[아주대학교 문항정보 3]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연(오전) 대문항 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 Ⅰ, 수학Ⅱ
	핵심개념 및 용어	공차, 등차수열, 등차중항, 공비, 등비수열, 등비중항
예상 소요 시간	120분 중 60분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 자연수 $n\ (n \geq 3)$에 대하여, 각 가로줄과 세로줄이 n개의 칸으로 이루어진 정사각형 모양의 표가 있다. [그림 1]은 $n=3$인 경우와 $n=4$인 경우를 표현한 것이다.

$n=3$인 경우 $n=4$인 경우

[그림 1]

이 표의 각 칸에 실수를 하나씩 적어, 위에서부터 k번째 가로줄에 적힌 n개의 수를 왼쪽에서 오른쪽으로 읽어 얻는 수열을 **k번째 가로수열**, 왼쪽에서부터 k번째 세로줄에 적힌 n개의 수를 위에서 아래로 읽어 얻는 수열을 **k번째 세로수열**이라 한다. 각 가로수열과 세로수열이 등차수열 또는 등비수열인 표를 n-**등차등비표**라 하자.

[그림 2]의 표는 각 가로수열과 세로수열이 등차수열 또는 등비수열이므로 모두 3-등차등비표이다.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

4	6	9
2	5	8
1	4	7

[그림 2]

(나) 함수 $f(x)$에 대하여, n-등차등비표의 각 칸마다 그 칸에 적힌 수 x 대신 $f(x)$를 적어 만든 표를 $f(x)$**에 의해 변환한 표**라 하자. 예를 들어 [그림 2]의 두 3-등차등비표를 $f(x)=2x$에 의해 변환한 표는 [그림 3]과 같다.

2	4	6
8	10	12
14	16	18

8	12	18
4	10	16
2	8	14

[그림 3]

[문항]

[문제 1-1] 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하라.

(1) 아래의 3-등차등비표에서 두 번째 가로수열과 두 번째 세로수열은 등차수열이며, 그 외 가로수열과 세로수열은 모두 등비수열일 때, $a+b+c+d+e$ 의 값을 구하라.

10	a	b
c	10	d
40	e	10

(2) 다음 <조건>을 만족하는 3-등차등비표의 개수를 구하라.

< 조 건 >

① 각 칸에 적힌 수는 9 이하의 자연수이다.
② 첫 번째 가로수열은 첫째항만 홀수이고 나머지 항은 짝수이다.
③ 첫 번째 세로수열은 둘째항만 짝수이고 나머지 항은 홀수이다.

홀	짝	짝
짝		
홀		

(3) 자연수 $n\ (n \geq 3)$에 대하여, n-등차등비표에 적힌 모든 수의 합이 20이고 각 가로수열이 등차수열이라 하자. 이 n-등차등비표의 첫 번째 세로수열의 합을 α라 하고 n 번째 세로수열의 합을 β라 하자. α와 β가 이차방정식 $x^2-5x+p=0$ 의 서로 다른 두 실근일 때, n의 값을 구하고 실수 p의 범위를 구하라.

[문제 1-2] 제시문 (가)와 (나)를 읽고 물음에 답하라.

(1) 10-등차등비표를 $f(x) = \log_2 x$ 에 의해 변환한 표의 첫 번째 가로수열은 등차수열이며, 이 가로수열의 첫째항이 4이고 제10항이 40이라 하자. 변환하기 이전의 표에서 첫 번째 가로수열의 합을 구하라.

(2) 두 함수 $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$ 와 $g(x) = x^3 + ax^2 + b$ 에 대하여 아래 3-등차등비표를 합성함수 $(g \circ f)(x)$에 의해 변환한 표가 3-등차등비표일 때, $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프의 교점의 개수를 구하라. (단, $\sqrt{3} > 1.7$)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

3. 출제 의도

[문제 1-1] 등차수열, 등비수열의 개념을 이해하고, 등차중항, 등비중항을 이용하여 주어진 수열의 항의 값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[문제 1-2] 등비수열의 합을 구하고, 문제에 주어진 조건을 이해하고 함수의 그래프의 개형을 추론할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
	수학 Ⅰ [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. 수학Ⅱ [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	배종숙외 6명	금성	2022	83~86 124~140
	수학 Ⅰ	이준열외 9명	천재	2022	82-87 124-136
	수학 Ⅱ	류희찬외 10명	천재	2022	86~88
	수학 Ⅱ	고성은외 6명	신사고	2022	87-91

5. 문항 해설

본 문항은 수학Ⅰ의 삼각함수의 그래프, 등차수열, 등비수열, 등차중항, 등비중항 등에 대한 내용과, 수학Ⅱ에서 함수의 그래프의 개형을 그리는 방법을 활용하고 있다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문에 주어진 여러 가지 조건과 상황을 이해하고 다양한 조건을 만족하도록 하는 등차수열과 등비수열을 추론하도록 하고 있으며 등차중항이나 등비중항의 개념을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지 확인하고 있다. 또한 조건을 활용하여 삼차함수를 구하고 삼차함수의 그래프 개형을 파악하고 삼각함수와의 교점을 추론할 수 있는 능력을 측정한다. 다양한 조건을 효율적으로 사용하여 효과적인 문제 해결 전략을 찾는 문제해결능력과 논리적으로 자신의 사고를 전개하는 추론 역량을 평가하는 문항이다.

6. 채점기준

하위문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	$a+e=c+d=20$임을 관찰	3점
	$c=-20$, $d=40$를 구함	3점
	$b=160$를 구하여 답 200을 얻음	4점
[1-1] (2)	첫 번째 가로수열이 $1, 2, 4$를 찾고 3-등차등비표를 2개 이상 4개 이하 찾음	4점
	3-등차등비표를 5개 이상 7개 이하 찾음	3점
	모든 경우를 다 찾아서 답 8을 얻음	3점
[1-1] (3)	$n(\alpha+\beta)=40$임을 관찰함	3점
	$n=8$을 얻음	4점
	$p<\frac{25}{4}$을 얻음	3점
[1-2] (1)	등비수열임을 관찰	3점
	공비가 2^4 임을 얻음	2점
	등비수열의 합을 구하여 $2^4\times\frac{2^{40}-1}{2^4-1}=\frac{16}{15}(2^{40}-1)$을 얻음	5점
[1-2] (2)	$a\neq-1$임을 관찰	2점
	등차등비표의 성질을 이용하여 $g(x)=x^3-\frac{1}{2}$를 찾음	3점
	그래프의 개형과 $x<0$인 영역에서 사잇값의 정리를 활용해 개수가 3임을 구함	5점

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제1-1]

(1) 두 번째 가로수열과 두 번째 세로수열이 등차수열이므로 $a+e=c+d=20$이다. 이로부터 $a+c+d+e=40$을 얻는다. 한편 첫 번째 세로수열은 등비수열이므로 $c^2=400$이고 $c=\pm 20$이다. 만약 $c=20$이면, $d=0$이 되어 세 번째 가로수열 b, d, 10이 등비수열을 이룬다는 조건에 모순이다. 따라서 $c=-20$일 수밖에 없고 $d=40$이 된다. 세 번째 가로수열이 등비수열이라는 조건을 사용하여 $b=160$을 얻는다. 처음 얻은 식과 종합하면 $a+b+c+d+e=200$이다. (3-등차등비표를 완성하면 아래와 같다.)

10	40	160
-20	10	40
40	-20	10

(2) ②에 의하여, 첫 번째 가로수열은 등차수열이 될 수 없으므로 공비가 1이 아닌 등비수열이 된다. 이 가로수열의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자. 조건에 따라 a는 홀수이고 ar과 ar^2은 짝수이다. ①로부터 $ar^2 \le 9$이므로, $a=1$, $r=2$이거나 $a=9$, $r=\frac{3}{2}$이어야 한다. 한편, ③에 의하여 첫 번째 세로수열은 등비수열이 될 수 없으므로 공차가 0이 아닌 등차수열이 된다. 이 세로수열의 공차를 d라 하자. d는 홀수이며 $a+2d \le 9$이므로, $a=1$일 때 $d=1$ 또는 3이고 $a=9$일 때 $d=-1$ 또는 -3이다. 이에 따라 총 4가지 경우를 모두 고려하면 아래의 그림과 같다. 나머지 칸을 그림과 같이 x, w, y, z라 두자.

