 O, G, P가 한 직선 위에 있을 때 삼각형 OAB의 넓이가 최대가 된다.

[1-3] [1-2]에 의해 $t = \frac{\pi}{6}$ 일 때, $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $G = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 이고 구하는 영역은 아래 그

림과 같이 두 원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, x 축 그리고 직선

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 로 둘러싸인 영역 R이다.



제시문 (나)에 의해 $x-1 = \sin \theta$ 로 치환하면

$$\int_{\frac{3}{2}}^2 \sqrt{1-(x-1)^2} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

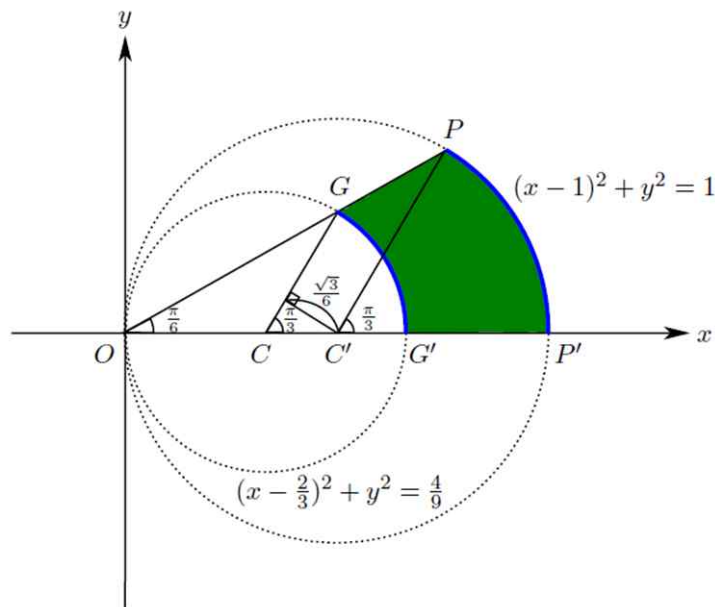
$x - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \sin \theta$ 로 치환하면

$$\int_1^{\frac{4}{3}} \sqrt{\frac{4}{9} - \left(x - \frac{2}{3}\right)^2} dx = \frac{4}{9} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{4}{9} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$$

따라서, R 의 넓이는 A 는

$$\begin{aligned} A &= (\text{사다리꼴 } GG'P'P \text{의 넓이}) + \int_{\frac{3}{2}}^2 \sqrt{1-(x-1)^2} dx - \int_1^{\frac{4}{3}} \sqrt{\frac{4}{9} - \left(x - \frac{2}{3}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) + \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) - \frac{4}{9} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{5\pi}{54} + \frac{5\sqrt{3}}{36} \end{aligned}$$

[1-3] 대학발표 다른 풀이



영역의 넓이는

사다리꼴 $CC'PG$ 의 넓이 + 부채꼴 $PC'P'$ 의 넓이 - 부채꼴 GCG' 의 넓이

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \left(1 + \frac{2}{3} \right) + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{5\sqrt{3}}{36} + \frac{5\pi}{54}$$

[문항2] 대학발표 예시답안

[2-1] $a_{n+1} > 2(n+1)\pi$ 이므로 $2n\pi < a_{n+1} - 2\pi$ 이다. 그리고

$$\sin(a_{n+1} - 2\pi) - \sin a_n = \sin a_{n+1} - \sin a_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} < 0 \quad \text{이므로}$$



$$2n\pi < a_{n+1} - 2\pi < a_n \text{ 이다.}$$

[2-2] 구간 $[a_{n+1} - 2\pi, a_n]$ 에서 함수 $f(x) = \sin x$ 에 평균값 정리를 적용하면

$$\frac{\sin a_n - \sin(a_{n+1} - 2\pi)}{a_n - a_{n+1} + 2\pi} = \cos b_n$$

인 b_n 이 $a_{n+1} - 2\pi$ 와 a_n 사이에 적어도 하나 존재한다. 즉,

$$a_n - a_{n+1} + 2\pi = \frac{\sin a_n - \sin(a_{n+1} - 2\pi)}{\cos b_n} = \frac{\sin a_n - \sin a_{n+1}}{\cos b_n} = \frac{1}{\cos b_n} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \text{을 얻}$$

는다.

[2-3] $0 < a_n - (a_{n+1} - 2\pi) < \frac{\pi}{2}$ 이므로 제시문 (나)에 의하여

$$\sin(a_n - (a_{n+1} - 2\pi)) < a_n - a_{n+1} + 2\pi \text{을 얻는다.}$$

[2-1]과 [2-2]의 결과를 이용하면

$$\sin(a_n - a_{n+1}) < \frac{1}{\cos b_n} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \text{이고 } 1 - \frac{2\pi}{a_{n+1}} < \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 \text{임을 알 수 있다.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos b_n = 1 \text{이므로 } 0 < a_n \sin(a_n - a_{n+1}) < \frac{1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}}{\cos b_n} \text{이고 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}}{\cos b_n} = 0 \text{이다.}$$

따라서, 제시문 (다)에 의해 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sin(a_{n+1} - a_n) = 0$ 을 얻는다.

[문항3] 대학발표 예시답안

[3-1] 교점 (x, y) 에서 원의 기울기 $-\frac{x}{y-c}$ 와 쌍곡선의 기울기 $\frac{b^2x}{a^2y}$ 가 같으므로,

$$-\frac{x}{y-c} = \frac{b^2x}{a^2y} \text{에서, } y = \frac{b^2c}{a^2+b^2} \text{이고, } x^2 = a^2 \left(1 + \frac{y^2}{b^2} \right) = a^2 + \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)^2} \text{이다.}$$

따라서,

$$r = \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)^2} + \left(\frac{-a^2c}{a^2+b^2} \right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{c^2a^2}{a^2+b^2}} = a\sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2+b^2}}$$

이다.

[3-2] [3-1]에서 $a=4, b=3, c=5$ 인 경우이다. 이 때, $r=4\sqrt{2}$ 이다.

[3-3] 중심이 $(\alpha, f(\alpha))$ 이고 문제의 성질을 만족하는 원 C 는 두 쌍곡선 $\frac{x^2}{7^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1$,

$\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$ 와 각각 접한다. 접하는 점을 각각 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 라고 하고, 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2 라고 하자. 이 때, 원 C 는 두 접선에 외접하므로 중심 $(\alpha, f(\alpha))$ 는 두 접선이 이루는 각의 이등분선 위에 있다.

그러면, $\alpha \rightarrow \infty$ 일 때,

제시문 (나)와 (다)에 의해 $m_1 \rightarrow \frac{1}{7}, m_2 \rightarrow 1$ 이고, $m = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{f(\alpha)}{\alpha}, \tan \theta_1 = \frac{1}{7},$

$\tan \theta_2 = 1$ 라고 하면,

$$m = \tan\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \text{ 이므로 } \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{\frac{1}{7} + 1}{1 - \frac{1}{7} \cdot 1} = \frac{4}{3} = \frac{2m}{1 - m^2}$$

따라서 $m = \frac{1}{2}$ 이다.



30

인하대학교(오전) 수시³⁰⁾

...



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
접선의 방정식, 점과 직선사이의 거리, 이차방정식 근과 계수의 관계, 이차함수의 최댓값, 최솟값, 삼수선의 정리, 구의 방정식, 사이값 정리, 합성함수의 미분	의예과 제외 미적용 단, 의예과는 국어, 수학(가), 영어, 과학탐구(2과목) 중 3개 영역 각 1등급 ※ 과학탐구는 2개 과목 평균 적용	수학 3문항	120분

[문항 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 포물선 $y = x^2$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $y = 2x_1x - y_1$ 이다.

(나) 점 $P(x_1, y_1)$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(1-1) 좌표평면 위의 점 (a, b) 를 지나고 포물선 $y = x^2$ 에 접하는 서로 다른 두 개의 접선이 존재하기 위한 필요충분조건을 a, b 에 대한 부등식으로 나타내시오. (7점)

(1-2) 점 (a, b) 를 지나고 포물선 $y = x^2$ 에 접하는 서로 다른 두 개의 접선이 존재한다.

(a) 두 접점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오. (8점)

(b) 점 (a, b) 가 $y = -(x+2)^2$ 의 그래프 위에 있을 때, 점 (a, b) 와 두 접점이 이루는 삼각형의 넓이의 최솟값을 구하시오. (15점)



[문항 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) (삼수선의 정리) 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P 와 평면 α 위의 직선 l , 직선 l 위의 한 점 H , 평면 α 위에 있으면서 직선 l 위에 있지 않은 점 O 에 대하여 다음이 성립한다.

- (1) $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp l$ 이면 $\overline{PH} \perp l$
- (2) $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{PH} \perp l$ 이면 $\overline{OH} \perp l$
- (3) $\overline{PH} \perp l$, $\overline{OH} \perp l$, $\overline{PO} \perp \overline{OH}$ 이면 $\overline{PO} \perp \alpha$

(나) 좌표공간의 사면체 $ABCD$ 의 네 꼭짓점 A, B, C, D 를 모두 지나는 구를 사면체 $ABCD$ 에 외접하는 구라고 한다. 사면체 $ABCD$ 의 네 면과 접하는 구를 사면체 $ABCD$ 에 내접하는 구라고 한다. 사면체 $ABCD$ 의 내접하는 구의 중심을 I 라고 하면, 점 I 는 사면체 $ABCD$ 의 내부에 위치하고, I 에서 사면체 $ABCD$ 의 네 면에 각각 내린 수선의 길이는 내접하는 구의 반지름과 같다.

(※) 좌표공간 위의 세 점 A, B, C 와 평면 ABC 위에 있지 않은 점 D 를 꼭짓점으로 갖는 사면체 $ABCD$ 에 내접하는 구의 중심을 I , 외접하는 구의 중심을 G 라고 하자.

(2-1) A, B, C 의 좌표가 각각 $(0, 0, 0)$, $(6, 0, 0)$, $(2, 4, 0)$ 일 때, G 에서 xy 평면에 내린 수선의 발의 좌표를 구하시오. (10점)

(2-2) 사면체 $ABCD$ 에 내접하는 구의 반지름을 r , I 에서 변 AB 에 내린 수선의 길이를 k 라고 하자. I 에서 평면 ABC 와 평면 ABD 에 내린 수선의 발을 각각 H, H' 이라고 할 때, 선분 HH' 의 길이를 k, r 의 식으로 나타내시오. (10점)

(2-3) 사면체 $ABCD$ 의 변 BC, CA, AB 의 길이를 각각 a, b, c 라고 하자. I 와 G 가 일치할 때, 변 AD, BD, CD 의 길이를 각각 a, b, c 의 식으로 나타내시오. (15점)



[문항 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) (사이값 정리) 함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 이면 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k 에 대하여

$$f(c) = k \quad (a < c < b)$$

인 c 가 적어도 하나 존재한다.

(나) 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 합성함수 $f(g(x))$ 의 도함수는

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

이다.

(※) 상수 a ($a > 0$)와 함수 $f(x) = x^2(x+a)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$ 가 $g'(-1) > 0$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$$f(g(x)) = x^2(x+3)^2e^x$$

을 만족한다.

(3-1) 함수 $y = x^2(x+3)^2e^x$ 의 그래프의 개형을 그리시오. (단, 극대와 극소는 표시하되, 그래프의 오목과 볼록은 고려하지 않는다.) (5점)

(3-2) 상수 a 의 값을 구하시오. (15점)

(3-3) $g(0)$ 의 값을 구하시오. (15점)



[문항 4] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 실수 x, y 에 대하여 부등식 $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy$ 가 성립한다.

(나) 양의 실수 A, B 와 자연수 n 에 대하여 부등식 $A \leq B$ 가 성립할 필요충분조건은 $\sqrt[n]{A} \leq \sqrt[n]{B}$ 이다.

(다) (수학적 귀납법) 자연수 $n \geq 2$ 에 대한 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 $n \geq 2$ 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(1) $n=2$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

(2) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면, 명제 $n=k+1$ 일 때에도 $p(n)$ 이 성립한다.

(4-1) 양의 실수 a, b 가 $ab \geq 1$ 을 만족할 때, 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$(a^2+1)(b^2+1) \leq \left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+1\right)^2$$

(4-2) 양의 실수 a, b, c 가 $ab, bc, ca \geq 1$ 을 만족할 때, 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \leq (d^2+1)^3 \quad (\text{단, } d = \frac{a+b+c}{3} \text{ 이다.})$$

(4-3) 양의 실수 a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 2$)이 모든 i, j ($1 \leq i < j$)에 대하여 $a_i a_j \geq 1$ 을 만족할 때, 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$\sqrt[n]{(a_1^2+1)(a_2^2+1) \cdots (a_n^2+1)} \leq \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2+1$$



문제1. 좌표평면 위에 원 $x^2+y^2=9$ 와 직선 $y=4$ 가 있다. $t \neq -3, t \neq 3$ 인 실수 t 에 대하여 직선 $y=4$ 위의 점 $P(t, 4)$ 에서 원 $x^2+y^2=9$ 에 그은 두 접선의 기울기의 곱을 $f(t)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

(2019. 4월 전국연합)

< 보 기 >

ㄱ. $f(\sqrt{2})=-1$

ㄴ. 열린 구간 $(-3, 3)$ 에서 $f''(t)<0$ 이다.

ㄷ. 방정식 $9f(x)=3^{x+2}-7$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ

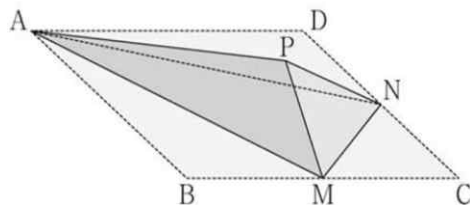
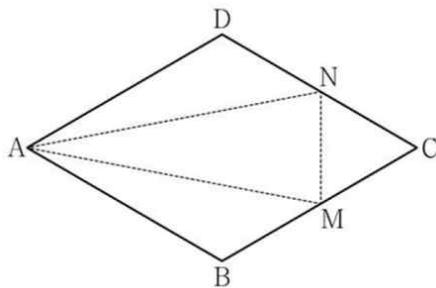
② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제2. 그림과 같이 한 변의 길이가 4이고 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$ 인 마름모 ABCD 모양의 종이가 있다. 변 BC와 변 CD의 중점을 각각 M과 N이라 할 때, 세 선분 AM, AN, MN을 접는 선으로 하여 사면체 PAMN이 되도록 종이를 접었다. 삼각형 AMN의 평면 PAM 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않으며 P는 종이를 접었을 때 세 점 B, C, D가 합쳐지는 점이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점] (2019. 대수능)





풀어보기(문제1) 정답 ③

점 P에서 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 그은 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y = mx - mt + 4$$

원 $x^2 + y^2 = 9$ 의 중심에서 접선까지의 거리는 반지름의 길이와 같다.

$$\frac{|mt - 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3$$

m 에 대한 이차방정식 $(t^2 - 9)m^2 - 8tm + 7 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가지므로

두 접선의 기울기의 곱은 $f(t) = \frac{7}{t^2 - 9}$ 이다.

ㄱ. $f(\sqrt{2}) = -1$ (참)

ㄴ. $f'(t) = -\frac{14t}{(t^2 - 9)^2}$, $f''(t) = \frac{42(t^2 + 3)}{(t^2 - 9)^3}$ 이므로

열린 구간 $(-3, 3)$ 에서 $f''(t) < 0$ (참)

ㄷ. $9f(x) = 3^{x+2} - 7$, $f(x) = 3^x - \frac{7}{9}$

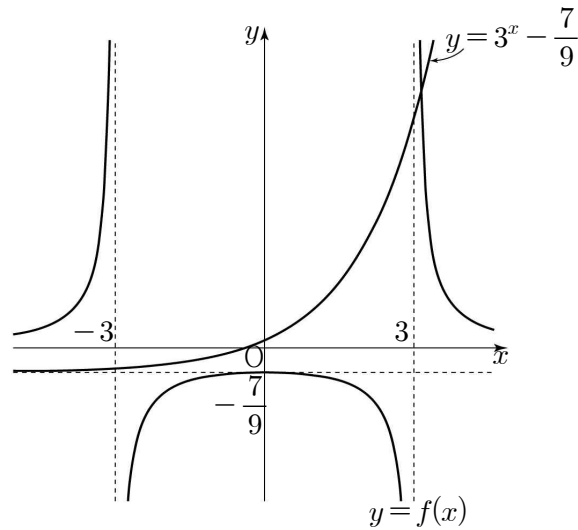
방정식 $f(x) = 3^x - \frac{7}{9}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y = f(x)$, $y = 3^x - \frac{7}{9}$ 의 그래프가 만나는 점의 개수와 같다. 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	...	(-3)	...	0	...	(3)	...
$f'(x)$	+		+	0	-		-
$f''(x)$	+		-	-	-		+
$f(x)$	↗		↘	$-\frac{7}{9}$	↘		↘

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -3-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -3+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = 3^x - \frac{7}{9}$ 의 그래프는 그림과 같다.

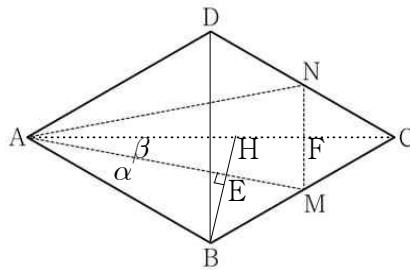


따라서 실근의 개수는 1이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

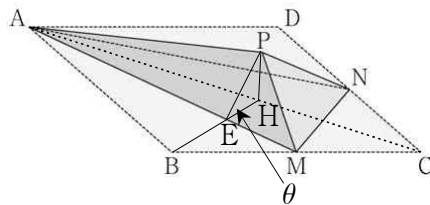
풀어보기(문제2) 정답 8

마름모 ABCD의 점 B에서 선분 \overline{AM} 으로 내린 수선의 발을 점 E, 그 연장선이 \overline{AC} 와 만나는 점을 H라 하자.



삼각형 BCD는 정삼각형이며 M과 N이 각각 선분 BC, CD의 중점이므로 $\overline{CF} = \sqrt{3}$, $\overline{FM} = 1$ 이다. 그러므로 $\overline{AF} = 3\sqrt{3}$, $\overline{AM} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2\sqrt{7}$ 이다.

평면 AMN과 평면 PAM의 교선이 \overline{AM} 이며 삼수선정리에 의해 두 평면이 이루는 각 θ 는 $\cos\theta = \frac{\overline{EH}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{BE}}$ 가 성립한다.



$\alpha = \angle BAM$, $\beta = \angle MAC$ 라 하자.



$\sin \beta = \frac{\sqrt{7}}{14}$, $\cos \beta = \frac{3\sqrt{21}}{14}$ 이고 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\sin \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{6} - \beta \right) = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{21}}{14} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{14} = \frac{\sqrt{21}}{14}$$

그러므로 $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{7}}{14}$ 이다.

$$\overline{BE} = 4\sin \alpha = \frac{2\sqrt{21}}{7}, \quad \overline{AE} = 4\cos \alpha = \frac{10\sqrt{7}}{7}, \quad \overline{EH} = \overline{AE} \tan \beta = \frac{10\sqrt{21}}{63}$$

$$\text{따라서 } \cos \theta = \frac{\overline{EH}}{\overline{BE}} = \frac{\frac{10\sqrt{21}}{63}}{\frac{2\sqrt{21}}{7}} = \frac{5}{9}$$

삼각형 AMN의 넓이가

$$\frac{1}{2} \times \overline{AF} \times \overline{MN} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 2 = 3\sqrt{3}$$

이므로 정사영의 넓이는

$$3\sqrt{3} \times \cos \theta = \frac{5}{3}\sqrt{3} \text{ 이다. 따라서 } p+q=5+3=8 \text{ 이다.}$$

[문항1] 대학발표 예시답안

(1-1) 점 (a, b) 를 지나고 기울기가 m 인 직선은 $y = m(x-a) + b$ 이다.

직선이 포물선과 접할 조건은 $x^2 - mx + (ma-b) = 0$ 이 중근을 가질 때이므로

$$D = m^2 - 4ma + 4b = 0$$

서로 다른 접선이 존재한다는 것과 $D=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖는 것은 같은 말이므로 D 의 판별식 $D_D = 4a^2 - 4b > 0$ 이다.

따라서 $a^2 > b$ 가 필요충분조건이 된다.

(1-2)

(a) (x_1, y_1) 과 (x_2, y_2) 를 두 점이라 하자. 제시문 (가)에 의하면, 각 점에서의 접

선의 방정식은 $\frac{y+y_1}{2} = x_1x$, $\frac{y+y_2}{2} = x_2x$ 가 된다.

두 방정식이 (a, b) 를 지나므로 (x_1, y_1) 과 (x_2, y_2) 가 모두 $\frac{y+b}{2} = ax$ 를 만족시킨다.

두 점을 지나는 직선이 유일하게 결정되므로 $\frac{y+b}{2} = ax$ 가 구하고자 하는 직선의 방정식이 된다.



(b) 두 교점의 x 좌표는 (a)의 방정식과 $y=x^2$ 의 연립방정식의 근이므로 $x^2-2ax+b=0$ 을 만족한다. 따라서 근과 계수의 관계에 의해서 $|x_1-x_2|=\sqrt{4a^2-4b}$ 가 되고, (a)의 직선의 기울기가 $2a$ 이므로 피타고라스 정리에 의해서 두 교점사이의 거리는 $\sqrt{4a^2-4b}\sqrt{1+4a^2}$ 이 된다.

제시문 (나)에 의해서, (a, b) 에서 (a)의 직선까지의 거리는 $\frac{|2b-2a^2|}{\sqrt{1+4a^2}}$ 이므로 삼각형의 넓이는 $2(\sqrt{a^2-b})^3$ 이 된다. $b=-(a+2)^2$ 을 만족하므로 삼각형의 넓이의 최솟값은

$$2(\sqrt{a^2+(a+2)^2})^3=2(\sqrt{2a^2+4a+2+2})^3\geq 4\sqrt{2}$$

가 된다.

[문항2] 대학발표 예시답안

(2-1) G에서 평면 ABC(즉 xy 평면)에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{GA}=\overline{GB}=\overline{GC}$ 에서 $\overline{HA}=\overline{HB}=\overline{HC}=\sqrt{\overline{GA}^2-\overline{GH}^2}$ 이므로 H는 삼각형 ABC의 외심이다. 점 H는 xy 평면에서 두 변 AB와 AC의 수직이등분선 $x=3$ 과 $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$ 의 교점이므로 좌표는 $(3, 1, 0)$ 이다.

(2-2) I에서 변 AB에 내린 수선의 발을 P라고 하면, 삼수선의 정리에서 H와 H'에서 변 AB에 내린 수선의 발도 P이다. 또한 네 점 I, H, H', P는 BC에 수직이고 점 P를 지나는 평면위에 있다.

$\overline{IH}=\overline{IH'}=r$ 이고 $\overline{IP}=k$ 이고 두 직각삼각형 IHP와 IH'P는 합동(RHS합동)이므로, $\overline{HH'}$ 의 길이는 직각삼각형 IHP의 꼭짓점 H에서 빗변 IP에 내린 수선의 길이 $\frac{r\sqrt{k^2-r^2}}{k}$ 의 2배이다. $\overline{HH'}=\frac{2r\sqrt{k^2-r^2}}{k}$

(2-3) I(=G)에서 네 면 ABC, BCD, CAD, ABD에 내린 수선의 발을 각각 H, J, K, L이라고 하자.

(2-1)과 (2-2)에서와 같은 논리에 의하여 6쌍의 이등변 삼각형 JBC와 HBC, KCA와 HCA, LAB와 HAB, KCD와 JCD, JBD와 LBD, LAD와 KAD는 서로 합동이다.

$\angle ALD=\angle AKD=\alpha$, $\angle BJD=\angle BLD=\beta$, $\angle CKD=\angle CJD=\gamma$ 라고 하면, $\angle BHC=2\pi-\beta-\gamma$, $\angle CHA=2\pi-\gamma-\alpha$, $\angle AHB=2\pi-\alpha-\beta$ 이고 세 각의 합은 2π 이므로 $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ 이다.

따라서 $\angle BHC=\alpha$, $\angle CHA=\beta$, $\angle AHB=\gamma$ 이고 삼각형 HBC와 LAD, 삼각형 HCA와 JBD, 삼각형 HAB와 KCD는 각각 합동이다.

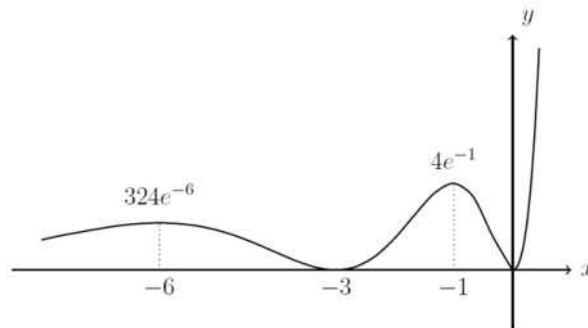
따라서 $\overline{AD} = a$, $\overline{BD} = b$, $\overline{CD} = c$ 이다.

[문항3] 대학발표 예시답안

(3-1) $y' = e^x x(x+1)(x+3)(x+6)$ 이므로 함수의 증감은 다음 표와 같다.

x	...	-6	...	-3	...	-1	...	0	...
y'	+	0	-	0	+	0	-	0	+
y	\nearrow	$\frac{324}{e^6}$	\searrow	0	\nearrow	$\frac{4}{e}$	\searrow	0	\nearrow

따라서 그래프의 개형은 다음과 같다.



(3-2) 합성함수 미분법에 의해 $f'(g(-1))g'(-1)=0$ 이고 $g'(-1)>0$ 이므로 $f'(g(-1))=0$ 이다. 또한 $f'(x)=x(3x+2a)$ 이므로, $g(-1)=0$ 이거나 $g(-1)=-\frac{2a}{3}$ 이다. 하지만 $f(g(-1))=4e^{-1}$ 이므로 $g(-1)\neq 0$ 이다.

따라서 $g(-1)=-\frac{2a}{3}$ 이고 $\frac{4}{27}a^3=f(g(-1))=4e^{-1}$ 이므로 $a=3e^{-\frac{1}{3}}$ 이다.

(3-3) $e^a(a+3)^2 > a$ 이므로

$$f(g(a))=e^a a^2 (a+3)^2 > a^3 > \frac{4a^3}{27}$$

이다. 함수 f 의 극댓값이 $\frac{4a^3}{27}$ 이므로 $g(a)$ 는 유일하게 결정되고, $g(a)>0$ 이다.

또한 $f(g(0))=0$ 이므로 $g(0)=0$ 이거나 $g(0)=-a$ 이다. 만약 $g(0)=-a<0$ 이면 사이값 정리에 의해 $g(s)=0$ 인 s 가 0과 a 사이에 존재한다. 그러면 $0=f(g(s))=e^s s^2 (s+3)^2 > 0$ 이므로 모순이다. 따라서 $g(0)=0$ 이다.

<참고>

문제의 미분가능한 함수 g 는 존재한다. 함수 f_1, f_2, f_3 을 다음과 같이 정의한다.



$$f_1(x) = x^2 \left(x + 3e^{-\frac{1}{3}} \right) \quad \left(x < -2e^{-\frac{1}{3}} \right)$$

$$f_2(x) = x^2 \left(x + 3e^{-\frac{1}{3}} \right) \quad \left(-2e^{-\frac{1}{3}} \leq x < 0 \right)$$

$$f_3(x) = x^2 \left(x + 3e^{-\frac{1}{3}} \right) \quad (x \geq 0)$$

함수 $h(x) = e^x x^2 (x+3)^2$ 에 대하여

$$g(x) = \begin{cases} f_1^{-1}(h(x)) & (x < -1) \\ f_2^{-1}(h(x)) & (-1 \leq x < 0) \\ f_3^{-1}(h(x)) & (x \geq 0) \end{cases}$$

로 두면 함수 g 는 문제의 조건을 만족한다.

[문항4] 대학발표 예시답안

$$(4-1) \quad (a^2+1)(b^2+1) = (ab-1)^2 + (a+b)^2 \leq \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - 1 \right)^2 + (a+b)^2 = \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + 1 \right)^2$$

(별해1) $((a+b)^2+4)^2 - 16(a^2+1)(b^2+1) \geq 0$ 을 보이면 된다.

$$\begin{aligned} ((a+b)^2+4)^2 - 16(a^2+1)(b^2+1) &= (a+b)^4 + 8(a+b)^2 + 16 - 16(a^2+b^2+a^2b^2+1) \\ &= (a+b)^4 - 16a^2b^2 - 8(a-b)^2 = (a-b)^2((a+b)^2+4ab-8) \geq (a-b)^2(8ab-8) \geq 0 \end{aligned}$$

(별해2) 부등식이 a, b 에 관하여 대칭이므로 $b \geq a$ 일 때만 생각해도 된다.

함수 $f(x)$ 를 $f(x) = ((x+a)^2+4)^2 - 16(a^2+1)(x^2+1)$ 로 두자. 주어진 부등식을 증명하기 위해서는 $x \geq a$ 이고 $x \geq \frac{1}{a}$ 일 때, $f(x) \geq 0$ 임을 보이면 된다. 우선 $f(a) = 0$ 이다. 또한

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4((x+a)^2+4)(x+a) - 32(a^2+1)x \\ &= 4\{x^3 + 3ax^2 - (5a^2+4)x + a(a^2+4)\} \\ &= 4(x-a)(x^2+4ax-a^2-4) \end{aligned}$$

이므로 $x \geq a$ 이고 $x \geq \frac{1}{a}$ 일 때 $f'(x) \geq 0$ 이다. 따라서 주어진 부등식을 얻는다.

(4-2) 일반성을 잃지 않고 $a \leq b \leq c$ 라 하자. 그러면 $cd \geq 1$ 이다.

$$\begin{aligned} (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1) &\leq \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + 1 \right)^2 \left(\left(\frac{c+d}{2} \right)^2 + 1 \right)^2 \\ &\leq \left(\left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^2 + 1 \right)^4 = \left(\left(\frac{a+b+c}{3} \right)^2 + 1 \right)^4 \end{aligned}$$

이므로 부등식이 성립한다.



(4-3) 수학적 귀납법을 써서 증명하자. $n=2$ 일 때는 성립함을 앞에서 보았다.

$n=k-1$ 일 때 부등식이 성립한다고 가정하자.

$A_j = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_j}{j}$ 라고 하고 일반성을 잃지 않고 a_k 가 a_1, a_2, \dots, a_k 중 가장 큰 수라 하자. 그러면

$$(a_1^2 + 1) \cdots (a_{k-1}^2 + 1) \leq (A_{k-1}^2 + 1)^{k-1}$$

이고,

$$(a_k^2 + 1)(A_k^2 + 1)^{k-2} \leq \left(\left(\frac{a_k + (k-2)A_k}{k-1} \right)^2 + 1 \right)^{k-1} \quad (\because a_k A_k \geq 1)$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned} (a_1^2 + 1) \cdots (a_k^2 + 1)(A_k^2 + 1)^{k-2} &= (a_1^2 + 1) \cdots (a_{k-1}^2 + 1) \times (a_k^2 + 1)(A_k^2 + 1)^{k-2} \\ &\leq (A_{k-1}^2 + 1)^{k-1} \left(\left(\frac{a_k + (k-2)A_k}{k-1} \right)^2 + 1 \right)^{k-1} \end{aligned}$$

이다. 한편 $n=2$ 일 때 부등식이 성립하므로,

$$(A_{k-1}^2 + 1) \left(\left(\frac{a_k + (k-2)A_k}{k-1} \right)^2 + 1 \right) \leq (A_k^2 + 1)^2$$

이다. 따라서

$$(a_1^2 + 1) \cdots (a_k^2 + 1)(A_k^2 + 1)^{k-2} \leq (A_k^2 + 1)^{2k-2}$$

가 성립하므로, 주어진 부등식이 $n=k$ 일 때 성립한다.



31

인하대학교(오후) 수시³¹⁾

...



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
벡터의 크기, 실수배, 위치벡터, 내적, 정적분, 함수의 오목과 볼록, 역함수의 미분법	의예과 제외 미적용 단, 의예과는 국어, 수학(가), 영어, 과학탐구(2과목) 중 3개 영역 각 1등급 ※ 과학탐구는 2개 과목 평균 적용	수학 3문항	120분

[문항 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 \vec{a} , \vec{b} 라고 할 때, 선분 AB를 $m:n(m>0, n>0)$ 으로 내분하는 점 P의 위치벡터 \vec{p} 는 다음과 같다.

$$\vec{p} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$

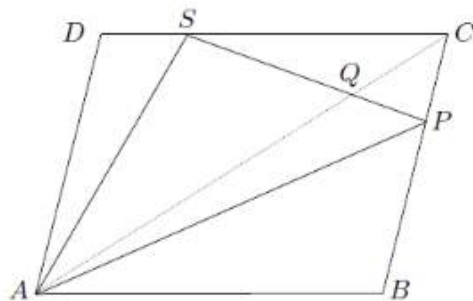
(나) 영벡터가 아닌 두 평면벡터 \vec{a} , \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 일 때,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

(다) 세 평면벡터 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 와 실수 k 에 대하여

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

(※) 평행사변형 ABCD에 대하여 선분 BC 위의 점을 P, 선분 CD를 3:1로 내분한 점을 S, 선분 PS가 선분 AC와 만나는 점을 Q라 하고 $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ 라고 하자.





(1-1) Q가 선분 PS를 $m:n$ 으로 내분하는 점일 때, \overrightarrow{AP} 를 m, n, \vec{b}, \vec{d} 로 나타내시오. (8점)

(1-2) $|\vec{b}|=2, |\vec{d}|=\frac{3}{2}, \vec{b} \cdot \vec{d}=\frac{3}{5}$ 이고 점 R은 $2\overrightarrow{RA}+3\overrightarrow{RP}+2\overrightarrow{RS}=\vec{0}$ 을 만족하는 삼각형 APS의 내부점이라 하자.

(a) $\angle ASP=\frac{\pi}{2}$ 일 때, \overrightarrow{AP} 를 \vec{b} 와 \vec{d} 로 나타내시오. (10점)

(b) $\angle ASP=\frac{\pi}{2}$ 일 때, 삼각형 RPS의 넓이를 구하시오. (12점)

[문항 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) (정적분과 미분의 관계) 함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (\text{단, } a < x < b)$$

가 성립한다.

(나) (곡선의 볼록) 함수 $f(x)$ 가 구간 (a, b) 에서 이계도함수를 갖고 $f'' > 0$ 이면 $y=f(x)$ 의 그래프가 아래로 볼록하다.

(※) 실수 t 에 대하여, 곡선 $y=x(x-t)e^{x^3}$ 과 직선 $x=0, x=2, x$ 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$ 라고 하자.

(2-1) 함수 $S(t)$ 는 구간 $[2, \infty)$ 에서 증가함을 보이시오. (5점)

(2-2) $S'(0) < -\frac{2e^8}{25}$ 임을 보이시오. (15점)

(2-3) $S(t)$ 가 $t=a$ 에서 최솟값을 가지면, $a > \frac{3}{2}$ 임을 보이시오. (15점)



[문항 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 4차방정식 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (a, b, c, d 는 상수)이 서로 다른 4개의 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 를 가지면, 등식

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4) \\ &= x^4 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)x^3 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4)x^2 \\ &\quad - (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4)x + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \end{aligned}$$

가 성립하므로, 근과 계수 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -a, \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = b$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -c, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = d$$

(나) 4차방정식 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 이 서로 다른 4개의 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ($\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$)를 가질 때, 계수 a, b, c 의 값과 $\alpha_1 + \alpha_2$ 의 값을 알면 네 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 의 값을 모두 구할 수 있다. 문제 (3-1)은 이 사실의 예시이다.

(다) (역함수의 미분법) 함수 $f(x)$ 가 열린 구간 (a, b) 에서 미분가능하고, 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 미분가능할 때, $y = f^{-1}(x)$ 의 도함수는 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ 이다.

(3-1) 4차방정식 $x^4 - 5x^3 + \frac{27}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + k = 0$ 이 서로 다른 4개의 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

($\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$)를 갖고 $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{2}$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하시오. (5점)

(3-2) 4차함수 $h(x) = (x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$ 에 대하여 t 가 $-1 < t < \frac{1}{2}$ 을 만족할 때, x 에 대한 방정식 $h(x) = t$ 의 네 실근 중 가장 큰 값을 $r(t)$ 라고 하면, $r(t)$ 는 미분가능한 함수이다. 제시문(다)를 이용하여 $r'(0)$ 의 값을 구하시오. (10점)

(3-3) $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이고 모든 계수가 양수인 4차함수이다. 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x) = t$ 는 $p < t < q$ 일 때, 서로 다른 4개의 실근 x_1, x_2, x_3, x_4 ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$)를 갖는다. (단, p, q 는 $p < 1, q > 181$ 인 상수이고, x_1, x_2, x_3, x_4 는 구간 (p, q) 에서 t 에 대하여 미분가능하다.) 이때, $g(t) = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|$ 는 다음 세 조건을 만족한다.