1	2	4
2	x	w
3	y	z

$a=1$, $d=1$

1	2	4
4	x	w
7	y	z

$a=1$, $d=3$

9	6	4
8	x	w
7	y	z

$a=9$, $d=-1$

9	6	4
6	x	w
3	y	z

$a=9$, $d=-3$

만약 z가 짝수이면, 세 번째 가로수열인 3, y, z 또는 7, y, z가 홀수로 시작하여 짝수로 끝나므로 등차수열일 수 없다. 또한 z가 9 이하의 짝수라는 조건 때문에 등비수열도 될 수 없어 모순이다. 따라서 z가 홀수여야 하고, 세 번째 세로수열인 4, w, z는 등차수열이 될 수 없다. 따라서 세 번째 세로수열은 등비수열이 되어 4, 2, 1이거나 4, 6, 9이어야만 한다. 각 경우마다 x와 y를 결정하는 방법이 유일하므로 총 8개이다. (8개의 등차등비표를 완성하면 아래와 같다.)

1	2	4
2	2	2
3	2	1

1	2	4
4	3	2
7	4	1

9	6	4
8	5	2
7	4	1

9	6	4
6	4	2
3	2	1

1	2	4
2	4	6
3	6	9

1	2	4
4	5	6
7	8	9

9	6	4
8	7	6
7	8	9

9	6	4
6	6	6
3	6	9

(3) k번째 가로수열의 첫째항을 a_k, 제n항을 b_k라 하자. 모든 칸에 적힌 수의 총합이 20이라는 조건으로부터 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n(a_k+b_k)}{2}=20$을 얻는다. 또한 $\alpha=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$이고 $\beta=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$이기 때문에, $n(\alpha+\beta)=40$이 된다. 한편 α와 β가 이차방정식 $x^2-5x+p=0$의 서로 다른 두 실근이므로, 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=5$이고 $\alpha\beta=p$이다. 따라서 $n=8$ 이다. 또한 $x^2-5x+p=0$가 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식에 의해 $25-4p>0$, 즉 $p<\dfrac{25}{4}$를 얻는다.

[문제 1-2]
(1) 첫째항이 4이고 제10항이 40인 등차수열의 공차는 4이다. 이 등차수열은 함수 $f(x)=\log_2 x$에 의하여 변환된 결과이므로, 변환하기 이전의 표에서는 첫째항이 2^4, 공비가 2^4인 등비수열이 된다. 이 등비수열의 합은 $2^4\times\dfrac{2^{40}-1}{2^4-1}=\dfrac{16}{15}(2^{40}-1)$ 이다.

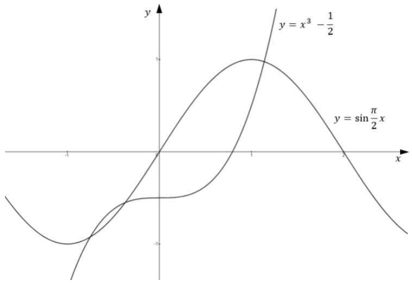
(2) 함숫값 $f(1)$, $f(2)$, …, $f(9)$ 는 각각 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1 이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$에 의해 변환된 표는 아래와 같다.

$a+b+1$	b	$a+b-1$
b	$a+b+1$	b
$a+b-1$	b	$a+b+1$

두 번째 가로수열이 등차수열이거나 등비수열이므로 $a=-1$ 또는 $(a+b+1)^2=b^2$ 이 성립한다. $a=-1$인 경우는 첫 번째 가로수열이 b, b, $b-2$가 되어 모순이다. 따라서 $a+b+1=-b$ 이고 $a=-2b-1$이다. 이를 대입하면 첫 번째 가로수열이 $-b$, b, $-b-2$ 이다. 항상 $-b\neq-b-2$이므로 등비수열이 될 수없다. 첫 번째 가로수열이 등차수열인 조건을 사용하면 $b=-\dfrac{1}{2}$이고 $a=0$이므로 $g(x)=x^3-\dfrac{1}{2}$이다.

$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

이제 구간을 나누어서 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$와 $y=x^3-\frac{1}{2}$의 그래프의 교점의 개수를 구하자.



$x>0$일 때, $g(0)<f(0)$이고 $f(2)<g(2)$ 이므로 그래프개형에 의하면 한 개의 교점을 가진다.

$x\le 0$일 때, 그래프 개형을 생각하면 교점은 많아야 두 개를 가짐을 알 수 있다. 두 함수의 그래프의 교점의 개수는 $h(x)=g(x)-f(x)=x^3-\frac{1}{2}-\sin\frac{\pi}{2}x=0$의 실근의 개수와 같다.

한편 $h(0)=h(-1)=-\frac{1}{2}<0$이고 $\sqrt{3}>1.7$이므로

$$h\left(-\frac{2}{3}\right)=g\left(-\frac{2}{3}\right)-f\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{27}-\frac{1}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{43}{54}+\frac{\sqrt{3}}{2}>0$$

이므로, 사잇값의 정리로부터 방정식 $h(x)=0$는 열린구간 $\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$와 열린구간 $\left(-\frac{2}{3},0\right)$에 실근을 가지게 된다. 즉, $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 2이다.

[아주대학교 문항정보 4]

1. 일반 정보

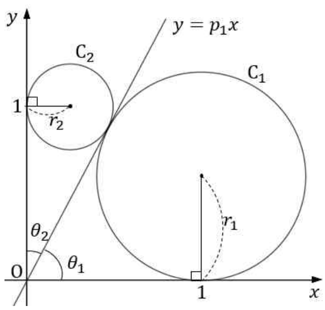
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연(오전) 대문항 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 미적분
	핵심개념 및 용어	절대부등식, 수열의 합, 삼각함수의 극한, 삼각함수의 덧셈정리, 치환적분법
예상 소요 시간	120분 중 60분	

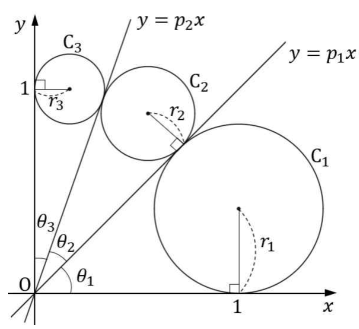
2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 자연수 n에 대하여, $0 < p_1 < \cdots < p_n$을 만족하는 n개의 실수 $p_1, \ldots, p_n$이 있다. x축과 직선 $y = p_1 x$에 동시에 접하면서 점 $(1, 0)$을 지나며 중심이 제1사분면에 있는 원을 C_1이라 하자. y축과 직선 $y = p_n x$에 동시에 접하면서 점 $(0, 1)$을 지나며 중심이 제1사분면에 있는 원을 C_{n+1}이라 하자. $n \geq 2$일 때, $2 \leq k \leq n$인 자연수 k에 대하여, 두 직선 $y = p_{k-1}x$, $y = p_k x$와 원 C_{k-1}에 동시에 접하고 중심이 제1사분면에 있는 원을 C_k라 하자. x축과 직선 $y = p_1 x$가 이루는 예각을 θ_1, 직선 $y = p_n x$와 y축이 이루는 예각을 θ_{n+1}이라 하자. $n \geq 2$일 때, $2 \leq k \leq n$인 자연수 k에 대하여 두 직선 $y = p_{k-1}x$와 $y = p_k x$가 이루는 예각을 θ_k라 하자. $n+1$이하인 자연수 k에 대하여, 원 C_k의 반지름을 r_k라 하자.

[그림 4]는 $n = 1$인 경우와 $n = 2$인 경우를 표현한 것이다.





[그림 4]

한편 $n=1$인 경우, $r_1=\tan\dfrac{\theta_1}{2}$이고 $r_2=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta_1}{2}\right)$이므로, 삼각함수의 덧셈정리에 의해 $r_2=\dfrac{1-\tan\dfrac{\theta_1}{2}}{1+\tan\dfrac{\theta_1}{2}}=\dfrac{1-r_1}{1+r_1}$ 이다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(2p-x)$를 만족하는 실수 p가 존재하는 함수 $f(x)$를 생각하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=p$에 대하여 대칭이다. 따라서 $f(\alpha)=0$이면 $x=2p-\alpha$가 방정식 $f(x)=0$의 실근이 된다. 한편 $\int_0^{2p} xf(x)\,dx$를 계산할 때, $x=2p-t$로 치환하면 다음을 얻는다.

$$\int_0^{2p} xf(x)\,dx=\int_0^{2p}(2p-t)f(2p-t)\,dt=\int_0^{2p}(2p-x)f(x)\,dx$$

[문항]

[문제 2-1] 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하라.

(1) $n=1$일 때, $5(r_1+r_2)>4$임을 증명하라. (단, $\sqrt{2}>1.4$)

(2) n이하인 자연수 k에 대하여 $p_k=\tan\dfrac{k\pi}{2(n+1)}$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r_k$를 구하라.

(3) n이하인 자연수 k에 대하여 $p_k=k$이고 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\tan\theta_k}=82$일 때, n의 값을 구하라.

[문제 2-2] 제시문 (나)를 읽고 물음에 답하라.