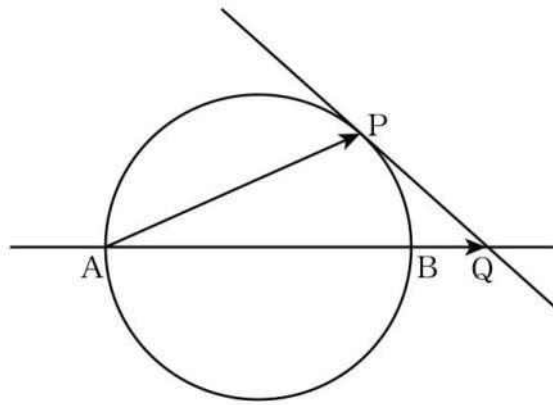
(1) $g(t)$ 는 $t = 1$ 에서 미분가능하지 않다. (2) $p < t \leq 1$ 일 때, $g(t) = 18$ 이다.

(3) $g(181) = 20, g'(181) = \frac{1}{154}$ 이다.

이때, $f(x)$ 의 식을 구하시오. (20점)



문제1 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에서의 접선과 직선 AB가 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q가 선분 AB를 5:1로 외분하는 점이고, $\overline{BQ} = \sqrt{3}$ 일 때, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 값을 구하시오. [4점] (2019. 10월 전국연합)

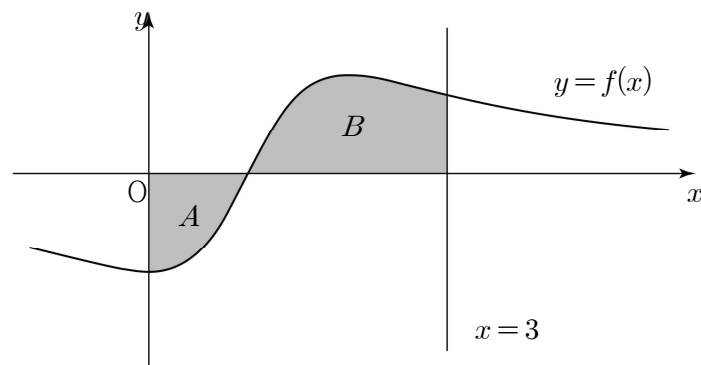


문제2 함수 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(4, g(4))$ 에서의 접선의 기울기는? [4점] (2019. 3월 전국연합)

- ① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{5}{36}$ ⑤ $\frac{1}{6}$



문제3 함수 $f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 영역을 A , 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=3$ 으로 둘러싸인 영역을 B 라 하자. 영역 A 의 넓이와 영역 B 의 넓이의 합은? [4점] (2019. 7월 전국연합)

① $2\ln 2$ ② $\ln 6$ ③ $3\ln 2$ ④ $\ln 10$ ⑤ $\ln 12$ 



풀어보기(문제1) 정답 50

선분 AB의 중점을 O라 하면 점 Q가 선분 AB를 5:1로 외분하는 점이고, $\overline{BQ} = \sqrt{3}$ 이므로 $\overline{AO} = \overline{OB} = \overline{OP} = 2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{OP} \cdot \left(\frac{5}{3}\overrightarrow{OQ}\right) \\ &= |\overrightarrow{AO}| \times |\overrightarrow{AQ}| + \frac{5}{3} \times |\overrightarrow{OP}|^2 = 2\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} + \frac{5}{3} \times (2\sqrt{3})^2 = 50\end{aligned}$$

풀어보기(문제2) 정답 ⑤

$g(4) = k$ 라 하면 $f(k) = 4$ 이므로

$$k^3 - 5k^2 + 9k - 5 = 4, \quad k^3 - 5k^2 + 9k - 9 = 0, \quad (k-3)(k^2 - 2k + 3) = 0$$

이다. k 는 실수이므로 $k=3$ 이다.

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - 10x + 9$ 이므로 $f'(3) = 6$ 이다.

따라서 역함수의 미분법에 의하여

$$g'(4) = \frac{1}{f'(g(4))} = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{6}.$$

풀어보기(문제3) 정답 ④

$x \geq 1$ 이면 $f(x) \geq 0$ 이고 $x < 1$ 이면 $f(x) < 0$ 이므로

$$\text{영역 } A \text{의 넓이는 } \int_0^1 |f(x)| dx = - \int_0^1 f(x) dx$$

$$\text{영역 } B \text{의 넓이는 } \int_1^3 |f(x)| dx = \int_1^3 f(x) dx$$

영역 A의 넓이와 영역 B의 넓이의 합은

$$\begin{aligned}- \int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx + \int_1^3 \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx &= - \left[\ln(x^2-2x+2) \right]_0^1 + \left[\ln(x^2-2x+2) \right]_1^3 \\ &= \ln 2 + \ln 5 = \ln 10\end{aligned}$$

[문항1] 대학발표 예시답안

(1-1) 제시문 (가)에 의해



$$\overrightarrow{AS} = \frac{3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}}{3+1} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\vec{d} + \frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{d}) = \frac{1}{4}\vec{b} + \vec{d} \text{ 이다.}$$

$\overrightarrow{AP} = \vec{b} + t\vec{d}$ ($0 \leq t \leq 1$)라 하면, 제시문 (가)에 의해

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{m\overrightarrow{AS} + n\overrightarrow{AP}}{m+n} = \frac{m}{m+n} \left(\frac{1}{4}\vec{b} + \vec{d} \right) + \frac{n}{m+n} (\vec{b} + t\vec{d}) = \frac{\frac{m}{4} + n}{m+n} \vec{b} + \frac{m+tn}{m+n} \vec{d} \text{ 이다.}$$

\overrightarrow{AQ} 가 $\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{d}$ 와 평행이므로 $t = 1 - \frac{3m}{4n}$ 이고 $\overrightarrow{AP} = \vec{b} + \left(1 - \frac{3m}{4n}\right)\vec{d}$ 이다.

(1-2)

(a) $\overrightarrow{SP} = \frac{3}{4}\vec{b} - t\vec{d}$, ($0 \leq t \leq 1$)이라 하면 제시문 (나), (다)에 의해서

$$0 = \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{SP} = \left(\frac{1}{4}\vec{b} + \vec{d} \right) \cdot \left(\frac{3}{4}\vec{b} - t\vec{d} \right) = \frac{3}{16}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{4}t\vec{b} \cdot \vec{d} + \frac{3}{4}\vec{b} \cdot \vec{d} - t|\vec{d}|^2$$

을 만족해야 하므로 $t = \frac{1}{2}$ 을 얻는다. 따라서 $\overrightarrow{AP} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$ 이다.

(b) $\overrightarrow{AP} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$ 이므로 (1-1)에 의해 Q는 선분 PS를 $m:n=2:3$ 으로 내분하는

점이다. 제시문 (가)에 의해 $\overrightarrow{RQ} = \frac{2\overrightarrow{RS} + 3\overrightarrow{RP}}{2+3} = \frac{2}{5}\overrightarrow{RS} + \frac{3}{5}\overrightarrow{RP}$ 이고

$2\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{RP} + 2\overrightarrow{RS} = \vec{0}$ 이므로 $5\overrightarrow{RQ} = 2\overrightarrow{AR}$ 이다. 즉, 점 A, R, Q는 한 직선상에 있고 $\overrightarrow{AR} : \overrightarrow{RQ} = 5:2$ 이므로 $\triangle RAP : \triangle RAS : \triangle RPS = 2:3:2$ 이다.

한편, $\triangle APS = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AS}||\overrightarrow{SP}|$ 이므로

$$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AS} = \left(\frac{1}{4}\vec{b} + \vec{d} \right) \cdot \left(\frac{1}{4}\vec{b} + \vec{d} \right) = \frac{1}{16}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{d} + |\vec{d}|^2 = \frac{14}{5}$$

$$\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SP} = \left(\frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{d} \right) \cdot \left(\frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{d} \right) = \frac{9}{16}|\vec{b}|^2 - \frac{3}{4}\vec{b} \cdot \vec{d} + \frac{1}{4}|\vec{d}|^2 = \frac{189}{80}$$

로부터 $\triangle APS = \frac{21\sqrt{6}}{40}$ 이다. 따라서 삼각형 RPS의 넓이는 $\frac{2}{7}\triangle APS = \frac{3\sqrt{6}}{20}$ 이다.

(별해) $2\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{RP} + 2\overrightarrow{RS} = \vec{0}$ 로부터 $\frac{\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RS}}{1+1} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PR}$ 를 얻는다. $\overrightarrow{AP} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$ 이고 선분

AS의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{RM} = \frac{\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RS}}{2} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PR}$ 이므로 R은 선분 MP를 3:4로

내분하는 점이고 $\triangle RPS = \frac{4}{7}\triangle MPS$ 이다. $\vec{b} \cdot \vec{d} = |\vec{b}||\vec{d}|\cos\theta = \frac{3}{5}$ 로부터 $\cos\theta = \frac{1}{5}$,



$\sin \theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ 이므로 점 S로부터 선분 MP에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{SH} = \frac{3\sqrt{6}}{10} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } \triangle RPS = \frac{4}{7} \triangle MPS = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{4} \times \frac{3\sqrt{6}}{10} = \frac{3\sqrt{6}}{20} \text{ 이다.}$$

[문항2] 대학발표 예시답안

(2-1) 정의에 의하여 $S(t) = \int_0^2 |x-t|xe^{x^3} dx$ 이다. $t \geq 2$ 이면

$$S(t) = \int_0^2 (t-x)xe^{x^3} dx = t \int_0^2 xe^{x^3} dx - \int_0^2 x^2 e^{x^3} dx$$

이므로, $S(t)$ 는 증가한다.

(2-2) 마찬가지로 $t < 0$ 일 때,

$$S(t) = \int_0^2 (x-t)xe^{x^3} dx = \int_0^2 x^2 e^{x^3} dx - t \int_0^2 xe^{x^3} dx$$

이므로 $S'(0) = - \int_0^2 xe^{x^3} dx$ 이다. $y = xe^{x^3}$ 은

$$y' = (1+3x^3)e^{x^3}, \quad y'' = (12x^2+9x^5)e^{x^3}$$

이므로, $x > 0$ 일 때 곡선 $y = xe^{x^3}$ 은 아래로 볼록하다. 곡선 $y = xe^{x^3}$ 의 $x=2$ 에서 접선을 구해보면 $y-2e^8 = 25e^8(x-2)$ 이다. 곡선이 아래로 볼록하므로

$$\int_0^2 xe^{x^3} dx = \int_0^{\frac{48}{25}} xe^{x^3} dx + \int_{\frac{48}{25}}^2 xe^{x^3} dx > \int_{\frac{48}{25}}^2 [25e^8(x-2)+2e^8] dx = \frac{2e^8}{25}$$

이다. 따라서 $S'(0) < -\frac{2e^8}{25}$ 이다.

(2-3) $0 < t < 2$ 일 때, $S(t) = \int_0^2 |x-t|xe^{x^3} dx = \int_0^t (t-x)xe^{x^3} dx + \int_t^2 (x-t)xe^{x^3} dx$ 이므로

$S'(t) = \int_0^t xe^{x^3} dx - \int_t^2 xe^{x^3} dx$ 이고 $S''(t) = 2te^{t^3} > 0$ 이다. (2-2)의 결과를 이용하면

$$S'\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{\frac{3}{2}} xe^{x^3} dx - \int_{\frac{3}{2}}^2 xe^{x^3} dx < \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} e^{\frac{27}{8}} - \frac{2}{25} e^8 < \frac{9}{4} e^4 - \frac{2}{25} e^8 < 0$$

이므로 $0 < t < \frac{3}{2}$ 일 때 $S'(t) < 0$ 이다. 또한 $t \leq 0$ 일 때 $S(t) = \int_0^2 x^2 e^{x^3} dx - t \int_0^2 xe^{x^3} dx$

이므로 $t < \frac{3}{2}$ 일 때, $S(t)$ 는 감소한다. 따라서 $S(t)$ 는 $t=a > \frac{3}{2}$ 에서 최솟값을 갖는다.



[문항3] 대학발표 예시답안

(3-1) $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{2}$ 이므로 $\alpha_3 + \alpha_4 = \frac{9}{2}$ 이다.

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 = \frac{27}{4} \text{ 이므로, } \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 = \frac{9}{2}$$

$$\alpha_1\alpha_2(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3\alpha_4(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{1}{4} \text{ 이므로, } 9\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 = \frac{1}{2},$$

두 식을 연립하여 풀면, $\alpha_1\alpha_2 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_3\alpha_4 = 5$ 이므로, $k = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -\frac{5}{2}$ 이다.

(실제로 네 근은 $-\frac{1}{2}$, 1, 2, $\frac{5}{2}$ 이다.)

(3-2) $r(0)=1$ 이고 $h'(1)=(1+1)(1+2)(1+3)=24$ 이므로,

$$r'(0) = \frac{1}{h'(1)} = \frac{1}{24} \text{ 이다.}$$

(3-3) 편의상 $f(x)-t=0$ 의 네 근을 크기 순서대로 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ 라고 하자.

$g(t)$ 는 $t=1$ 에서 미분가능하지 않으므로 $f(x)=1$ 의 실근 중 하나는 0 이고 따라서 $f(0)=1$ 이다. 이제, $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ 이라고 하자. (단, a, b, c 는 상수)

4차함수의 그래프의 개형으로부터

$t=1$ 일 때, $x_1=0$ 이었다면 $p < t \leq 1$ 일 때 $x_1 \geq 0$ 이므로 $g(t)=x_1+x_2+x_3+x_4=-a$
 $x_2=0$ 또는 $x_3=0$ 이었다면 $p < t \leq 1$ 일 때 $g(t)=-x_1-x_2+x_3+x_4=-a-2(x_1+x_2)$
 는 상수가 될 수 없다.

$x_4=0$ 이었다면 $p < t \leq 1$ 일 때 $g(t)=-x_1-x_2-x_3-x_4=a$ 이다.

문제에서 $a > 0$ 이라 했으므로, $t=1$ 일 때 $x_4=0$ 이고 $a=18$ 이다.

$t > 1$ 일 때 $x_3 < 0$, $x_4 > 0$ 이므로 $g(t)=-x_1-x_2-x_3+x_4=18+2x_4$ 이고, $t=181$ 일 때 $x_4=1$ 이다. 따라서 $f(1)=1+18+b+c+1-181=0$ 이므로 $1+18+b+c+1=181$ 이다.

$t > 1$ 일 때, $g(t)=18+2x_4=18+2f^{-1}(t)$ 이므로 $g'(t)=2(f^{-1})'(t)=\frac{2}{f'(x_4)}$ 이다.

$g'(181)=\frac{2}{f'(1)}=\frac{2}{4+3a+2b+c}=\frac{2}{58+2b+c}=\frac{1}{154}$ 에서 $b+c=161$, $2b+c=250$ 이므로, $b=89$, $c=72$. 이 때 $f(x)=x^4+18x^3+89x^2+72x+1$.

32 중앙대학교 모의32)

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
여사건의 확률, 독립시행의 확률, 이산확률변수의 평균, 합성함수, 부분적분법, 극대와 극소, 넓이, 삼각함수의 덧셈정리, 직선의 방정식	국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 (서울)3개 등급 합6/(안성)2개 등급 합 5/(의예)4개 영역 등급 합 5이내 한국사 4등급 이내	수학(3문항, 5문제) 과학(생명과학, 물리, 화학 3문항 중 택1)	120분

[문제 1] 영희는 두 단계로 구성된 게임에 다음과 같은 규칙에 따라 참여한다.

단계 I

동전 두 개를 동시에 던져서 둘 다 앞면이 나오면 1, 둘 다 뒷면이 나오면 2, 그렇지 않으면 3의 값을 얻고 단계 II로 넘어간다.

단계 II

동전 네 개를 동시에 던져서 앞면과 뒷면의 개수가 다르면 단계 I에서 나온 값의 제곱을 최종 점수로 얻고 게임은 종료되며, 그렇지 않으면 단계 II를 반복한다.

위의 규칙에 따라 영희가 게임에 참여할 때 얻을 수 있는 최종 점수의 기댓값을 구하시오.
(단, 기댓값은 분수로 제시하거나 소수점 아래 둘째 자리에서 반올림하여 제시한다.) **[20점]**



[문제 2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 두 함수 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ 에 대하여 X 의 각 원소 x 에 Z 의 원소 $g(f(x))$ 를 대응시켜 X 를 정의역, Z 를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다. 이 새로운 함수를 f 와 g 의 합성함수라 하고, 기호로 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 와 같이 나타낸다.

- $a > 0$, $a \neq 1$, $N > 0$ 일 때 다음이 성립한다.

$$a^x = N \Leftrightarrow x = \log_a N$$

- 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

[문제 2-1] 함수 $f(x) = \frac{cx+1}{dx+1}$ 에 대하여 $(f \circ f \circ f)(x) = x$ 을 만족하는 실수 x 가 무한히 많이 있다. 이때 d 의 최댓값을 구하시오. (단, c, d 는 실수이다.) [10점]

[문제 2-2] $0 < x < 1$ 에서 정의된 함수 $g(x) = \int_1^x \sin(\ln t)dt$ 에 대하여, $g(x)$ 가 극값을 가지는 점들의 집합을 A 라고 하자. A 의 원소들을 큰 순서대로 모두 나열한 수열을 $\{a_n\}$ 이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(g(a_n) - \frac{1}{2} \right)$ 의 값을 구하시오. [15점]

[문제 3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 직선 $y = mx + n (m \neq 0)$ 이 양의 방향의 x 축과 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면 $\tan \theta = m$ 이다.
- 두 직선 $y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$ 가 서로 수직이면 $m_1m_2 = -1$ 이다.
- 0과 π 사이의 각 α 와 β 에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\left(\text{단, } \alpha \neq \frac{\pi}{2}, \beta \neq \frac{\pi}{2}, \tan \alpha \tan \beta \neq -1 \right)$$
- 함수 $f(x)$ 가 $x = c$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(c, f(c))$ 에서의 접선의 방정식은 $y - f(c) = f'(c)(x - c)$ 이다.
- 함수 $g(x)$ 가 구간 $[u, v]$ 에서 연속이고 $g(x) \geq 0$ 이면 정적분 $\int_u^v g(x)dx$ 는 곡선 $y = g(x)$ 와 두 직선 $x = u$, $x = v$ 및 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 나타낸다.

[문제 3-1] 포물선 $y = b - ax^2 (b > 2)$ 가 원 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 에 외접하도록 두 실수 a, b 를 정할 때, 이 포물선과 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 a 로 표현하고 그 넓이의 최솟값을 구하시오. [10점]

[문제 3-2] 포물선 $y = 3 - x^2$ 위의 점 A 는, 점 A 에서 그은 접선 위의 한 점 B 와 점 $C(-\sqrt{3}, 0)$ 과 함께 정삼각형 ABC 를 이룬다. 두 점 A, B 의 쌍을 모두 찾아 좌표를 제시하시오. [15점]



문제1. 한 개의 주사위를 5번 던질 때 홀수의 눈이 나오는 횟수를 a 라 하고, 한 개의 동전을 4번 던질 때 앞면이 나오는 횟수를 b 라 하자. $a-b$ 의 값이 3일 확률을 $\frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

(2020. 대수능)

문제2. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \text{ 모든 양의 실수 } x \text{에 대하여 } g(x) = \int_1^x \frac{f(t^2+1)}{t} dt$$

$$(나) \int_2^5 f(x) dx = 16$$

$g(2)=3$ 일 때, $\int_1^2 xg(x)dx$ 의 값은? (2018. 7월 전국연합)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10



풀어보기(문제1) 정답 137

$a-b=3$ 이므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $a=5$ 이고 $b=2$ 일 때, 주사위를 5번 던질 때, 홀수의 눈이 5번 나오고 동전을 4번 던질 때, 앞면이 2번 나와야 하므로 확률은

$${}_5C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^5} \times \frac{3}{2^3} = \frac{3}{2^8}$$

(ii) $a=4$ 이고 $b=1$ 일 때, 주사위를 5번 던질 때, 홀수의 눈이 4번 나오고 동전을 4번 던질 때, 앞면이 1번 나와야 하므로 확률은

$${}_5C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{2^5} \times \frac{1}{2^2} = \frac{5}{2^7}$$

(iii) $a=3$ 이고 $b=0$ 일 때, 주사위를 5번 던질 때, 홀수의 눈이 3번 나오고 동전을 4번 던질 때, 앞면이 0번 나와야 하므로 확률은

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times {}_4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{2^4} \times \frac{1}{2^4} = \frac{5}{2^8}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{3}{2^8} + \frac{5}{2^7} + \frac{5}{2^8} = \frac{18}{2^8} = \frac{9}{2^7} = \frac{9}{128}$$

이므로 $p+q=128+9=137$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 ①

$u(x)=\frac{1}{2}x^2$, $v(x)=g(x)$ 라 하면 $u'(x)=x$, $v'(x)=g'(x)$ 이다.

조건 (가)에 의하여 $g(1)=0$, $g'(x)=\frac{f(x^2+1)}{x}$

$$\begin{aligned} \int_1^2 xg(x)dx &= \left[\frac{1}{2}x^2g(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2g'(x)dx = 2g(2) - \frac{1}{2}g(1) - \int_1^2 \left\{ \frac{1}{2}x^2 \times \frac{f(x^2+1)}{x} \right\} dx \\ &= 2 \times 3 - \frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{2} \int_1^2 xf(x^2+1)dx \end{aligned}$$

이다. 그러므로 $x^2+1=t$ 라 하면

$$\int_1^2 xg(x)dx = 6 - \frac{1}{2} \int_2^5 \frac{1}{2}f(t)dt = 6 - \frac{1}{4} \times 16 = 2$$



[수학, 문제1] 대학발표 예시답안

- ▶ 동전의 앞면이 나오는 경우를 H, 뒷면이 나오는 경우를 T라고 하면 1단계에서 발생 하는 사건의 확률은 다음과 같다.

$$\text{둘 다 앞면이 나오는 경우 : } P(HH) = \frac{1}{4}$$

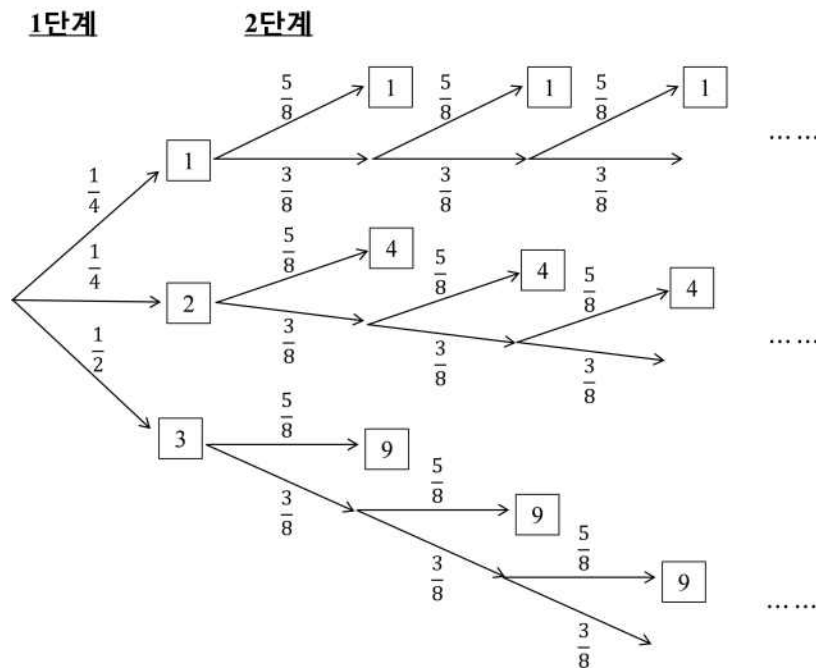
$$\text{둘 다 뒷면이 나오는 경우 : } P(TT) = \frac{1}{4}$$

$$\text{그렇지 않은 경우 : } 1 - P(HH) - P(TT) = \frac{1}{2}$$

- ▶ 동전 네 개를 동시에 던져서 앞면과 뒷면의 개수가 같을 확률은 ${}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$ 이고,

개수가 다를 확률은 $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ 이다.

- ▶ 1, 2 단계를 바탕으로 최종 점수를 얻을 수 있는 경우와 그에 따르는 확률은 다음의 그림과 같이 나타낼 수 있다.



- ▶ 위의 그림을 바탕으로 영희가 얻을 수 있는 최종 점수의 기댓값은 다음과 같이 계산 된다.

$$1^2 \left\{ \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3 + \dots \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2^2 \left\{ \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3 + \dots \right\} \\
 &+ 3^2 \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3 + \dots \right\} \\
 &= \frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{2} = \frac{23}{4} \quad \text{또는 } 5.8
 \end{aligned}$$

(나침반 풀이)

단계 I 에서 얻은 점수가 1 일 확률은 $\frac{1}{4}$, 2 일 확률은 $\frac{1}{4}$, 3 일 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

단계 II 에서 동전을 던져 게임을 종료해야 최종 점수를 얻을 수 있으므로 종료되는 확률은 모두 1 이다. 따라서 확률분포표는

X	1^2	2^2	3^2	합
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4} \times 1$	$\frac{1}{4} \times 1$	$\frac{1}{2} \times 1$	1

이고, 구하는 기댓값은 $E(X) = \frac{1}{4} + \frac{4}{4} + \frac{9}{2} = \frac{23}{4}$ 이다.

[수학, 문제2] 대학발표 예시답안

[2-1] 합성함수의 정의를 적용하여

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{c \left(\frac{cx+1}{dx+1} \right) + 1}{d \left(\frac{cx+1}{dx+1} \right) + 1} = \frac{(c^2+d)x + (c+1)}{d(c+1)x + (d+1)}$$

이 됨을 알 수 있고 이로부터

$$(f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f)(f(x)) = \frac{(c^3+2cd+d)x + (c^2+c+d+1)}{d(c^2+c+d+1)x + (cd+2d+1)}$$

를 얻는다. $(f \circ f \circ f)(x) = x$ 가 무한히 많은 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$d(c^2+c+d+1)x^2 + (cd+2d+1)x = (c^3+2cd+d)x + (c^2+c+d+1)$$

가 항등식이라는 것을 알 수 있고, 따라서

$$d(c^2+c+d+1)=0, \quad cd+2d+1=c^3+2cd+d, \quad c^2+c+d+1=0$$

를 얻는다. 이를 정리하면 $d=-c^2-c-1$ 의 조건을 얻고, 이를 대입하면 다른 조건

들도 만족됨을 알 수 있다. 따라서 $d=-c^2-c-1=-\left(c+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$ 로부터, 가능한 d

의 최댓값은 $c=-\frac{1}{2}$ 일 때, $-\frac{3}{4}$ 이다.



[2-2] $s = \ln t$ 로 치환하면 $g(x) = \int_1^x \sin(\ln t) dt = \int_0^{\ln x} \sin s \cdot e^s ds$ 가 되고, 부분적분법을 이용하면

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln x} e^s \sin s ds &= \left[-e^s \cos s \right]_0^{\ln x} - \int_0^{\ln x} (-e^s \cos s) ds \\ &= \left[-e^s \cos s \right]_0^{\ln x} + \int_0^{\ln x} e^s \cos s ds \end{aligned}$$

가 되며, 부분적분법을 한 번 더 이용하면

$$\int_0^{\ln x} e^s \sin s ds = \left[-e^s \cos s \right]_0^{\ln x} + \left[e^s \sin s \right]_0^{\ln x} - \int_0^{\ln x} e^s \sin s ds$$

가 되어

$$\int_0^{\ln x} e^s \sin s ds = \frac{1}{2} \left[e^s \sin s - e^s \cos s \right]_0^{\ln x} = \frac{x}{2} \{ \sin(\ln x) - \cos(\ln x) \} + \frac{1}{2}$$

임을 알 수 있다.

한편, $g(x)$ 가 극값을 가지는 점들은 $g'(x) = \sin(\ln x) = 0$ 인 점들이므로 $\ln x = n\pi$ (단, n 은 정수)이고, 문제의 조건 $0 < x < 1$ 으로부터 $g(x)$ 는 $x = e^{-n\pi}$ (단, n 은 자연수)에서 극값을 가짐을 알 수 있다. 이때,

$$g(e^{-n\pi}) = \frac{e^{-n\pi}}{2} \{ \sin(-n\pi) - \cos(-n\pi) \} + \frac{1}{2} = -e^{-n\pi} \cdot (-1)^n + \frac{1}{2}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(g(a_n) - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-e^{-\pi})^n = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-e^{-\pi}}{1 + e^{-\pi}} = \frac{1}{2(e^{\pi} + 1)}$$

이다.

[수학, 문제3] 대학발표 예시답안

[3-1] 두 식 $y = b - ax^2$ 과 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 을 연립하여 y 에 관한 이차방정식

$y^2 - \left(2 + \frac{1}{a}\right)y + \frac{b}{a} = 0$ 을 얻는다. 포물선이 원에 외접하므로 이 이차방정식은 중근을

갖는다. 따라서 $D = \left(2 + \frac{1}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{b}{a} = 0$ 에서

$$b = \frac{a}{4} \left(2 + \frac{1}{a}\right)^2 = a + \frac{1}{4a} + 1$$

을 얻는다. $b = a + \frac{1}{4a} + 1 > 2$ 이므로 $a > 0$ 이다. 포물선과 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $h(a)$ 라 하면,

$$h(a) = \int_{-\sqrt{\frac{b}{a}}}^{\sqrt{\frac{b}{a}}} (b - ax^2) dx = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} (b - ax^2) dx = \frac{4b}{3} \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{a}{6} \left(2 + \frac{1}{a}\right)^3$$

이다. $a > 0$ 이어서 $h'(a) = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{1}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{a} \right) = 0$ 에서 $a = 1$ 을 얻는다. $h(1) = \frac{9}{2}$ 이므로 넓이의 최솟값은 $\frac{9}{2}$ 이다.

[3-2] 두 직선 AC, AB가 x 축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 α, β 라 하자. 이 두 직선의 교점을 지나고 x 축과 평행한 직선이, 두 직선 AC, AB가 이루는 둔각 또는 예각을 통과함에 따라 $|\alpha - \beta| = 60^\circ$ 또는 $|\alpha - \beta| = 120^\circ$ 이다. 점 A의 좌표를 $(a, 3 - a^2)$ 으로 놓으면 두 직선 AC, AB의 기울기는 각각

$$\tan \alpha = \frac{(3 - a^2) - 0}{a - (-\sqrt{3})} = \sqrt{3} - a, \quad \tan \beta = -2a$$

이므로

$$\pm \sqrt{3} = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{(\sqrt{3} - a) - (-2a)}{1 + (\sqrt{3} - a)(-2a)}$$

에서 $a = 0$ 또는 $a = \frac{7\sqrt{3}}{6}$ 을 얻는다.

$a = 0$ 이면 $A(0, 3), B(-2\sqrt{3}, 3)$ 이다.

$a = \frac{7\sqrt{3}}{6}$ 이면 $A\left(\frac{7\sqrt{3}}{6}, -\frac{13}{12}\right)$ 이고 직선 AB의 방정식은

$$y = -2a(x - a) + 3 - a^2 = -\frac{7\sqrt{3}}{3}x + \frac{85}{12}$$

이다. 선분 AC의 중점을 점 D라 하면 $D\left(\frac{\sqrt{3}}{12}, -\frac{13}{24}\right)$ 이다. 점 B의 좌표를

$B\left(b, -\frac{7\sqrt{3}}{3}b + \frac{85}{12}\right)$ 라 하면 직선 AC의 기울기는 $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ 이고 직선 BD는 직선 AC와 수직이므로

$$\frac{\left(-\frac{7\sqrt{3}}{3}b + \frac{85}{12}\right) - \left(-\frac{13}{24}\right)}{b - \frac{\sqrt{3}}{12}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

에서 $b = \frac{5\sqrt{3}}{8}$ 을 얻는다. 따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{5\sqrt{3}}{8}, \frac{65}{24}\right)$ 이다.



33

중앙대학교(자연계열 I) 수시33)

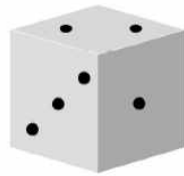
...



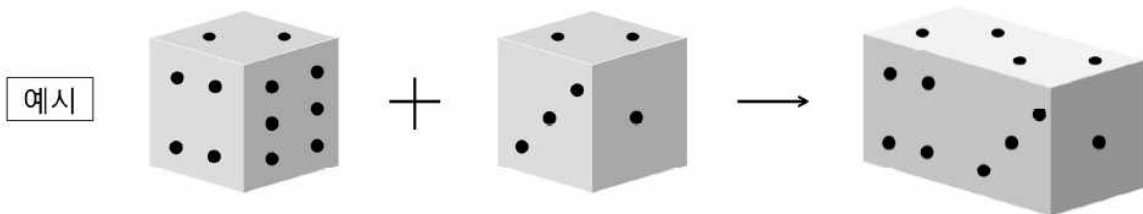
핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
확률의 덧셈정리와 곱셈정리, 부분적분법과 치환적분법, 함수의 극한, 넓이와 정적분, 평면의 방정식, 점과 평면 사이의 거리	국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 (서울)3개/(안성)2개/(의예)4개 영역 등급합 5이내 한국사 4등급 이내	수학(3문항, 5문제) 과학(생명과학, 물리, 화학 3문항 중 택1)	120분

[문제 1] 다음과 같은 방식으로 주사위 두 개를 붙여서 새로운 주사위를 만든다.

- 일반적인 정육면체 모양의 주사위는 서로 마주보고 있는 면의 눈의 수의 합이 항상 7이고 다음 그림과 같이 면이 구성되어 있다.



- 위와 같은 모양의 주사위 두 개를 눈의 수가 6인 면끼리 붙여서 직육면체 모양의 주사위 하나를 만든다. 다음은 새롭게 만들 수 있는 주사위 중 한 가지 예시를 보여 준다.



- 새로운 주사위 한 면의 눈의 수는 그 면에 있는 모든 눈의 수의 합과 같고, 각 면이 나올 확률은 면적에 비례한다고 가정한다.

위의 방식에 따라 새롭게 만들 수 있는 모든 종류의 주사위 중 하나를 임의로 선택하여 한 번 던져서 나오는 눈의 수가, 일반적인 정육면체 모양의 주사위를 한 번 던져서 나오는 눈의 수보다 작거나 같을 확률을 구하시오. [20점]



[문제 2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- $g(x)=t$ 로 놓을 때, $g(x)$ 가 미분 가능하면 $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$ 이다.
- 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=L$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)=M$ (L, M 은 상수)일 때, 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0)$$

[문제 2-1] $g(t)=e^{t^2}\left(t^2+3t+\frac{5}{2}\right)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=e^{-\int_1^x \frac{g'(t)}{g(t)} dt}$$

이때 함수 $h(x)=\int_1^x f(t)f'(t)\sqrt{\{f(t)\}^2+1} dt$ 의 최댓값을 구하시오. [10점]

[문제 2-2] $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x^2-a}{(a-x)(x+1-a)}=b$ 를 만족하는 실수 a, b 에 대하여, $a+b^2$ 의 최댓값, 최

솟값을 구하시오. (단, $\frac{3}{2} \leq a \leq 3$ 이다.) [15점]



[문제 3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \geq g(x)$ 일 때, 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 다음과 같다.

$$\int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

- 좌표공간에서 x, y, z 에 대한 방정식 $ax+by+cz+d=0$ 은 벡터 $\vec{n}=(a, b, c)$ 에 수직인 평면을 나타낸다.

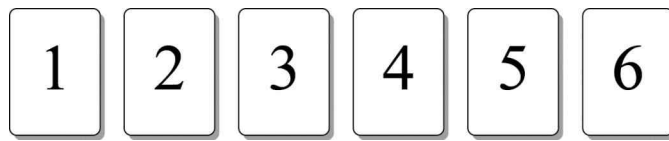
[문제 3-1] 어떤 양의 실수 a 에 대하여, $x \geq 0$ 에서 정의된 두 곡선 $y=e^x$ 과 $y=a \sin x$ 가 오직 한 점에서 만난다. 이때 두 곡선 $y=e^x$ 과 $y=a \sin x$ 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. [10점]

[문제 3-2] 좌표공간에서 구 $S: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ 이 있고, x 축 위의 점 $P(a, 0, 0)$, y 축 위의 점 $Q(0, 2a, 0)$, z 축 위의 점 $R(0, 0, b)$ 가 있다. 삼각형 PQR 가 구 S 와 접할 때, 좌표공간의 원점과 P, Q, R 를 꼭짓점으로 하는 삼각뿔의 부피가 최소가 되는 a 의 값을 구하시오. (단, $a > 3$ 이고 $b > 0$ 이다.)

[15점]



- 문제1. 그림과 같이 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 한 면에만 각각 적혀 있는 6장의 카드가 일렬로 놓여 있다. 주사위 한 개를 던져서 나온 눈의 수가 2이하이면 가장 작은 숫자가 적혀 있는 카드 1장을 뒤집고, 3이상이면 가장 작은 숫자가 적혀 있는 카드부터 차례로 2장의 카드를 뒤집는 시행을 한다. 3번째 시행에서 4가 적혀 있는 카드가 뒤집어질 확률은? (2014. 7월 전국연합)
(단, 모든 카드는 한 번만 뒤집는다.)



- 문제2. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 모든 양의 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족한다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = x^2 e^{-x^2} \\ \text{(나)} \quad & g(x) = \frac{4}{e^4} \int_1^x e^{t^2} f(t) dt \end{aligned}$$

$f(1) = \frac{1}{e}$ 일 때, $f(2) - g(2)$ 의 값은? (2016. 9월 평가원)

- ① $\frac{16}{3e^4}$ ② $\frac{6}{e^4}$ ③ $\frac{20}{3e^4}$ ④ $\frac{22}{3e^4}$ ⑤ $\frac{8}{e^4}$

- 문제3. 좌표공간에서 구 $S: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P에서 구 S에 접하는 평면이 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 과 만나서 생기는 도형의 넓이의 최댓값은 $(a+b\sqrt{3})\pi$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 자연수이다.)
(2013 대입 9월 모평 B형)



풀어보기(문제1) 정답 $\frac{14}{27}$

주사위 한 개를 던져서 나오는 눈의 수가 2 이하일 사건을 A 라 하면 $P(A) = \frac{1}{3}$ 이고, 3

이상일 사건을 B 라 하면 $P(B) = \frac{2}{3}$ 이다.

3번째 시행에서 4가 적혀 있는 카드가 뒤집어질 경우는 다음과 같다.

(i) ABA 또는 ABB 인 경우의 확률 :

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{9}$$

(ii) AAB 인 경우의 확률 :

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

(iii) BAA 또는 BAB 인 경우의 확률 :

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{9}$$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 확률은 $\frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{9} = \frac{14}{27}$

풀어보기(문제2) 정답 ③

$$g(x) = \frac{4}{e^2} \int_1^x e^{t^2} f(t) dt = \frac{2}{e^2} \int_1^x 2te^{t^2} \frac{f(t)}{t} dt$$

이 때, $u' = 2te^{t^2}$, $v = \frac{f(t)}{t}$ 라 하고 부분적분하면

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2}{e^4} \left\{ \left[e^{t^2} \frac{f(t)}{t} \right]_1^x - \int_1^x t^2 dt \right\} = \frac{2}{e^4} \left\{ e^{x^2} \frac{f(x)}{x} - ef(1) - \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_1^x \right\} \\ &= \frac{2}{e^4} \left\{ e^{x^2} \frac{f(x)}{x} - ef(1) - \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$g(2) = \frac{2}{e^4} \left(e^4 \frac{f(2)}{2} - \frac{10}{3} \right) = f(2) - \frac{20}{3e^4}$$

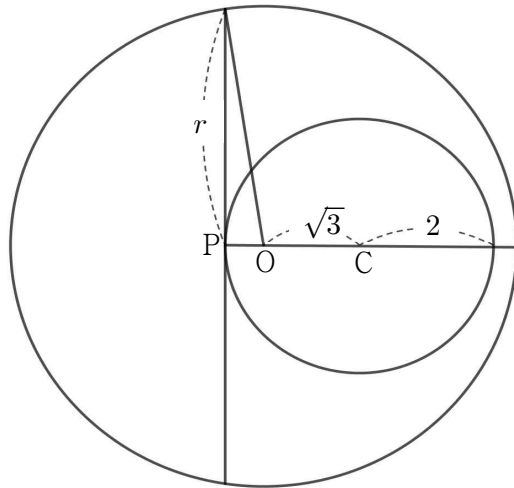
따라서 $f(2) - g(2) = \frac{20}{3e^4}$ 이다.

풀어보기(문제3) 정답 13

구 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4 \cdots \textcircled{1}$ 는 중심이 $C(1,1,1)$ 이고 반지름의 길이가 2인 구이



고 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 16 \cdots \textcircled{㉔}$ 은 중심이 원점 $O(0,0,0)$ 이고 반지름의 길이가 4인 구이다.
 이때, $\overline{OC} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ 이므로 $\textcircled{㉔}$ 은 $\textcircled{㉓}$ 에 포함되고, $\textcircled{㉔}$ 의 중심은 $\textcircled{㉔}$ 에 포함된다.



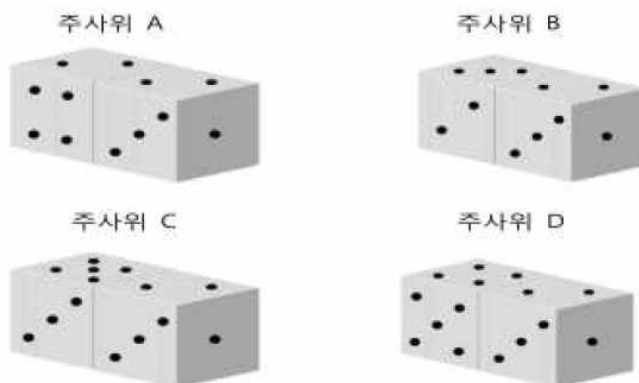
따라서 $\textcircled{㉔}$ 에 접하는 평면이 $\textcircled{㉔}$ 과 만나서 생기는 도형은 원이고 넓이가 최대가 되려면 점 O 에서 평면 사이의 거리가 가장 짧아야 한다. 즉, 두 구의 중심 C, O 를 지나는 직선과 구 $\textcircled{㉔}$ 과의 교점 중에서 점 O 에 가까운 점을 P 라 하면 점 P 가 평면의 접점이 될 때이다. 이때, 단면이 나타내는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$r^2 = 4^2 - (2 - \sqrt{3})^2 = 16 - (7 - 4\sqrt{3}) = 9 + 4\sqrt{3}$$

따라서, 넓이의 최댓값은 $\pi r^2 = \pi(9 + 4\sqrt{3})$ 이다. 그러므로 $a + b = 13$ 이다.

[문제1] 대학발표 예시답안

새롭게 만들 수 있는 직육면체 모양의 주사위는 다음과 같이 4가지 형태 중 하나를 가지게 된다.



새로운 주사위에서 눈이 나오는 경우와 확률은 다음과 같다. (단, 표에서 (a, b) 는 일반적인 주사위 두 개에서 나오는 각각의 눈의 수를 의미한다.)



주사위 A			주사위 B		
(a, b)	새로운 눈의 수	확률	(a, b)	새로운 눈의 수	확률
(2, 2)	4	$\frac{1}{5}$	(3, 2)	5	$\frac{1}{5}$
(4, 3)	7	$\frac{1}{5}$	(2, 3)	5	$\frac{1}{5}$
(5, 5)	10	$\frac{1}{5}$	(4, 5)	9	$\frac{1}{5}$
(3, 4)	7	$\frac{1}{5}$	(5, 4)	9	$\frac{1}{5}$
1	1	$\frac{1}{10}$	1	1	$\frac{1}{10}$
1	1	$\frac{1}{10}$	1	1	$\frac{1}{10}$

주사위 C			주사위 D		
(a, b)	새로운 눈의 수	확률	(a, b)	새로운 눈의 수	확률
(5, 2)	7	$\frac{1}{5}$	(4, 2)	6	$\frac{1}{5}$
(3, 3)	6	$\frac{1}{5}$	(5, 3)	8	$\frac{1}{5}$
(2, 5)	7	$\frac{1}{5}$	(3, 5)	8	$\frac{1}{5}$
(4, 4)	8	$\frac{1}{5}$	(2, 4)	6	$\frac{1}{5}$
1	1	$\frac{1}{10}$	1	1	$\frac{1}{10}$
1	1	$\frac{1}{10}$	1	1	$\frac{1}{10}$

새로운 주사위 중 하나를 한 번 던져서 나오는 눈의 수가 정육면체 모양의 일반적인 주사위를 한 번 던져서 나오는 눈의 수보다 작거나 같은 경우는 다음과 같다.

주사위 A	일반주사위	확률	주사위 B	일반주사위	확률
4	(4,5,6)	$\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$	5	(5,6)	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$
1	모든 눈	$\frac{1}{5} \times 1 = \frac{1}{5}$	1	모든 눈	$\frac{1}{5} \times 1 = \frac{1}{5}$

주사위 C	일반주사위	확률	주사위 D	일반주사위	확률
6	6	$\frac{1}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$	6	6	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$
1	모든 눈	$\frac{1}{5} \times 1 = \frac{1}{5}$	1	모든 눈	$\frac{1}{5} \times 1 = \frac{1}{5}$

위의 표를 바탕으로 주어진 확률을 계산하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{3} + \frac{7}{30} + \frac{4}{15} \right) = \frac{17}{60}$$



또는 0.2833 (소수점 아래 둘째 자리에서 반올림 가능)

[문제2] 대학발표 예시답안

[문제 2-1]

$$-\int_1^x \frac{g'(t)}{g(t)} dt = -\int_1^x (\ln g(t))' dt = \ln \frac{g(1)}{g(x)} \text{ 이므로 } f(x) = \frac{g(1)}{g(x)} \text{ 이다.}$$

$$\text{그리고 } h(x) = \int_1^x f(t)f'(t)\sqrt{\{f(t)\}^2+1} dt = \int_1^x \left(\frac{1}{3}(\{f(t)\}^2+1)^{\frac{3}{2}} \right)' dt \text{ 이므로}$$

$$h(x) = \frac{1}{3}(\{f(x)\}^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(\{f(1)\}^2+1)^{\frac{3}{2}} \text{ 이고 } h \text{의 최댓값은 } f \text{의 최댓값에서 나온다. 그리}$$

고 $f(x)$ 의 최댓값은 $g(x)$ 의 최솟값에서 얻어진다. 미분하여 정리하면

$$g'(x) = e^{x^2}(2x^3+6x^2+7x+3) = e^{x^2}(x+1)(2x^2+4x+3)$$

이므로 $g(-1)$ 에서 최솟값을 갖는다. 따라서 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{g(1)}{g(-1)} = 13$ 이다.

$$h \text{의 최댓값은 } h(-1) = \frac{1}{3}(\{f(-1)\}^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(\{f(1)\}^2+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{170^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}}{3} \text{ 이다.}$$

[문제 2-2]

$a \neq 2$ 이면 $x=1$ 에서 분모가 0이 아니므로 $\frac{2-a}{(a-1)(2-a)} = \frac{1}{a-1} = b$ 이다.

$a=2$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{(2-x)(x-1)} = 5$ 이고 $(a, b) = (2, 5)$ 이다.

$a+b^2=k$ 로 놓고 $b = \frac{1}{a-1}$ ($\frac{3}{2} \leq a < 2$, $2 < a \leq 3$ 에서 정의된다)와 점점을 구해 보자. 점

점에서 만나고 미분계수가 같다는 것을 이용하면 $-\frac{1}{2b} = -b^2$ 이므로 $b = 2^{-\frac{1}{3}}$ 이다.

$\frac{1}{2} \leq b < 1$, $1 < b \leq 2$ 이므로 $b = 2^{-\frac{1}{3}}$ 는 주어진 곡선의 점점이다. 이때, $a = 1 + 2^{\frac{1}{3}}$ 이므로

$1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}$ 이다. 곡선의 양 끝점 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ 에서 각각 $a+b^2 = \frac{11}{2}$, $\frac{13}{4}$ 이다.

$(a, b) = (2, 5)$ 에서 27이다. 따라서 최솟값은 $1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}$ 이고 최댓값은 27이다.

[문제 2-2 별해]

$a \neq 2$ 이면 $x=1$ 에서 분모가 0이 아니므로 $\frac{2-a}{(a-1)(2-a)} = \frac{1}{a-1} = b$ 이다.

$a=2$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{(2-x)(x-1)} = 5$ 이고 $(a, b) = (2, 5)$ 이다.



$\frac{1}{2} \leq b < 1$, $1 < b \leq 2$ 에서 $a = \frac{1}{b} + 1$ 이므로 $f(b) = b^2 + \frac{1}{b} + 1$ 을 고려하자. $f'(b) = 2b - \frac{1}{b^2}$ 이고 $b = 2^{-\frac{1}{3}}$ 에서 극점을 갖고 $1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}$ 이다. 곡선의 양 끝점 2 , $\frac{1}{2}$ 에서 각각 $\frac{11}{2}$, $\frac{13}{4}$ 이다. $(a, b) = (2, 5)$ 에서 27 이다.

[문제3] 대학발표 예시답안

[문제 3-1]

함수 $y = e^x$ 의 그래프와 $y = a \sin x$ 의 그래프를 통해 보면, 함수 $y = e^x$ 의 그래프가 $y = a \sin x$ 의 그래프보다 항상 위에 있어야 하고 $y = e^x$ 가 증가함수이므로 두 곡선이 만나는 점의 x 좌표 α 가 $\frac{\pi}{2}$ 이하여야 함을 알 수 있다.

두 곡선이 한 점에서만 만나므로 그 점에서 함수 $f(x) = e^x - a \sin x$ 가 $f(\alpha) = e^\alpha - a \sin \alpha = 0$, $f'(\alpha) = e^\alpha - a \cos \alpha = 0$ 을 동시에 만족해야 한다. 따라서, 그 점에서 $\cos \alpha = \sin \alpha$ 이어야 하므로, α 의 범위로부터 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 를 얻고, 이를 대입하여 $a = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}}$ 를 얻는다. 이때 주어진 영역의 넓이는 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^x - \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}} \sin x) dx$ 이고, 이를 계산하면 $(2 - \sqrt{2})e^{\frac{\pi}{4}} - 1$ 을 얻는다.

[문제 3-2]

삼각형 PQR 를 포함하는 평면의 방정식을 $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ 이라고 하면 구 S 의 중심과의 거리가 1 이므로 $\frac{|\alpha + \beta + \gamma - 1|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = 1$ 이고, 한편, 점 $(a, 0, 0)$, $(0, 2a, 0)$, $(0, 0, b)$ 를 지나므로,

$\alpha = \frac{1}{a}$, $\beta = \frac{1}{2a}$, $\gamma = \frac{1}{b}$ 이다. 따라서 $\frac{\left| \frac{3}{2a} + \gamma - 1 \right|}{\sqrt{\frac{5}{4a^2} + \gamma^2}} = 1$ 을 얻고, 제곱하여 정리하면

$\gamma = \frac{a^2 - 3a + 1}{a(2a - 3)}$ 임을 알 수 있다. 따라서 평면의 방정식은 $\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} + \frac{a^2 - 3a + 1}{a(2a - 3)} z = 1$ 이다.

한편, 좌표공간의 원점과 P, Q, R 를 꼭짓점으로 하는 삼각뿔의 부피 $V(a)$ 는 $\frac{1}{3} \left(\frac{a \times 2a}{2} \right) \times \frac{a(2a - 3)}{a^2 - 3a + 1} = \frac{a^3(2a - 3)}{3(a^2 - 3a + 1)}$ 이다. a 에 대해 미분하면

$V'(a) = \frac{a^2(a - 1)(4a^2 - 17a + 9)}{3(a^2 - 3a + 1)^2}$ 이 되고, $V'(a) = 0$ 과 $a > 3$ 으로부터 $a = \frac{17}{8} + \frac{\sqrt{145}}{8}$ 에서

$V(a)$ 가 최소이다.



34 중앙대학교(자연계열Ⅱ) 수시34

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
확률의 덧셈정리와 곱셈정리, 음함수의 미분법, 부분적분법, 등차수열, 타원의 성질, 접선의 기울기, 매개변수 미분법	국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 (서울)3개/(안성)2개/(의예)4개 영역 등급합 5이내 한국사 4등급 이내	수학(3문항, 5문제) 과학(생명과학, 물리, 화학 3문항 중 택1)	120분

[문제 1] 각기 다른 3 개의 과제 A, B, C 가 있다. 과제의 우선순위는 A 가 B 보다, B 가 C 보다 높아서 이를 고려하여 다음과 같은 방식으로 4 명의 학생을 과제에 배정하려고 한다.

과제명 A 가 쓰여 있는 공 2 개와 과제명이 쓰여 있지 않은 공 4 개가 들어 있는 주머니를 준비한다. 다음과 같은 규칙에 따라 학생들은 모두 차례대로 한 명씩 주머니에 있는 공을 한 개 뽑아서 과제에 배정된다.

- 과제명이 쓰여 있는 공을 뽑으면 그 과제에 배정되며, 이때 주머니에서 과제명이 쓰여 있지 않은 공 하나를 꺼내 배정된 과제명을 적은 후, 뽑은 공과 함께 다시 주머니에 집어넣는다. 따라서 주머니에 있는 공의 수는 6 개로 유지된다.
- 과제명이 쓰여 있지 않은 공을 뽑았을 때 아직 학생이 배정되지 않은 과제가 있으면, 그 중에서 우선순위가 더 높은 과제에 배정되며, 이때 뽑은 공에 배정된 과제명을 적은 후 다시 주머니에 집어넣는다. 따라서 주머니에 있는 공의 수는 6 개로 유지된다.
- 과제명이 쓰여 있지 않은 공을 뽑았을 때 이미 모든 과제에 학생이 배정되어 있으면, 세 과제 중 하나에 임의로 배정된다.

위의 방식에 따라 4 명의 학생이 과제에 배정될 때, 3 개의 과제 A, B, C 모두에 학생이 배정될 확률을 구하시오. [20점]



[문제 2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- x 의 함수 y 가 음함수 $f(x, y)=0$ 의 꼴로 주어져 있을 때에는 y 를 x 의 함수로 보고 각 항을 x 에 대하여 미분한 후에 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

- 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

[문제 2-1] x 에 대한 방정식 $4x^3 - 6(t+1)x^2 + 7t^2 + 1 = 0$ 이 세 실근 $f(t), g(t), h(t)$ 를 가진다. $\int_0^1 tg''(t)dt$ 를 구하시오. (단, $-\frac{1}{8} < t < \frac{9}{8}$ 이고 $f(t) < g(t) < h(t)$ 이다.) [10점]

[문제 2-2] 모든 자연수 k 에 대하여 다음을 만족시키는 함수 $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 를 구하시오. (단, a, b, c, d 는 실수이다.) [15점]

$$\int_0^\pi (k^2 p(x) + 4) \sin kx \, dx = 0$$



[문제 3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 수열 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 이 첫째항 a_1 에서 시작하여 차례대로 일정한 수 d 를 더하여 얻은 수열일 때, 이 수열을 등차수열이라고 하고, 그 일정한 수 d 를 공차라고 한다.
- 평면 위의 두 점 F, F' 으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 타원이라고 하며, 두 점 F, F' 을 타원의 초점이라고 한다.

[문제 3-1] 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{254} 의 값을 구하시오. (단, $\{a_n\}$ 의 공차는 양의 실수이다.) [10점]

(가) $a_{2n} - b_n = 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

(나) $b_1 = 756$

(다) $\sum_{n=1}^{11} a_{n^2} = \sum_{n=1}^{11} (b_n - a_n)^2$

[문제 3-2] 점 P 가 좌표평면의 원점에 있고 점 $Q(2t, 0)$ 가 x 축 위에 있다. $\overline{PR} + \overline{RQ} = 20$

이고, 각 PRQ 가 $\frac{\pi}{3}$ 가 되는 제1사분면 위의 점들 중 x 좌표가 가장 큰 점을

$R(x(t), y(t))$ 라 하자. $t = 2\sqrt{7}$ 일 때, 점 R 에서의 접선의 기울기를 구하시오.

[15점]



문제1. 세 학생 A, B, C가 다음 단계에 따라 최종 승자를 정한다.

- [단계 1] 세 학생이 동시에 가위바위보를 한다.
 [단계 2] [단계 1]에서 이긴 학생이 1명뿐이면 그 학생이 최종 승자가 되고, 이긴 학생이 2명이면 [단계 3]으로 가고, 이긴 학생이 없으면 [단계 1]로 간다.
 [단계 3] [단계 2]에서 이긴 2명 중 이긴 학생이 나올 때까지 가위바위보를 하여 이긴 학생이 최종 승자가 된다.

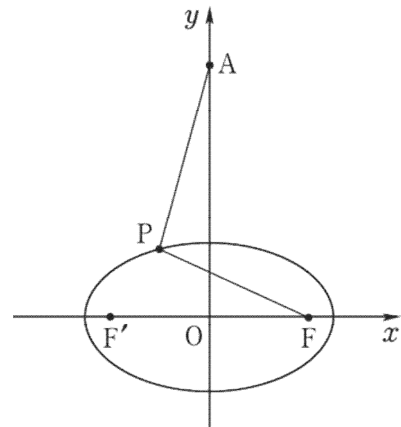
가위바위보를 2번 한 결과 A 학생이 최종 승자로 정해졌을 때, 2번째 가위바위보를 한 학생이 2명이었을 확률은? (단, 각 학생이 가위, 바위, 보를 낼 확률은 각각 $\frac{1}{3}$ 이다.) (2014. 10월 전국연합)

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

문제2. $0 < t < 41$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$ 와 직선 $y = t$ 가 만나는 세 점 중에서 x 좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t), t)$, x 좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t), t)$ 라 하자. $h(t) = t \times \{f(t) - g(t)\}$ 라 할 때, $h'(5)$ 의 값은? (2016. 대수능)

- ① $\frac{79}{12}$ ② $\frac{85}{12}$ ③ $\frac{91}{12}$ ④ $\frac{97}{12}$ ⑤ $\frac{103}{12}$

문제3. 그림과 같이 y 축 위의 점 $A(0, a)$ 와 두 점 F, F' 을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 위를 움직이는 점 P 가 있다. $\overline{AP} - \overline{FP}$ 의 최솟값이 1일 때, a^2 의 값을 구하시오. (2014. 대수능)





풀어보기(문제1) 정답 ④

A 가 2번 가위바위보를 하여 최종 승자가 되는 사건을 X , 2번째 가위바위보를 한 학생이 2명인 사건을 Y 라 하자.

i) 첫 번째에 이긴 학생이 없을 때

세 학생이 첫 번째에 모두 다른 것을 내거나 모두 같은 것을 내고, 2번째에 A 가 이길

확률은 $P(X \cap Y^C) = \frac{3!+3}{3^3} \times \frac{3}{3^3} = \frac{1}{27}$ 이다.

ii) 첫 번째에 이긴 학생이 2명일 때

첫 번째에 A 를 포함한 2명이 이기고, 2번째에 A 가 이길 확률은

$P(X \cap Y) = \frac{3 \times 2}{3^3} \times \frac{3}{3^2} = \frac{2}{27}$ 이다.

i), ii)에서 $P(X) = P(X \cap Y^C) + P(X \cap Y) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$

따라서 $P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{2}{3}$

풀어보기(문제2) 정답 ④

$h(t) = t\{f(t) - g(t)\}$ 이므로

$h'(t) = \{f(t) - g(t)\} + t \times \{f'(t) - g'(t)\}$

한편, 곡선 $y = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$ 와 직선 $y = 5$ 가 만나는 교점을 구해보면

$$x^3 + 2x^2 - 15x + 5 = 5$$

$$x(x+5)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -5, 0, 3$$

따라서 $f(5) = 3, g(5) = -5$ 이다.

한편 $f(t)^3 + 2f(t)^2 - 15f(t) + 5 = t$ 에서

t 에 관해 양변을 미분하여 정리하면

$$f'(t) = \frac{1}{3f(t)^2 + 4f(t) - 15} \text{ 이므로}$$

$$f'(5) = \frac{1}{3 \times 3^2 + 4 \times 3 - 15} = \frac{1}{24}$$

$$g'(5) = \frac{1}{3 \times (-5)^2 + 4 \times (-5) - 15} = \frac{1}{40}$$

이다. 따라서



$$h'(5) = \{3 - (-5)\} + 5\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{40}\right) = 8 + \frac{1}{12} = \frac{97}{12}$$

풀어보기(문제3) 정답 105

$$\begin{aligned}\overline{AP} - \overline{FP} &= \overline{AP} + \overline{F'P} - (\overline{F'P} + \overline{FP}) \\ &= \overline{AP} + \overline{F'P} - 10 \\ &\geq \overline{AF'} - 10 = 1\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AF'} = 11$$

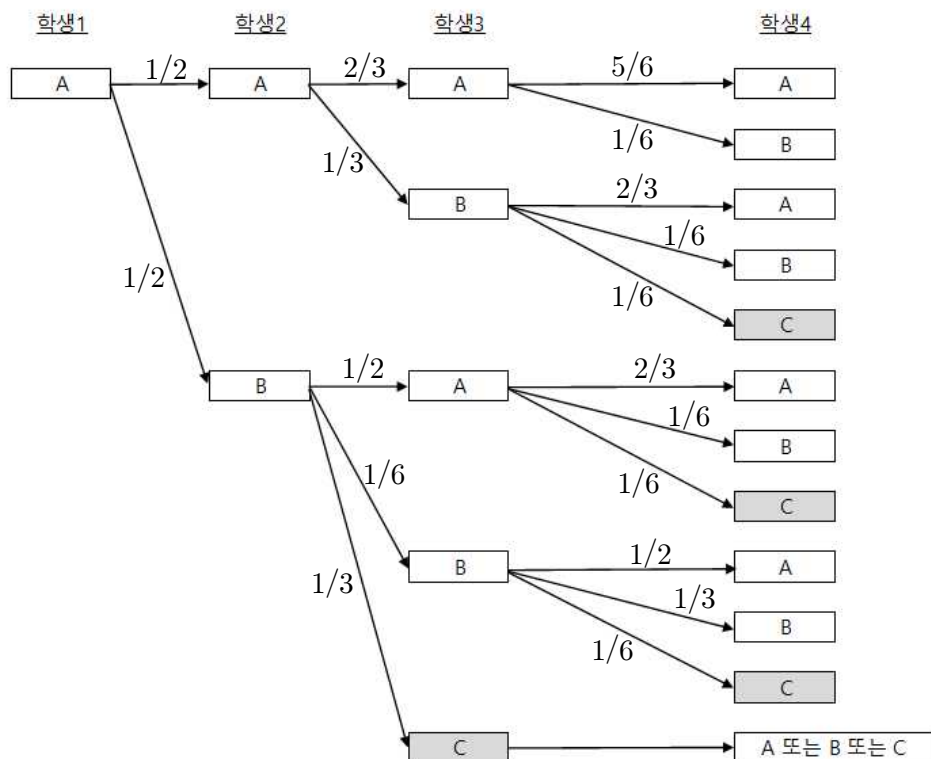
$$F'(-4, 0) \text{이므로 } a^2 + 16 = 121$$

$$\therefore a^2 = 105$$

[문항1] 대학발표 예시답안

첫 번째 학생은 뽑는 공에 상관없이 무조건 과제 A에 배정된다. 두 번째 학생은 $\frac{1}{2}$ 의 확률로 과제 A 또는 B에 배정되고, 세 번째, 네 번째 학생은 앞의 학생의 배정 결과에 따라 각기 다른 확률로 과제에 배정된다. 과제명이 쓰여 있지 않은 공을 뽑았을 때 아직 학생이 배정되지 않은 과제가 있으면, 과제의 우선순위 $A > B > C$ 를 고려한다.

학생이 배정되는 경우는 다음과 같이 나타낼 수 있다.





이때 3 개의 과제 모두에 학생이 배정되려면 과제 C에 최소한 1 명이 배정되어야 한다. 이를 만족하는 경우의 수는 다음과 같다.

	학생 1	학생 2	학생 3	학생 4
Case 1	과제 A	과제 A	과제 B	과제 C
Case 2	과제 A	과제 B	과제 A	과제 C
Case 3	과제 A	과제 B	과제 B	과제 C
Case 4	과제 A	과제 B	과제 C	—

Case 4의 경우 학생 4가 공을 뽑기 전에 이미 모든 과제에 최소한 한 명의 학생이 배정이 되었기 때문에 학생 4의 과제 배정 여부는 고려할 필요가 없다.

네 가지의 경우가 발생할 확률은 다음과 같이 계산된다.

	학생 1	학생 2	학생 3	학생 4	확률
Case 1	과제 A	과제 A	과제 B	과제 C	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
Case 2	과제 A	과제 B	과제 A	과제 C	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$
Case 3	과제 A	과제 B	과제 B	과제 C	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$
Case 4	과제 A	과제 B	과제 C	—	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

따라서 3 개의 과제 모두에 학생이 배정될 확률은 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{24} + \frac{1}{72} + \frac{1}{6} = \frac{18}{72} = \frac{1}{4} = 0.25$$

[문항2] 대학발표 예시답안

[문제 2-1]

그래프를 그려보면 $f(t) < 0 < g(t) < t+1 < h(t)$ 임을 알 수 있다. 부분 적분하여 아래 식을 구할 수 있다.

$$\int_0^1 t g''(t) dt = [t g'(t)]_0^1 - \int_0^1 g'(t) dt = g'(1) - g(1) + g(0)$$

$t=0$ 에서 $4x^3 - 6x^2 + 1 = (2x-1)(2x^2 - 2x - 1) = 0$ 이므로 $g(0) = \frac{1}{2}$ 이다.

$t=1$ 에서 $4x^3 - 12x^2 + 8 = 4(x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0$ 이므로 $g(1) = 1$ 이다.

$g'(1)$ 을 구하자. $g(t)$ 는 $4\{g(t)\}^3 - 6(t+1)\{g(t)\}^2 + 7t^2 + 1 = 0$ 을 만족한다. 식을 미분하고 $t=1$ 을 대입하면



$$6g^2(1)g'(1)-3g^2(1)-12g(1)g'(1)+7=0$$

을 얻고, $g'(1)=\frac{2}{3}$ 이다. 주어진 적분 값은 $\int_0^1 tg''(t)dt = \frac{2}{3}-1+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ 이다.

[문제 2-2]

$$\begin{aligned}\int_0^\pi k^2 p(x) \sin kx \, dx &= [-kp(x) \cos kx]_0^\pi + \int_0^\pi kp'(x) \cos kx \, dx \\ &= k(-1)^{k+1}p(\pi) + kp(0) + \int_0^\pi kp'(x) \cos kx \, dx \\ \int_0^\pi kp'(x) \cos kx \, dx &= [p'(x) \sin kx]_0^\pi - \int_0^\pi p''(x) \sin kx \, dx \\ &= - \int_0^\pi \sin kx (6ax + 2b) \, dx\end{aligned}$$

이다. 또한 $\int_0^\pi \sin kx (6ax + 2b) \, dx = \frac{(-1)^{k+1}}{k} (6a\pi + 2b) + \frac{2b}{k}$ 이고

$$4 \int_0^\pi \sin kx \, dx = \frac{4}{k} (1 - (-1)^k) \text{ 이므로 정리하면}$$

$$k(-1)^k p(\pi) - kp(0) + \frac{(-1)^{k+1}}{k} (6a\pi + 2b) + \frac{2b}{k} + \frac{4}{k} ((-1)^k - 1) = 0 \text{ 이다.}$$

k 가 짝수일 때 $k^2(p(\pi) - p(0)) - 6a\pi = 0$ 이므로 $a=0$, $b\pi^2 + c\pi = 0$ 이 나온다.

k 가 홀수일 때 $k^2(p(\pi) + p(0)) - (4b - 8) = 0$ 이므로 $b=2$, $b\pi^2 + c\pi + 2d = 0$ 이고 위에서 구한 것과 같이 생각해 보면 $a=0$, $b=2$, $c=-2\pi$, $d=0$ 이다. 따라서 $p(x)=2x^2-2\pi x$ 이다.

[문항3] 대학발표 예시답안

[문제 3-1]

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 등차수열이므로 $a_n = cn + d$, $b_n = en + f$ 꼴이다. 조건 (가)에서 $2cn + d - 3 = en + f$ 가 모든 자연수 n 에 대해 성립하므로 이는 항등식이고, 따라서 $2c = e$, $d - 3 = f$ 를 얻는다. 한편, 조건 (다)로부터 $\sum_{n=1}^{11} (cn^2 + d) = \sum_{n=1}^{11} (cn - 3)^2$ 을 얻고,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{를 이용하면}$$

$506c^2 - 902c + 99 - 11d = 11(46c^2 - 82c + 9 - d) = 0$ 을 얻는다. 한편, 조건 (나)에서 $2c + d - 3 = 756$ 을 얻고, 이를 대입하면 $46c^2 - 80c - 750 = 2(23c^2 - 40c - 375) = 0$ 을 얻는다.

인수분해 혹은 근의 공식을 쓰면, $c = -\frac{75}{23}$, 5를 얻고, $c > 0$ 이므로 $c=5$ 이다. 따라서

$$d = 759 - 2c = 749 \text{ 이고, } a_{254} = 254c + d = 1270 + 749 = 2019 \text{ 이다.}$$



[문제 3-2]

점 R 는 $\overline{PR} + \overline{RQ} = 20$ 을 만족하는 점이고 P(0, 0), Q(2t, 0) 이므로, R 는 곡선 $\frac{(x-t)^2}{10^2} + \frac{y^2}{10^2 - t^2} = 1$ 위의 점이다. 한편, 각 PRQ 가 $\frac{\pi}{3}$ 라는 조건에서

$\tan \frac{\pi}{3} = \left| \frac{2ty}{x(x-2t)+y^2} \right|$ 을 얻고, 이를 정리하면 점 R 는 곡선 $(x-t)^2 + \left(y - \frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4t^2}{3}$ 또

는 $(x-t)^2 + \left(y + \frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4t^2}{3}$ 위의 점임을 알 수 있다. 이 두 관계를 연립하여 계산하는

과정에서 $y > 0$ 을 이용하면 가능한 좌표는 $\left(t \pm \frac{20\sqrt{t^2-25}}{\sqrt{3}t}, \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{100}{t} - t\right)\right)$ 또는

$\left(t \pm \frac{20\sqrt{t^2-25}}{\sqrt{3}t}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{100}{t} - t\right)\right)$ 임을 알 수 있고, 조건에 의하여 R 의 좌표는

$R\left(t + \frac{20\sqrt{t^2-25}}{\sqrt{3}t}, \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{100}{t} - t\right)\right)$ 임을 알 수 있다.

미분하면 $x'(t) = 1 - \frac{20\sqrt{t^2-25}}{\sqrt{3}t^2} + \frac{20}{\sqrt{3}(t^2-25)}$, $y'(t) = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{100}{\sqrt{3}t^2}$ 에서

$\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{(t^2+100)\sqrt{t^2-25}}{t^2\sqrt{3}(t^2-25)+500}$ 이다. $t = 2\sqrt{7}$ 을 대입하면 $\frac{y'(2\sqrt{7})}{x'(2\sqrt{7})} = -\frac{\frac{32}{7\sqrt{3}}}{\frac{146}{21}} = -\frac{16\sqrt{3}}{73}$ 이

다.



35

한양대학교 모의(1차)³⁵⁾

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
역함수, 역함수의 미분법, 사잇값 정리, 내분점, 벡터의 성질, 적분법(역함수로 넓이 구하기)	없음	수학 2문항 (각 문항당 소문항 3개 총 6문항)	90분

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

(가) 함수 $y=f(x)$ 는 $y^3+3y^2+4y+1=x$ 을 만족시킨다.

(나) 실수 k 에 대하여 함수 $y=g(x)$ 는 $\{x|x \geq -k\}$ 에서 정의되고 $g(x)=f(x+k)$ 를 만족시킨다.

(다) 곡선 $y=f(x)$ 가 y 축과 만나는 점을 P, 곡선 $y=f(x)$ 위의 x 좌표가 -1 인 점을 Q, 곡선 $y=f(x)$ 의 점 Q에서의 접선이 y 축과 만나는 점을 R이라 하자.

[1] 함수 $y=f(x)$ 는 일대일 함수임을 설명하시오.

[2] 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 $y=f(x)$ 의 역함수의 그래프가 만날 때, 실수 k 의 최솟값의 소수점 아래 첫째자리 수를 구하시오.

[3] 제시문 (다)의 점 P의 좌표를 $(0,a)$ 라 할 때, 선분 PR 및 선분 QR, 그리고 곡선 $y=f(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 a 에 대한 이차식으로 나타내시오.



[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

삼각형 ABC의 변 AB의 중점을 G, 변 AC의 중점을 F라 하자. 변 BC를 삼등분하는 BC 위의 두 점 중 점 B에 가까운 것을 D, 점 C에 가까운 것을 E라 하고, 두 선분 EG와 DF의 교점을 H라 하자.

[1] 다음 두 등식을 만족하는 실수 a, b, c, d 의 값을 구하시오.

$$\overrightarrow{GE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{FD} = c\overrightarrow{AB} + d\overrightarrow{AC}$$

[2] 문항 [1]의 두 등식을 이용하여 선분의 길이의 비 $\overline{GH} : \overline{HE}$ 를 구하시오.