(1) 모든 실수 x에 대하여 $f(2+x)=f(2-x)$를 만족하는 함수 $f(x)$를 생각하자. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근을 모두 더하면 34일 때, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하라.

(2) 함수 $f(x)=\dfrac{|\cos x|}{3+\cos^2 x}$에 대하여 $\displaystyle\int_0^{\pi} x\,f(x)\,dx$의 값을 구하라.

3. 출제 의도

[문제 2-1] 절대 부등식을 이용하여 부등식을 증명하고, 직선의 기울기를 탄젠트를 이용하여 표현하고, 탄젠트의 덧셈정리를 이용하여 수열의 합을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[문제 2-2] 함수가 어떤 직선에 대칭일 조건을 이해하고, 이를 활용하여 정적분을 계산 할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
	수학 [10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다. 수학 Ⅰ [12수학Ⅰ03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. 미적분 [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	홍성복외 10명	지학사	2022	206-207
	수학	권오남외 14명	교학사	2022	198-200
	수학 Ⅰ	배종숙외 6명	금성	2022	83~86 124~140
	수학 Ⅰ	이준열외 9명	천재	2022	82-87 124-136
	미적분	박교식외 19명	동아	2022	64-65 67-69 134-139
	미적분	황선욱외 8명	미래엔	2022	65-69 72-74 148-149

5. 문항 해설

본 문항은 수학의 절대부등식, 수학Ⅰ의 수열의 합, 미적분에서 삼각함수의 극한, 탄젠트 함수의 덧셈정리, 치환적분을 활용한 삼각함수의 정적분에 대한 내용을 활용하고 있다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문에 주어진 여러 가지 조건과 상황을 이해하고 조건을 만족하는 상황을 추론하도록 하고 있으며, 직선의 기울기를 탄젠트를 이용하여 나타낸 후 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 수학적으로 표현한다. 또한 함수가 어떤 직선에 대하여 대칭인 조건을 이해하고 이를 활용하여 치환적분을 할 수 있는지 확인하고 있다. 주어진 문제 상황을 이해하고 수학적으로 일반화하여 표현하는 수학적 의사소통능력과 대칭인 조건을 응용하여 식을 변형하여 정적분을 계산하는 문제해결능력을 평가하는 문항이다.

6. 채점기준

하위문항	채점 기준	배점
[2-1] (1)	$r_1 + r_2 = r_1 + \dfrac{1-r_1}{1+r_1} = (1+r_1) + \dfrac{2}{1+r_1} - 2$ 임을 보임	5점
	$(1+r_1) + \dfrac{2}{1+r_1} - 2 \ge 2\sqrt{2} - 2 > 0.8$ 임을 보임	5점
[2-1] (2)	$r_k = \tan\dfrac{\pi}{4(n+1)}$ 임을 보임	3점
	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r_k = \dfrac{n(n+1)}{2} \cdot \tan\dfrac{\pi}{4(n+1)}$ 임을 보임	3점
	$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{2n} \tan\dfrac{\pi}{4(n+1)} = \dfrac{\pi}{8}$ 임을 보임	4점
[2-1] (3)	$k=1$ 일 때, $\tan\theta_1 = p_1 = 1$ 임을 보임	1점
	$k=n+1$ 일 때, $\tan\theta_{n+1} = \dfrac{1}{p_n} = \dfrac{1}{n}$ 임을 보임	2점
	$2 \le k \le n$ 일 때, $\tan\theta_k = \dfrac{1}{1+k^2-k}$ 임을 보임	4점
	$n=6$ 임을 보임	3점
[2-2] (1)	방정식의 근이 $2+\alpha$, $2-\alpha$ 의 꼴로 나타나고 두 근의 합이 4임을 설명함	4점
	방정식의 한 근이 2인 경우가 있음을 설명함	3점
	방정식의 실근의 개수가 17임을 보임	3점
[2-2] (2)	$\displaystyle\int_0^\pi xf(x)\,dx = \dfrac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)\,dx$ 임을 보임	3점
	$\displaystyle\dfrac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)\,dx = \pi\int_0^1 \dfrac{1}{4-t^2}\,dt$ 임을 보임	4점
	$\displaystyle\int_0^\pi xf(x)\,dx$ 이 $\dfrac{\pi}{4}\ln 3$ 임을 보임	3점

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제2-1]

(1) r_1과 $r_2=\dfrac{1-r_1}{1+r_1}$이 모두 양수이므로

$$r_1+r_2=r_1+\frac{1-r_1}{1+r_1}=(1+r_1)+\frac{2}{1+r_1}-2\ \geq\ 2\sqrt{2}-2>0.8$$

이다. 즉, $5(r_1+r_2)>4$가 성립한다.

(2) 직선의 기울기와 탄젠트함수의 정의로부터 $\theta_1=\cdots=\theta_n=\dfrac{\pi}{2(n+1)}$이다. 또한 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}\theta_i=\frac{\pi}{2}$이므로 $\theta_{n+1}=\dfrac{\pi}{2(n+1)}$이다. $n+1$이하인 자연수 k에 대하여 원점과 원 C_k가 접하는 접점 사이의 거리가 1이므로 $r_k=\tan\dfrac{\theta_k}{2}=\tan\dfrac{\pi}{4(n+1)}$이고, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r_k=\tan\frac{\pi}{4(n+1)}\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\tan\frac{\pi}{4(n+1)}$이다. 이제 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$을 사용하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r_k=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n}\tan\frac{\pi}{4(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{8}\cdot\frac{\tan\dfrac{\pi}{4(n+1)}}{\dfrac{\pi}{4(n+1)}}=\frac{\pi}{8}$$

(3) $k=1$인 경우는 $\tan\theta_1=p_1=1$이고, $k=n+1$인 경우는 $\tan\theta_{n+1}=\dfrac{1}{p_n}=\dfrac{1}{n}$이다.

$2\leq k\leq n$인 경우, $p_k=\tan\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\theta_i\right)$이므로,

$\tan\theta_k=\tan\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\theta_i-\sum_{i=1}^{k-1}\theta_i\right)=\dfrac{p_k-p_{k-1}}{1+p_kp_{k-1}}=\dfrac{1}{1+k^2-k}$이다.

따라서 다음 식을 얻는다.

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\tan\theta_k}=1+\sum_{k=2}^{n}(k^2-k+1)+n=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k+1)+n$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}+2n=\frac{n(n^2+5)}{3}=82$$

이를 정리하면 $n^3+5n-246=(n-6)(n^2+6n+41)=0$이므로 $n=6$이다.

[문제2-2]

(1) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근 중 2 보다 큰 것의 개수를 m이라 하자. 그러한 m개의 실근을 $2+\alpha_1$, …, $2+\alpha_m$ $(\alpha_i>0)$이라 하면 $2-\alpha_1$, …, $2-\alpha_m$도 방정식 $f(x)=0$의 근이 된다. 따라서 방정식 $f(x)=0$ 의 2가 아닌 서로 다른 실근을 모두 더한 값은 $4m$이 된다. 서로 다른 실근의 합인 34가 4의 배수가 아니므로, 2가 방정식 $f(x)=0$의 실근이 되어야 하고 $4m+2=34$를 얻는다. 즉, $m=8$이므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 $2\times 8+1=17$ 이다.

(2) $\cos(\pi-x)=-\cos x$ 이므로 $f(\pi-x)=f(x)$이고, $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대칭이다. 제시문 (나)에 의해 $\int_0^{\pi} xf(x)\,dx=\int_0^{\pi}(\pi-x)f(x)\,dx$ 이므로, $2\int_0^{\pi}xf(x)dx=\pi\int_0^{\pi}f(x)dx$ 이다. 그래프의 대칭성으로부터

$$\int_0^{\pi} xf(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{3+\cos^2 x}\,dx$$

이다. 여기서 $\sin x=t$로 치환하면 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{3+\cos^2 x}\,dx=\pi\int_0^1\frac{1}{4-t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{2-t}+\frac{1}{2+t}\right)dt$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[-\ln(2-t)+\ln(2+t)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}\ln 3$$

[아주대학교 문항정보 5]

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연(오후) 대문항 1번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ. 미적분</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>평균값 정리, 극댓값, 상용로그, 합성함수, 정적분, 급수의 합, 등비급수,</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">120분 중 60분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 함수 $f(x)$가 미분가능한 함수이고 $f(0)=f(1)=0$을 만족하면 **좋은함수**라 하자. 특히 좋은함수 $f(x)$가 $f'(0)=a$, $f'(1)=b$이면 $f(x)$를 $\ll a, b \gg$**-좋은함수**라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 좋은함수라면 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$, $(f\circ g)(x)$ 도 좋은함수이다.

한편 $f(x)$가 좋은함수이면 평균값 정리에 의하여 양의 실수 p에 대하여

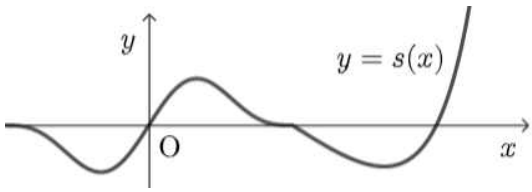
$$\frac{f(p)-f(0)}{p-0}=\frac{f(p)}{p}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(0, p)$에 존재한다.

(나) 함수 $g(x)=\cos^3\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $h(x)=xe^{x^2-1}-x$에 대하여 함수 $s(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$s(x)=\begin{cases} g(x) & (x\le 1) \\ h(x-1) & (x>1) \end{cases}$$

이때 $s(x)$는 연속함수이고 $s(0)=s(1)=0$ 이지만 $g'(1)\neq h'(0)$이므로 $x=1$에서 미분가능하지 않다. 따라서 $s(x)$는 좋은함수가 아니다.



[문항]

[문제 1-1] (25점) 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하라.

(1) $\ll 0, 0 \gg$-좋은함수인 사차함수 $f(x)$의 극댓값이 2^{10}이고 $A=\log 2$, $B=\log 3$일 때, $\log f(6)$의 값을 A와 B로 나타내라.

(2) 좋은함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속인 이계도함수 $f''(x)$를 갖고, $0<p<1$인 실수 p에 대하여 $f(x)$가 $x=p$에서 최댓값 2023을 가진다. 이때 $\int_a^b f''(x)\,dx = \frac{2023}{p(p-1)}$을 만족하는 두 실수 a, b가 열린구간 $(0, 1)$에 존재함을 증명하라.

[문제 1-2] (25점) 제시문 (가)와 (나)를 읽고 물음에 답하라.

(1) 제시문 (나)의 함수 $s(x)$에 대하여 $\int_0^2 s(x)dx$의 값을 구하라.

(2) 9 이하의 자연수 a, b, c, d, e, f에 대하여 $p(x)$는 $\ll a, b \gg$-좋은함수, $q(x)$는 $\ll c, d \gg$-좋은함수, $r(x)$는 $\ll e, f \gg$-좋은함수이다. 두 함수 $G(x)=p(q(x))+p(x)q(x)$와 $H(x)=q(r(x))+2r(x)$에 대하여 함수 $S(x)$를 아래와 같이 정의하자.

$$S(x)=\begin{cases} G(x) & (x \le 1) \\ H(x-1) & (x>1) \end{cases}$$

$S(x)$가 $\ll n, 24 \gg$-좋은함수이고 자연수 n이 24의 약수가 되는 순서쌍 (a, b, c, d, e, f)의 개수를 구하라.

3. 출제 의도

[문제 1-1]

(1) 주어진 사차함수의 극값들에 대한 조건들을 통해 함수식을 찾고 상용로그의 성질을 활용하여 식을 표현할 수 있는지 평가한다.

(2) 정적분을 이해하며, 함수에 대한 평균값 정리를 활용할 수 있는지 평가한다.

[문제 1-2]

(1) 치환적분법을 활용하여 삼각함수의 정적분을 계산할 수 있는지 평가한다.

(2) 함수에 대한 미분가능성을 이해하며, 복잡한 상황에서의 경우의 수를 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	수학 [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. 수학Ⅰ [12수학Ⅰ01-05] 상용로그를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 수학Ⅱ [12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적분 [12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학(경우의수)	홍성복 외 10	지학사	2020	259
	수학(경우의수)	권오남 외 14	교학사	2022	255
	수학Ⅰ(상용로그)	이준열 외 9	천재교육	2022	33
	수학Ⅰ(상용로그)	배종숙 외 6	금성	2022	34
	수학Ⅱ(평균값정리, 극대극소)	고성은 외 6	신사고	2022	75,83
	수학Ⅱ(평균값정리, 극대극소)	류희찬 외 10	천재	2022	71,78
	미적분(등비급수, 합성함수미분, 여러 가지함수 정적분, 치환적분법)	박교식 외 19	동아	2022	34,81,127,134
	미적분(등비급수, 합성함수미분, 여러 가지함수 정적분, 치환적분법)	황선욱 외 8	미래엔	2022	34,86,137,143

5. 문항 해설

본 문항은 학생들에게 제시된 함수가 갖춰야 하는 조건이 무엇인가에 대한 이해를 바탕으로 사차함수의 극값들을 통해 함수식을 표현하고 함숫값에 대한 상용로그 값을 상용로그의 성질을 활용하여 식으로 표현할 수 있는지 평가한다. 또한 합성함수의 미분법을 활용하여 주어진 함수의 미분계수를 계산하며, 등비급수의 수렴 조건과 급수의 합을 계산할 수 있는지, 평균값 정리를 활용하여 이계도함수에 대한 정적분 값을 만족하는 실수의 존재성을 설명할 수 있는지 평가하는 문항이다. 본 문항은 함수의 미분과 적분뿐만 아니라 곱의 법칙을 활용한 경우의 수 계산, 상용로그를 활용한 식의 계산, 등비급수의 수렴 조건 등 고등학교 교육과정의 수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분의 전반적인 내용들에 대한 이해와 창의·융합적 사고를 바탕으로 복합적인 문제들을 연결지어 해결할 수 있는 역량이 요구되는 문항이다.

6. 채점기준

하위문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	$f(x)$가 $ax^2(x-1)^2$의 형태를 가지는 것을 확인	3점
	$x=\frac{1}{2}$에서 $f(x)$가 극댓값을 가지는 것을 확인	2점
	$a=2^{14}$를 계산	2점
	$\log f(6)=2+14A+2B$를 계산	5점
[1-1] (2)	$\int_a^b f''(x)dx=f'(b)-f'(a)$임을 확인	3점
	$f'(a)=\frac{f(p)}{p}=\frac{2023}{p}$인 a가 $(0,p)$에 존재함을 보임	3점
	평균값의 정리를 사용하여 $f'(b)=\frac{f(p)}{p-1}=\frac{2023}{p-1}$인 b가 열린구간 $(p,1)$에 존재함을 보임	4점
	위 세 가지 결과와 $\frac{2023}{p-1}-\frac{2023}{p}=\frac{2023}{(p-1)p}$을 이용하여 증명	3점
[1-2] (1)]	$\int_0^2 s(x)dx=\int_0^1 g(x)dx+\int_0^1 h(x)$임을 관찰	4점
	$\int_0^1 g(x)dx=\frac{1}{2\pi}$임을 계산	4점
	$\int_0^1 h(x)dx=-\frac{1}{2e}$임을 계산	4점
[1-2] (2)	$ac=n$임을 확인	3점
	$ad=(c+2)e=24$임을 확인	3점
	순서쌍 (a,c)의 경우가 10가지가 있다는 것을 구함	4점
	b와 f가 모든 수가 다 되어서 전체 경우의 수가 $9\times9=81$의 배수임을 관찰	2점
	정확한 경우의 수 810 을 계산	1점

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1-1]

(1) $f(x)=ax^2(x-1)^2$ (단, a는 0이 아닌 실수)라 둘 수 있다. 따라서 $x=\dfrac{1}{2}$에서 $f(x)$가 극댓값을 가지고 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a}{2^4}=2^{10}$ 이므로 $a=2^{14}$이다. 따라서 $f(x)=2^{14}x^2(x-1)^2$이므로 다음이 성립한다.

$$\log f(6) = \log(2^{16}3^2 5^2) = 2+14A+2B$$

(2) 닫힌구간 $[0,p]$에서 평균값 정리에 의하면, $f'(a)=\dfrac{f(p)-f(0)}{p-0}=\dfrac{2023}{p}$인 a가 열린구간 $(0,p)$에 존재한다. 닫힌구간 $[p,1]$에서 평균값 정리에 의하면, $f'(b)=\dfrac{f(1)-f(p)}{1-p}=\dfrac{2023}{p-1}$인 b가 열린구간 $(p,1)$에 존재한다. 이때, $\displaystyle\int_a^b f''(x)\,dx = f'(b)-f'(a)$ 이므로 $\displaystyle\int_a^b f''(x)dx=\frac{2023}{p-1}-\frac{2023}{p}=\frac{2023}{p(p-1)}$ 인 두 실수 a, b가 열린구간 $(0,1)$에 존재한다.

[문제 1-2]

(1) 치환적분을 이용하면 아래가 성립한다.

$\displaystyle\int_0^2 s(x)\,dx = \int_0^1 g(x)dx + \int_1^2 h(x-1)dx = \int_0^1 g(x)dx + \int_0^1 h(t)dt$ ($t=x-1$로 치환)

$$=\int_0^1 \cos^3\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx + \int_0^1 (xe^{x^2-1}-x)\,dx$$

각 정적분을 계산하면 아래와 같다.

$$\int_0^1 \cos^3\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \left[-\frac{1}{2\pi}\cos^4\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2\pi}$$

$$\int_0^1 (xe^{x^2-1}-x)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2-1}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2e}$$

따라서 구하고자 하는 정적분값은 $\dfrac{1}{2\pi}-\dfrac{1}{2e}$이다.