[3] 변 BC를 n 등분하는 $n-1$ 개의 점들을 점 B로부터 점 C로의 방향으로 차례대로 각각 I_1, I_2, \dots, I_{n-1} 이라 하자. 두 선분 $\overline{FI_k}$ 와 $\overline{GI_{k+l}}$ 의 교점을 J라 할 때, 선분의 길이의 비 $\overline{FJ} : \overline{JI_k}$ 를 구하시오. (단, $1 \leq k < k+l \leq n-1$)



문제1. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = e^{x+1}\{x^2 + (n-2)x - n + 3\} + ax$$

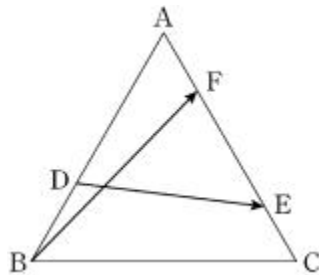
가 역함수를 갖도록 하는 실수 a 의 최솟값을 $g(n)$ 이라 하자. $1 \leq g(n) \leq 8$ 을 만족시키는 모든 n 의 값의 합은? (2015. 6월 평가원)

- ① 43 ② 46 ③ 49 ④ 52 ⑤ 55

문제2. 함수 $f(x) = \tan^3 x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$ 에서의 접선의 기울기는? (2017. 7월 전국연합)

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

문제3. 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC에서 변 AB를 2:1로 내분하는 점을 D라 하고, 변 AC를 3:1과 1:3으로 내분하는 점을 각각 E, F라 할 때, $|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2$ 의 값은?



- ① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21



풀어보기(문제1) 정답 ④

함수 $f(x)$ 가 역함수를 갖기 위해서는 일대일 대응이 되어야 하므로 모든 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$$f'(x) = e^{x+1}(x^2 + (n-2)x - n + 3) + e^{x+1}(2x + n - 2) + a = e^{x+1}(x^2 + nx + 1) + a \text{ 이다.}$$

함수 $h(x)$ 를 $h(x) = e^{x+1}(x^2 + nx + 1)$ 라 두고 $h(x)$ 의 최솟값을 구해보자.

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{x+1}(x^2 + nx + 1) + e^{x+1}(2x + n) \\ &= e^{x+1}(x^2 + (n+2)x + n + 1) = e^{x+1}(x + n + 1)(x + 1) \end{aligned}$$

이므로 함수의 증감을 조사하면 $h(x)$ 는 $x = -1$ 일 때 최솟값 $h(-1) = 2 - n$ 을 갖는다.

따라서 $f'(x) = h(x) + a \geq 0$ 이기 위해서는 최솟값인 $h(-1) + a$ 가 $h(-1) + a \geq 0$ 을 만족해야 하므로 $a \geq -h(-1)$ 이므로 a 의 최솟값은 $-h(-1) = n - 2 (= g(n))$ 이다. $1 \leq g(n) \leq 8$ 이므로 $1 \leq n - 2 \leq 8$ 이고 정리하면 $3 \leq n \leq 10$ 이다. 따라서 모든 n 의 값의 합은 52이다.

풀어보기(문제2) 정답 ①

$g(x)$ 가 함수 $f(x)$ 의 역함수이므로 $g(1) = t$ 라 하면 $f(t) = 1$

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{ 에서 } \tan^3 t = 1 \text{ 이므로 } \tan t = 1, \text{ 따라서 } t = \frac{\pi}{4}$$

그러므로 $g(1) = \frac{\pi}{4}$, $f'(x) = 3\tan^2 x \sec^2 x$ 이다. 따라서 점 $(1, g(1))$ 에서의 접선의 기울

$$\text{기는 } g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{6}$$

풀어보기(문제3) 정답 ③

$$\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b} \text{ 이라 하면 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 3 \times \cos 60^\circ = \frac{9}{2}$$

$$\text{한편 } \overrightarrow{BF} = \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4}, \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BD} = \frac{\vec{a} + 3\vec{b}}{4} - \frac{\vec{a}}{3}$$

$$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b} \text{ 따라서}$$

$$|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2 = \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{4}{3}(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 19$$



[문항1]

[1] 나침반 풀이

$x = h(y) = y^3 + 3y^2 + 4y + 1$ 이라고 하면 $y = f(x)$ 에서 $f = h^{-1}$ 이다.

따라서 $f'(x) = (h^{-1}(x))' = \frac{1}{h'(y)} = \frac{1}{3(y+1)^2 + 1} > 0$ 이므로

$f(x)$ 는 증가함수이다. 따라서 $f(x)$ 는 일대일 함수이다.

대학발표 예시답안

음함수 미분법에 의해 $(3y^2 + 6y + 4)y' = 1$ 에서 $y' = \frac{1}{3(y+1)^2 + 1} > 0$ 이다.

따라서 $y = f(x)$ 는 증가함수이고 일대일 함수이다.

[2] 나침반 풀이

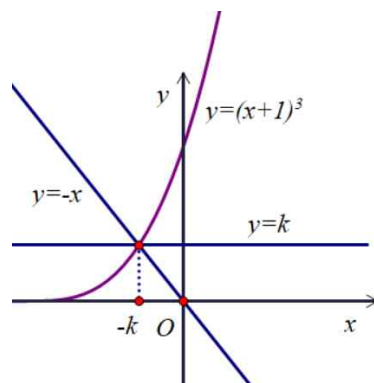
$y = g(x) = f(x+k)$ $\{x|x \geq -k\}$ 와 그 역함수의 그래프는 $y=x$ 에서 만난다.

따라서 다음 식이 성립한다.

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = x + k$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = k \cdots \textcircled{1}$$

따라서 $y = g(x)$ 와 그 역함수가 만날 조건은 $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = k$ 가 $\{x|x \geq -k\}$ 에서 실근을 가질 조건과 같다. 이 때 k 의 최솟값은 아래의 <그림 1>과 같다.



<그림 1>

위의 <그림 1>에서, k 의 최솟값은 $(x+1)^3 = -x \cdots \textcircled{2}$ 를 만족하는 x 의 값과 같다. $x = -0.3$ 을 대입하면 $(0.7)^3 = 0.343 > 0.3$ 이고, $x = -0.4$ 을 대입하면 $(0.6)^3 = 0.216 < 0.4$ 이므로 $\textcircled{2}$ 를 만족하는 x 의 값은 $-0.3 \times \times$ 임을 알 수 있다. 따라서 k 의 소수 첫째자리 수는 3이다.

대학발표 예시답안

앞부분은 위의 풀이와 같으므로 $\textcircled{1}$ 식에서부터 시작한다.

$\textcircled{1}$ 식을 변형하여 $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + (1-k) = 0$ ($x \geq -k$)라고 두자.

$p'(x) = 3(x+1)^2 \geq 0$ 이므로 증가함수이다. 따라서 $p(x)$ 가 $x \geq -k$ 에서 실근을 한 개 이상 가지려면 $p(-k) = -k^3 + 3k^2 - 4k + 1 \leq 0$ 이어야 한다.

$q(k) = -k^3 + 3k^2 - 4k + 1$ 라고 하자. $q'(k) = -3(k-1)^2 - 1 < 0$ 이므로 감소함수이다.

$q(0.3) = 0.043 > 0$ 이고 $q(0.4) = -0.184 < 0$ 이다. 따라서 $q(k) \leq 0$ 인 k 의 최솟값은 $0.3 \dots$ 이다. 따라서 구하는 답은 3 이다.

[3] 나침반 풀이

먼저 Q 의 좌표를 구하기 위하여

$-1 = y^3 + 3y^2 + 4y + 1$ 을 조립제법으로 인수분해하면 $y = -1$ 을 구할 수 있다.

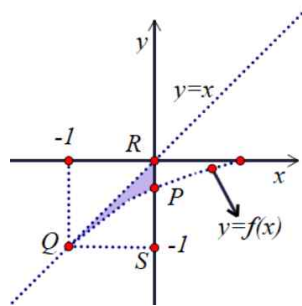
따라서 $Q(-1, -1)$ 이다. 이제 접선의 방정식을 구하기 위하여

$$f'(x) = (h^{-1}(x))' = \frac{1}{h'(y)} = \frac{1}{3(y+1)^2 + 1} \text{ 에 } x = -1, y = -1 \text{ 을 대입하면}$$

$f'(-1) = 1$ 을 구할 수 있다. 이제 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y - (-1) = f'(-1)(x - (-1)) \text{ 에서 } y = x \text{ 이다.}$$

따라서 R의 좌표는 $(0, 0)$ 이다. 또 점 $P(0, a), S(0, -1)$ 라고 하자. 이 때, 구하는 도형의 넓이 A는 아래의 <그림 2>에서 빗금 친 부분과 같다.



<그림 2>

이제 $h = f^{-1}$ 라고 하면,

$$A = \triangle RQS - \int_{-1}^a |h(x)| dx = \frac{1}{2} + \int_{-1}^a (x^3 + 3x^2 + 4x + 1) dx = \frac{a^4}{4} + a^3 + 2a^2 + a + \frac{1}{4}$$

a 의 정의에서 $a^3 + 3a^2 + 4a + 1 = 0 \dots \textcircled{3}$ 이므로 $a^4 + 3a^3 + 4a^2 + a = 0 \dots \textcircled{4}$ 이다.

$$\frac{a^4}{4} + a^3 + 2a^2 + a + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(a^4 + 4a^3 + 8a^2 + 4a + 1) \text{ 왼쪽의 식에 } \textcircled{4} \text{ 를 대입하면}$$

$$= \frac{1}{4}(a^3 + 4a^2 + 3a + 1) \text{ 왼쪽의 식에 } \textcircled{3} \text{ 을 대입하면}$$

$$= \frac{1}{4}(a^2 - a)$$

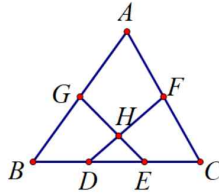
대학발표 예시답안: 나침반 풀이와 본질적으로 같으므로 생략한다. 또 대학발표 예시 답안에는 접선의 방정식을 $y = -x$ 라고 되어 있는데, 이것은 오타라고 판단한다.



[문항2]

[1] 나침반 풀이

문제의 조건을 그림으로 구성하면 다음과 같다.



<그림 3>

$$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3} - \frac{\overrightarrow{AB}}{2} = \frac{-\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{6} \quad \text{따라서 } a = -\frac{1}{6}, b = \frac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF} = \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} - \frac{\overrightarrow{AC}}{2} = \frac{4\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}{6} \quad \text{따라서 } c = \frac{2}{3}, d = -\frac{1}{6}$$

대학발표 예시답안

$$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BE} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \frac{2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})}{3} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} + \frac{2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})}{3} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{1}{6}, b = \frac{2}{3}, c = \frac{2}{3}, d = -\frac{1}{6}$$

[2] 나침반 풀이

$\overrightarrow{GH} = m\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{DH} = n\overrightarrow{FD}$ 라고 하자. (m, n 은 실수)

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FH}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + m\left(-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + n\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right) \text{ 이다. 이 식을 정리하면 다음 식}$$

을 구할 수 있다. $\frac{1}{2} - \frac{m}{6} = \frac{2n}{3}$, $\frac{1}{2} - \frac{n}{6} = \frac{2m}{3}$ 이 두 식을 연립하여 계산하면

$$m = n = \frac{3}{5} \quad (\overrightarrow{GF} \parallel \overrightarrow{BC} \text{ 이므로 처음부터 } m = n \text{으로 두고 풀어도 된다.})$$

$$\text{따라서 } \overrightarrow{GH} : \overrightarrow{HE} = \frac{3}{5} : \frac{2}{5} = 3 : 2$$



[3] 나침반 풀이

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GI_{k+l}} &= \overrightarrow{AI_{k+l}} - \overrightarrow{AG} = \frac{(n-k-l)\overrightarrow{AB} + (k+l)\overrightarrow{AC}}{n} - \frac{\overrightarrow{AB}}{2} \\ &= \frac{(n-2k-2l)\overrightarrow{AB} + 2(k+l)\overrightarrow{AC}}{2n}\end{aligned}$$

같은 방법으로 계산하면, $\overrightarrow{FI_k} = \frac{(2n-2k)\overrightarrow{AB} + (-n+2k)\overrightarrow{AC}}{2n}$

$\overrightarrow{GJ} = x\overrightarrow{GI_{k+l}}$ 이라고 하자. $\overrightarrow{GF} \parallel \overrightarrow{BC}$ 이므로 $\overrightarrow{FJ} = x\overrightarrow{FI_k}$ 이다.

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AG} + x\overrightarrow{GI_{k+l}} = \overrightarrow{AF} + x\overrightarrow{FI_k}$$

이제 위의 [2]와 같은 방법으로 계산하면 $x = \frac{n}{n+2l}$ 이다. 따라서

$$\overrightarrow{FJ} : \overrightarrow{JI_k} = \frac{n}{n+2l} : \frac{2l}{n+2l} = n : 2l$$





36

한양대학교 모의(2차)³⁶⁾

...



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
삼각함수의 덧셈정리, 경우의 수, 수열의 합, 수열의 귀납적 표현, 이항정리, 판별식, 적분의 성질, 치환적분	없음	수학 2문항 (각 문항당 소문항 3개 총 6문항)	90분

[문항 1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

(가) 자연수 n 에 대하여 평면 위의 두 점 $\left(\frac{1}{2}n(n-1), n-1\right)$ 과 $\left(\frac{1}{2}n(n+1), n\right)$ 을 지나는 직선을 L_n 이라 하고, 직선 L_n 과 x 축이 만나서 이루는 예각을 α_n 이라 하자.

(나) 자연수 k 에 대하여, $\alpha_k = \alpha_n + \alpha_m$ 이고 $n < m$ 인 자연수 n, m 의 순서쌍 (n, m) 의 개수를 $f(k)$ 라 하자.

(다) 자연수 n 에 대하여, 평면이 n 개의 직선 L_1, L_2, \dots, L_n 에 의해 나뉘는 영역의 개수를 $g(n)$ 이라 하자. $g(1)=2$, $g(2)=4$ 임을 쉽게 확인할 수 있다.

[1] $\alpha_2 + \alpha_3$ 의 값을 구하시오.

[2] $f(k)=3$ 을 만족시키는 가장 작은 자연수 k 를 구하고, 이때 순서쌍 (n, m) 을 모두 구하시오.

[3] $g(n) > 2020$ 을 만족시키는 가장 작은 자연수 n 을 구하시오.

[문항 2] 다음 물음에 답하시오. (50점)

[1] 다음 조건

(i) $a_0 = 5, a_1 = 20$

(ii) $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2} \quad (n \geq 1)$

을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 을 구하시오.

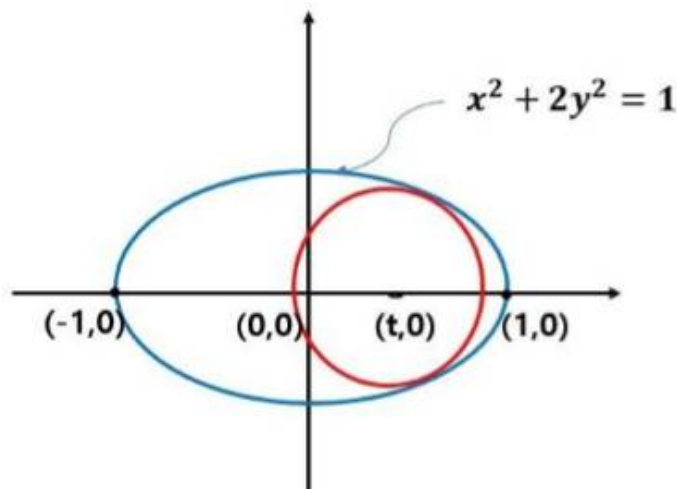
[2] 자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=0}^n {}_n C_k (-1)^k \int_{-1}^2 x^k (1-x)^{n-k} dx$ 을 구하시오.

(단, ${}_n C_k$ 는 n 개에서 k 개를 동시에 택하는 서로 다른 조합의 모든 가짓수이다.)

[3] 중심이 $(t,0)$ 이고 반지름이 $r(t)$ 인 원이 다음 조건을 만족할 때, $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} r(t) dt$ 의 값을 구하시오.

(i) 타원 $x^2 + 2y^2 = 1$ 과 두 점에서 만난다.

(ii) 원의 내부는 타원 $x^2 + 2y^2 = 1$ 의 내부에 놓여있다.





- 문제1. 점 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 에서 곡선 $y = \sin x (x > 0)$ 에 접선을 그어 접점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(2018. 대수능)

<보 기>	
\neg .	$\tan a_n = a_n + \frac{\pi}{2}$
\sqsubset .	$\tan a_{n+2} - \tan a_n > 2\pi$
\sqsupset .	$a_{n+1} + a_{n+2} > a_n + a_{n+3}$

- ① \neg ② \neg, \sqsubset ③ \neg, \sqsupset ④ \sqsubset, \sqsupset ⑤ $\neg, \sqsubset, \sqsupset$

- 문제2. 자연수 n 에 대하여 $f(n) = \sum_{r=0}^n {}_nC_r \left(\frac{1}{9}\right)^r$ 일 때, $\log f(n) > 1$ 을 만족시키는 n 의 최솟값은? (단, $\log 3 = 0.4771$ 로 계산한다.) (2016. 3월 전국연합)

- ① 18 ② 22 ③ 26 ④ 30 ⑤ 34

- 문제3. 방정식 $x + y + z + 5w = 14$ 를 만족시키는 양의 정수 x, y, z, w 의 모든 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는? (2016. 6월 평가원)

- ① 27 ② 29 ③ 31 ④ 33 ⑤ 35



풀어보기(문제1) 정답 ⑤

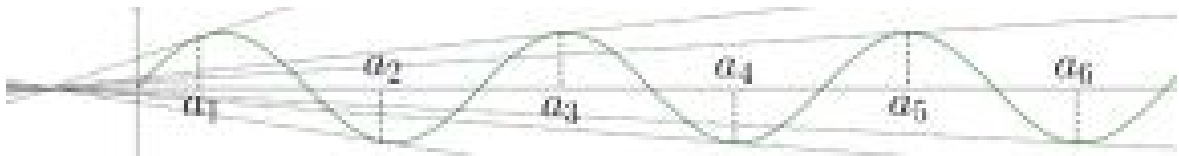
ㄱ. 곡선 $y = \sin x$ 위가 아닌 점 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 에서 그은 접선을 찾자. $y = \sin x$ 그래프 위의 한 점 $(t, \sin t)$ ($t > 0$)에서의 접선

$y - \sin t = \cos t(x - t)$ 가 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 을 지나므로 대입하면

$$0 - \sin t = \cos t\left(-\frac{\pi}{2} - t\right), \tan t = t + \frac{\pi}{2}$$

이를 만족하는 t 값을 작은 수부터 크기순으로 나열했을 때 n 번째 수가 a_n 이므로 각 a_n 들은 이 방정식을 만족한다. 따라서 $\tan a_n = a_n + \frac{\pi}{2}$ (참)

ㄴ. 그림과 같이 접점들은 $\sin x$ 함수의 주기 2π 의 절반인 π 간격으로 극대, 극소가 나오는 곳의 조금 왼쪽에 하나씩 등장하며 오른쪽으로 갈수록 극대, 극소가 나오는 곳에 더 가까운 곳에 등장한다.



따라서 n 이 2 커지면 a_n 값은 2π 정도 커진 것에 더해 조금 더 커진다.

$$\tan a_{n+2} - \tan a_n = a_{n+2} - a_n > 2\pi \text{ (참)}$$

ㄷ. 주어진 식의 의미가 좀 더 잘 보이도록 변형하면

$$a_{n+1} + a_{n+2} > a_n + a_{n+3}, \quad a_{n+1} - a_n > a_{n+3} - a_{n+2}$$

앞서 ㄴ에서 관찰한 바와 같이 n 이 커질수록 극대, 극소가 나오는 곳에 더 가까운 곳에서 접점이 등장하는데 더해, 다가가는 정도는 점점 줄어든다. 따라서 똑같이 n 값이 1 차이난다면 n 값이 더 클 때의 1 차이가 가져오는 a_n 값의 차이가 더 적다. (참) 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

풀어보기(문제2) 정답 ②

$$f(n) = {}_nC_0 + {}_nC_1\left(\frac{1}{9}\right)^1 + {}_nC_2\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \cdots + {}_nC_n\left(\frac{1}{9}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{9}\right)^n = \left(\frac{10}{9}\right)^n$$

$$\log f(n) = \log \left(\frac{10}{9}\right)^n = n(\log 10 - \log 9) = n(1 - 2\log 3)$$



$$= n(1 - 2 \times 0.4771) = n(1 - 0.9542) = 0.0458n > 1$$

$$n > \frac{1}{0.0458} = 21.8 \dots$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 22이다.

풀어보기(문제3) 정답 ③

$x + y + z + 5w = 14$ 를 만족시키는 양의 정수 w 는 1, 2 이다.

i) $w = 1$ 일 때, $x + y + z = 9$ 를 만족시키는 양의 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 ${}_3H_6 = {}_8C_6 = 28$

ii) $w = 2$ 일 때, $x + y + z = 4$ 를 만족시키는 양의 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 ${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$

따라서 $28 + 3 = 31$ 이다.

[문항1]

[1] 나침반 풀이

직선 L_2 가 지나는 두 점은 $(1, 1), (3, 2)$ 이다. 따라서

$$\text{직선 } L_2 \text{의 기울기} = \tan \alpha_2 = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

같은 방법으로 직선 L_3 의 기울기 $\tan \alpha_3 = \frac{3-2}{6-3} = \frac{1}{3}$ 따라서

$$\tan(\alpha_2 + \alpha_3) = \frac{\tan \alpha_2 + \tan \alpha_3}{1 - \tan \alpha_2 \tan \alpha_3} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1$$

그런데 $\alpha_2 + \alpha_3$ 는 예각이므로 $\alpha_2 + \alpha_3 = \frac{\pi}{4}$

대학발표 예시답안

$$\tan \alpha_n = \frac{n - (n-1)}{\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}n(n-1)} = \frac{1}{n} \text{ 이므로 } \tan \alpha_2 = \frac{1}{2}, \tan \alpha_3 = \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } \tan(\alpha_2 + \alpha_3) = \frac{\tan \alpha_2 + \tan \alpha_3}{1 - \tan \alpha_2 \tan \alpha_3} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1,$$



$\alpha_2 + \alpha_3$ 는 예각이므로 $\alpha_2 + \alpha_3 = \frac{\pi}{4}$

[2] 나침반 풀이

$\tan \alpha_k = \frac{k - (k-1)}{\frac{1}{2}k(k+1) - \frac{1}{2}k(k-1)} = \frac{1}{k}$ 이다. 따라서 $\alpha_k = \alpha_n + \alpha_m$ 이면

$$\tan \alpha_k = \tan(\alpha_n + \alpha_m) = \frac{\tan \alpha_n + \tan \alpha_m}{1 - \tan \alpha_n \tan \alpha_m} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}{1 - \frac{1}{n} \times \frac{1}{m}} = \frac{n+m}{nm-1}$$

따라서 $\tan \alpha_k = \frac{1}{k} = \frac{n+m}{nm-1}$ 이것을 정리하면

$$(n-k)(m-k) = 1 + k^2$$

$k=1$ 일 때, $n < m$ 이고 위의 조건을 만족하는 n, m 의 순서쌍은 $(2, 3) \therefore f(1)=1$

$k=2$ 일 때, $n < m$ 이고 위의 조건을 만족하는 n, m 의 순서쌍은 $(3, 7) \therefore f(2)=1$

따라서 $1+k^2$ 의 약수의 개수가 2개 또는 3개이면 $f(k)=1$ 이다.

즉, $k=1, k=2, k=4, k=6$ 인 경우, $f(k)=1$ 이다.

$k=3$ 인 경우, $n < m$ 이므로 $n=4, m=13, n=5, m=8$ 이므로 $f(3)=2$

따라서 $1+k^2$ 의 약수의 개수가 4개 또는 5개이면 $f(k)=2$ 이다.

즉, $k=3, k=5$ 인 경우, $f(k)=2$

이제 $1+k^2$ 의 약수의 개수가 6개 또는 7개이면 $f(k)=3$ 이다. 이를 만족하는 k 의 최솟값은 7이다. 이 경우, (n, m) 의 순서쌍은 $(8, 57), (9, 32), (12, 17)$ 이다.

[대학발표 예시답안]

$$\alpha_k = \alpha_n + \alpha_m \text{ 이면, } \tan \alpha_k = \tan(\alpha_n + \alpha_m), \frac{1}{k} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}{1 - \frac{1}{n} \times \frac{1}{m}} \text{ 정리하면}$$

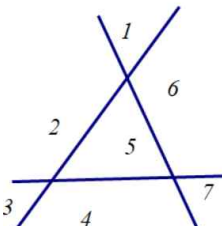
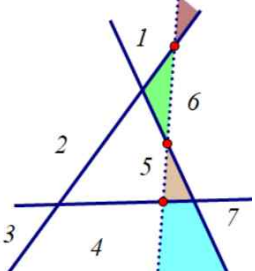
$(n-k)(m-k) = 1 + k^2$ 이고 자연수 k 에 대해 이 등식을 만족시키고 $n < m$ 인 순서쌍 (n, m) 의 개수는 $1 \leq k \leq 6$ 일 때, 1 또는 2이다.

$k=7$ 이면 $(n-7)(m-7) = 1 + 7^2 = 50$ 을 만족하는 순서쌍은 $(8, 57), (9, 32), (12, 17)$ 이다.



[3] 나침반 풀이

직선 $L_1, L_2, \dots, L_{n-1}, L_n$ 은 기울기가 모두 다르고 공통의 점을 지나지 않으므로 n 개의 직선은 서로 만나고 평면을 n 개의 직선으로 최대 분할한 경우와 같다. 이 경우 평면 분할의 원리는 아래의 그림과 같다.

만나는 3개의 직선으로 분할된 영역	직선을 하나 추가할 때 새롭게 늘어나는 영역의 최대 개수
 <p>총 7개의 영역으로 분할되었다.</p>	 <p>늘어나는 영역의 개수 = 교점의 수 + 1</p>

따라서

$$g(n) = g(n-1) + (L_n \text{에 의해 추가되는 교점의 개수}) + 1 = g(n-1) + n$$

이다. 또, $g(1) = 2$ 이다. 이제 계차수열을 이용해서 $g(n)$ 을 구하면

$$g(n) = g(1) + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = \frac{1}{2}(n(n+1)+2)$$

$$g(n) = \frac{1}{2}(n(n+1)+2) \geq 2020 \text{ 에서 } n(n+1) \geq 4038 \text{ 를 풀기 위하여}$$

$$n^2 \geq 4000 \text{ 을 만족하는 } n \text{ 을 찾으면 } 60^2 = 3600 \text{ 이다.}$$

$$\text{이제, } 63 \times 64 = 3934 < 4139 \text{ 이고 } 64 \times 65 = 4160 > 4138 \text{ 이므로}$$

$$g(n) > 2020 \text{ 만족하는 최소의 자연수는 } 64 \text{ 임을 알 수 있다.}$$

[대학발표 예시답안]

직선 L_n 은 $n-1$ 개의 직선 L_1, L_2, \dots, L_{n-1} 과 서로 다른 점에서 각각 한 번씩 만난다.

따라서 L_1, L_2, \dots, L_{n-1} 에 의해 나뉘는 평면에 L_n 을 그리면 n 개의 영역이 추가된다.

즉, $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 $g(n) = g(n-1) + n$ 이 성립한다. 이 등식에

$$n = 2, 3, \dots, n \text{ 을 대입하고 변변 더해서 정리하면 } g(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2) \text{ 를 얻는다.}$$

$$g(63) = 2017, g(64) = 2081, \text{ 이므로 } g(n) > 2020 \text{ 만족하는 가장 작은 자연수 } n \text{ 은 } 64 \text{ 이다.}$$



[문항2]

[1] 나침반 풀이

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2} \text{ 을 } (a_{n+1} - \alpha a_n) = \beta(a_n - \alpha a_{n-1}) \text{ 꼴로 변형시킨다. } (n \geq 1)$$

이제 위의 두 식의 계수를 비교하면 $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$, $-\alpha\beta = \frac{1}{2}$ 에서 $\alpha = 1, \beta = -\frac{1}{2}$ 을 구할

수 있다. $a_{n+1} - a_n = b_n$ 으로 두면 $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} b_0$, $b_0 = a_1 - a_0 = 15$

$$\text{계차수열의 공식에 의하여 } a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(15 \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right) = 15 - 10 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 15$$

[대학발표 예시답안]

$$a_2 = \frac{a_1 + a_0}{2}, a_3 = \frac{a_2 + a_1}{2}, a_4 = \frac{a_3 + a_2}{2}, \dots$$

$$a_2 - a_1 = -\frac{a_1 - a_0}{2}, a_3 - a_2 = -\frac{a_2 - a_1}{2}, a_4 - a_3 = -\frac{a_3 - a_2}{2}, \dots$$

$$a_2 - a_1 = -\frac{a_1 - a_0}{2}, a_3 - a_2 = -\frac{a_2 - a_1}{2} = \frac{a_1 - a_0}{2^2}, a_4 - a_3 = -\frac{a_3 - a_2}{2} = \frac{a_1 - a_0}{2^3}, \dots$$

자연수 $n \geq 2$ 에 대하여

$$a_n - a_1 = -\frac{a_1 - a_0}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \dots + (-1)^{n-2} \frac{1}{2^{n-2}}\right) = \frac{a_1 - a_0}{3} \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right)$$

$$a_n = \frac{2a_1 + a_0}{3} + (-1)^{n-1} \frac{a_1 - a_0}{3 \cdot 2^{n-1}} \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2a_1 + a_0}{3} = \frac{40 + 5}{3} = 15$$

[2] 나침반 풀이

적분의 성질에 의하여 다음 등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n {}_n C_k (-1)^k \int_{-1}^2 x^k (1-x)^{n-k} dx &= \int_{-1}^2 \sum_{k=0}^n {}_n C_k (-1)^k x^k (1-x)^{n-k} dx \\ &= \int_{-1}^2 \sum_{k=0}^n {}_n C_k (-x)^k (1-x)^{n-k} dx \cdots (1) \end{aligned}$$

이항정리에 의하여 $\sum_{k=0}^n {}_n C_k (-x)^k (1-x)^{n-k} = (-x + (1-x))^n = (1-2x)^n$ 이다.

따라서 (1)식은 $\int_{-1}^2 (1-2x)^n dx \cdots (2)$ 이다. 여기서 $1-2x=t$ 로 치환하면

(2)식은 다음과 같다.



$$\int_{-1}^2 (1-2x)^n dx = \int_3^{-3} t^n \left(-\frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_{-3}^3 t^n dt = \frac{3^{n+1} - (-3)^{n+1}}{2n+2} = \begin{cases} 0 & n \text{ 홀수} \\ \frac{3^{n+1}}{n+1} & n \text{ 짝수} \end{cases}$$

$$\text{즉, } \sum_{k=0}^n {}_n C_k (-1)^k \int_{-1}^2 x^k (1-x)^{n-k} dx = \begin{cases} 0 & n \text{ 홀수} \\ \frac{3^{n+1}}{n+1} & n \text{ 짝수} \end{cases}$$

[대학발표 예시답안]

$$(1-2x)^n = (1-x-x)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k (-x)^k (1-x)^{n-k} \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=0}^n {}_n C_k (-1)^k \int_{-1}^2 x^k (1-x)^{n-k} dx = \int_{-1}^2 (1-2x)^n dx \text{ 이다.}$$

$$\text{위의 적분에서 } 1-2x=u \text{로 치환하면, } \int_{-1}^2 (1-2x)^n dx = \begin{cases} 0 & n \text{ 홀수} \\ \frac{3^{n+1}}{n+1} & n \text{ 짝수} \end{cases} \text{ 이다.}$$

[3] 대학발표 예시답안

주어진 두 조건을 만족하려면 타원 위의 점 (x,y) 로부터 $(t,0)$ 까지 거리가 r 보다 크거나 같아야 한다.

$$\text{즉, } \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ (x-t)^2 + y^2 \geq r^2 \end{cases} \text{이 성립한다. 또 } (x,y) \text{가 타원과 원의 교점이라면}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ (x-t)^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \text{이 성립해야 한다. 이 식을 } x \text{에 관한 식으로 정리하면}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2tx + t^2 - r^2 + \frac{1}{2} = 0 \cdots (3) \text{ 이다. 문제의 조건을 만족하려면 연립방정식의 근이}$$

중근이어야 하므로 (3)식의 판별식은 0이어야 한다. 따라서

$$D/4 = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4} = 0 \text{ 이다. 따라서 } r(t) = \sqrt{\frac{1}{2} - t^2}$$

구하고자 하는 적분값을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} r(t) dt &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} \sqrt{\frac{1}{2} - t^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} (\cos 2\theta + 1) d\theta = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi}{24} \end{aligned}$$



37

한양대학교(오전) 수시³⁷⁾

...



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
정적분, 곡선의 길이, 미분, 속력	없음	수학 2문제 내외	90분

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

반지름의 길이가 1인 구 S 의 중심으로부터 거리가 $a(a > 1)$ 인 직선 l 이 있다. 직선 l 과 구 S 의 중심을 포함하는 평면을 P 라 하고 P 로부터 가장 멀리 떨어진 S 의 한 점을 Q 라 하자. l 을 포함하면서 P 와 이루는 각의 크기가 θ 인 평면 중 Q 에 가까운 것을 P_θ 라 할 때, P_θ 가 S 를 만나 이루는 원을 C_θ 라 하자. P_{θ_0} 이 S 에 접하는 평면이면, $0 \leq \theta \leq \theta_0$ 인 모든 θ 에 대해 P_θ 는 S 와 만난다.

1. $\theta = \frac{\pi}{6}$ 일 때, 원 C_θ 의 넓이를 구하시오.

2. 원 C_θ 의 넓이를 $A(\theta)$ 라 하고 $t = \tan \theta$ 로 놓을 때,

$$\int_0^{\tan \theta_0} A(\theta) dt$$

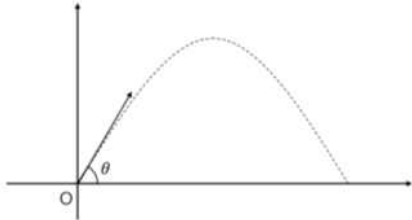
의 값을 θ_0 에 대한 식으로 나타내시오. (단, $A(\theta_0) = 0$ 으로 한다.)

3. 평면 P_{θ_0} 이 구 S 와 만나는 점과 원 C_θ ($0 \leq \theta < \theta_0$)의 중심이 이루는 곡선의 길이를 구하시오.



[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

중력가속도는 10m/s^2 이고 공기저항은 없다고 가정한다. 이때, 다음 그림과 같이 지면과 이루는 각도가 θ 가 되도록 지면에서 v_0 의 속력으로 공을 던지면 t 초 후의 위치는 $((v_0 \cos \theta)t, (v_0 \sin \theta)t - 5t^2)$ 이 된다.



- 야간에 높이가 50m 인 가로등이 켜져 있고, 가로등으로부터 30m 떨어진 지면에서 공을 수직으로 던져서 나타나는 공의 그림자를 관찰한다. 지면에서 공을 수직 방향으로 20m/s 의 속력으로 던졌을 때, 3초 후 그림자의 진행 방향과 속력을 구하시오. (단, 가로등의 빛은 한 점에서 모든 방향으로 나간다.)
- 태양광이 지면과 이루는 각도가 $\frac{\pi}{6}$ 일 때, 태양을 등지고 지면과 이루는 각도가 $\frac{\pi}{3}$ 가 되도록 20m/s 의 속력으로 공을 던지고 공의 그림자를 관찰한다. 그림자의 속력이 10m/s 가 될 때, 공의 높이를 구하시오. (단, 태양광은 평행하게 진행한다.)
- 야간에 높이가 50m 인 가로등이 켜져 있고, 가로등 바로 아래에서 지면과 이루는 각도가 $\frac{\pi}{3}$ 가 되도록 20m/s 의 속력으로 공을 던지고 공의 그림자를 관찰한다. 공의 속력이 $\frac{20\sqrt{3}}{3}\text{m/s}$ 가 될 때, 그림자의 속력을 구하시오. (단, 가로등의 빛은 한 점에서 모든 방향으로 나간다.)



문제1. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($0 < t < \frac{\pi}{2}$)에서의 위치 (x, y) 가

$$x = t + \sin t \cos t, y = \tan t$$

이다. $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서 점 P의 속력의 최솟값은? (2020. 대수능)

- ① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

문제2. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ 에 대하여 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ 일 때, $\csc(\pi + \theta)$ 의 값은?(2019. 9월 평가원)

- ① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{5}{4}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

문제3. 양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(t)$ 에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 1$)에서의 위치 (x, y) 가

$$\begin{cases} x = 2\ln t \\ y = f(t) \end{cases}$$

이다. 점 P가 점 $(0, f(1))$ 로부터 움직인 거리가 s 가 될 때 시각 t 는 $t = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4}}{2}$ 이고, $t = 2$ 일 때 점 P의 속도는 $(1, \frac{3}{4})$ 이다. 시각 $t = 2$ 일 때 점 P의 가속도를 $(-\frac{1}{2}, a)$ 라 할 때, $60a$ 의 값을 구하시오. (2017, 6월 모평)



풀어보기(문제1) 정답 ③

점 P의 시각 $t \left(0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$ 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = t + \sin t \cos t, \quad y = \tan t$$

이므로 P의 시각 t 에서의 속도 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ 는

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t, \quad \frac{dy}{dt} = \sec^2 t$$

P의 시각 t 에서의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} = \sqrt{(2\cos^2 t)^2 + (\sec^2 t)^2} = \sqrt{4\cos^4 t + \sec^4 t}$$

이때, $4\cos^4 t > 0$, $\sec^4 t > 0$ 이므로

$$4\cos^4 t + \sec^4 t \geq 2\sqrt{4\cos^4 t \times \sec^4 t} = 2\sqrt{4\cos^4 t \times \frac{1}{\cos^4 t}} = 4$$

(단, 등호는 $4\cos^4 t = \sec^4 t$ 일 때 성립한다.)