(2) 합성함수의 미분법과 곱의 미분법에 의해서 $G'(x) = p'(q(x))q'(x) + p'(x)q(x) + p(x)q'(x)$이고 $H'(x)=q'(r(x))r'(x)+2r'(x)$이다. 따라서

$$G'(0) = p'(0)q'(0) + p'(0)q(0) + p(0)q'(0) = ac,$$
$$G'(1) = p'(0)q'(1) + p'(1)q(1) + p(1)q'(1) = ad,$$
$$H'(0) = q'(0)r'(0) + 2r'(0) = ce + 2e,$$
$$H'(1) = q'(0)r'(1) + 2r'(1) = cf + 2f$$

이므로 $G(x)$는 $\ll ac, ad \gg$-좋은함수이고 $H(x)$는 $\ll ce+2e, cf+2f \gg$-좋은함수이다. 따라서 $S(x)$가 $\ll n, 24 \gg$-좋은함수이므로 $ac = n$, $ad = 24 = (c+2)e$ 를 만족해야 한다. a는 24의 약수이고 a, d가 모두 9 이하의 자연수이므로 a로 가능한 수는 3, 4, 6, 8이며 각 a마다 대응되는 d가 유일하게 결정된다. 같은 방식으로 $c+2$ 역시 3, 4, 6, 8만 가능하고 마찬가지로 $c+2$에 대응되는 e가 유일하게 결정된다. ac가 24의 약수가 되어야 하므로 가능한 순서쌍 (a,c)는 $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,4)$, $(4,1)$, $(4,2)$, $(4,6)$, $(6,1)$, $(6,2)$, $(6,4)$, $(8,1)$로 10가지이다. 한편, b와 f는 9이하의 모든 자연수가 가능하므로 구하는 경우의 수는 $10 \times 9 \times 9 = 810$ 이다.

[아주대학교 문항정보 6]

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연(오후) 대문항 2번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학, 수학Ⅱ</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>필요충분조건, 극대와 극소, 최댓값, 최솟값, 정적분</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">120분 중 60분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 닫힌구간에서 연속인 함수 $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값을 구하거나 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수를 구할 때, 극값이나 양 끝 값 등 특정 함숫값을 비교하는 것으로 충분할 수 있다. 가령 삼차함수 $f(x)=x^3-3ax+b$에 대하여 닫힌구간 $[-2,2]$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 구하는 문제를 생각해 보자. $0<a<4$인 경우 $f(x)$는 $x=\pm\sqrt{a}$에서 극값을 가지므로 $|f(-2)|$, $|f(-\sqrt{a})|$, $|f(\sqrt{a})|$, $|f(2)|$를 비교해서 $|f(x)|$의 최댓값을 구할 수 있고, 그렇지 않으면 $|f(-2)|$와 $|f(2)|$를 비교해서 $|f(x)|$의 최댓값을 구할 수 있다.

(나) 실수 a, b에 대하여 함수 $F(x)=x^4+ax^2+b$에서 $t=x^2$으로 치환하여 얻은 이차함수 $f(t)=t^2+at+b$를 생각하자. 실수 α에 대하여 $F(\alpha)=0$이면 $f(\alpha^2)=0$을 만족한다. 따라서 방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가지는 것은 방정식 $F(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 가지기 위한 필요충분조건이다.

[문항]

[문제 2-1] (20점) 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하라.

(1) 함수 $f(x)=x^3-3ax+a$에 대하여 방정식 $f(x)=0$이 닫힌구간 $[-2,2]$에서 서로 다른 세 실근을 가지도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하라.

(2) 함수 $f(x)=x^3-3ax+2$에 대하여 닫힌구간 $[-2,2]$에서 $|f(x)|$의 최댓값이 가장 작아지도록 하는 실수 a의 값과 그때의 $|f(x)|$의 최댓값을 구하라.

[문제 2-2] (30점) 제시문 (나)를 읽고 물음에 답하라.

(1) 함수 $F(x)=x^4+ax^2+b$에 대하여 방정식 $F(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 가지고 모든 실근의 절댓값이 양수 A 보다 크다고 하자. 방정식 $F'(x)=0$의 0이 아닌 실근의 절댓값이 A 보다 크다는 것을 증명하라. (단, a, b는 상수)

(2) 함수 $F(x)=x^4-x^2+c$에 대하여, 방정식 $F(x)=0$이 서로 다른 네 실근 p, q, r, s $(p<q<r<s)$를 가지고 $\int_p^s F(x)\,dx=0$을 만족할 때, 상수 c를 구하라.

(3) 함수 $G(x)=x^4-4x^3+9x-\frac{11}{2}$에 대하여, 다음 <조건>을 만족하는 일차함수 $L(x)$를 구하라.

< 조 건>

① $F(x)=x^4+ax^2+b$ (단, a, b는 상수)

② $G(x)=F(x-m)+L(x)$ (단, m은 상수)

③ 방정식 $G(x)-L(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 가지고, 가장 큰 실근 t에 대하여

$$\int_m^t (G(x)-L(x))\,dx=0$$

3. 출제 의도

[문제 2-1]

(1) 삼차방정식이 닫힌구간에서 서로 다른 세 실근을 갖기 위해 만족해야 하는 조건을 경우를 나누어 설명할 수 있는지 평가한다.

(2) 닫힌구간에서 미지수가 포함된 삼차함수의 최댓값에 대해 극대와 극소가 모두 존재하는 경우와 그렇지 않은 경우를 나누어 확인할 수 있는지 평가한다.

[문제 2-2]

(1), (2) 사차함수의 1차항, 3차항의 계수가 0인 경우 서로 다른 네 실근과 도함수에 대한 실근의 크기를 판별할 수 있는지와 사차함수에 대한 정적분을 계산할 수 있는지 평가한다.

(3) 앞의 두 문제들을 통해 주어진 사차함수를 홀수항의 계수가 0인 함수와 직선의 합으로 표현할 수 있음을 이해하고, 그 함수와 직선을 찾아낼 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	수학 [10수학03-06] 충분조건과 필요조건을 이해하고 구별할 수 있다. 수학Ⅱ [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학(필요충분조건)	홍성복 외 10	지학사	2020	193
	수학(필요충분조건)	권오남 외 14	교학사	2022	193
	수학Ⅱ(극대극소,그래프,정적분)	고성은 외 6	신사고	2022	83,87,123
	수학Ⅱ(극대극소,그래프,정적분)	류희찬 외 10	천재	2022	78,86,116

5. 문항 해설

본 문항은 삼차함수와 사차함수에 대해 이해하고 이를 다양한 상황에 활용할 수 있는지를 평가하고 있다. 학생들은 제시문을 통해 미지수가 있는 함수에 대하여 주어진 범위에서의 최댓값이 미지수의 범위에 따라 구체적으로 어떻게 변화하는지 파악하고, 각 함수들의 그래프 개형을 통해 극값과 최댓값, 최솟값들의 대소관계를 파악할 수 있어야 한다. 또한 삼차함수와 사차함수에 대한 이해를 바탕으로 삼차방정식과 사차방정식에 활용할 수 있어야 하며 특히, 사차함수의 홀수항의 계수가 0인 경우 서로 다른 네 실근, 사차함수와 x축으로 둘러싸인 넓이의 특징 등을 파악하여 일반적인 사차함수를 홀수항의 계수가 0인 함수와 일차함수의 합으로 표현할 수 있음을 이해할 수 있어야 한다. 이는 학생들에게 대수적인 내용을 기하적으로 분석 및 해석하고 다시 대수적으로 서술해낼 수 있는 수학적 의사소통능력과 추론 능력, 다양한 문제 상황을 해결할 수 있는 문제해결능력이 요구되는 문항이다.