따라서 P의 시각 t 에서의 속력의 최댓값은 $\sqrt{4} = 2$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 ③

$$\csc(\pi + \theta) = \frac{1}{\sin(\pi + \theta)} = \frac{1}{-\sin\theta} = -\csc\theta = -\frac{5}{4}$$

풀어보기(문제3) 정답 15

$$x = 2\ln t, \quad y = f(t) \text{ 에서 } \frac{dx}{dt} = \frac{2}{t}, \quad \frac{dy}{dt} = f'(t)$$

이므로 점 P가 점 $(0, f(1))$ 로부터 움직이는 거리 s 는

$$s = \int_1^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt = \int_1^t \sqrt{\frac{4}{t^2} + \{f'(t)\}^2} dt \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$t = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4}}{2} \text{ 에서 } t^2 - st - 1 = 0 \text{ 이므로 } s = \frac{t^2 - 1}{t} \text{ 이다.}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \int_1^t \sqrt{\frac{4}{t^2} + \{f'(t)\}^2} dt = \frac{t^2 - 1}{t}$$

양변을 t 에 대하여 미분하면 $\sqrt{\frac{4}{t^2} + \{f'(t)\}^2} = \frac{t^2+1}{t^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $\{f'(t)\}^2 = \frac{(t^2-1)^2}{t^4}$

$t=2$ 일 때 점 P의 속도가 $\left(1, \frac{3}{4}\right)$ 이므로 $f'(t) = \frac{t^2-1}{t^2} = 1 - \frac{1}{t^2} \dots\dots \textcircled{L}$

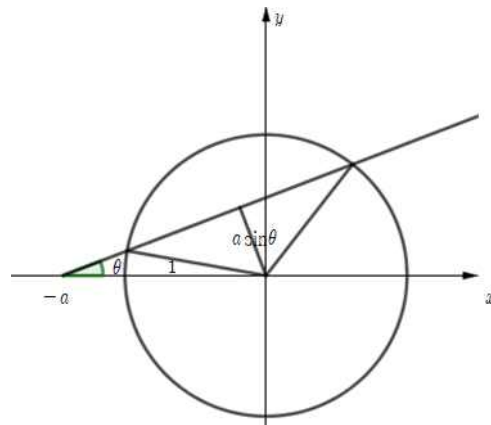
\textcircled{L} 의 양변을 t 에 대하여 미분하면 $f''(t) = \frac{2}{t^3}$

또 $t=2$ 일 때 점 P의 가속도가 $\left(-\frac{1}{2}, a\right)$ 이므로 $a = f''(2) = \frac{1}{4}$ 이다.

따라서 $60a = 60 \times \frac{1}{4} = 15$ 이다.

[문제1] 대학발표 예시답안

S 의 중심점을 $(0, 0, 0)$ 이라 하고, l 을 $l: x=-a, y=0$ 인 직선으로 두면 C_θ 의 중심점은 xy 평면 위에 있다.



$t = \tan \theta$ 라 하면 $\begin{cases} y = t(x+a) \dots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 = 1 \dots \textcircled{2} \end{cases}$

$$x^2 + t^2(x+a)^2 = 1,$$

$$(1+t^2)x^2 + 2at^2x + (t^2a^2 - 1) = 0$$

직선 $\textcircled{1}$ 과 원 $\textcircled{2}$ 의 교점의 x 좌표를 α_1, α_2 라 하면,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{2at^2}{t^2+1}, \quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{t^2a^2-1}{t^2+1}$$

중심점의 x 좌표와 y 좌표는 각각 $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = -\frac{at^2}{t^2+1}, \quad t\left(-\frac{at^2}{t^2+1} + a\right) = \frac{at}{t^2+1}$ 이다.

위 그림에서 보면, (반지름의 길이) $^2 = 1^2 - (a \sin \theta)^2$



1. 넓이는 $\pi(1-a^2\sin^2\theta)$ 이고, $\theta = \frac{\pi}{6}$ 일 때, 원의 넓이는 $\pi\left(1-\frac{a^2}{4}\right)$ 이다.

2. $dt = \sec^2\theta d\theta$, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \text{주어진 식은 } \pi \int_0^{\theta_0} (1-a^2\sin^2\theta)\sec^2\theta d\theta &= \pi \int_0^{\theta_0} (\sec^2\theta - a^2\tan^2\theta) d\theta \\ &= \pi \int_0^{\theta_0} \{(1-a^2)\sec^2\theta + a^2\} d\theta = \pi\{(1-a^2)\tan\theta_0 + a^2\theta_0\} \end{aligned}$$

$$\tan\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \text{ 이므로, 적분 값은 } \pi \frac{\theta_0 \tan^2\theta_0 - \tan\theta_0 + \theta_0}{\tan^2\theta_0} \text{ 이다.}$$

3. $x(\theta) = -\frac{a\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1} = -\frac{a\tan^2\theta}{\sec^2\theta} = -a\sin^2\theta,$

$$y(\theta) = \frac{a\tan\theta}{\tan^2\theta+1} = a\sin\theta\cos\theta \text{ 에서}$$

$$x'(\theta) = -2a\sin\theta\cos\theta,$$

$$y'(\theta) = a\cos^2\theta - a\sin^2\theta \text{ 이므로}$$

$$\{x'(\theta)\}^2 + \{y'(\theta)\}^2 = 4a^2\sin^2\theta\cos^2\theta + a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 = a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 = a^2$$

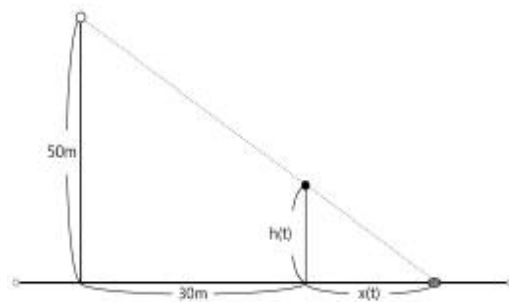
$$\text{곡선의 길이는 } \int_0^{\theta_0} a d\theta = a\theta_0 \text{ 이다.}$$

[문제2] 대학발표 예시답안

1. 수직으로 던진 공의 t 초 후의 공의 높이를 $h(t)$ 라 하면 제시문에 의해

$$h(t) = 20t - 5t^2, \quad h'(t) = 20 - 10t \text{ 이다.}$$

$$h(t) = -5(t-2)^2 + 20 < 50 \text{ 이므로 항상 그림자가 생긴다.}$$



삼각형의 닮음을 이용하면

$$\frac{h(t)}{x(t)} = \frac{50}{x(t)+30} \text{ 이고 } h(t)\{x(t)+30\} = 50x(t)$$

$$\text{이므로 } x(t) = \frac{30h(t)}{50-h(t)} \text{ 이다.}$$

그림자의 속도는



$$x'(t) = \frac{30h'(t)\{50-h(t)\}+30h(t)h'(t)}{\{50-h(t)\}^2} = \frac{1500h'(t)}{\{50-h(t)\}^2}$$

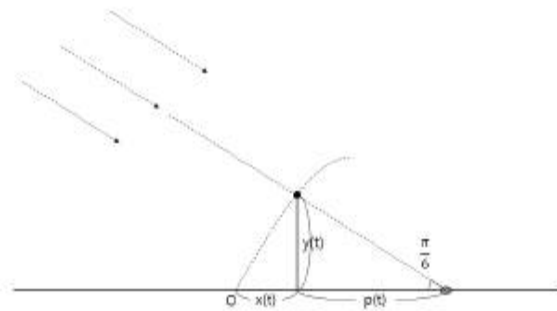
이다. $h(3)=15$, $h'(3)=-10$ 이므로

$$x'(3) = \frac{30 \times 50 \times (-10)}{35^2} = -\frac{600}{49}$$

이다.

따라서 그림자는 가로등을 향해 $\frac{600}{49}$ m/s 의 속력을 가진다.

2. 제시문에 의해 t 초 후 공의 위치는 $(x(t), y(t)) = (10t, 10\sqrt{3}t - 5t^2)$ 이다.



그림자의 위치를 $z(t)$ 라고 하면

$z(t) = x(t) + p(t)$ 인데,

$$\frac{y(t)}{p(t)} = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

이므로 $z(t) = x(t) + \sqrt{3}y(t)$ 이다.

그림자의 속도는

$$z'(t) = x'(t) + \sqrt{3}y'(t) = 10 + \sqrt{3}(10\sqrt{3} - 10t) = 40 - 10\sqrt{3}t$$

이다. 그림자의 속력이 10 이 되기 위해서는

$$|z'(t)| = |40 - 10\sqrt{3}t| = 10$$

이므로, $40 - 10\sqrt{3}t = 10$ 또는 $40 - 10\sqrt{3}t = -10$.

즉, $t = \sqrt{3}$ 또는 $t = \frac{5}{\sqrt{3}}$ 일 때 그림자의 속력이 10 이 된다.

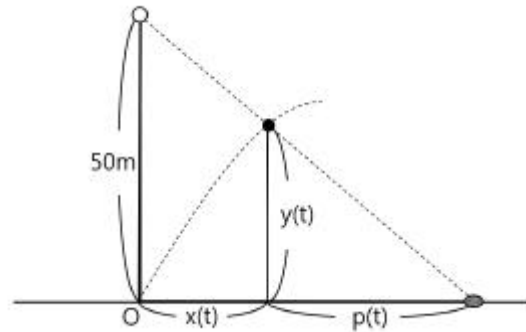
이때, 높이를 구하면

$$y(\sqrt{3}) = 10\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 5 \times 3 = 30 - 15 = 15,$$

$$y\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) = 10\sqrt{3} \times \frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{5 \times 5^2}{3} = 50 - \frac{125}{3} = \frac{25}{3}$$

이다.

3. 제시문에 의해 t 초 후 공의 위치는 $(x(t), y(t)) = (10t, 10\sqrt{3}t - 5t^2)$ 이다.



$y(t) = -5(t - \sqrt{3})^2 + 15 < 50$ 이므로 항상 그림자가 생긴다.

$x'(t) = 10$, $y'(t) = 10\sqrt{3} - 10t$ 이므로, 공의 속력을 $v(t)$ 라 하면

$$|v(t)|^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 10^2 + (10\sqrt{3} - 10t)^2 = 10^2(t^2 - 2\sqrt{3}t + 4)$$

이다. $v(t) = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ 이 되는 시간을 구하면

$$10^2(t^2 - 2\sqrt{3}t + 4) = \frac{20^2}{3} \Rightarrow t^2 - 2\sqrt{3}t + 4 = \frac{4}{3} \Rightarrow t = \sqrt{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이다.

$$t_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}, t_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ 이라 하자.}$$

그림자의 위치를 $z(t)$ 라고 하면 $z(t) = x(t) + p(t)$ 인데, 삼각형의 닮음에 의해

$$\frac{y(t)}{p(t)} = \frac{50}{x(t) + p(t)}$$

이다. $y(t)\{x(t) + p(t)\} = 50p(t)$ 이므로 $p(t) = \frac{x(t)y(t)}{50 - y(t)}$ 이다.

따라서, $z(t) = \frac{50x(t)}{50 - y(t)}$ 이고,

$$z'(t) = \frac{50x'(t)\{50 - y(t)\} + 50x(t)y'(t)}{\{50 - y(t)\}^2} = \frac{50^2 x'(t) - 50x'(t)y(t) + 50x(t)y'(t)}{\{50 - y(t)\}^2}$$

이다.

$$x(t_1) = \frac{20\sqrt{3}}{3}, y(t_1) = 20 - 5 \times \frac{4}{3} = \frac{40}{3},$$

$$x'(t_1) = 10, y'(t_1) = 10\sqrt{3} - \frac{20\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

이고

$$x(t_2) = \frac{40\sqrt{3}}{3}, y(t_2) = 40 - 5 \times \frac{16}{3} = \frac{40}{3},$$

$$x'(t_2) = 10, y'(t_2) = 10\sqrt{3} - \frac{40\sqrt{3}}{3} = \frac{-10\sqrt{3}}{3}$$



이다.

따라서

$$\begin{aligned}
 z'(t_1) &= \frac{50^2 \times 10 - 50 \times 10 \times \frac{40}{3} + 50 \times \frac{20\sqrt{3}}{3} \times \frac{10\sqrt{3}}{3}}{\left(50 - \frac{40}{3}\right)^2} \\
 &= \frac{3 \times 13 \times 50}{11^2} = \frac{1950}{121} \text{ m/s} \\
 z'(t_2) &= \frac{50^2 \times 10 - 50 \times 10 \times \frac{40}{3} + 50 \times \frac{40\sqrt{3}}{3} \times \left(\frac{-10\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(50 - \frac{40}{3}\right)^2} \\
 &= \frac{3 \times 7 \times 50}{11^2} = \frac{1050}{121} \text{ m/s} \text{ 이 다.}
 \end{aligned}$$



38

한양대학교(오후 I) 수시³⁸⁾

...



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
확률, 기댓값, 정적분, 정사영	없음	수학 2문제 내외	90분

[문제 1] 다음 물음에 답하십시오. (50점)

- 주사위를 n 번 던질 때 3의 눈이 나오는 횟수가 2의 배수일 확률을 구하십시오.
- 주사위를 n 번(단, $n \geq 3$) 던질 때 3의 눈이 나오는 횟수가 k 이면 $100k(k-1)(k-2)$ 원의 상금을 지급한다고 하자. 상금의 기댓값을 구하십시오.
- 주사위를 n 번 던질 때 3의 눈이 나오는 횟수를 k 라 하자. k 가 2의 배수이면 학생 A에게 $3k$ 원을, k 가 2의 배수가 아니면 학생 B에게 $3k$ 원의 상금을 지급한다. 상금의 기댓값은 어느 학생 쪽이 더 큰가? 그리고 그 차이는 얼마인가?

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

공간에서 $\overline{AB}=1$ 을 만족시키는 점 A 와 점 B 가 있다. $0 < \theta < \pi$ 인 θ 에 대해, $\angle APB = \theta$ 를 만족시키는 점 P 들을 생각하자.

1. 두 점 A 와 B 를 포함하는 한 평면을 α 라 하자. $\theta = \frac{\pi}{4}$ 일 때, 평면 α 위에 있는 점 P 들과 점 A, B 가 이루는 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

2. $\theta = \frac{\pi}{12}$ 일 때, \overline{AP} 의 최댓값을 구하고, \overline{AP} 를 최대로 하는 점 P 들이 이루는 곡선의 길이를 l 이라 할 때, l^2 의 값을 구하시오.

3. 점 P 들이 이루는 입체도형의 점 A 와 B 를 포함하는 한 평면 위로의 정사영의 넓이를 θ 에 관한 식으로 나타내시오.



문제1. 한 개의 주사위를 5번 던질 때 홀수의 눈이 나오는 횟수를 a 라 하고, 한 개의 동전을 4번 던질 때 앞면이 나오는 횟수를 b 라 하자. $a-b$ 의 값이 3일 확률을 $\frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) (2020. 대수능)

문제2. 1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 9개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 적힌 수를 더하는 시행을 반복한다. 꺼낸 공은 다시 넣지 않으며, 첫 번째 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수이거나 꺼낸 공에 적힌 수를 차례로 더하다가 그 합이 짝수가 되면 이 시행을 멈추기로 한다. 시행을 멈출 때까지 꺼낸 공의 개수를 확률변수 X 라 하자. 다음은 $E(X)$ 를 구하는 과정이다. (단, 모든 공의 크기와 재질은 서로 같다.)

첫 번째 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수일 때, 꺼낸 공에 적힌 모든 수의 합이 짝수가 되려면 그 이후 시행에서 홀수가 적힌 공이 한 번 더 나와야 한다. 이때 짝수가 적힌 공은 4개이므로 확률변수 X 가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 값을 m 이라 하면 $m = \boxed{\text{(가)}}$ 이다.

(i) $X=1$ 인 경우

첫 번째 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수이므로 $P(X=1) = \frac{4}{9}$

(ii) $X=2$ 인 경우

첫 번째와 두 번째 꺼낸 공에 적힌 수가 모두 홀수이므로 $P(X=2) = \frac{{}_5P_2}{{}_9P_2} = \frac{5}{18}$

(iii) $X=k$ ($3 \leq k \leq m$)인 경우

첫 번째와 k 번째 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수이고,

두 번째부터 $(k-1)$ 번째까지 꺼낸 공에 적힌 수가 모두 짝수이므로

$$P(X=k) = \frac{\boxed{\text{(나)}}}{{}_9P_k}$$

따라서 $E(X) = \sum_{i=1}^m \{i \times P(X=i)\} = 2$

위의 (가)에 알맞은 수를 a 라 하고, (나)에 알맞은 식을 $f(k)$ 라 할 때, $a+f(4)$ 의 값은? (2019. 10월 전국연합)

① 246

② 248

③ 250

④ 252

⑤ 254



풀어보기(문제1) 정답 137

$a-b=3$ 이므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $a=5$ 이고 $b=2$ 일 때,

주사위를 5번 던질 때, 홀수의 눈이 5번 나오고 동전을 4번 던질 때, 앞면이 2번 나와야 하므로

$$\text{확률은 } {}_5C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^5} \times \frac{3}{2^3} = \frac{3}{2^8}$$

(ii) $a=4$ 이고 $b=1$ 일 때,

주사위를 5번 던질 때, 홀수의 눈이 4번 나오고 동전을 4번 던질 때, 앞면이 1번 나와야 하므로

$$\text{확률은 } {}_5C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{2^5} \times \frac{1}{2^2} = \frac{5}{2^7}$$

(iii) $a=3$ 이고 $b=0$ 일 때,

주사위를 5번 던질 때, 홀수의 눈이 3번 나오고 동전을 4번 던질 때, 앞면이 0번 나와야 하므로

$$\text{확률은 } {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times {}_4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{2^4} \times \frac{1}{2^4} = \frac{5}{2^8}$$

따라서, 구하는 확률은 $\frac{3}{2^8} + \frac{5}{2^7} + \frac{5}{2^8} = \frac{18}{2^8} = \frac{9}{2^7} = \frac{9}{128}$ 이므로 $p+q=128+9=137$

풀어보기(문제2) 정답 ①

확률변수 X 가 가장 큰 값을 갖는 경우는 첫 번째와 6 번째 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수이고, 두 번째부터 5 번째까지 꺼낸 공이 모두 짝수일 때이므로 $m=\boxed{6}$

(iii) $X=k$ ($3 \leq k \leq m$)인 경우

9 개의 공에서 k 개의 공을 차례대로 꺼내는 경우의 수는 ${}_9P_k$

첫 번째와 마지막으로 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수인 경우의 수는 ${}_5P_2$

두 번째부터 $(k-1)$ 번째까지 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수인 경우의 수는 ${}_4P_{k-2}$

그러므로 $P(X=k) = \frac{{}_5P_2 \times {}_4P_{k-2}}{{}_9P_k}$ 에서

$$f(k) = {}_5P_2 \times {}_4P_{k-2}$$

따라서 $a=6$, $f(4) = {}_5P_2 \times {}_4P_2 = 240$ 이므로 $a+f(4)=246$



[문제1] 대학발표 예시답안

1. 숫자 3이 나오는 횟수가 2의 배수일 확률은

$${}_nC_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n + {}nC_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + {}nC_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^{n-4} + \dots \dots\dots \textcircled{1}$$

이다. 한편,

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right)^n = {}nC_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n + {}nC_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \dots \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\left\{-\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right\}^n = {}nC_0\left(-\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n + {}nC_1\left(-\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \dots \dots\dots \textcircled{3}$$

이므로 $\textcircled{2} + \textcircled{3} = 2 \times \textcircled{1}$ 이다. 따라서 $\textcircled{1} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$ 이다.

(주) 0을 2의 배수로 생각하지 않는 학생이 있을 수 있다. 이 경우 답은, $\textcircled{1}$ 의 값에서 0회일 확률을 제외하면 $\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ 이다.

$$\begin{aligned} 2. \text{ (기댓값)} &= \sum_{k=3}^n 100 \times k(k-1)(k-2) \times {}nC_k \times \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \\ &= \frac{100}{6^n} \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2) \times {}nC_k \times 5^{n-k} \end{aligned}$$

이다. 한편,

$$\begin{aligned} k(k-1)(k-2) \times {}nC_k &= k(k-1)(k-2) \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-3)!}{(k-3)!\{(n-3)-(k-3)\}!} \times n(n-1)(n-2) \end{aligned}$$

이므로 기댓값은

$$\begin{aligned} &\frac{100 \times n(n-1)(n-2)}{6^n} \sum_{k=3}^n {}nC_{k-3} \times 5^{n-k} \\ &= \frac{100 \times n(n-1)(n-2)}{6^n} \sum_{k=0}^{n-3} {}nC_k \times 5^{n-(k+3)} \quad (\because 5^{n-(k+3)} = 5^{(n-3)-k}) \\ &= \frac{100 \times n(n-1)(n-2)}{6^n} (1+5)^{n-3} = \frac{100 \times n(n-1)(n-2)}{6^3} = \frac{25}{54} n(n-1)(n-2) \text{ (원)} \end{aligned}$$

이다.

3. A가 받을 금액의 기댓값은

$$3 \times 0 \times {}nC_0 \times \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^n + 3 \times 2 \times {}nC_2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \dots \dots\dots \textcircled{4}$$

이고 B가 받을 금액의 기댓값은

$$3 \times 1 \times {}_n C_1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + 3 \times 3 \times {}_n C_3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} + \dots \dots \dots \textcircled{5}$$

④-⑤의 값은

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 3k \times {}_n C_k \times \left(-\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} &= \frac{3}{6^n} \sum_{k=0}^n k \times {}_n C_k \times (-1)^k 5^{n-k} \\ &= \frac{3}{6^n} \sum_{k=1}^n k \times {}_n C_k \times (-1)^k 5^{n-k} \quad (k \times {}_n C_k = n \times {}_{n-1} C_{k-1} \text{ 이므로}) \\ &= \frac{3n}{6^n} \sum_{k=1}^n {}_{n-1} C_{k-1} \times (-1)^k 5^{n-k} \\ &= \frac{3n}{6^n} \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1} C_k \times (-1)^{k+1} 5^{(n-1)-k} \\ &= \frac{-3n}{6^n} \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1} C_k \times (-1)^k 5^{(n-1)-k} \\ &= \frac{-3n}{6^n} (-1+5)^{n-1} = \frac{-3n}{6^n} 4^{n-1} = \frac{-n}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

그러므로 B 쪽이 더 크다. 차이 = $\frac{n}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ (원)

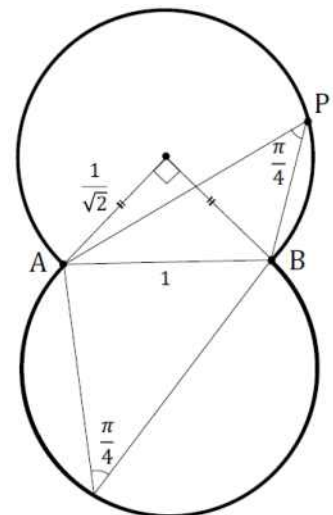
[문제2] 대학발표 예시답안

1. 평면 α 위에서 $\angle APB = \frac{\pi}{4}$ 를 만족하는 점 P는 선분 AB가 현이 되는 평면 α 위의 두 개의 원 위에 있고, 각각의 원에서 현 AB의 중심각은 $\frac{\pi}{2}$ 이고, 점 P는 원주각 $\angle APB = \frac{\pi}{4}$ 인 점이다. 오른쪽 그림에서 구하는 영역의 넓이는

$$2 \left\{ \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{3}{4} \pi + \frac{1}{2}$$

이다.

2. 먼저 점 A와 B를 포함하는 한 평면 α 위에 있고, $\angle APB = \frac{\pi}{12}$ 인 점 P는 물음 1에서와 마찬가지로 선분 AB가 현이 되는 평면 α 위의 두 개의 원 위에 있고, 각각의 원에서 현 AB의 중심각은 $\frac{\pi}{6}$ 이고, 점 P는 원주각 $\angle APB = \frac{\pi}{12}$ 인 점이다.





평면 α 위에서 \overline{AP} 가 최대인 점 P 는 A 와 각각의 원의 중심을 지나는 직선 위에 있다.

(오른쪽 그림에서 P 와 P')

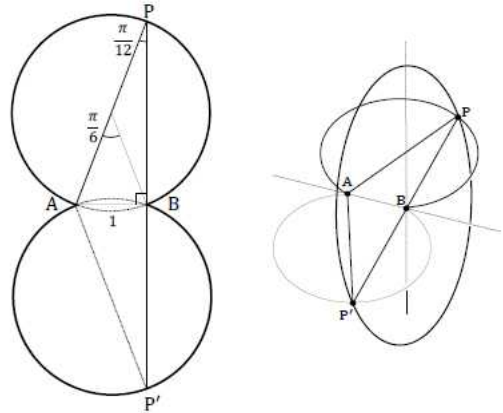
한편, 점 A, B 를 포함하는 임의의 다른 평면에서도 점 P 들이 이루는 곡선은 평면 α 에서의 곡선과 동일한 모양을 가진다. 따라서 각각의 평면에서 \overline{AP} 의 최댓값은 동일하며 그 값은 평면 위의 (두) 원의 지름인

$$2 \cdot \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{12}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{6} + \sqrt{2} \text{ 이다.}$$

또한 위의 관찰로부터 공간에서 \overline{AP} 를 최대로 하는 점 P 들이 이루는 곡선은 위 그림에서와 같이 중심이 B , 반지름이 \overline{BP} 인 원이다. (이 원을 포함하는 평면은 점 A, B 를 지나는 직선에 수직이다.)

따라서 구하는 곡선의 길이의 제곱은

$$l^2 = (2\pi \overline{BP})^2 = 4\pi^2 \{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - 1^2\} = 4\pi^2(7 + 2\sqrt{12}) = (28 + 16\sqrt{3})\pi^2 \text{ 이다.}$$



3. 물음 2에서와 마찬가지로 점 A 와 B 를 포함하는 한 평면 α 위에 있고 $\angle APB = \theta$ 인 점 P 는, 선분 AB 가 현이 되는 평면 α 위의 두 개의 원 위에 있고, 각각의 원에서 현 AB 의 중심각은 2θ 이고, 점 P 는 원주각 $\angle APB = \theta$ 인 점이다. 또한 공간에서 점 P 들이 이루는 도형은 평면 α 에 있는 점 P 들이 이루는 곡선을 점 A, B 를 지나는 직선을 중심으로 회전시켜 얻은 곡면이다.

따라서 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

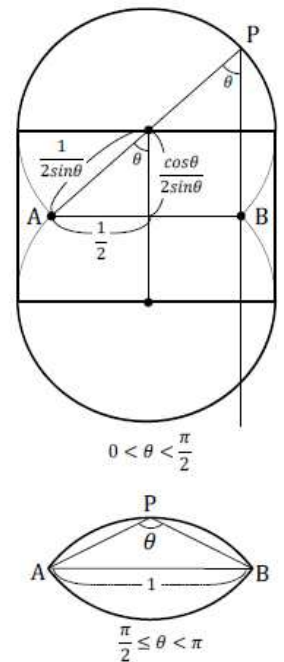
- (1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때, (직사각형의 넓이) + 2(반원의 넓이)

$$= 2 \cdot \frac{1}{2 \sin \theta} \cdot 2 \cdot \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} + 2 \cdot \frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{2 \sin \theta} \right)^2 = \frac{4 \cos \theta + \pi}{4 \sin^2 \theta}$$

- (2) $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$ 일 때, $2 \times$ (각각의 원이 현 AB 로 잘린 부분의 넓이)

$$= 2 \cdot \{ (\overline{AB} \text{ 를 현으로 하는 부채꼴의 넓이}) - (\text{점 } A, B \text{ 와 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이}) \}$$

$$= 2 \cdot \left\{ \frac{\pi - \theta}{4 \sin^2 \theta} - \left(-\frac{\cos \theta}{4 \sin \theta} \right) \right\} = \frac{\pi - \theta + \cos \theta \sin \theta}{2 \sin^2 \theta} \text{ 이다.}$$



39 한양대학교(오후Ⅱ) 수시³⁹⁾

핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
확률의 곱셈정리, 조건부 확률, 독립시행의 확률	없음	수학(2문항, 6문제)	90분

[문항 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

무인도 A에 있는 3명이 인근 무인도 B를 들렀다가 무인도 A로 돌아오고자 한다. 무인도 A에는 1인용 배 3척, 2인용 배 1척, 3인용 배 1척이 있다. 무인도 B에는 배가 없다. 모든 배는 정원이 찬 경우에만 운행이 가능하며 다른 이동 수단은 없다.

각 무인도를 출발할 때마다 한 명씩 4개의 동전을 던져서 본인의 이동 수단을 선택한다. 4개의 동전을 던져서 같은 면이 4개일 때 1인용 배를 선택하고, 같은 면이 2개일 때 2인용 배를 선택하고, 나머지 경우에는 3인용 배를 선택하기로 한다.

정원이 찬 배는 이동을 하고 그렇지 않은 배들은 무인도에 남는다. 만약 무인도에 정원이 n 명인 배가 총 m 척이 있고 그 배를 선택한 인원이 mn 명을 초과하면, mn 명만 배에 올라타고 나머지 인원은 무인도에 남는다.

[1-1] 한 사람이 동전 4개를 던질 때, 1인용 배, 2인용 배, 3인용 배가 선택될 확률을 각각 구하시오.

[1-2] 무인도 B에서 무인도 A로 2인용 배 1척만 돌아왔을 때, 나머지 1명이 무인도 B에 있을 확률을 $\frac{p}{q}$ 라 하자. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수)

[1-3] 무인도 A를 출발하여 무인도 B에 3명이 남게 될 확률을 $\frac{p}{q}$ 라 하자. p 를 16으로 나눈 나머지를 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수)



[문항 2] 다음 물음에 답하시오. (50점)

[2-1] 평면 위에 $\overline{AB} = 2$ 인 점 A와 점 B가 있다. $\overline{AP} \times \overline{BP} = 4$ 를 만족하는 평면 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

[2-2] 상수 a, b 에 대하여, 함수 $f(x) = x\sqrt{4+x^2} + a\ln(x + \sqrt{4+x^2})$ 의 도함수가 $f'(x) = b\sqrt{4+x^2}$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

[2-3] 위의 물음 1에서 주어진 점 P들로 이루어진 곡선으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 점 A와 점 B를 지나는 직선에 수직인 평면으로 자른 단면이 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하시오.



문제1. 좌표평면의 원점에 점 A가 있다. 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

동전을 한 번 던져
 앞면이 나오면 점 A를 x 축의 양의 방향으로 1만큼,
 뒷면이 나오면 점 A를 y 축의 양의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

위의 시행을 반복하여 점 A의 x 좌표 또는 y 좌표가 처음으로 3이 되면 이 시행을 멈춘다. 점 A의 y 좌표가 처음으로 3이 되었을 때, 점 A의 x 좌표가 1일 확률은?

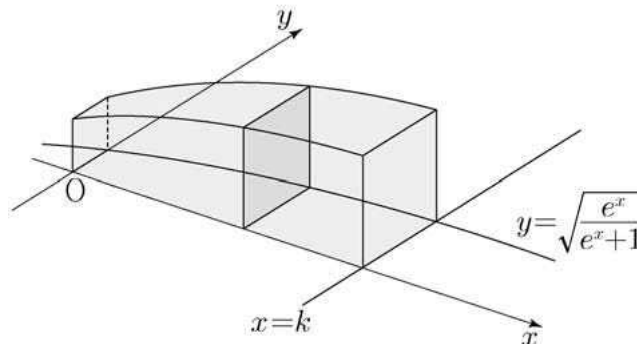
(2019. 대수능)

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

문제2. 한 개의 주사위를 5번 던질 때 홀수의 눈이 나오는 횟수를 a 라 하고, 한 개의 동전을 4번 던질 때 앞면이 나오는 횟수를 b 라 하자. $a-b$ 의 값이 3일 확률을 $\frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

(2020. 대수능)

문제3. 그림과 같이 양수 k 에 대하여 곡선 $y = \sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}$ 과 x 축, y 축 및 직선 $x=k$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $\ln 7$ 일 때, k 의 값은? (2020. 대수능)



- ① $\ln 11$ ② $\ln 13$ ③ $\ln 15$ ④ $\ln 17$ ⑤ $\ln 19$



풀어보기(문제1) 정답 ③

y 좌표가 처음으로 3이 되는 경우는

① 점 A가 (0, 2)에 있을 때 동전의 뒷면이 나오는 경우

② 점 A가 (1, 2)에 있을 때 동전의 뒷면이 나오는 경우

③ 점 A가 (2, 2)에 있을 때 동전의 뒷면이 나오는 경우

이다. 이때, 점 A의 x 좌표가 1인 경우는 ②의 경우이다.

$$\text{①의 경우의 확률은 } {}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\text{②의 경우의 확률은 } {}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

$$\text{③의 경우의 확률은 } {}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16}} = \frac{3}{8}$$

풀어보기(문제2) 정답 137

$a-b=3$ 이므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $a=5$ 이고 $b=2$ 일 때,

주사위를 5번 던질 때, 홀수의 눈이 5번 나오고 동전을 4번 던질 때, 앞면이 2번 나와야 하므로 확률은

$${}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0 \times {}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^5} \times \frac{3}{2^3} = \frac{3}{2^8}$$

(ii) $a=4$ 이고 $b=1$ 일 때,

주사위를 5번 던질 때, 홀수의 눈이 4번 나오고 동전을 4번 던질 때, 앞면이 1번 나와야 하므로 확률은

$${}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 \times {}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{2^5} \times \frac{1}{2^2} = \frac{5}{2^7}$$

(iii) $a=3$ 이고 $b=0$ 일 때,

주사위를 5번 던질 때, 홀수의 눈이 3번 나오고 동전을 4번 던질 때, 앞면이 0번 나와야 하므로 확률은

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times {}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{2^4} \times \frac{1}{2^4} = \frac{5}{2^8}$$

따라서, 구하는 확률은

$$\frac{3}{2^8} + \frac{5}{2^7} + \frac{5}{2^8} = \frac{18}{2^8} = \frac{9}{2^7} = \frac{9}{128}$$

이므로

$$p+q=128+9=137$$

풀어보기(문제3) 정답 ②

주어진 입체도형의 부피는

$$\int_0^k \left(\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}} \right)^2 dx = \int_0^k \frac{e^x}{e^x+1} dx$$

$$e^x+1=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx}=e^x$$

이때 $x=0$ 일 때, $t=2$ 이고 $x=k$ 일 때, $t=e^k+1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^k \frac{e^x}{e^x+1} dx &= \int_2^{e^k+1} \frac{1}{t} dt = \left[\ln t \right]_2^{e^k+1} \\ &= \ln(e^k+1) - \ln 2 \\ &= \ln \frac{e^k+1}{2} \end{aligned}$$

주어진 입체도형의 부피가 $\ln 7$ 이므로 $\ln \frac{e^k+1}{2} = \ln 7$, $\frac{e^k+1}{2} = 7$, $e^k = 13$

따라서 $k = \ln 13$



[문항1] 대학발표 예시답안

[1-1]

$$1 \text{ 인용 배를 선택할 확률} = 4 \text{ 개의 동전을 던져 같은 면이 } 4 \text{ 개일 확률} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$2 \text{ 인용 배를 선택할 확률} = 4 \text{ 개의 동전을 던져 같은 면이 } 2 \text{ 개일 확률} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$3 \text{ 인용 배를 선택할 확률} = \text{나머지 확률} = 1 - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{2}$$

[1-2]

우선 2인용 배만 무인도 A로 돌아오는 경우는 아래의 두 가지 사건 중 하나가 일어난 경우이다.