6. 채점기준

하위문항	채점 기준	배점
[2-1] (1)	$0<a<4$임을 구함	2점
	$a>\frac{1}{4}$ 임을 구함	3점
	$a \le \frac{8}{7}$ 임을 구함	3점
	$\frac{1}{4}<a \le \frac{8}{7}$ 임을 구함	2점
[2-1] (2)	a값의 범위에 따라 구간을 나눔	1점
	$\lvert f(-2)\rvert$, $\lvert f(-\sqrt{a})\rvert$, $\lvert f(\sqrt{a})\rvert$, $\lvert f(2)\rvert$ 정확하게 계산	1점
	$a<0$이거나 $a \ge 4$일 때 $\lvert f(x)\rvert$의 값이 4보다 크다는 것을 확인	2점
	$0<a<4$이고 $a \ne 1$일때 $\lvert f(x)\rvert$의 값이 4보다 크다는 것을 확인	3점
	$a=1$일 때 $\lvert f(x)\rvert$의 최댓값이 가장 작음을 관찰	2점
	$a=1$일 때 $\lvert f(x)\rvert$의 최댓값이 4임을 확인	1점
[2-2] (1)	이차방정식 $f(t)=t^2+at+b=0$의 두 근이 A^2보다 크다는 것을 확인	2점
	$-a>2A^2$임을 확인	3점
	$F'(x)=0$의 0이 아닌 실근의 절댓값이 $\sqrt{-\frac{a}{2}}$이고 A보다 크다는 것을 확인	5점
[2-2] (2)	이차방정식 $f(x)=x^2-x+c=0$의 서로 다른 두 실근이 r^2, s^2임을 확인	2점
	$\int_{-s}^{s}(x^4-x^2+c)\,dx=0$의 적분을 풀어 식을 얻음	3점
	$s^2=\frac{5}{6}$을 구함	3점
	$c=\frac{5}{36}$로 답을 구함	2점

하위문항	채점 기준	배점
[2-2] (3)	$m=1$을 구함	2점
	$a=-6$와 $L(x)$의 일차항의 계수가 1임을 구함	1점
	$b=5$ 혹은 $t=1+\sqrt{5}$를 구함	5점
	일차함수 $L(x)=x-\frac{11}{2}$임을 구함	2점

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 2-1]

(1) 문제의 조건에 의해, 닫힌구간 $[-2,2]$에서 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

따라서, $f'(x)=3(x^2-a)=0$이 $[-2,2]$에서 두 실근을 가지므로 $0<a<4$이고, $f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a})<0$이어야 한다. 이때, $f(-\sqrt{a})=a(1+2\sqrt{a})>0$이므로 $f(\sqrt{a})=a(1-2\sqrt{a})<0$이다. 따라서 $a>\frac{1}{4}$이다. 또한 $f(-2)=-8+7a\le 0$이므로 $a\le\frac{8}{7}$이다. 따라서 실수 a의 값의 범위는 $\frac{1}{4}<a\le\frac{8}{7}$이다.

(2) $a=1$일 때 $f(-2)=f(\sqrt{a})=0$, $f(-\sqrt{a})=f(2)=4$이므로 $|f(x)|$의 최댓값은 4이다.

$a<1$이면 $f(2)=10-6a>4$, $a\ge 4$이면 $f(-2)=6a-6>4$이므로 $|f(x)|$의 최댓값은 4 보다 크다.

$1<a<4$이면 $f(-\sqrt{a})=2(a\sqrt{a}+1)>4$이다. 따라서, $a\ne 1$일 때 $|f(x)|$의 최댓값은 4 보다 크다.

따라서 $a=1$일 때 $|f(x)|$의 최댓값이 가장 작고, 그때의 $|f(x)|$의 최댓값은 4이다.

[문제 2-2]

(1) 문제의 조건으로부터, 이차방정식 $f(t)=t^2+at+b=0$의 두 실근은 모두 양수이고 A^2보다 크다. 이때, 이차방정식의 근과 계수와의 관계로부터 $-a>2A^2$이다. $F'(x)=2x(x^2+a)$이므로 방정식 $F'(x)=0$의 실근은 $x=0$ 또는 $\pm\sqrt{-\frac{a}{2}}$이다. 즉,

0이 아닌 실근의 절댓값은 $\sqrt{-\frac{a}{2}}$ 이고 이 값은 A보다 크다.

(2) 이차함수 $f(x)=x^2-x+c$라 두자. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 양의 실근을 가지므로 $s=-p$, $r=-q>0$이다. 따라서, 이차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근은 r^2, s^2이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계로부터 $r^2+s^2=1, r^2s^2=c$ 를 만족한다. 한편

$$0=\int_{-s}^{s}(x^4-x^2+c)\,dx = 2\left(\frac{1}{5}s^5-\frac{1}{3}s^3+cs\right)$$

이므로 $c=s^2(1-s^2)$를 대입하여 풀면 $s^2=\frac{5}{6}$ 이므로 $c=\frac{5}{36}$이다.

(3) $L(x)=c(x-m)+d$라 두면

$G(x)=x^4-4x^3+9x-\frac{11}{2}=(x-m)^4+a(x-m)^2+b+c(x-m)+d$ 이다. 양변의 계수를 비교하면 $m=1$, $a=-6$, $c=1$이고 $b+d=\frac{1}{2}$ 이다. 따라서

$$G(x)=(x-1)^4-6(x-1)^2+(x-1)+\frac{1}{2}=F(x-1)+L(x)$$

이므로 구하는 $F(x)$와 $L(x)$는 모든 실수 b에 대하여

$$F(x)=x^4-6x^2+b,\ L(x)=(x-1)+\frac{1}{2}-b=x-\frac{1}{2}-b$$

이다. 한편, 방정식 $G(x)-L(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 가지면 방정식 $F(x)=0$도 서로 다른 네 실근을 갖는다. 조건으로부터 방정식 $F(x)=0$의 가장 큰 실근은 $t-m=t-1>0$이다. ③으로부터

$$0=\int_{1}^{t}F(x-1)\,dx=\int_{0}^{t-1}F(x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{t-1}(x^4-6x^2+b)\,dx=\frac{(t-1)^5}{5}-2(t-1)^3+b(t-1)$$

이고 $0=F(t-1)=(t-1)^4-6(t-1)^2+b$이다. 이 두 방정식을 연립하며 풀면 $t=1+\sqrt{5}$ 이고 $b=5$이므로 구하는 일차함수는 $L(x)=x-\frac{11}{2}$ 이다.

[아주대학교 문항정보 7]

1. 일반 정보

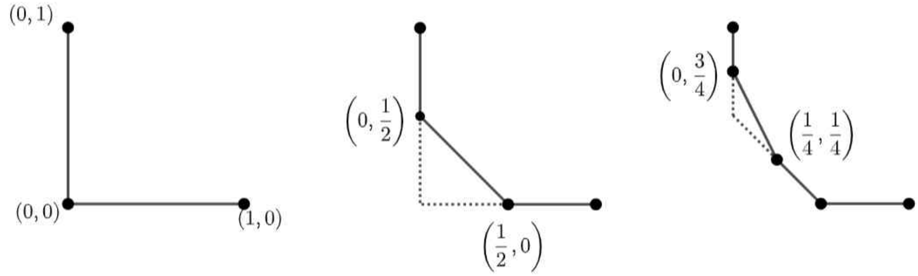
<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">의학(오전) 대문항 1번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>절대 부등식, 등비수열, 등차수열, 그래프의 대칭, 그래프의 개형, 접선의 방정식, 정적분</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">120분 중 60분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 P, Q, R에 대하여, 두 선분 PQ와 QR은 점 Q에서 인접하다고 하며 점 Q를 두 선분의 교점이라 하자. 두 개 이상의 선분으로 이루어진 도형의 인접한 선분들의 교점을 **도형의 교점**이라 하자. 도형의 교점 Q에서 인접한 두 선분 PQ와 QR의 중점을 각각 M과 N이라 할 때, 원래 도형에서 선분 PQ와 QR을 세 선분 PM, MN, NR로 대체하여 만든 도형을 **교점 Q에서 깎아 만든 도형**이라 하고 선분 MN을 **새로 생긴 선분**이라 하자.

점 $(0,1)$과 원점을 이은 선분, 그리고 원점과 점 $(1,0)$을 이은 선분으로 이루어진 도형을 시작도형이라 하자. 시작도형으로부터 y축 위에 있는 도형의 교점에서 깎아 만든 도형을 얻는 시행을 n회 반복하여 얻은 도형을 생각하자. [그림 1]은 이런 시행을 2회 반복하여 도형을 얻는 과정을 표현한 것으로 이전 도형에 포함되었으나 새로운 도형에서 빠진 부분은 점선으로 표시하였다.



시작도형　　　　　1회 시행　　　　　2회 시행

[그림 1]

각 시행 후 새로 생긴 선분의 양 끝점 중 y축 위에 있는 점의 y좌표를 $1-a$ 라 하면 다른 끝점의 x좌표는 a 이다.

(나) 함수 $y=f(x)$에 대하여 $y=|f(x)|$와 $y=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프의 일부를 대칭시켜 얻을 수 있다. 예를 들어 $y=e^{-|x|}$의 그래프는 $x>0$에서의 $y=e^{-x}$의 그래프를 y축에 대칭시켜 얻을 수 있다.

[문항]

[문제 1-1] (30점) 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하라.

(1) 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 P, Q, R에 대하여 두 선분 PQ, QR의 중점을 각각 M, N이라 하자. $\overline{\mathrm{PM}}^2+\overline{\mathrm{MN}}^2+\overline{\mathrm{NR}}^2$과 $\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{QR}}^2$의 값의 크기를 비교하라.

(2) [그림 1]과 같이 시작도형으로부터 y축 위에 있는 도형의 교점에서 깎아 만든 도형을 얻는 시행을 10회 반복하여 얻은 도형과 직선 $y=-x+1$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라.

(3) [그림 1]과 같이 시작도형으로부터 y축 위에 있는 도형의 교점에서 깎아 만든 도형을 얻는 시행을 반복할 때 n번째 시행에서 새로 생긴 선분을 포함하는 직선의 기울기가 $-n$임을 증명하라.

[문제 1-2] (20점) 제시문 (나)를 읽고 물음에 답하라.

(1) 최고차항의 계수가 $\frac{2}{25}$ 이고 $f(0)=0$, $f(5)=1$, $f'(0)=f'(7)$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 다음 <조건>을 만족하는 모든 양수 r의 합을 구하라.

< 조 건 >

서로 다른 세 점 $\mathrm{P}(2, f(2))$, $\mathrm{Q}\left(0, -\frac{2}{25}\right)$, $\mathrm{R}(r, f(r))$에 대하여 선분 PQ의 중점과 선분 QR의 중점을 지나는 직선과 $y=|f(x)|$의 그래프의 교점의 개수가 3이다. (단, $r \neq 2, r>0$)

(2) 함수 $y=-\frac{|x|}{\sqrt{e}}+k$와 $y=e^{-|x|}$의 그래프의 교점의 개수가 2이고 그때의 교점을 P, R이라 하자. 점 Q(0, 1)에 대해서 선분 PQ의 중점과 선분 QR의 중점을 지나는 직선과 $y=e^{-|x|}$의 그래프의 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라 할 때, $\int_{\alpha}^{\beta} e^{-|x|}dx$ 의 최솟값을 구하라. (단, k는 실수, $\alpha<\beta$)

3. 출제 의도

[문제 1-1] 절대 부등식과 삼각형에서 변의 길이의 관계를 이용하여 부등식을 증명하고, 등비수열의 합, 등차수열의 귀납적 정의를 활용하여 문제를 해결 할 수 있는지를 평가한다.

[문제 1-2] 절댓값이 포함된 함수의 특징을 이해하고, 그래프의 개형을 통해 문제상황을 추론하여 직선을 구하거나, 정적분을 계산 할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
	수학 [10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다. 수학 Ⅰ [12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학Ⅰ03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다. 수학Ⅱ [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. 미적분 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	홍성복외 10명	지학사	2022	206-207
	수학	권오남외 14명	교학사	2022	198-200
	수학 Ⅰ	배종숙외 6명	금성	2022	124-140 153-154
	수학 Ⅰ	이준열외 9명	천재	2022	124-136 157-159
	수학 Ⅱ	류희찬외 10명	천재	2022	86~88
	수학 Ⅱ	고성은외 6명	신사고	2022	87-91
	미적분	박교식외 19명	동아	2022	129-130
	미적분	황선욱외 8명	미래엔	2022	139-140

5. 문항 해설

본 문항은 수학의 절대부등식, 수학Ⅰ의 등비수열의 합, 귀납적으로 정의된 등차수열, 수학Ⅱ에서 삼차함수의 그래프의 개형, 미적분에서 지수함수의 정적분 및 절댓값이 포함된 함수에 대한 내용을 활용하고 있다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문에 주어진 여러 가지 조건과 상황을 이해하고 규칙성을 찾아내도록 하고 있으며 증명을 통해 이를 확인하는 과정을 묻고 있다. 또한 절댓값을 포함한 그래프에서 특정 조건을 만족하는 상황을 추론하도록 하고 있다. 주어진 조건을 이해하고 주어진 문제 상황을 이해하고 수학적으로 일반화하여 표현하거나 증명하는 논리적인 사고능력과 조건을 만족하는 식을 구하거나 정적분을 계산하는 문제해결능력을 평가하는 문항이다.

6. 채점기준

하위문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	차이가 양수임을 이용하여 결론 도출 $\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{QR}}^2>\overline{\mathrm{PM}}^2+\overline{\mathrm{MN}}^2+\overline{\mathrm{NR}}^2$	5점
	삼각형 PQR의 성질과 절대부등식을 활용하여 증명	5점
[1-1] (2)	각 시행시 새로 생긴 선분에 의해 사라지는 영역에 해당하는 삼각형의 넓이가 첫째항이 $\frac{1}{8}$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열을 이루는 것을 관찰	4점
	삼각형의 넓이의 합 계산 $\dfrac{\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{4^{10}}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{2^{20}-1}{3\cdot 2^{21}}$	3점
	구하고자 하는 영역의 넓이 계산 $\frac{1}{2}-\frac{2^{20}-1}{3\cdot 2^{21}}=\frac{2^{21}+1}{3\cdot 2^{21}}$	3점
[1-1] (3)	$n=1$일 때 기울기가 -1임을 관찰	2점
	등차수열의 귀납적 정의를 유도 (제시문의 성질을 이용하거나 좌표를 정확히 구하여 계산)	6점
	등차수열의 일반항이 $-n$임을 구함	2점
[1-2] (1)	$f(x)=\frac{2}{25}x^3-\frac{21}{25}x^2+\frac{12}{5}x$ 정확히 구함	3점
	조건의 직선 ℓ이 $(1,1)$을 지남을 확인하고, ℓ이 원점을 지나거나 $x>0$범위에서 $y=f(x)$와 접함을 논의	2점
	$r=\frac{13}{2}$이 접하는 경우임을 구함	2점
	원점을 지나는 경우 가능한 r의 합이 $\frac{17}{2}$임을 구함	3점
[1-2] (2)	도형이 안쪽에서 접할 때 최소가 된다는 것을 논의	3점
	$x=\frac{1}{2}$에서 접함	2점

하위문항	채점 기준	배점
	최소값 구함 $1-\frac{1}{\sqrt{e}}$	5점

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1-1]

(1) $a=\overline{\mathrm{PM}}$, $b=\overline{\mathrm{MN}}$, $c=\overline{\mathrm{NR}}$ 이라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=2a$, $\overline{\mathrm{QR}}=2c$ 이고, 삼각형 중점연결 정리에 의해 $\overline{\mathrm{PR}}=2\mathrm{b}$ 이다. 한편 $b<a+c$이므로, $2(a^2+c^2)-b^2>2(a^2+c^2)-(a+c)^2=(a-c)^2$ 이다. 따라서 $2(a^2+c^2)>b^2$ 이고 $(\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{QR}}^2)-(\overline{\mathrm{PM}}^2+\overline{\mathrm{MN}}^2+\overline{\mathrm{NR}}^2)=(4a^2+4c^2)-(a^2+b^2+c^2)=3a^2+3c^2-b^2$ $>a^2+c^2\geq 0$이다. 그러므로 $\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{QR}}^2>\overline{\mathrm{PM}}^2+\overline{\mathrm{MN}}^2+\overline{\mathrm{NR}}^2$이다.

(2) 10 이하의 자연수 n에 대하여 $n-1$번째 시행에서 새로 생긴 선분(단, $n=1$이면 x축)과 n번째 시행에서 새로 생긴 선분, y축으로 둘러싸인 삼각형을 T_n이라 하고, T_n의 넓이를 t_n이라 하자. 삼각형 T_1의 세 점은 $\mathrm{P}_1\left(0,\frac{1}{2}\right)$, O, $\mathrm{R}_1\left(\frac{1}{2},0\right)$이므로 $t_1=\frac{1}{8}$이다. $n\geq 2$일 때, n번째 새로 생긴 선분의 양 끝점 중 y축 위에 있는 것을 P_n, 다른 점을 R_n이라 두면, $t_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n-1}}\times(\mathrm{R}_n$의 x 좌표$)$이다. 점 P_n은 P_{n-1}과 점 $(0,1)$의 중점이고 R_n은 P_{n-1}과 R_{n-1}의 중점이므로 밑변과 높이는 절반씩 줄어든다. 따라서 $t_n=\frac{1}{4}t_{n-1}$이므로 $\{t_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{8}$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다. 이 등비수열의 합은

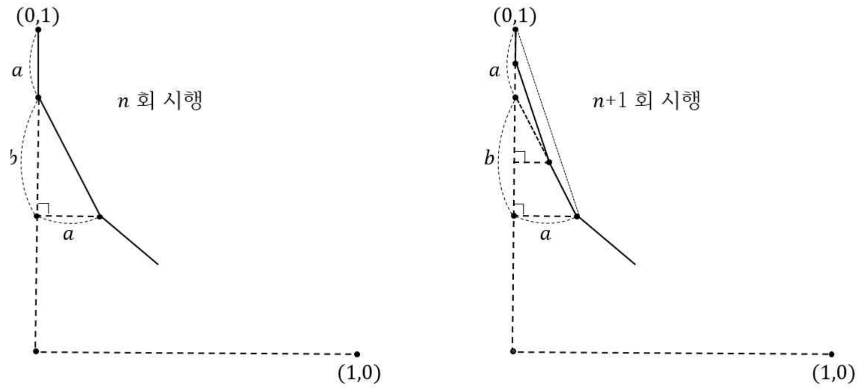
$$\sum_{n=1}^{10}t_n=\frac{\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{4^{10}}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2^{20}-1}{3\cdot 2^{21}}$$

이므로 구하고자 하는 영역의 넓이는 $\frac{1}{2}-\frac{2^{20}-1}{3\cdot 2^{21}}=\frac{2^{21}+1}{3\cdot 2^{21}}$ 이다.