(1) 사건 X : 무인도 A에서 2명이 2인용 배를 선택하고 1명이 1인용 배를 선택하여 무인도 B로 이동하고, 무인도 B에서 2명이 2인용 배를 선택하고 1명이 2인용 배 혹은 3인용 배를 선택하여 무인도 A로 돌아온 경우

(2) 사건 Y : 무인도 A에서 2명이 2인용 배를 선택하고 1명이 2인용 배 혹은 3인용 배를 선택하여 무인도 B로 이동하고, 무인도 B에서 2명이 2인용 배를 선택하여 무인도 A로 돌아온 경우

사건 X 가 일어나면 무인도 B에 (2인용 배에 탑승하지 않은) 1명이 남게 된다. 사건 Y 가 일어나면 무인도 A에 (2인용 배에 탑승하지 않은) 1명이 있게 된다. 두 사건은 동시에 일어나지 않으므로, '2인용 배가 무인도 A로 돌아왔을 때 남은 1명이 무인도 B에 남을 확률'은

$$\frac{P(X)}{P(X \cup Y)} = \frac{P(X)}{P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)} = \frac{P(X)}{P(X) + P(Y)} \text{ 이다. 구체적인 계산은 아래와 같다.}$$

$$\bullet P(X) = {}_3C_2 \left(\frac{3}{8} \right)^2 \left(\frac{1}{8} \right) \times \left\{ {}_3C_2 \left(\frac{3}{8} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{3}{8} \right)^3 \right\}$$

$$\bullet P(Y) = \left\{ {}_3C_2 \left(\frac{3}{8} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{3}{8} \right)^3 \right\} \times \left(\frac{3}{8} \right)^2$$

따라서 구하고자 하는 확률 $\frac{P(X)}{P(X) + P(Y)}$ 은

$$\begin{aligned} & \frac{{}_3C_2 \left(\frac{3}{8} \right)^2 \left(\frac{1}{8} \right) \times \left\{ {}_3C_2 \left(\frac{3}{8} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{3}{8} \right)^3 \right\}}{{}_3C_2 \left(\frac{3}{8} \right)^2 \left(\frac{1}{8} \right) \times \left\{ {}_3C_2 \left(\frac{3}{8} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{3}{8} \right)^3 \right\} + \left\{ {}_3C_2 \left(\frac{3}{8} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{3}{8} \right)^3 \right\} \times \left(\frac{3}{8} \right)^2} \\ &= \frac{{}_3C_2 \left(\frac{1}{8} \right)}{{}_3C_2 \left(\frac{1}{8} \right) + 1} = \frac{3}{8+3} = \frac{3}{11} \end{aligned}$$

이 고, $p=3$, $q=11$, $p+q=14$ 이다.

[1-3]

무인도 A를 3명이 출발하는 경우는 아래의 3가지 경우 중 하나이다.

(1) 1인용 배 3척 : 선택될 확률 = $\left(\frac{1}{8}\right)^3$

(2) 1인용 배 1척과 2인용 배 1척 : 선택될 확률 = ${}_3C_1\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^2$

(3) 3인용 배 1척 : 선택될 확률 = $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

각각의 경우 3명이 모두 무인도 B에 남는 경우는 아래와 같다.

(1) 무인도 B에 있는 배는 1인용 배 3척이므로

1인용 배를 선택하는 사람이 없는 경우

일어날 확률 : $\left(1 - \frac{1}{8}\right)^3$

(2) 무인도 B에 있는 배는 1인용 배 1척과 2인용 배 1척이므로

(i) 3명이 모두 3인용 배를 선택하는 경우

(ii) 2명이 3인용 배를 선택하고 1명이 2인용 배를 선택하는 경우

일어날 확률 : $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)$

(3) 무인도 B에 있는 배는 3인용 배 1척이므로

3명이 동시에 3인용 배를 선택하는 경우만 제외

일어날 확률 : $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$

따라서 구하고자 하는 확률은 아래와 같이 확률의 곱의 합으로 구할 수 있다.

$$\left(\frac{1}{8}\right)^3\left(\frac{7}{8}\right)^3 + {}_3C_2\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^2\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)\right\} + \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = \frac{7^3 + 3^3 \cdot 2^6 + 3^5 \cdot 2^4 + 7 \cdot 2^{12}}{8^6}$$

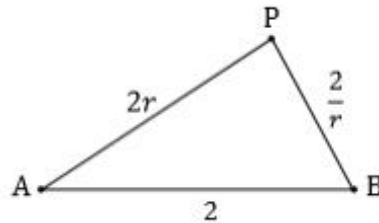
분자는 홀수+짝수+짝수+짝수로 홀수이다. 따라서 기약분수이며 분자를 16으로 나눈 나머지는 7^3 을 16으로 나눈 나머지와 동일하고 그 값은 7이다.



[문항2] 대학발표 예시답안

[2-1]

$\overline{AP}=2r$, $\overline{BP}=\frac{2}{r}$ 라 하자($r>0$).



세 점 A, B, P 는 삼각형의 세 꼭짓점이거나 일직선 위에 있으므로

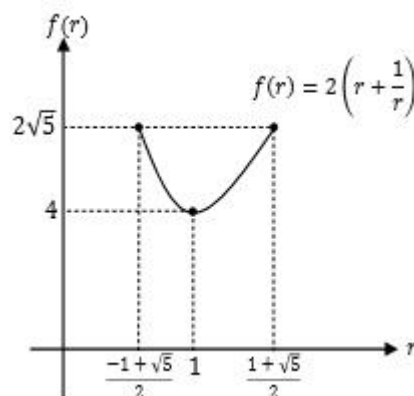
$2r+\frac{2}{r}\geq 2$, $2r+2\geq \frac{2}{r}$, $2+\frac{2}{r}\geq 2r$ 이 성립한다. 이로부터 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\leq r\leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이

성립한다.

$\overline{AP}+\overline{BP}=2\left(r+\frac{1}{r}\right)=f(r)$ 이라 하면, $f'(r)=2\left(1-\frac{1}{r^2}\right)$ 이므로 다음의 변화표와 $f(r)$ 의 그래

프로부터 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최댓값은 $f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)=f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=2\sqrt{5}$ 이고, $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값은 $f(1)=4$ 이다.

r	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$...	1	...	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$f'(r)$		-	0	+	
$f(r)$	$2\sqrt{5}$	\searrow	4	\nearrow	$2\sqrt{5}$



(참고 : $\overline{AP}=r$, $\overline{BP}=\frac{4}{r}$ 라 두면 ($r>0$), $-1+\sqrt{5}\leq r\leq 1+\sqrt{5}$ 이 성립한다.

$\overline{AP}+\overline{BP}=r+\frac{4}{r}=g(r)$ 라 하면 역시 동일한 결과를 얻을 수 있다.)

[2-2]

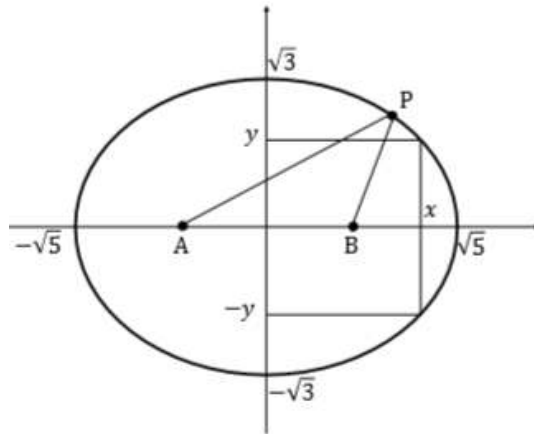
$$f'(r) = \sqrt{4+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}} + a \cdot \frac{(x + \sqrt{4+x^2})'}{x + \sqrt{4+x^2}} = \sqrt{4+x^2} + \frac{x^2+a}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{2x^2+a+4}{\sqrt{4+x^2}} \text{ 이고, 한편}$$

$$f'(x) = b\sqrt{4+x^2} = \frac{bx^2+4b}{\sqrt{4+x^2}} \text{ 이다. } 2x^2+a+4 = bx^2+4b \text{로부터 } b=2, a=4 \text{ 이고}$$

따라서 $a+b=6$ 이다.

[2-3]

선분 AB가 놓여있는 평면을 xy -평면이라 하고, $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $P(x, y)$ 라 하면 $\overline{AP} \times \overline{BP} = \sqrt{(x+1)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 4$ 이다. 양변을 제곱해서 y^2 에 대해 정리하면 $y^2 = 2\sqrt{x^2+4} - 1 - x^2$ 이고 $P(x, y)$ 는 이 방정식을 만족시킨다. 방정식으로부터 점 P들이 이루는 곡선은 x 축 및 y 축에 대칭이고 x 축 및 y 축과는 각각 $(\pm\sqrt{5}, 0)$, $(0, \pm\sqrt{3})$ 에서 만난다.



$y^2 = h(x)$ 라 하면, 점 P들이 이루는 곡선은 함수 $y = \sqrt{h(x)}$ 및 $y = -\sqrt{h(x)}$ 의 그래프로 이루어져 있고, x 의 범위는 $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$ 임을 알 수 있다. 따라서 구하는 입체도형의 부피는 (문제 2의 결과를 이용해서)

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \{ \sqrt{h(x)} - (-\sqrt{h(x)}) \}^2 dx &= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \{ y - (-y) \}^2 dx \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{5}} 4y^2 dx \\ &= 8 \int_0^{\sqrt{5}} (2\sqrt{x^2+4} - 1 - x^2) dx \\ &= 8 \left[x\sqrt{4+x^2} + 4\ln(x + \sqrt{4+x^2}) - x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{5}} \\ &= 8 \left(\frac{\sqrt{5}}{3} + 4\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \right) \\ &= \frac{8}{3}\sqrt{5} + 32\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$



40

한양대학교(의학계) 수시40)

...



핵심개념 및 용어	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
조건부 확률, 정적분과 급수, 부분적분, 삼각함수의 덧셈정리	없음	수학(1문항, 3문제)	45분

[문항 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

(가) 무인도 A에 있는 3명이 인근 무인도 B를 들렀다가 무인도 A로 돌아오고자 한다. 무인도 A에는 1인용 배 3척, 2인용 배 1척, 3인용 배 1척이 있다. 무인도 B에는 배가 없다. 모든 배는 정원이 찬 경우에만 운행이 가능하며 다른 이동 수단은 없다.

각 무인도를 출발할 때마다 한 명씩 4개의 동전을 던져서 본인의 이동 수단을 선택한다. 4개의 동전을 던져서 같은 면이 4개일 때 1인용 배를 선택하고, 같은 면이 2개 일 때 2인용 배를 선택하고, 나머지 경우에는 3인용 배를 선택하기로 한다. 정원이 찬 배는 이동을 하고 그렇지 않은 배들은 무인도에 남는다. 만약 무인도에 정원이 n 명인 배가 총 m 척이 있고 그 배를 선택한 인원이 mn 명을 초과하면, mn 명만 배에 올라타고 나머지 인원은 무인도에 남는다.

(나) n 이 $n \geq 3$ 인 자연수일 때,

원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 $A_k \left(\cos \frac{2(k-1)\pi}{n}, \sin \frac{2(k-1)\pi}{n} \right)$ 가 있다. (단, k 는 자연수)

(다) 임의의 실수 x 에 대하여 $0 \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$ 이 성립한다.

[1-1] 무인도 B에서 무인도 A로 2인용 배 1척만 돌아왔을 때, 나머지 1명이 무인도 B에

있을 확률을 $\frac{p}{q}$ 라 하자. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수)

[1-2] 식 $\sum_{k=1}^n k \left| \overrightarrow{A_k P} \right|^2 = n^2$ 을 만족하는 점 $P(x, y)$ 가 모두 원 $(x-a_n)^2 + (y-b_n)^2 = r_n^2$ 위
에 있다. 이때 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ 을 구하시오. (단, $r_n > 0$)

[1-3] $n \geq 3$ 인 자연수 n 에 대하여

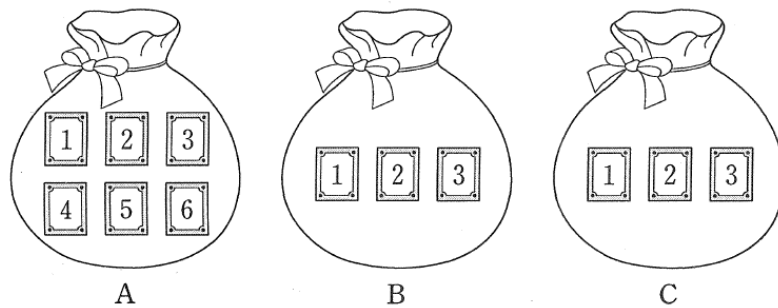
$$c_n = e^{-\frac{\pi}{n}}, \quad d_n = (1 - c_n) \sum_{k=1}^n c_n^k \left| \overrightarrow{A_1 A_k} \right|$$

이라 하자. 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ 을 구하시오. (단, $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$)



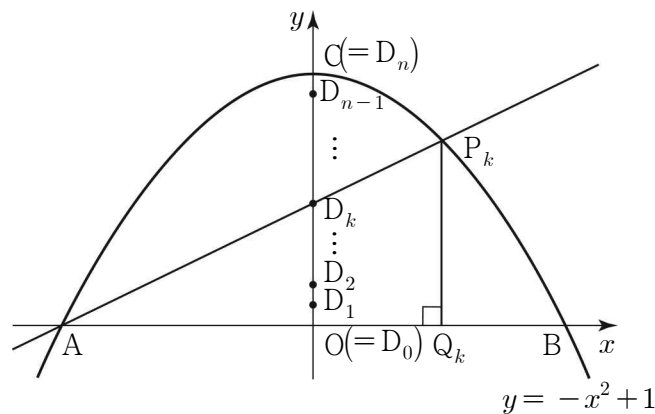
문제1. 그림과 같이 주머니 A에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있고 주머니 B와 C에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적힌 3장의 카드가 각각 들어 있다. 갑은 주머니 A에서, 을은 주머니 B에서, 병은 주머니 C에서 각자 임의로 1장의 카드를 꺼낸다. 이 시행에서 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 클 때, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을과 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합보다 클 확률이 k 이다. $100k$ 의 값을 구하시오.

(2017. 9월 평가원)



문제2. 그림과 같이 곡선 $y = -x^2 + 1$ 위에 세 점 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ 이 있다. 2이상의 자연수 n 에 대하여 선분 OC 를 n 등분할 때, 양 끝점을 포함한 각 분점을 차례로 $O = D_0, D_1, D_2, \dots, D_{n-1}, D_n = C$ 라 하자. 직선 AD_k 가 곡선과 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 P_k 라 하고, 점 P_k 에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q_k 라 하자.

($k = 1, 2, \dots, n$) 삼각형 AP_kQ_k 의 넓이를 S_k 라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k = \alpha$ 이다. 24α 의 값을 구하시오. (2014. 4월 학력평가)





풀어보기(문제1) 정답 50

갑, 을, 병이 뽑은 카드 숫자의 전체 순서쌍 개수는 $6 \times 3 \times 3 = 54$

갑이 꺼낸 카드의 숫자가 을이 꺼낸 카드의 숫자보다 큰 사건을 사건 A 라 하고, 갑이 꺼낸 카드의 숫자가 을과 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합보다 큰 사건을 사건 B 라 하자.
이 때, 사건 A 의 경우의 수를 보면

$$(\text{갑}, \text{을}) = (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3)$$

위의 12 가지 경우마다 병이 꺼낸 카드의 숫자가 3 가지씩이므로 $12 \times 3 = 36$ 가지이다.

$$\therefore P(A) = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$$

사건 $A \cap B$ 의 경우의 수는

갑	을	병
3	1	1
4	1	1
	2	2
5	1	1
	1	2
	1	3
	2	1
	2	2
	3	1
6	1	1
	1	2
	1	3
	2	1
	2	2
	2	3
	3	1
	3	2

18 가지 이므로 $P(A \cap B) = \frac{18}{54} = \frac{1}{3}$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{1}{2}, \quad 100k = 50$$



풀어보기(문제2) 정답 11

점 $D_k\left(0, \frac{k}{n}\right)$ 이므로 직선 AD_k 의 방정식은 $y = \frac{k}{n}x + \frac{k}{n}$

직선 AD_k 와 곡선 $y = -x^2 + 1$ 과의 교점 P_k 는 $P_k\left(1 - \frac{k}{n}, \frac{2k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$ 이므로

$\triangle AP_kQ_k$ 의 밑변의 길이는 $2 - \frac{k}{n}$ 이고 높이는 $\frac{2k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^2$

$$\therefore S_k = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{k}{n}\right) \left\{ \frac{2k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^2 \right\}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(2 - \frac{k}{n}\right) \left\{ \frac{2k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^2 \right\} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (2-x)(2x-x^2) dx = \frac{11}{24} \end{aligned}$$

따라서 $\alpha = \frac{11}{24}$ 이고 $24\alpha = 11$

[문항1] 대학발표 예시답안

[1-1]

우선 2인용 배만 무인도 A로 돌아오는 경우는 아래의 두 가지 사건 중 하나가 일어난 경우이다.

- (1) 사건 X : 무인도 A에서 2명이 2인용 배를 선택하고 1명이 1인용 배를 선택하여 무인도 B로 이동하고, 무인도 B에서 2명이 2인용 배를 선택하고 1명이 2인용 배 혹은 3인용 배를 선택하여 무인도 A로 돌아온 경우
- (2) 사건 Y : 무인도 A에서 2명이 2인용 배를 선택하고 1명이 2인용 배 혹은 3인용 배를 선택하여 무인도 B로 이동하고, 무인도 B에서 2명이 2인용 배를 선택하여 무인도 A로 돌아온 경우

사건 X 가 일어나면 무인도 B에 (2인용 배에 탑승하지 않은) 1명이 남게 된다. 사건 Y 가 일어나면 무인도 A에 (2인용 배에 탑승하지 않은) 1명이 있게 된다. 두 사건은 동시에 일어나지 않으므로, '2인용 배가 무인도 A로 돌아왔을 때 남은 1명이 무인도 B에 남을 확률'은

$$\frac{P(X)}{P(X \cup Y)} = \frac{P(X)}{P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)} = \frac{P(X)}{P(X) + P(Y)}$$

이다.

구체적인 계산은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \bullet P(X) &= {}_3C_2 \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(\frac{1}{8}\right) \times \left\{ {}_3C_2 \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{8}\right)^3 \right\} \\ \bullet P(Y) &= \left\{ {}_3C_2 \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{8}\right)^3 \right\} \times \left(\frac{3}{8}\right)^2 \end{aligned}$$

따라서 구하고자 하는 확률 $\frac{P(X)}{P(X)+P(Y)}$ 은

$$\begin{aligned} & \frac{{}_3C_2 \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(\frac{1}{8}\right) \times \left\{ {}_3C_2 \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{8}\right)^3 \right\}}{{}_3C_2 \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(\frac{1}{8}\right) \times \left\{ {}_3C_2 \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{8}\right)^3 \right\} + \left\{ {}_3C_2 \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{8}\right)^3 \right\} \times \left(\frac{3}{8}\right)^2} \\ &= \frac{{}_3C_2 \left(\frac{1}{8}\right)}{{}_3C_2 \left(\frac{1}{8}\right) + 1} = \frac{3}{8+3} = \frac{3}{11} \end{aligned}$$

이 고, $p=3$, $q=11$, $p+q=14$ 이 다.

[1-2]

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k |\overrightarrow{A_k P}|^2 &= \sum_{k=1}^n k \left\{ \left(x - \cos \frac{2(k-1)\pi}{n} \right)^2 + \left(y - \sin \frac{2(k-1)\pi}{n} \right)^2 \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n k (x^2 + y^2 + 1) - 2 \sum_{k=1}^n k \cos \frac{2(k-1)\pi}{n} x - 2 \sum_{k=1}^n k \sin \frac{2(k-1)\pi}{n} y = n^2 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ 이므로}$$

$$(x^2 + y^2 + 1) - \frac{2 \cdot 2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k \cos \frac{2(k-1)\pi}{n} x - \frac{2 \cdot 2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k \sin \frac{2(k-1)\pi}{n} y = \frac{2n^2}{n(n+1)}$$

따라서

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k \cos \frac{2(k-1)\pi}{n}$$

$$b_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k \sin \frac{2(k-1)\pi}{n}$$

$$r_n^2 = \frac{2n^2}{n(n+1)} - 1 + a_n^2 + b_n^2$$

이로부터

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cos \frac{2(k-1)\pi}{n} \frac{1}{n} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{n} \cos \frac{2(k-1)\pi}{n} \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{2(k-1)\pi}{n} \frac{1}{n^2} \right\} \end{aligned}$$

그런데 정적분의 정의와 부분적분법을 사용하면



$$\begin{aligned}
2\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{n} \cos \frac{2(k-1)\pi}{n} \frac{1}{n} &= 2\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cos \frac{2k\pi}{n} \frac{1}{n} \\
&= 2 \int_0^1 x \cos(2\pi x) dx \\
&= \left[\frac{x}{\pi} \sin(2\pi x) \right]_0^1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin(2\pi x) dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{n} \leq -\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} \leq \sum_{k=1}^n \cos \frac{2(k-1)\pi}{n} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

이므로 극한의 성질에 의해 $2\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \cos \frac{2(k-1)\pi}{n} \frac{1}{n^2} = 0$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

비슷하게

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin \frac{2(k-1)\pi}{n} \frac{1}{n} \\
&= 2 \int_0^1 x \sin(2\pi x) dx \\
&= \left[-\frac{x}{\pi} \cos(2\pi x) \right]_0^1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos(2\pi x) dx \\
&= -\frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

이를 종합하면

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2n^2}{n(n+1)} - 1 + a_n^2 + b_n^2 \right\} \\
&= 2 - 1 + 0 + \frac{1}{\pi^2} \\
&= \frac{\pi^2 + 1}{\pi^2}
\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \frac{\sqrt{\pi^2 + 1}}{\pi}$$

[1-3]

$A_{n+1} = A_1$ 이므로 $\overrightarrow{A_1 A_1} = \overrightarrow{A_1 A_{n+1}} = \vec{0}$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} d_n &= (1 - c_n) \sum_{k=1}^{n+1} c_n^k |\overrightarrow{A_1 A_k}| \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (c_n^k - c_n^{k+1}) |\overrightarrow{A_1 A_k}| \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} c_n^k |\overrightarrow{A_1 A_k}| - \sum_{k=1}^n c_n^{k+1} |\overrightarrow{A_1 A_k}| \\ &= \sum_{k=1}^n c_n^{k+1} (|\overrightarrow{A_1 A_{k+1}}| - |\overrightarrow{A_1 A_k}|) \end{aligned}$$

O를 원점이라 하자.

자연수 k 가 $1 \leq k \leq \frac{n}{2} + 1$ 이면 $\angle A_1 O A_k = \frac{2(k-1)\pi}{n}$ 이고,

$\frac{n}{2} + 1 < k \leq n$ 이면 $\angle A_1 O A_k = 2\pi - \frac{2(k-1)\pi}{n}$ 이다.

그러므로 모든 자연수 $1 \leq k \leq n$ 에 대하여

$$|\overrightarrow{A_1 A_k}| = 2 \sin \frac{(k-1)\pi}{n} \text{ 이고 } |\overrightarrow{A_1 A_{n+1}}| = 0 = 2 \sin \frac{n\pi}{n}$$

삼각함수의 덧셈정리에 의해

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{A_1 A_{k+1}}| - |\overrightarrow{A_1 A_k}| &= 2 \left\{ \sin \frac{k\pi}{n} - \sin \left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \right) \right\} \\ &= 2 \left\{ \sin \frac{k\pi}{n} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) + \cos \frac{k\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} \right\} \end{aligned}$$

삼각함수의 덧셈정리에 의해

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1 A_{k+1}} - \overrightarrow{A_1 A_k} &= 2 \left\{ \sin \frac{k\pi}{n} - \sin \left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \right) \right\} \\ &= 2 \left\{ \sin \frac{k\pi}{n} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) + \cos \frac{k\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} \right\} \end{aligned}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^n c_n^{k+1} (|\overrightarrow{A_1 A_{k+1}}| - |\overrightarrow{A_1 A_k}|) = 2c_n \sum_{k=1}^n c_n^k \sin \frac{k\pi}{n} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) + 2c_n \sum_{k=1}^n c_n^k \cos \frac{k\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}$$

우변의 각 항을 나누어 계산하면, 우선 모든 자연수 n 에 대하여 $0 \leq c_n \leq 1$ 이라는 사실과 제시문 (다)로부터

$$0 \leq 2c_n \sum_{k=1}^n c_n^k \sin \frac{k\pi}{n} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) \leq \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 \sum_{k=1}^n 1 \leq \frac{\pi^2}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

따라서 극한의 성질에 의하여



$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2c_n \sum_{k=1}^n c_n^k \sin \frac{k\pi}{n} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = 0$$

또한 정적분의 정의와 치환적분법, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$ 을 이용하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} 2c_n \sum_{k=1}^n c_n^k \cos \frac{k\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} &= 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{-\frac{k\pi}{n}} \cos \frac{k\pi}{n} \frac{1}{n} \\ &= 2\pi \int_0^1 e^{-\pi x} \cos(\pi x) dx \\ &= 2 \int_0^\pi e^{-t} \cos t dt \end{aligned}$$

부분적분법을 이용하여 $e^{-t} \cos t$ 의 부정적분을 구하면

$$\begin{aligned} \int e^{-t} \cos t dt &= e^{-t} \sin t + \int e^{-t} \sin t dt \\ &= e^{-t} \sin t - e^{-t} \cos t - \int e^{-t} \cos t dt \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \int e^{-t} \cos t dt &= \frac{1}{2} e^{-t} (\sin t - \cos t) + C \quad (C \text{는 적분 상수}) \quad \text{즉,} \\ 2 \int_0^\pi e^{-t} \cos t dt &= [e^{-t} (\sin t - \cos t)]_0^\pi = 1 + e^{-\pi} \end{aligned}$$

이로부터

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_n^{k+1} (|\overrightarrow{A_1 A_{k+1}}| - |\overrightarrow{A_1 A_k}|) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2c_n \sum_{k=1}^n c_n^k \sin \frac{k\pi}{n} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} 2c_n \sum_{k=1}^n c_n^k \cos \frac{k\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} \\ &= 1 + e^{-\pi} \end{aligned}$$



41

서울대학교(면접) 수시⁴¹⁾

[수학A(인문)_오전]

활용 모집단위	[문제 1] 사회과학대학 경제학부 경영대학 농업생명과학대학 농경제사회학부 생활과학대학 소비자아동학부(소비자학전공), 의류학과 자유전공학부
------------	--

문제 1. 자연수 n 에 대하여 다음의 조건을 만족하는 원 A_n 을 생각해보자.

(i) A_1 의 중심은 $(0, 0)$ 이고 반지름은 4이다.

(ii) A_n 의 중심은 $\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{15}{2^i}, 0\right)$ 이고 반지름은 $\frac{8}{2^n}$ 이다. (단, $n \geq 2$)

두 원 A_n, A_{n+1} 과 각각 만나면서 y 절편이 최대가 되는 직선을 l_n 이라 하자.

1-1. 직선 l_1 의 방정식을 구하시오.

1-2. 직선 l_n 의 y 절편을 a_n 이라 할 때, 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오.

41) 서울대학교 홈페이지



[수학B(인문, 자연)_오전]

<p>활용 모집단위</p>	<p>[문제 2] 사회과학대학 경제학부 경영대학 농업생명과학대학(농경제사회학부, 조경·지역시스템공학부, 바이오시스템·소재학부, 산림과학부) 생활과학대학 소비자아동학부(소비자학전공), 의류학과 자유전공학부</p>
--------------------	---

문제 2. 실수 $a < b$ 에 대하여 닫힌구간 $[a, b]$ 가 주어졌을 때, 함수 $y = f_{[a, b]}(x)$ 를 실수 전체의 집합에서 다음과 같이 정의하자.

$$f_{[a, b]}(x) = \begin{cases} a+b-x & (x \in [a, b]) \\ x & (x \notin [a, b]) \end{cases}$$

2-1. 합성함수 $y = (f_{[0, 2]} \circ f_{[1, 3]})(x)$ 는 $x = 1, 2$ 에서 연속인지 아닌지 설명하시오.

2-2. 모든 실수 x 에 대하여

$$(f_{[0, 1]} \circ f_{[a, b]})(x) = (f_{[a, b]} \circ f_{[0, 1]})(x)$$

가 성립하도록 하는 점 $P(a, b)$ 를 모두 구하시오.

(단, 실수 a, b 의 범위는 $0 \leq a < b \leq 1$ 이다.)



[수학C(인문)_오후]

활용 모집단위	[문제 1] 사회과학대학 경제학부 자유전공학부
------------	--------------------------------

문제 1. 곡선 C 와 직선 l 이 점 A 에서 만나고, 점 A 에서의 곡선 C 에 대한 접선이 직선 l 과 수직일 때 C 와 l 이 점 A 에서 수직으로 만난다고 한다. 곡선 $y=x^3$ 을 T 라고 하자.

1-1. 좌표평면 위의 한 점 (a, b) 를 지나는 직선 l 이 점 $P(t, t^3)$ 에서 곡선 T 와 수직으로 만날 때, a, b, t 사이의 관계식을 t 에 대한 다항식으로 구하시오. 또한 곡선 T 와 직선 l 이 수직으로 만날 수 있는 점은 많아야 하나임을 설명하시오. (단, t 는 0이 아닌 실수)

1-2. 점 (a, b) 가 제4사분면에 속할 때, 점 (a, b) 를 지나고 제1사분면 위의 점에서 곡선 T 와 수직으로 만나는 직선의 개수를 구하시오.

1-3. 점 $A(-1, -1)$ 에서 곡선 T 와 수직으로 만나는 직선 l_1 과, 점 $B\left(\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}\right)$ 를 지나고 T 에 접하는 직선 l_2 및 곡선 T 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

1-4. 곡선 T 위의 점 $A_1(t, t^3)$ 을 지나 점 A_2 (단, $A_2 \neq A_1$)에서 곡선 T 에 접하는 직선을 l_1 이라고 하자. 단, t 는 양의 실수이다. 이번에는 점 A_2 를 지나 점 A_3 (단, $A_3 \neq A_2$)에서 곡선 T 에 접하는 직선을 l_2 라고 하자. 이러한 시행을 반복하여 점 A_1, A_2, A_3, \dots 과 직선 l_1, l_2, l_3, \dots 을 얻었을 때, 곡선 T 와 접선 l_n 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n 이라고 하자(단, n 은 자연수). 이때,

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = 1$$

을 만족하는 t 의 값을 구하시오.



[수학D(자연)_오전]

활용 모집단위	[문제 1] 자연과학대학(수리과학부, 통계학과) 공과대학 농업생명과학대학(조경·지역시스템공학부, 바이오시스템·소재학부, 산림과학부) 사범대학 수학교육과 자유전공학부
------------	--

문제 1. 좌표공간에서 0 이상의 정수 n 에 대하여 평면 α_n, β_n 을 다음과 같이 정의하자.

(i) 평면 α_n 은 점 $(1, 0, 1)$ 을 지나고 xy 평면과의 교선의 방정식이

$$x+y=n, \quad z=0$$

이다.

(ii) 평면 β_n 은 점 $(0, 0, 1)$ 을 지나고 xy 평면과의 교선의 방정식이

$$x-y=n, \quad z=0$$

이다.

1-1. 다음과 같은 직육면체 V 가 있다.

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x+y \leq 1, 0 \leq x-y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

직육면체 V 가 두 평면 α_0, α_1 에 의하여 한꺼번에 잘릴 때 생기는 다면체 중에서 점 $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ 을 포함하는 것은 어떤 다면체인지 설명하고 그 부피를 구하시오.

1-2. 문제 1-1의 직육면체 V 가 네 평면 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ 에 의하여 한꺼번에 잘릴 때 생기는 다면체 중에서 점 $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ 을 포함하는 다면체를 X 라 하자. X 는 어떤 다면체인지 설명하고 그 부피를 구하시오.

1-3. 실수 t 가 $0 < t < 1$ 일 때, 문제 1-2의 다면체 X 에 포함되고 점 $(t, 0, 0)$ 에서 xy 평면에 접하는 구 중 반지름이 최대인 구를 S 라 하자. S 의 반지름 $r(t)$ 를 t 에 관한 식으로 나타내시오.

1-4. 평면 α_n ($n=1, 2, 3, \dots$)을 만나지 않는 한 점 $A_0(a, b, c)$ 에 대하여, 점 A_0 의 평면 α_1 위로의 정사영을 A_1 이라 하고 다시 점 A_1 의 평면 α_2 위로의 정사영을 A_2 라 하자. 이와 같은 시행을 반복하여 점 $A_3, A_4, \dots, A_{2020}$ 을 얻었다고 하자. 이때, 점 $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_{2020}$ 을 모두 포함하는 평면이 존재하는가? 존재하면 그 평면의 방정식을 구하고, 존재하지 않으면 그 이유를 설명하시오.



[수학E(자연)_오전]

활용 모집단위	[문제 2]	
	[2-1], [2-2]	자연과학대학(수리과학부, 통계학과) 공과대학 사범대학 수학교육과
	[2-3]	자연과학대학(수리과학부, 통계학과) 사범대학 수학교육과

문제 2. 실수 $a < b$ 에 대하여 닫힌구간 $[a, b]$ 가 주어졌을 때, 함수 $y = f_{[a, b]}(x)$ 를 실수 전체의 집합에서 다음과 같이 정의하자.

$$f_{[a, b]}(x) = \begin{cases} a+b-x & (x \in [a, b]) \\ x & (x \notin [a, b]) \end{cases}$$

2-1. 합성함수 $y = (f_{[0, 2]} \circ f_{[1, 3]})(x)$ 는 $x = 1, 2, 3$ 에서의 값을 구하시오. 또, 부등식 $(f_{[0, 2]} \circ f_{[1, 3]})(x) \geq x+1$ 을 만족하는 x 의 값의 범위를 구하시오.

2-2. 두 함수

$$y = x^2, y = (f_{[0, 1]} \circ f_{[a, a+1]})(x)$$

의 그래프가 좌표평면 위의 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 상수 a 의 값의 범위를 구하시오. (단, a 의 범위는 $0 \leq a < 1$ 이다.)

2-3. 모든 실수 x 에 대하여

$$(f_{[0, 1]} \circ f_{[a, b]})(x) = (f_{[a, b]} \circ f_{[0, 1]})(x)$$

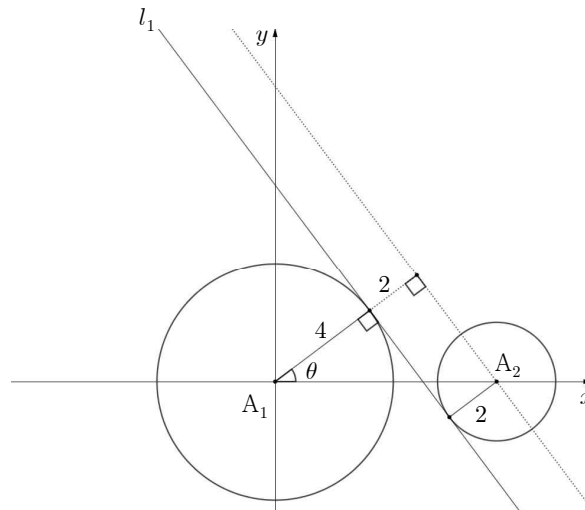
가 성립하도록 하는 점 $P(a, b)$ 의 영역을 구하시오. (단, 실수 a 는 음이 아닌 실수이다.)





[수학A(인문)_오전]

[1-1]



두 원 A_1, A_2 의 중심이 각각 $(0, 0), \left(\frac{15}{2}, 0\right)$ 이고 반지름이 $r_1 = 4, r_2 = 2$ 이며 직선 l_1 은
공통내접선 중 y 절편이 양수인 직선이다. 위의 그림에서 $\cos \theta = \frac{6}{\frac{15}{2}} = \frac{4}{5}$ 이므로

$\tan \theta = \frac{3}{4}$ 이고, $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{4}{3}$ 이다. 그러므로 직선 l_1 의 방정식은

$$y = -\frac{4}{3}x + b, \quad 4x + 3y - 3b = 0 \quad (b > 0, b \text{는 상수})$$

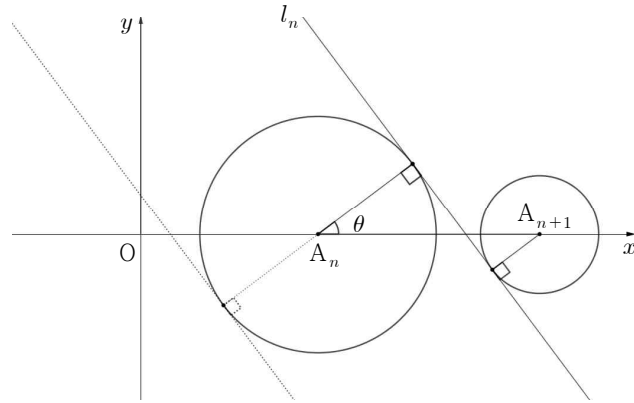
로 둘 수 있고 직선 l_1 이 원 A_1 의 접선이므로 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 l_1 에 이르는 거리는
 $4(=r_1)$ 이다. 따라서

$$\frac{|-3b|}{5} = 4, \quad b = \frac{20}{3}$$

이고 직선 l_1 의 방정식은 $4x + 3y - 20 = 0$ 이다.



[1-2]



$n \geq 2$ 라고 하자. 그러면, 두 원 A_n, A_{n+1} 의 중심이 각각 $\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{15}{2^i}, 0\right), \left(\sum_{i=1}^n \frac{15}{2^i}, 0\right)$ 이고 반지름은 $r_n = \frac{8}{2^n}, r_{n+1} = \frac{8}{2^{n+1}}$ 이며 직선 l_n 은 공통내접선 중 y 절편이 큰 직선이다. 한

편, 중심 간의 거리 d 는 $d = \sum_{i=1}^n \frac{15}{2^i} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{15}{2^i} = \frac{15}{2^n}$ 이고 반지름의 합은

$r_n + r_{n+1} = \frac{8}{2^n} + \frac{8}{2^{n+1}} = \frac{12}{2^n}$ 이다. 또한, $\cos \theta = \frac{r_n + r_{n+1}}{d} = \frac{\frac{12}{2^n}}{\frac{15}{2^n}} = \frac{4}{5} \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 이라고

두면, $\tan \theta = \frac{3}{4}$ 이므로 l_n 의 기울기는 $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{\tan \theta} = -\frac{4}{3}$ 이다.

그러므로 직선 l_n 의 방정식은

$$y = -\frac{4}{3}x + a_n, \quad 4x + 3y - 3a_n = 0$$

이고 직선 l_n 이 원 A_n 의 접선이므로 점 $\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{15}{2^i}, 0\right)$ 에서 직선 l_n 에 이르는 거리는

$\frac{8}{2^n} (=r_n)$ 이다. 따라서

$$\frac{\left|4 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{15}{2^i} - 3a_n\right|}{5} = \frac{8}{2^n},$$

$$4 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{15}{2^i} - 3a_n = \frac{40}{2^n} \quad \text{또는} \quad 4 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{15}{2^i} - 3a_n = -\frac{40}{2^n},$$

$$60\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - 3a_n = \frac{40}{2^n} \quad \text{또는} \quad 60\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - 3a_n = -\frac{40}{2^n},$$



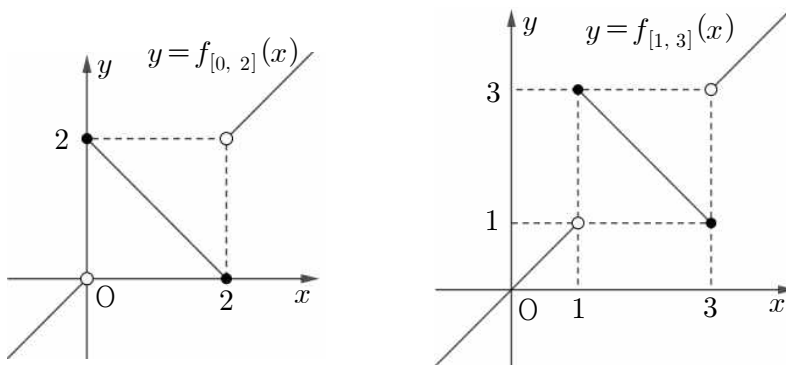
$$a_n = \frac{1}{3} \left(60 - \frac{80}{2^{n-1}} \right) \quad \text{또는} \quad a_n = \frac{1}{3} \left(60 - \frac{40}{2^{n-1}} \right)$$

이다. 이 중에서 큰 값이므로 $a_n = \frac{1}{3} \left(60 - \frac{40}{2^{n-1}} \right)$ 이다. 따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 20$ 이다.

[수학B(인문, 자연)_오전]

[2-1]

(예시 답안 1) 두 함수 $y=f_{[0, 2]}(x)$ 와 $y=f_{[1, 3]}(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프를 이용하여 $x=1$ 과 $x=2$ 에서의 연속성을 조사하면

(i) $x=1$ 에서의 연속성

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f_{[0, 2]}(f_{[1, 3]}(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f_{[0, 2]}(t) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f_{[0, 2]}(f_{[1, 3]}(x)) = \lim_{t \rightarrow 3-} f_{[0, 2]}(t) = 3$$

에서 $\lim_{x \rightarrow 1-} f_{[0, 2]}(f_{[1, 3]}(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 1+} f_{[0, 2]}(f_{[1, 3]}(x))$ 이므로

함수 $y = (f_{[0, 2]} \circ f_{[1, 3]})(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

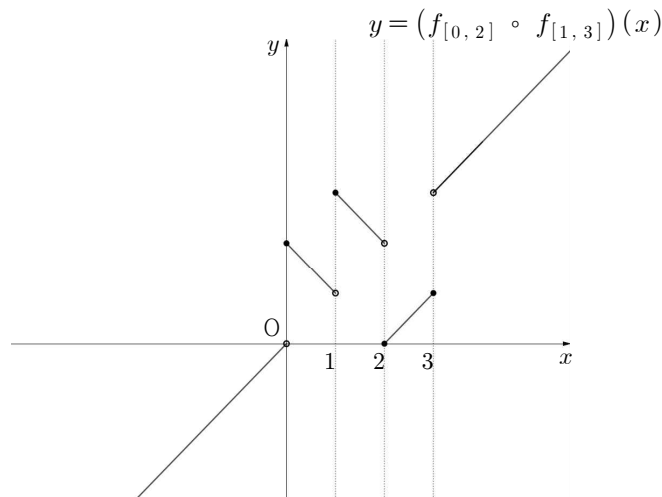
(ii) $x=2$ 에서의 연속성

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f_{[0, 2]}(f_{[1, 3]}(x)) = \lim_{t \rightarrow 2+} f_{[0, 2]}(t) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f_{[0, 2]}(f_{[1, 3]}(x)) = \lim_{t \rightarrow 2-} f_{[0, 2]}(t) = 0$$

에서 $\lim_{x \rightarrow 2-} f_{[0, 2]}(f_{[1, 3]}(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 2+} f_{[0, 2]}(f_{[1, 3]}(x))$ 이므로

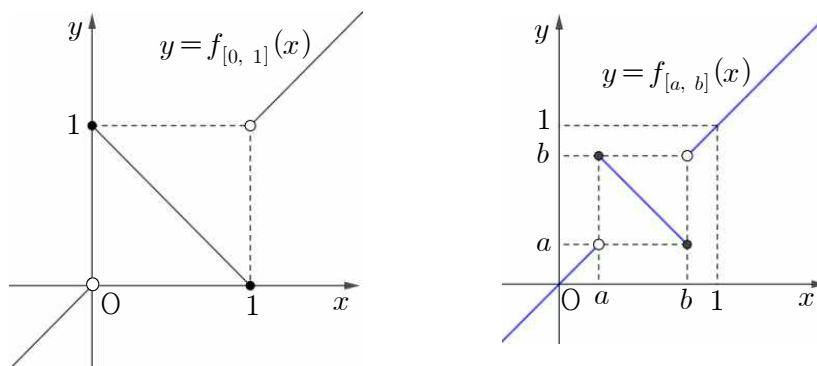
함수 $y = (f_{[0, 2]} \circ f_{[1, 3]})(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.



[2-2]

(예시 답안 1)

두 함수 $y=f_{[0,1]}(x)$ 와 $y=f_{[a,b]}(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



실수 전체의 구간을 다음과 같이 나누어 생각하자.

(i) $x < 0$ 또는 $x > 1$ 인 경우, $f_{[0,1]}(x) = f_{[a,b]}(x) = x$ 이고

$$(f_{[0,1]} \circ f_{[a,b]})(x) = (f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x) = x$$

이므로 이 범위의 모든 실수 x 에 대해 성립한다.

(ii) $0 \leq x < a$ 또는 $b < x \leq 1$ 인 경우, $f_{[0,1]}(x) = -x+1$, $f_{[a,b]}(x) = x$ 이고

$$(f_{[0,1]} \circ f_{[a,b]})(x) = (f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x) = -x+1$$

이므로 이 범위의 모든 실수 x 에 대해 성립한다.

(iii) $a \leq x \leq b$ 인 경우, $f_{[0,1]}(x) = -x+1$, $f_{[a,b]}(x) = a+b-x$ 이고

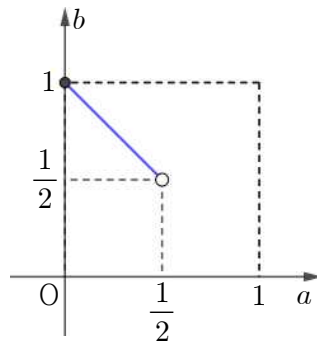
$$(f_{[0,1]} \circ f_{[a,b]})(x) = x-a-b+1$$

$$(f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x) = x-1+a+b$$

이다. 이 범위의 모든 실수 x 에 대해 성립하기 위한 조건은 $a+b=1$ 이다.

그러므로 문제의 조건 $0 \leq a < b \leq 1$ 에서 성립하는 점 $P(a, b)$ 는 $0 \leq a < \frac{1}{2}$ 이고 $a+b=1$

을 만족하므로 집합 $\{(a, b) \mid a+b=1, 0 \leq a < \frac{1}{2}\}$ 의 원소이다.

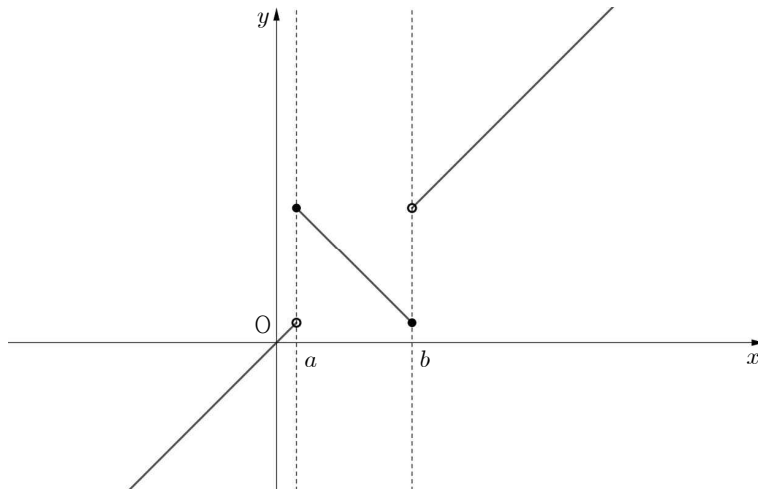


(예시 답안 2)

함수

$$f_{[a,b]}(x) = \begin{cases} a+b-x & (x \in [a, b]) \\ x & (x \notin [a, b]) \end{cases}$$

의 그래프의 개형은 아래와 같고 $f_{[a,b]}^{-1} = f_{[a,b]}$ 이다. 즉, $f_{[a,b]}(x)$ 는 $y=x$ 에 대칭인 함수이다.



그러므로 $(f_{[0,1]} \circ f_{[a,b]})^{-1} = f_{[a,b]}^{-1} \circ f_{[0,1]}^{-1} = f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]}$ 이다. 따라서

$$(f_{[0,1]} \circ f_{[a,b]})(x) = (f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x)$$

가 성립하기 위한 필요충분조건은

$$((f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]}) \circ (f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]}))(x) = x$$

이다. 즉, 함수 $y = (f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x)$ 가 $y=x$ 에 대하여 대칭이 된다는 것이다.

한편,

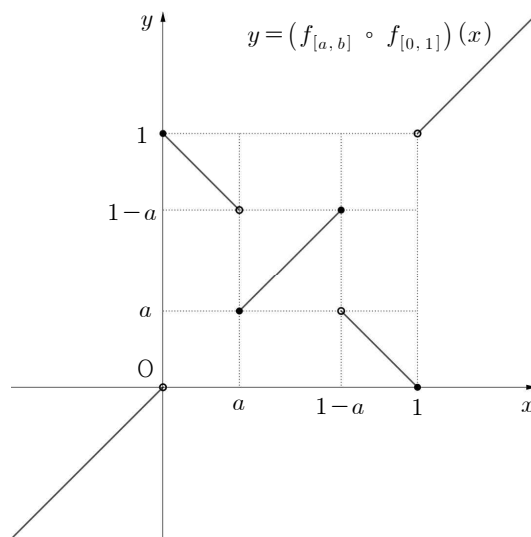
$$(f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x) = \begin{cases} a+b-1+x & (x \in [1-b, 1-a]) \\ 1-x & (x \in [0, 1-b) \cup (1-a, 1]) \\ x & (x \notin [0, 1]) \end{cases}$$

이므로 $y = (f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x)$ 가 $y=x$ 에 대하여 대칭이 되기 위해서는 $a+b-1+x=x$,

즉 $a+b=1$ 이어야 한다. 더 나아가 $a+b=1$ 이면 $0 \leq a < b \leq 1$ 로부터 $0 \leq a < \frac{1}{2}$ 을 얻을 수 있다. 또한 $a+b=1$ 이면

$$(f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x) = \begin{cases} x & (x \in [a, 1-a]) \\ 1-x & (x \in [0, a) \cup (1-a, 1]) \\ x & (x \notin [0, 1]) \end{cases}$$

이므로 $y = (f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x)$ 가 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 따라서 구하고자 하는 모든 점 $P(a, b)$ 의 집합은 $\{(a, b) \mid a+b=1, 0 \leq a < \frac{1}{2}\}$ 이다.



[수학C(인문)_오후]

[1-1]

(예시 답안 1)

$y=x^3$ 의 도함수가 $y'=3x^2$ 이므로 만족시키는 직선 l 은

$$y = -\frac{1}{3t^2}(x-t) + t^3, \quad y = -\frac{1}{3t^2}x + \frac{1}{3t} + t^3$$

이다. 직선 l 이 점 (a, b) 를 지나므로

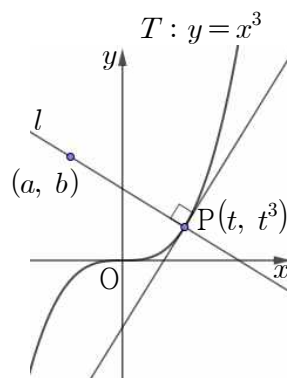
$$b = -\frac{1}{3t^2}a + \frac{1}{3t} + t^3$$

을 만족하고 이를 정리하면

$$3t^5 - 3bt^2 + t - a = 0$$

이므로 구하는 다항식은 $3t^5 - 3bt^2 + t - a$ 이다.

한편 곡선 $y=x^3$ 과 직선 l 이 (t, t^3) 에서 수직으로 만날 때, 곡선 $y=x^3$ 과 직선 l 의 교





점의 x 좌표는 등식

$$x^3 = -\frac{1}{3t^2}x + \frac{1}{3t} + t^3, \quad (x-t)\left(x^2 + tx + t^2 + \frac{1}{3t^2}\right) = 0$$

을 만족시킨다. 방정식 $x^2 + tx + t^2 + \frac{1}{3t^2} = 0$ 의 판별식 $D = -3t^2 - \frac{4}{3t^2} < 0$ 이므로 곡선 T 와 직선 l 이 수직으로 만날 수 있는 점은 $x=t$ 일 때뿐이다. 따라서 곡선 T 와 직선 l 이 수직으로 만날 수 있는 점은 많아야 하나이다.

(예시 답안 2)

$y' = 3x^2$ 이고 직선 l 은 곡선 T 와 점 $P(t, t^3)$ 에서 수직으로 만나므로 직선 l 의 방정식은

$$y = -\frac{1}{3t^2}(x-t) + t^3$$

이따. 이 직선이 점 (a, b) 를 지나므로

$$b = -\frac{1}{3t^2}(a-t) + t^3, \quad 3t^5 - 3bt^2 + t - a = 0$$

이다.

이제, 곡선 T 와 직선 l 이 수직으로 만날 수 있는 점은 많아야 하나임을 보이자.

직선 l 이 곡선 T 와 수직으로 만나는 서로 다른 두 점을 각각 $P_1(t_1, t_1^3)$, $P_2(t_2, t_2^3)$ 라 가정하자. 그러면 직선 l 의 방정식은

$$y = -\frac{1}{3t_1^2}(x-t_1) + t_1^3$$

이면서

$$y = -\frac{1}{3t_2^2}(x-t_2) + t_2^3$$

이어야 한다. 따라서

$$\begin{cases} -\frac{1}{3t_1^2} = -\frac{1}{3t_2^2} \\ -\frac{1}{3t_1} - t_1^3 = -\frac{1}{3t_2} - t_2^3 \end{cases}$$

위 식을 정리하면

$$t_1 = -t_2, \quad \frac{1}{3t_1} + t_1^3 = \frac{1}{3t_2} + t_2^3$$

이므로 $3t_2^4 = -1$ 이 되어 모순이다.

그러므로 직선 l 이 곡선 T 와 수직으로 만나는 점 $P_1(t_1, t_1^3)$ 이 존재하면, 수직으로 만나는 또 다른 점 $P_2(t_2, t_2^3)$ 가 존재할 수가 없다. 따라서 곡선 T 와 직선 l 이 수직으로 만



날 수 있는 점은 많아야 하나이다.

※ 점 (a, b) 를 지나면서 곡선 T 와 수직으로 만나는 직선 l 을 고려하자. 그리고

$a = -\frac{82}{3}$, $b = \frac{94}{9}$ 일 때 $g(t) = 3t^5 - 3bt^2 + t - a$ 라 두면

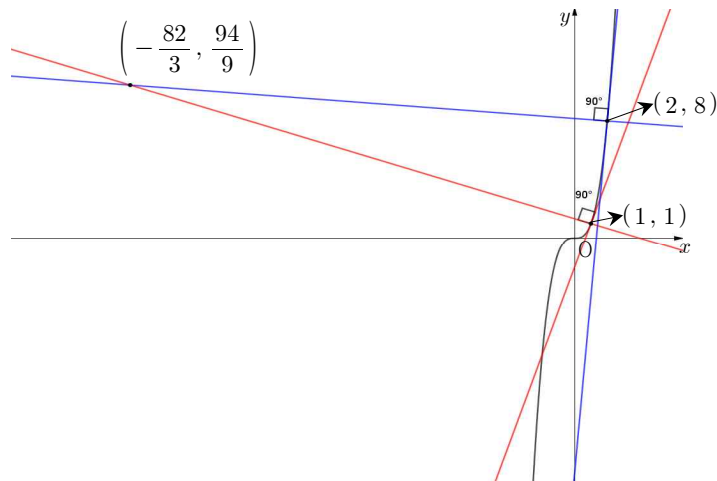
$$g(1) = 3 - 3b + 1 - a = 3 - \frac{94}{3} + 1 + \frac{82}{3} = 0,$$

$$g(2) = 96 - 12b + 2 - a = 96 - \frac{4 \times 94}{3} + 2 + \frac{82}{3} = 98 - \frac{294}{3} = 0$$

이다. 따라서 점 $\left(-\frac{82}{3}, \frac{94}{9}\right)$ 를 지나는 직선 l 은 곡선 T 와 적어도 두 점 $(1, 1)$, $(2, 8)$

에서 수직으로 만난다.

아래 그래프를 통해서도 확인할 수 있다.



이 문제 [1-1]은 점 (a, b) 를 지나는 고정된 직선 l 이 곡선 T 와 만나는 점은 3개까지 가능하다. 이 만나는 점들에서 수직으로 만날 수도 있고 수직으로 만나지 않을 수도 있는데, 수직으로 만나는 점은 많아야 하나임을 주장하는 것이다. 그래서 문제의 해석을 잘 해야 할 것으로 보인다.

[1-2]

(예시 답안 1)

제4사분면에 속하는 점 (a, b) 를 지나는 직선 l 이 곡선 T 와 제1사분면 위의 점 $P(t, t^3)$ 에서 수직으로 만난다고 하자. 그러면 $a > 0$, $b < 0$, $t > 0$ 이고 [1-1]에 의해서 $3t^5 - 3bt^2 + t - a = 0$ 이다. $g(t) = 3t^5 - 3bt^2 + t - a$ 라 두면

$$g'(t) = 15t^4 - 6bt + 1$$

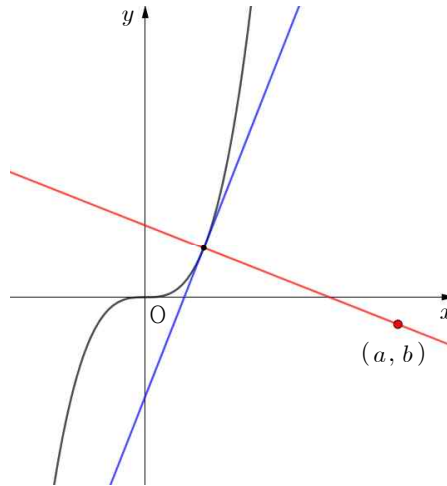
이고 $b < 0$, $t > 0$ 이므로 $g'(t) > 0$ 이다. 그러므로 $t > 0$ 의 범위에서 $g(t)$ 는 증가함수이다. 한편,



$$g(0) = -a < 0, \quad g(a) = 3a^5 - 3a^2b + a - a = 3a^5 - 3a^2b > 0$$

이고 $g(t) = 3t^5 - 3bt^2 + t - a$ 는 연속함수이므로 사잇값의 정리에 의해 $g(t) = 0$ 인 t 가 0과 a 사이에 적어도 하나 존재한다. 그런데 $t > 0$ 의 범위에서 $g(t)$ 는 증가함수이므로 $t > 0$ 의 범위에서 $g(t) = 0$ 인 t 는 오직 하나 존재한다.

따라서 구하고자 하는 직선의 개수는 1이다.



(예시 답안 2)

[1-1]의 방정식 $3t^5 - 3bt^2 + t = a$ ($a > 0, b < 0$)의 근의 개수가 곡선 T 와 수직으로 만나는 직선의 개수다.

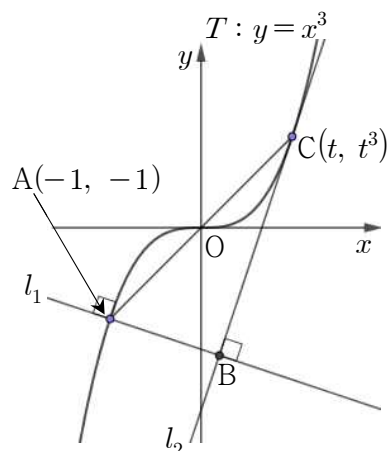
함수 $f(t) = 3t^5 - 3bt^2 + t$ 에 대하여 $f'(t) = 15t^4 - 6bt + 1$ 이다.

$b < 0$ 에서 $t > 0$ 인 실수 t 에 대하여 $f'(t) > 0$ 이므로 함수 $y = f(t)$ 는 이 구간에서 증가한다.

따라서 함수 $y = f(t)$ 는 $(0, 0)$ 을 지나고 $y = a$ ($a > 0$)과 만나는 교점은 1개이므로 곡선 T 와 수직으로 만나는 직선의 개수는 1이다.

[1-3]

(예시 답안 1)



[1-1]의 내용에 의해 직선 l_1 의 방정식은

$$l_1 : y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$$

이다. 직선 l_1 에 $x = \frac{1}{5}$ 을 대입하면 $y = -\frac{7}{5}$ 이므로 직선 l_1 은 점 $B\left(\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}\right)$ 을 지난다.

점 $B\left(\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}\right)$ 을 지나고 곡선 T 에 접하는 직선 l_2 와 곡선 T 의 접점을 $C(t, t^3)$ 라 하면

$$l_2 : y = 3t^2(x-t) + t^3 = 3t^2x - 2t^3$$

이고 점 B 를 직선 l_2 에 대입하면

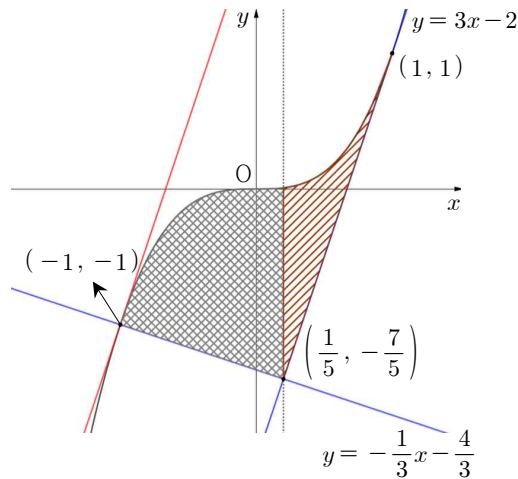
$$-\frac{7}{5} = \frac{3}{5}t^2 - 2t^3, (t-1)(10t^2 + 7t + 7) = 0$$

이다. 따라서 만족하는 t 의 값이 1이므로 직선 $l_2 : y = 3x - 2$ 이다.

또한 곡선 T 는 원점에 대칭이고 $l_1 \perp l_2$ 이므로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\triangle ABC$ 의 넓이와 같다.

$$(\text{넓이}) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \sqrt{10} \times \frac{4}{5} \sqrt{10} = \frac{8}{5}$$

※ 정적분을 이용하여 계산하면 다음과 같다.



구하고자 하는 도형의 넓이 S 는

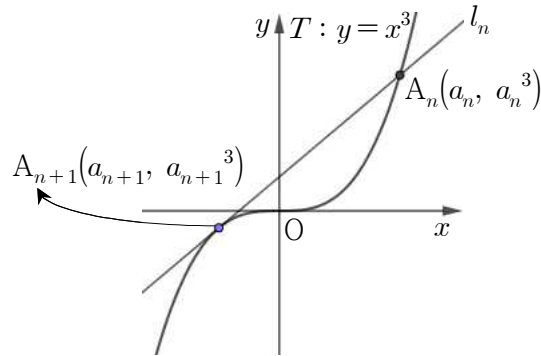
$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{\frac{1}{5}} \left(x^3 + \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right) dx + \int_{\frac{1}{5}}^1 (x^3 - 3x + 2) dx \\ &= 0 + \left[\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x \right]_{-1}^{\frac{1}{5}} + \left[-\frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{\frac{1}{5}}^1 \\ &= \frac{8}{5} \end{aligned}$$



[1-4]

(예시 답안 1)

점 $A_n(a_n, a_n^3)$ 을 지나 점 $A_{n+1}(a_{n+1}, a_{n+1}^3)$ 에서 곡선 T 에 접하는 직선이 l_n 이므로 만족하는 직선의 방정식은 $l_n : y = 3a_{n+1}^2x - 2a_{n+1}^3$ 이다.



곡선 T 와 직선 l_n 의 교점 중 접점이 아닌 점의 x 좌표가 a_n 이므로

$$a_n^3 = 3a_{n+1}^2 \cdot a_n - 2a_{n+1}^3, \quad (a_n - a_{n+1})^2(a_n + 2a_{n+1}) = 0$$

만족하는 식은 $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$ 이다.

따라서 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = t\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이다.

한편, 곡선 T 와 직선 l_n 으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} S_n &= \left| \int_{a_{n+1}}^{a_n} (3a_{n+1}^2x - 2a_{n+1}^3 - x^3) dx \right| = \frac{1}{12}(a_n - a_{n+1})^4 \\ &= \frac{1}{12} \left\{ t\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - t\left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}^4 = \frac{t^4}{12} \left\{ -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}^4 \\ &= \frac{t^4}{12} \times 3^4 \left(-\frac{1}{2}\right)^{4n} = \frac{27}{4} t^4 \left(\frac{1}{16}\right)^n \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{27}{4} t^4 \left(\frac{1}{16}\right)^n = \frac{27}{4} t^4 \times \frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{9}{20} t^4 = 1$$

이므로 만족하는 t 의 값은 $t = \left(\frac{20}{9}\right)^{\frac{1}{4}}$ 이다.

(예시 답안 2)

점 A_2 의 좌표를 (s, s^3) 라고 두고 접선 l_1 의 방정식을 구하면

$$y = 3s^2(x - s) + s^3$$

이고 직선 l_1 이 점 $A_1(t, t^3)$ 을 지나므로

$$t^3 = 3s^2(t-s) + s^3, (t-s)(t^2 + ts - 2s^2) = 0, (t-s)^2(t+2s) = 0$$

이다. 그러므로 $s = -\frac{t}{2}$, $A_2\left(-\frac{t}{2}, -\frac{t^3}{8}\right)$ 이고 직선 l_1 의 방정식은

$$y = \frac{3}{4}t^2\left(x + \frac{1}{2}t\right) - \frac{1}{8}t^3, y = \frac{3t^2}{4}x + \frac{t^3}{4}$$

이다. 따라서 S_1 은

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-\frac{t}{2}}^t \left(\frac{3t^2}{4}x + \frac{t^3}{4} - x^3 \right) dx \\ &= \left[\frac{3t^2}{8}x^2 + \frac{t^3}{4}x - \frac{1}{4}x^4 \right]_{-\frac{t}{2}}^t \\ &= \frac{27}{64}t^4 \end{aligned}$$

이다. S_2 를 구하는 과정은 S_1 을 구하는 과정과 똑같은데 $s < -\frac{s}{2}$ 이고 구간 $\left[s, -\frac{s}{2}\right]$ 에

서 $\frac{3t^2}{4}x + \frac{t^3}{4} \geq x^3$ 인 것이 다르다. 따라서

$$S_2 = \frac{27}{64}s^4 = \frac{27}{64}\left(-\frac{1}{2}t\right)^4 = \frac{1}{16}S_1$$

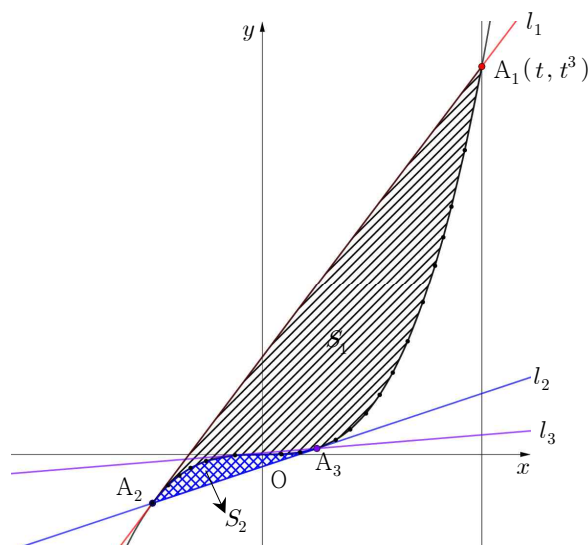
이다. S_n 에서 S_{n+1} 을 구하는 과정도 같은 과정으로 이루어지므로

$$S_{n+1} = \frac{1}{16}S_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

이 성립한다. 그러므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{16}{15} \left(\frac{27}{64}t^4 \right) = 1, \quad \frac{9}{20}t^4 = 1, \quad t = \sqrt[4]{\frac{20}{9}}$$

이다.





※ S_n 을 구하는 과정을 제시하면 다음과 같다.

점 A_2 의 좌표와 접선 l_1 의 방정식을 구하는 과정과 같은 과정에 의해서, $A_n(t_n, t_n^3)$ 이라

하면 $A_{n+1}\left(-\frac{t_n}{2}, -\frac{t_n^3}{8}\right)$ 이고 직선 l_n 의 방정식은 $y = \frac{3t_n^2}{4}x + \frac{t_n^3}{4}$ 이다. 그러므로

$$A_n\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}t, \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}t^3\right)$$

이고 직선 l_n 의 방정식은 $y = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}t^2x + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}t^3$ 이다. S_n 을 구하기 위해서 직

선 l_n 의 방정식 $y = \frac{3t_n^2}{4}x + \frac{t_n^3}{4}$ 과 $t_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}t$ 임을 이용하자. 위의 그림과 같은 형태로 S_n 이 만들어지므로

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(x^3 - \frac{3t_n^2}{4}x - \frac{t_n^3}{4}\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3t_n^2}{8}x^2 - \frac{t_n^3}{4}x\right]_{t_n}^{t_{n+1}} \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3t_n^2}{8}x^2 - \frac{t_n^3}{4}x\right]_{t_n}^{-\frac{t_n}{2}} = \frac{27}{64}t_n^4 = \frac{27}{64}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}t^4 \\ &= \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}S_1 \end{aligned}$$

[수학D(자연)_오전]

[1-1]

(예시 답안 1)

평면 α_n 과 xy 평면의 교선의 방정식이 $x+y=n$, $z=0$ 이므로 평면 α_n 의 방정식을 $x+y+az=n$ 이라 하자.

평면 α_n 이 점 $(1, 0, 1)$ 을 지나므로 $a=n-1$ 이다.

따라서 평면 α_n 의 방정식은 $\alpha_n : x+y+(n-1)z=n$ 이다.

같은 방법으로 평면 β_n 의 방정식은 $\beta_n : x-y+nz=n$ 이다.

직육면체 V 는 오른쪽 그림과 같이 가로, 세로가 각각

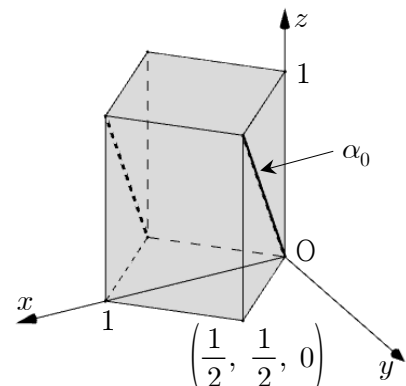
$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이고 높이가 1 이다.

평면 α_0 과 α_1 의 방정식은

$$\alpha_0 : x+y-z=0, \alpha_1 : x+y=1$$

이다. 세 점 $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ 이 평면 α_0

위의 점이므로 평면 α_0 은 이 직육면체를 이등분한다.

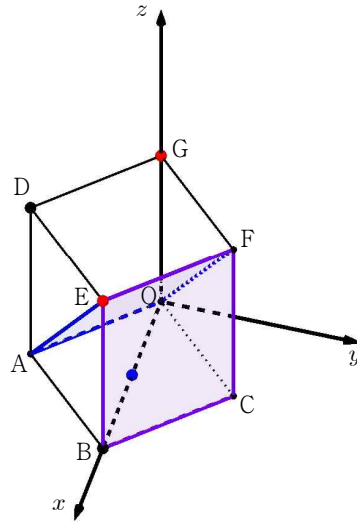


따라서 점 $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ 을 포함하는 다면체는 삼각기둥이고 구하는 부피는

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 \right) = \frac{1}{4}$$

이다.

(예시 답안 2)



직육면체의 꼭짓점을 구해보면 $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$, $B(1, 0, 0)$, $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $O(0, 0, 0)$, $D\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$, $E(1, 0, 1)$, $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$, $G(0, 0, 1)$ 이다. 또한 점 $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ 은 선분 BO의 중점이다. 세 점 A, O, E가 평면 α_0 위의 점이고 세 점 B, C, E가 평면 α_1 위의 점이므로, 평면 α_0 는 평면 AEFO이고 평면 α_1 은 평면 BEFC이다. 그러므로 구하는 다면체는 주어진 직육면체를 모서리 AO와 모서리 FE(직육면체의 중심을 대칭의 중심으로 해서 모서리 AO에 대칭인 모서리)를 포함하는 평면으로 이등분한 것 중에 아래쪽(z축 방향에서)에 해당하는 삼각기둥이다. 따라서 그 부피는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BE} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{1}{2}} \times 1 \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

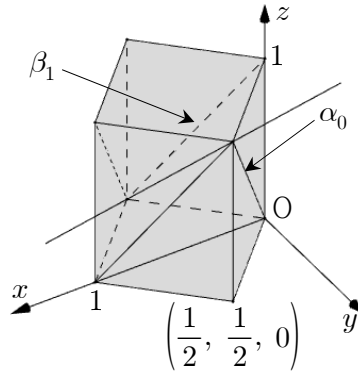
이다.

[1-2]

(예시 답안 1)

평면 β_0 과 β_1 의 방정식은

$$\beta_0 : x - y = 0, \beta_1 : x - y + z = 1$$

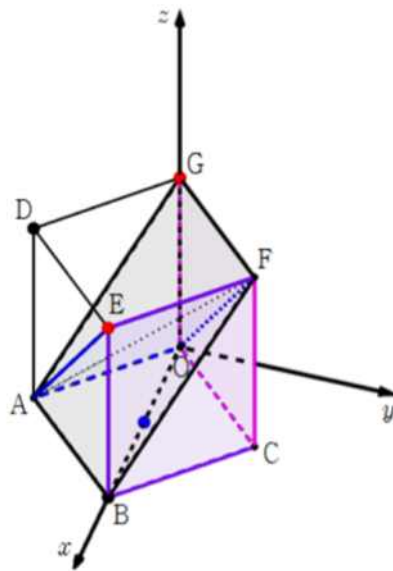


이다. 세 점 $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ 이 평면 β_1 위의 점이므로 $[1-1]$ 과 같이 평면 β_1 은 이 직육면체를 이등분한다.

한편 네 평면 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ 에 의해 잘린 다면체 중 점 $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ 을 포함하는 다면체 X 는 밑면은 한 변의 길이가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 인 정사각형이고, 높이가 1인 사각뿔이다.

따라서 구하는 부피는 $\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \times 1 = \frac{1}{6}$ 이다.

(예시 답안 2)



세 점 C, O, G 가 평면 β_0 위의 점이고 세 점 A, B, G 가 평면 β_1 위의 점이므로, 평면 β_0 는 평면 $CFG O$ 이고 평면 β_1 은 평면 $ABFG$ 이다. 따라서 다면체 X 는 사각형 $ABCO$ 를 밑면으로 하고 점 F 를 뿔의 꼭짓점으로 하며 점 C 에서 만나는 세 면이 서로 수직인 사각뿔이다. 따라서 구하는 부피는

$$\frac{1}{3} (\text{직육면체 } V \text{의 부피}) = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} \times 1 = \frac{1}{6}$$

이다.

[1-3]

(예시 답안 1)

다면체 X 는 평면 $x = \frac{1}{2}$ 에 대칭이므로 $r(t) = r(1-t)$ 이다. 따라서 $0 < t < \frac{1}{2}$ 인 경우만 구해보자.

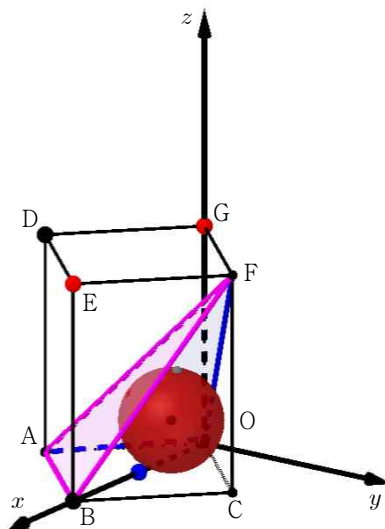
구 S 의 최대 반지름은 $r(t)$, 중심의 좌표가 $(t, 0, r(t))$ 이다. 이 구 S 는 xy 평면과 평면 $\alpha_0 : x+y-z=0$ 에 각각 접하므로 점과 평면 사이의 거리에 의해

$$r(t) = \frac{|t+0-r(t)|}{\sqrt{3}} \quad (\text{단, } t > r(t)),$$

$$\sqrt{3}r(t) = t - r(t), \quad r(t) = \frac{t}{\sqrt{3}+1}$$

이다. 따라서 구하는 식은 $r(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{3}+1} & (0 < t \leq \frac{1}{2}) \\ \frac{1-t}{\sqrt{3}+1} & (\frac{1}{2} < t < 1) \end{cases}$ 이다.

(예시 답안 2)



다면체 X 는 평면 $ACF \left(x = \frac{1}{2} \right)$ 에 대하여 대칭인 도형이므로 $r(t) = r(1-t)$ 이다. 또한, 구 S 가 점 $(t, 0, 0)$ 에서 xy 평면에 접하므로 구의 중심은 $(t, 0, r(t))$ 이다.



i) $0 < t \leq \frac{1}{2}$ 일 때

구의 중심에서 평면 COF에 이르는 거리와 평면 AOG에 이르는 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}t$ ($< t$)로 같고 그 거리는 평면 AOF에 이르는 거리보다는 작고, 그 거리는 구의 중심에서 평면 AOF에 이르는 거리 $r(t)$ 보다는 크다. 그러므로 $r(t) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}t < t$ 이다.

한편, $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$, $O(0, 0, 0)$, $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ 이므로 평면 AOF의 방정식은 $x+y-z=0$ 이다. 그러므로 $r(t)$ 는

$$\frac{|t+0-r(t)|}{\sqrt{3}} = r(t), \quad \frac{t-r(t)}{\sqrt{3}} = r(t), \quad r(t) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}t$$

이다.

ii) $\frac{1}{2} < t < 1$ 일 때

$r(t) = r(1-t)$ 이므로 $r(t) = r(1-t) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-t)$ 이다.

i)과 ii)에 의해서 $r(t)$ 는

$$r(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}-1}{2}t & \left(0 < t \leq \frac{1}{2}\right) \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-t) & \left(\frac{1}{2} < t < 1\right) \end{cases}$$

이다.

[1-4]

(예시 답안 1)

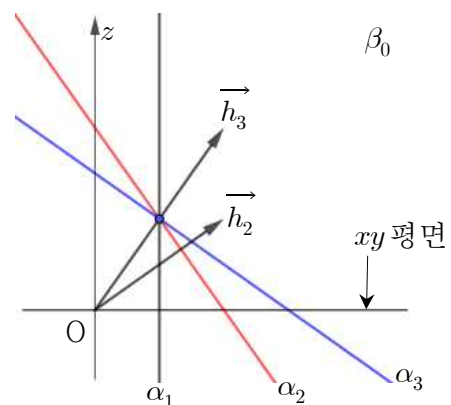
두 평면 $\alpha_n : x+y+(n-1)z=n$, $\beta_0 : x-y=0$ 의 법선벡터를 각각 $\vec{h}_n=(1, 1, n-1)$, $\vec{i}_0=(1, -1, 0)$ 이라 두면 $\vec{h}_n \cdot \vec{i}_0 = 1-1+0=0$ 이므로 $\alpha_n \perp \beta_0$ 이다.

따라서 평면 α_n 의 법선벡터 \vec{h}_n 은 평면 β_0 와 평행하다.

점 $(1, 0, 1)$ 을 평면 β_0 에 정사영한 점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ 이고 다음 그림과 같이 평면 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

을 평면 β_0 에 정사영하면 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ 을 지나는 직선이 된다.

한 점 $A_0(a, b, c)$ 에서 순서대로 평면 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2020}$ 위로의 정사영한 점 $A_1, A_2, \dots, A_{2020}$ 는 평



면 β_0 와 평행한 β'_0 위의 점이므로 2020 개의 점을 포함하는 평면의 법선벡터는 \vec{i}_0 이고 점 $A_0(a, b, c)$ 를 지나는 평면이다.

따라서 구하는 방정식은

$$1 \times (x-a) + (-1) \times (y-b) + 0 \times (z-c) = 0,$$

$$x-y=a-b$$

이다.

(예시 답안 2)

평면 α_n 은 직선

$$x+y=n, \quad z=0$$

을 포함하므로 α_n 의 방정식은 $x+y+cz=n$ (c 는 상수)의 형태이다. 또한, 평면 α_n 은 점 $(1, 0, 1)$ 을 지나므로

$$1+0+c=n, \quad c=n-1$$

이다. 그러므로 평면 α_n 의 방정식이

$$x+y+(n-1)z=n$$

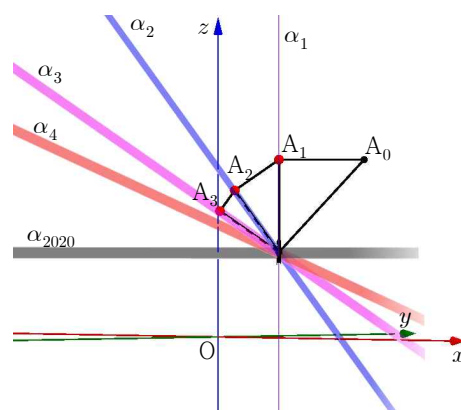
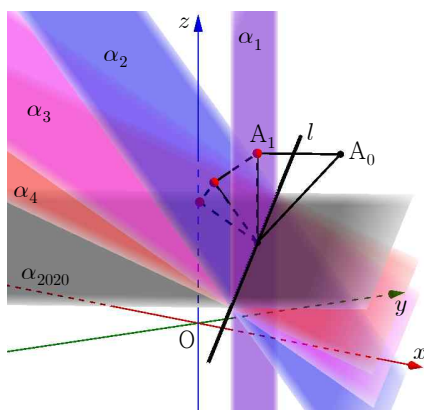
이다. 한편, 직선

$$x+y=n, \quad z=0$$

을 직선 l 이라 하면, 직선 $A_{n-1}A_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)은 평면 α_n 과 수직이고 직선 l 은 평면 α_n 에 포함된 직선이므로 직선 $A_{n-1}A_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)과 직선 l 은 수직이다. 그러므로 직선 l 에 수직이고 점 $A_0(a, b, c)$ 를 지나는 평면을 평면 r 라고 하면, 점 $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_{2020}$ 은 모두 평면 r 위의 점이다. 또한, 평면 r 의 방정식은 직선 l 의 방향벡터 $(1, -1, 0)$ 에 수직이고 점 $A_0(a, b, c)$ 를 지나므로

$$(x-a)-(y-b)=0, \quad x-y=a-b$$

이다.

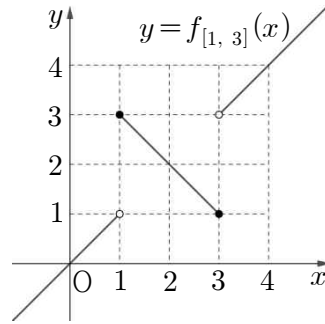
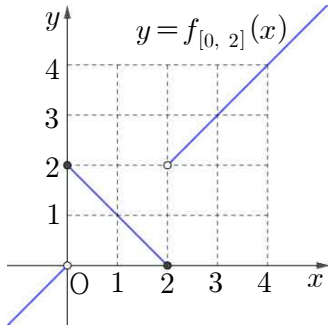




[수학E(자연)_오전]

[2-1]

(예시 답안 1)

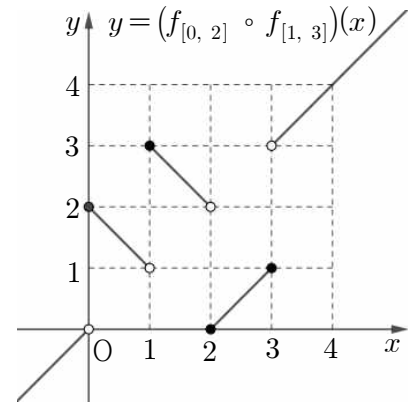
두 함수 $y=f_{[0, 2]}(x)$ 와 $y=f_{[1, 3]}(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.(i) $x < 1$ 또는 $x > 3$ 인 경우, $y=f_{[1, 3]}(x)=x$ 이므로

$$(f_{[0, 2]} \circ f_{[1, 3]})(x) = f_{[0, 2]}(x)$$

(ii) $1 \leq x \leq 3$ 인 경우, $y=f_{[1, 3]}(x)=4-x$ 이므로

$$(f_{[0, 2]} \circ f_{[1, 3]})(x) = \begin{cases} 4-x & (1 \leq x < 2) \\ x-2 & (2 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

(i), (ii)에서 만족하는 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $x=1, 2, 3$ 에서의 함수값은 각각 3, 0, 1이다. 한편, $(f_{[0, 2]} \circ f_{[1, 3]})(x) \geq x+1$ 를 만족하는 x 의 범위는

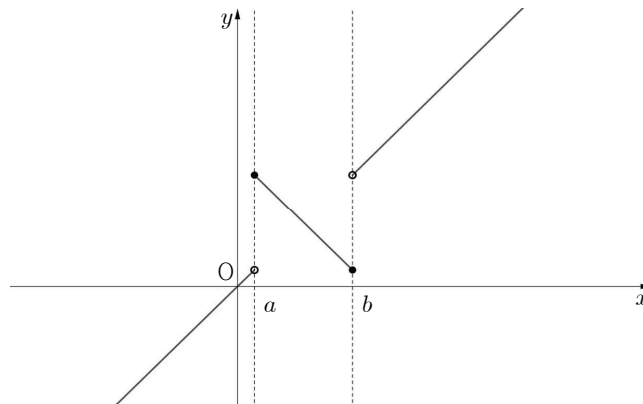


$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \text{또는} \quad 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

이다.

(예시 답안 2)

함수 $f_{[a, b]}(x) = \begin{cases} a+b-x & (x \in [a, b]) \\ x & (x \notin [a, b]) \end{cases}$ 의 그래프의 개형은 아래와 같다.



그러므로

$$(f_{[0,2]} \circ f_{[1,3]})(1) = f_{[0,2]}((f_{[1,3]})(1)) = f_{[0,2]}(3) = 3,$$

$$(f_{[0,2]} \circ f_{[1,3]})(2) = f_{[0,2]}((f_{[1,3]})(2)) = f_{[0,2]}(2) = 0,$$

$$(f_{[0,2]} \circ f_{[1,3]})(3) = f_{[0,2]}((f_{[1,3]})(3)) = f_{[0,2]}(1) = 1$$

이다.

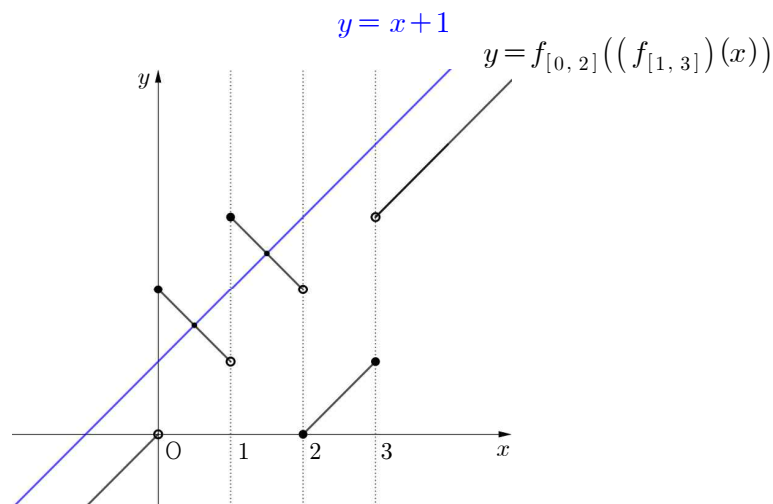
한편,

$$(f_{[0,2]} \circ f_{[1,3]})(x) = \begin{cases} (f_{[0,2]})(4-x) & (x \in [1, 3]) \\ (f_{[0,2]})(x) & (x \notin [1, 3]) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4-x & (1 \leq x < 2) \\ 2-(4-x) & (2 \leq x < 3) \\ 2-x & (0 \leq x < 1) \\ x & (x < 0, x > 3) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4-x & (1 \leq x < 2) \\ 2-(4-x) & (2 \leq x < 3) \\ 2-x & (0 \leq x < 1) \\ x & (x < 0, x > 3) \end{cases}$$

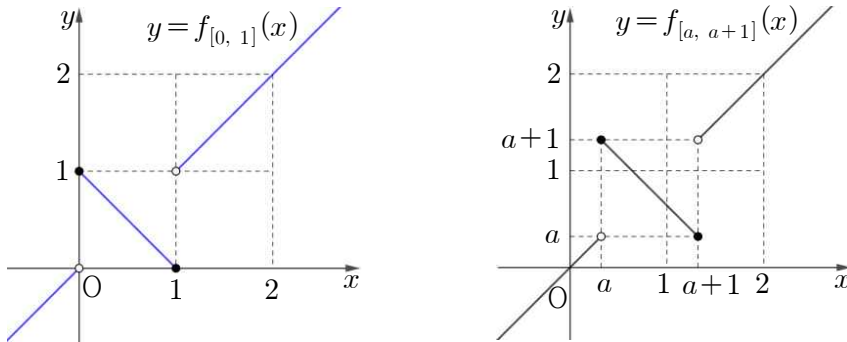
이다. 그러므로 $y = (f_{[0,2]} \circ f_{[1,3]})(x)$ 와 $y = x+1$ 의 그래프를 나타내면 다음과 같다. 따라서 $(f_{[0,2]} \circ f_{[1,3]})(x) \geq x+1$ 를 만족하는 x 의 범위는 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 또는 $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ 이다.





[2-2]

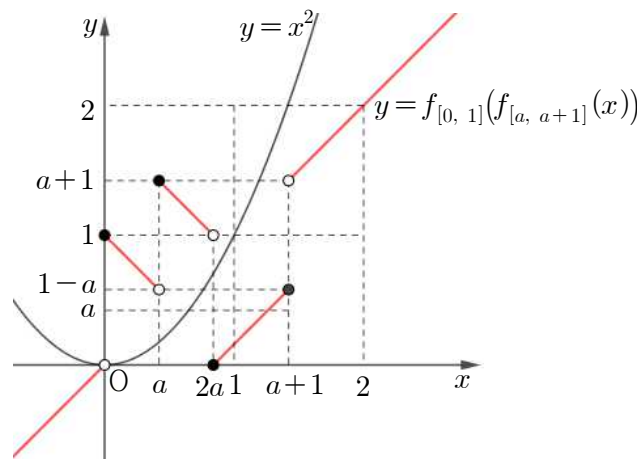
(예시 답안 1)

두 함수 $y=f_{[0,1]}(x)$, $y=f_{[a,a+1]}(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.(i) $x < a$ 또는 $x > a+1$ 인 경우, $y=f_{[a,a+1]}(x)=x$ 이므로

$$(f_{[0,1]} \circ f_{[a,a+1]})(x) = f_{[0,1]}(x)$$

(ii) $a \leq x \leq a+1$ 인 경우, $y=f_{[a,a+1]}(x)=2a+1-x$ 이므로

$$\begin{aligned} (f_{[0,1]} \circ f_{[a,a+1]})(x) &= \begin{cases} 2a+1-x & (a \leq x < 2a) \\ 1-(2a+1-x) & (2a \leq x \leq a+1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -x+2a+1 & (a \leq x < 2a) \\ x-2a & (2a \leq x \leq a+1) \end{cases} \end{aligned}$$

위의 범위에 따라 합성함수 $y=(f_{[0,1]} \circ f_{[a,a+1]})(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.이 때, $y=x^2$ 과 $y=(f_{[0,1]} \circ f_{[a,a+1]})(x)$ 이 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는① $x=a$ 일 때, $y=x^2$ 이 두 점 $(a, 1-a)$ 와 $(a, 1+a)$ 의 사이를 지나는 경우이므로

$$1-a < a^2 \leq a+1 \text{을 만족하는 } a \text{의 범위는 } \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < a \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{이다.}$$

② $y=x-2a$ 가 $y=x^2$ 에 접할 때, $x^2-x+2a=0$ 이고 $D=1-8a=0$ 이다.

$$\text{따라서 만족하는 } a \text{의 범위는 } 0 \leq a < \frac{1}{8} \text{이다.}$$

 $0 \leq a \leq 1$ 이므로 ①, ②에 의해 구하는 a 의 범위는



$$0 \leq a < \frac{1}{8} \quad \text{또는} \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < a \leq 1$$

이다.

(참고) $a=0$ 일 때, $f_{[0,1]}(f_{[0,1]}(0)) = f_{[0,1]}(1) = 0$, $f_{[0,1]}(f_{[0,1]}(1)) = f_{[0,1]}(0) = 1$ 이다.

(예시 답안 2)

$x < 0$ 또는 $x > a+1$ 이면 $(f_{[0,1]} \circ f_{[a,a+1]})(x) = x$ 이고 $x < 0$ 일 때, $x < 0 < x^2$ 이고 $x > a+1$ (≥ 1) 일 때는 $x^2 > x > 1$ 이므로 $0 \leq x \leq 1$ 의 범위에서만 두 그래프가 만난다.

i) $a=0$ 일 때

$y = f_{[a,a+1]}(x)$ 의 역함수가 자기 자신인 $y = f_{[0,1]}(x)$ 이므로

$$(f_{[0,1]} \circ f_{[a,a+1]})(x) = x$$

이다. 따라서 두 함수

$$y = x^2, \quad y = (f_{[0,1]} \circ f_{[a,a+1]})(x)$$

의 그래프가 좌표평면 위의 서로 다른 두 점에서 만난다.

ii) $0 < a \leq 1$ 일 때

$$y = (f_{[0,1]} \circ f_{[a,a+1]})(0) = f_{[0,1]}(0) = 1$$

이므로 $x > 0$ 인 범위에서 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

두 함수

$$y = x^2, \quad y = (f_{[0,1]} \circ f_{[a,a+1]})(x)$$

를 $y=x$ 에 대칭이동한 그래프

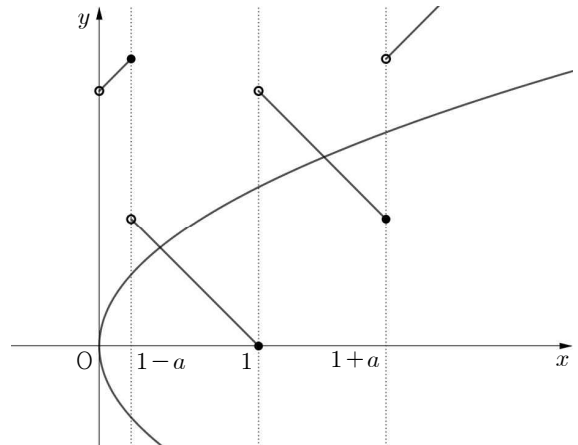
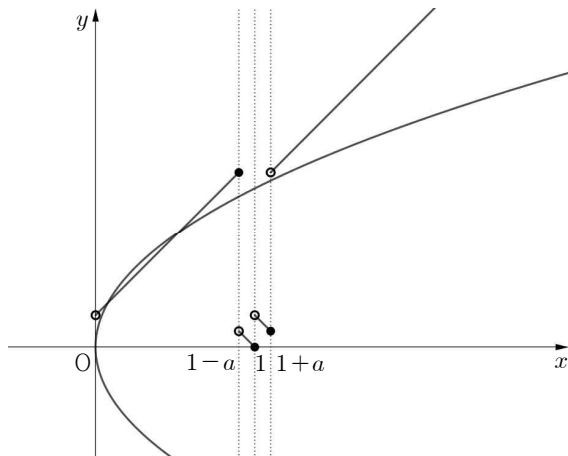
$$x = y^2, \quad y = (f_{[a,a+1]} \circ f_{[0,1]})(x)$$

를 고려하자.

$$(f_{[a,a+1]} \circ f_{[0,1]})(x) = \begin{cases} (f_{[a,a+1]})(1-x) & (0 < x \leq 1) \\ (f_{[a,a+1]})(x) & (x > 1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2a+1-(1-x) & (0 < x \leq 1-a) \\ 1-x & (1-a < x \leq 1) \\ 2a+1-x & (1 < x \leq a+1) \\ x & (x > a+1) \end{cases}$$

그러므로 두 그래프 $x=y^2$, $y=(f_{[a,a+1]} \circ f_{[0,1]})(x)$ 이 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 아래 그림과 같이 두 가지로 분류할 수 있다.



① $y = 2a + 1 - (1-x)$ ($0 < x \leq 1-a$) 와 $x = y^2$ 이 서로 다른 두 점에서 만나는 경우
 $y^2 = x = -2a + y$ 에서 $y^2 - y + 2a = 0$ 이고 판별식 $D = 1 - 8a > 0$ 에서 $a < \frac{1}{8}$ 이어야 한다.

$0 < a \leq 1$ 이므로 $0 < a < \frac{1}{8}$ 이어야 한다.

② 곡선 $x = y^2$ 이 $y = a$ ($1-a < x \leq 1+a$) 와 만나는 경우

$1-a < a^2 \leq 1+a$ 에서 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < a \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이다.

$0 < a \leq 1$ 이므로 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < a \leq 1$ 이다.

i)과 ii)에 의해서, $0 \leq a < \frac{1}{8}$ 또는 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < a \leq 1$ 이다.

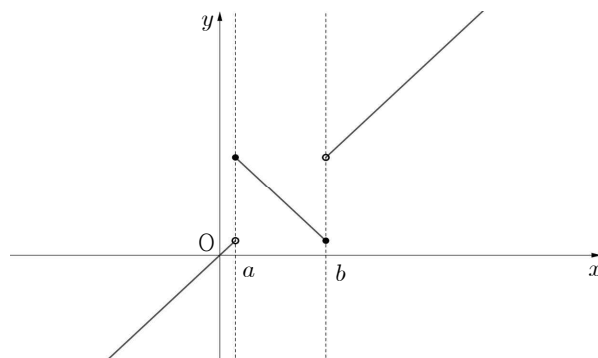
[2-3]

(예시 답안 1)

함수

$$f_{[a,b]}(x) = \begin{cases} a+b-x & (x \in [a, b]) \\ x & (x \notin [a, b]) \end{cases}$$

의 그래프의 개형은 아래와 같고 $f_{[a,b]}(x)$ 의 역함수는 바로 그 자신이다.





그러므로 $(f_{[0,1]} \circ f_{[a,b]})^{-1} = f_{[a,b]}^{-1} \circ f_{[0,1]}^{-1} = f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]}$ 이다. 따라서

$$(f_{[0,1]} \circ f_{[a,b]})(x) = (f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x)$$

가 성립하기 위한 필요충분조건은

$$((f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]}) \circ (f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]}))(x) = x$$

이다. 즉, 함수 $y = (f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x)$ 가 $y = x$ 에 대하여 대칭이 된다는 것이다.

한편,

$$(f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x) = \begin{cases} a+b-x & (x \notin [0,1] \text{ 이고 } x \in [a,b]) \\ x & (x \notin [0,1] \text{ 이고 } x \notin [a,b]) \\ 1-x & (x \in [0,1] \text{ 이고 } 1-x \notin [a,b]) \\ a+b-1+x & (x \in [0,1] \text{ 이고 } 1-x \in [a,b]) \end{cases}$$

이므로 $y = (f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x)$ 가 $y = x$ 에 대하여 대칭이 되기 위해서는

i) $x \in [0,1]$ 이면 $1-x \notin [a,b]$ 또는 ii) $a+b-1+x = x$ 를 만족해야 한다.

i) $x \in [0,1]$ 이면 $1-x \notin [a,b]$ 인 경우

$x \in [0,1]$ 이면 $1-x \in [0,1]$ 이다. 이때 $1-x \notin [a,b]$ 가 되려면 $a > 1$ 이어야 한다.

또한 $a > 1$ 이면

$$(f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x) = \begin{cases} a+b-x & (x \in [a,b]) \\ x & (x \notin [0,1] \text{ 이고 } x \notin [a,b]) \\ 1-x & (x \in [0,1]) \end{cases}$$

이므로 $y = (f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x)$ 가 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

ii) $a+b-1+x = x$ 인 경우

i)에서 $a > 1$ 일 때는 가능하다는 것을 확인했으므로 $0 \leq a \leq 1$ 일 때만 확인하면 된다. 또한, $a+b-1+x = x$ 이므로 $a+b=1$ 이다. 이때 $0 \leq a \leq 1$ 이고 $a < b$ 이므로

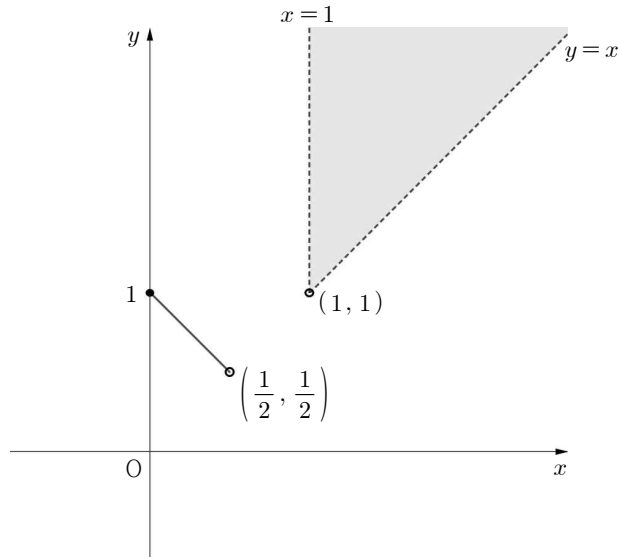
$0 \leq a < \frac{1}{2} < b \leq 1$ 이다. 또한, $a+b=1$ 이고 $0 \leq a < \frac{1}{2} < b \leq 1$ 이면

$$(f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x) = \begin{cases} x & (x \in [a, 1-a]) \\ 1-x & (x \in [0,a) \cup (1-a, 1]) \\ x & (x \notin [0,1]) \end{cases}$$

이다. 그러므로 $y = (f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x)$ 가 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

i), ii)에 의해서, 구하고자 하는 $P(a,b)$ 의 영역은

$$\left\{ (a,b) \mid a+b=1, 0 \leq a < \frac{1}{2} \right\} \cup \{ (a,b) \mid 1 < a < b \}$$

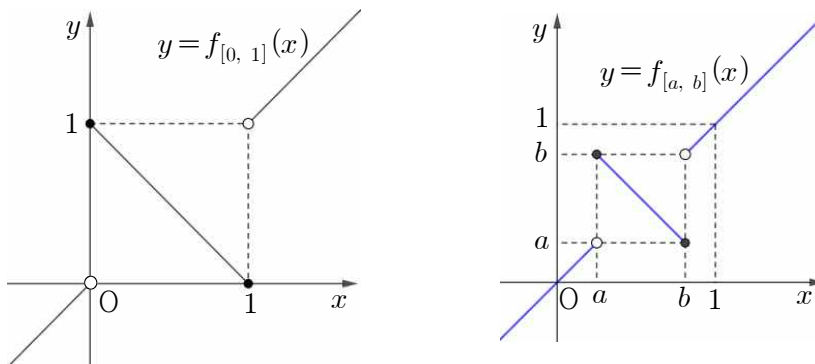


이다.

(예시 답안 2)

음이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 다음과 같은 3가지 경우로 생각하자.

① $0 \leq a < b \leq 1$ 인 경우, 두 함수 $y=f_{[0, 1]}(x)$ 와 $y=f_{[a, b]}(x)$ 의 그래프는



이다. 이 때, 실수 전체의 구간을 다음과 같이 나눈다.

(i) $x < 0$ 또는 $x > 1$ 인 경우, $f_{[0, 1]}(x) = f_{[a, b]}(x) = x$ 이고

$$(f_{[0, 1]} \circ f_{[a, b]})(x) = (f_{[a, b]} \circ f_{[0, 1]})(x) = x$$

이므로 이 범위의 모든 실수 x 에 대해 성립한다.

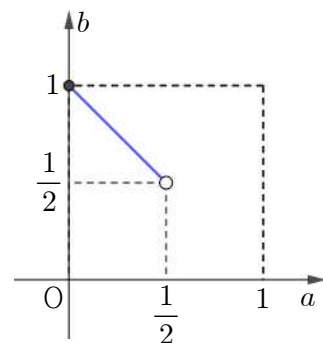
(ii) $0 \leq x < a$ 또는 $b < x \leq 1$ 인 경우, $f_{[0, 1]}(x) = -x + 1$,
 $f_{[a, b]}(x) = x$ 이고

$$(f_{[0, 1]} \circ f_{[a, b]})(x) = (f_{[a, b]} \circ f_{[0, 1]})(x) = -x + 1$$

이므로 이 범위의 모든 실수 x 에 대해 성립한다.

(iii) $a \leq x \leq b$ 인 경우, $f_{[0, 1]}(x) = -x + 1$, $f_{[a, b]}(x) = a + b - x$
 이고

$$(f_{[0, 1]} \circ f_{[a, b]})(x) = x - a - b + 1$$





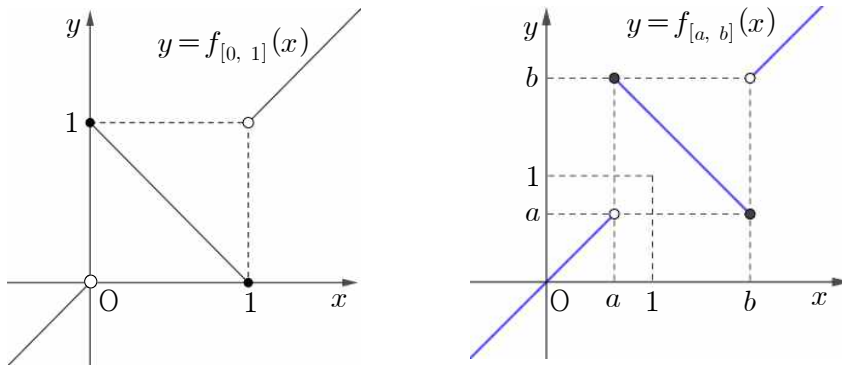
$$(f_{[a, b]} \circ f_{[0, 1]})(x) = x - 1 + a + b$$

이다. 이 범위의 모든 실수 x 에 대해 성립하기 위한 조건은 $a + b = 1$ 이다.

그러므로 문제의 조건 $0 \leq a < b \leq 1$ 에서 성립하는 점 $P(a, b)$ 는 $0 \leq a < \frac{1}{2}$ 이고 $a + b = 1$

을 만족하므로 집합 $\left\{ (a, b) \mid a + b = 1, 0 \leq a < \frac{1}{2} \right\}$ 의 원소이다.

② $0 \leq a \leq 1 < b$ 인 경우, 두 함수 $y = f_{[0, 1]}(x)$ 와 $y = f_{[a, b]}(x)$ 의 그래프는



이다. 실수 전체의 구간을 다음과 같이 나눈다.

(i) $x < 0$ 또는 $x > b$ 인 경우, $f_{[0, 1]}(x) = f_{[a, b]}(x) = x$ 이고

$$(f_{[0, 1]} \circ f_{[a, b]})(x) = (f_{[a, b]} \circ f_{[0, 1]})(x) = x$$

이므로 이 범위의 모든 실수 x 에 대해 성립한다.

(ii) $0 \leq x < a$ 인 경우, $f_{[0, 1]}(x) = -x + 1$, $f_{[a, b]}(x) = x$ 이고

$$(f_{[0, 1]} \circ f_{[a, b]})(x) = (f_{[a, b]} \circ f_{[0, 1]})(x) = -x + 1$$

이므로 이 범위의 모든 실수 x 에 대해 성립한다.

(iii) $1 < x \leq b$ 인 경우, $f_{[0, 1]}(x) = x$, $f_{[a, b]}(x) = a + b - x$ 이고

$$(f_{[0, 1]} \circ f_{[a, b]})(x) = (f_{[a, b]} \circ f_{[0, 1]})(x) = -x + a + b$$

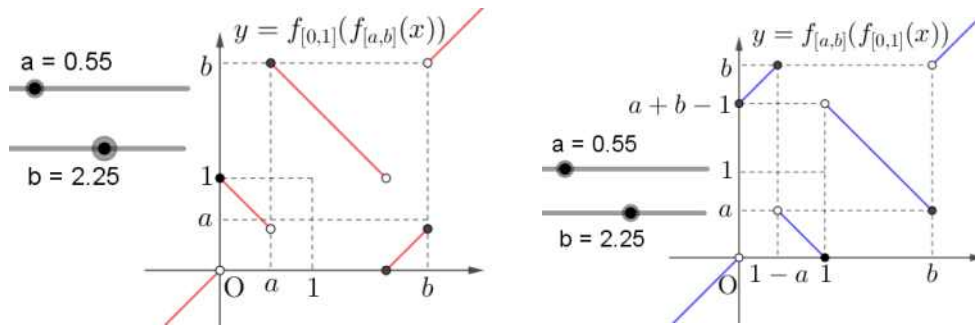
이므로 이 범위의 모든 실수 x 에 대해 성립한다.

(iv) $a \leq x \leq 1$ 인 경우, $f_{[0, 1]}(x) = -x + 1$, $f_{[a, b]}(x) = a + b - x$ 이고

$$(f_{[0, 1]} \circ f_{[a, b]})(x) = x - a - b + 1, (f_{[a, b]} \circ f_{[0, 1]})(x) = x - 1 + a + b$$

이다. 이 범위의 모든 실수 x 에 대해 성립하기 위한 조건은 $a + b = 1$ 이다.

$0 \leq a \leq 1 < b$ 의 조건을 만족하는 점 (a, b) 는 존재하지 않는다.



(참고) 두 함수 $y = f_{[0,1]}(x)$ 와 $y = f_{[a,b]}(x)$ 에 대하여 적어도 1개의 함수가 항등함수이면 $(f_{[0,1]} \circ f_{[a,b]})(x) = (f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x)$ 이 성립한다. 따라서 두 함수 $y = f_{[0,1]}(x)$, $y = f_{[a,b]}(x)$ 가 모두 항등함수가 아닌 경우에 대해 성립하는 경우를 찾으면 된다.

③ $1 < a < b$ 인 경우, 모든 실수 x 에 대하여, $f_{[0,1]}(x) = x$ 또는 $f_{[a,b]}(x) = x$ 이므로 $(f_{[0,1]} \circ f_{[a,b]})(x) = (f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x)$ 가 성립한다.

④ $a = 1$ 인 경우

$$(f_{[0,1]} \circ f_{[a,b]})(1) = (f_{[0,1]})(b) = b > a = 1,$$

$$(f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(1) = (f_{[a,b]})(0) = 0$$

이므로, 모든 실수 x 에 대하여 $(f_{[0,1]} \circ f_{[a,b]})(x) = (f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x)$ 가 성립하는 것은 아니다.

①, ②, ③, ④에 의해 $(f_{[0,1]} \circ f_{[a,b]})(x) = (f_{[a,b]} \circ f_{[0,1]})(x)$ 가 성립하도록 하는 점 $P(a, b)$ 의 영역은

$$\left\{ (a, b) \mid a + b = 1, 0 \leq a < \frac{1}{2} \right\} \cup \{ (a, b) \mid 1 < a < b \}$$

이다.

발간을 도와주신 분

기획

전 영 근 부산광역시교육청 교육국장
변 용 권 부산광역시교육청 중등교육과장
강 은 영 부산광역시교육청 중등교육과 장학관
강 상 원 부산광역시교육청 중등교육과 장학사

집필

강 진 희 남산고등학교
구 정 민 예문여자고등학교
김 지 원 정관고등학교
박 윤 효 한국과학영재학교
박 철 호 남일고등학교
심 미 레 사상고등학교
위 성 미 부산과학고등학교
이 우 영 동래원예고등학교
이 재 식 부산국제고등학교
정 경 영 부산사대부설고등학교
조 동 석 금명여자고등학교
최 기 원 부산중앙여자고등학교

2020수리논술 나침반 XII

발행처 부산광역시교육청

발행일 2020년 5월

인쇄처 (주)세영애드인



부산광역시교육청
BUSAN METROPOLITAN CITY OFFICE OF EDUCATION