(3) n회 반복하여 얻은 도형에서 n번째 시행에서 새로 생긴 선분의 기울기를 p_n이라 하자. $n=1$일 때 새로 생긴 직선의 기울기는 선분의 좌표로부터 $p_1=-1$이다. 도형의 일부를 그린 아래의 그림과 같이 n번째 시행에서 새로 생긴 선분을 빗변으로 직각삼각형의 밑변의 길이를 a, 높이를 b라 하면, $p_n=-\dfrac{b}{a}$이다. 따라서 p_{n+1}에 대하여 다음이 성립한다.

$$p_{n+1}=-\frac{a+b}{a}=-1-\frac{b}{a}=-1+p_n$$

즉 p_n은 첫째항이 -1, 공차가 -1인 등차수열이므로 $p_n=-n$이다.



[문제 1-2]

(1) $f'(x)=\dfrac{6}{25}(x^2+ax+b)$라 하자. $f'(0)=f'(7)$이므로 $a=-7$이고, 이를 적분하고 $f(0)=0$으로부터 $f(x)=\dfrac{2}{25}x^3-\dfrac{21}{25}x^2+\dfrac{6b}{25}x$이다. $f(5)=1$이므로, $b=10$이고, 따라서 $f(x)=\dfrac{2}{25}x^3-\dfrac{21}{25}x^2+\dfrac{12}{5}x$ 이다. 한편 $f'(x)=\dfrac{6}{25}(x-2)(x-5)$이므로 $x=2$, $x=5$에서 극값을 가진다.

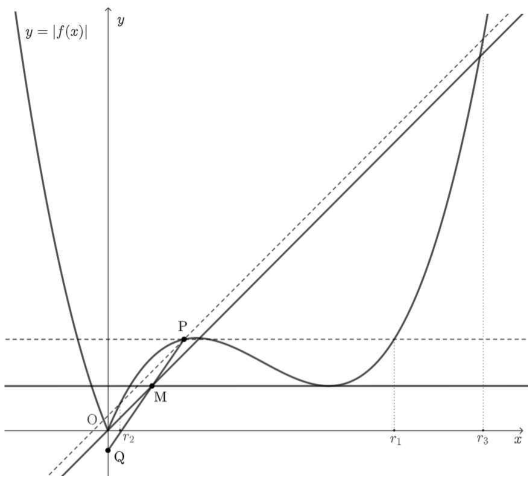
선분 PQ의 중점 M에 대하여 $f(2)=\dfrac{52}{25}$이므로 M의 좌표는 $(1,1)$이다. 선분 QR의 중점을 N이라 하자. 점 M과 N을 지나는 직선 ℓ이 $y=|f(x)|$의 그래프와 세 점에서 만나야 하므로 ℓ은 $(1,1)$을 지나고, $x>0$범위에서 $y=f(x)$와 접하거나 원점을 지나야 한다. 한편 $f'(5)=0$이고 $f(5)=1$이므로 $y=f(x)$와 접할 때는 ℓ의 방정식은 $y=1$이다. 이 경우, $f(r)=f(2)=\dfrac{52}{25}$이다. $f(r)-\dfrac{52}{25}=\dfrac{1}{25}(r-2)^2(2r-13)=0$이고 $r\neq 2$이므로 이 방정식의 근을 r_1이라 하면 $r_1=\dfrac{13}{2}$이다.

이제 ℓ이 (0,0)을 지나는 경우를 생각하자. ℓ은 선분 PR과 평행하므로 R은 P를 지나면서 기울기가 1인 직선과 $y=f(x)$의 그래프의 교점이라 할 수 있다. 즉, $f(r)-f(2)=r-2$가 성립하므로

$$f(r)-f(2)-r+2=\frac{1}{25}(r-2)(2r^2-17r+1)=0$$

이고, $r\neq 2$이므로 $2r^2-17r+1=0$이다. 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여 이 식을 만족하는 근을 r_2, r_3라 하면 $r_2+r_3=\frac{17}{2}$이다.

따라서 <조건>을 만족하는 모든 r의 합은 $\frac{13}{2}+\frac{17}{2}=15$이다.



(2) $x>0$일 때, $y=-\frac{x}{\sqrt{e}}+k$와 $y=e^{-x}$의 그래프의 교점의 좌표를 (p,e^{-p})이라 하자. 주어진 함수의 그래프는 모두 y축에 대칭이므로, 또 다른 교점은 $(-p,e^{-p})$이 된다. 선분 PQ의 중점과 선분 QR의 중점을 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{1+e^{-p}}{2}$ 이다.

$x>0$일 때, p가 클수록 구하고자 하는 정적분 값이 커지기 때문에, $y=-\frac{x}{\sqrt{e}}+k$와 $y=e^{-x}$의 그래프가 한 점에서 만나면서 p가 가장 작을 때, 즉 접하는 경우를 생각해야 한다. $y=e^{-x}$의 $x=p$에서의 접선의 기울기를 생각하면 $-e^{-p}=\frac{-1}{\sqrt{e}}$이므로 $p=\frac{1}{2}$이다.

직선 $y=\dfrac{1+e^{-\frac{1}{2}}}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$ 와 $y=e^{-x}$의 교점의 x좌표가 β이므로,

$e^{-\beta}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$ 이다. 즉,

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-|x|}dx=\int_{0}^{\beta}e^{-x}dx=-e^{-\beta}+1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{e}}$$

이므로, $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}e^{-|x|}dx$ 의 최솟값은 $1-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ 이다.

[아주대학교 문항정보 8]

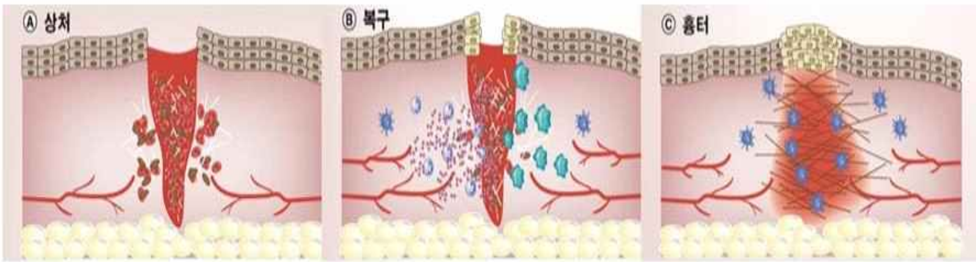
1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(의학과) / 대문항 2번	
출제 범위	과학과 교육과정 과목명	생명과학I, 생명과학II
	핵심개념 및 용어	호흡계와 순환계의 항상성, 신경계의 반사 작용, 통로단백질, 호흡
예상 소요 시간	120분 중 60분	

2. 문항 및 제시문

(가) 섬유증은 장기의 구성 세포들이 섬유조직으로 대체되어가는 질환으로, 전 세계적으로 약 45%의 사망자들이 섬유증 및 관련 질환들로 사망할 정도로 매우 심각한 질환이다. 섬유증은 우리 몸의 자연 치유 능력에 문제가 생겨 발생한다. 장기에 상처[1]가 발생하면 우리 몸은 염증반응의 일부로 섬유아세포를 보내 상처의 복구를 돕는다. 섬유아세포[2]는 활성화된 형태인 근섬유아세포로 전환되어, 세포외기질[3]을 분비하여 상처를 봉합한 후 사라진다. 그러나 근섬유아세포가 과도하게 활성화되면 상처의 봉합 후에도 사라지지 않고 과도한 치유를 유도하고 결과적으로 과도한 흉터[4]가 생기기도 한다. 이렇게 형성된 흉터는 사라지지 않고 중요 장기에 축적될 수 있는데, 이것은 치명적인 질환을 일으킬 수 있다. 이렇게 장기에 흉터 조직이 축적되는 현상을 섬유화라고하며, 이로 인하여 발생하는 질환을 섬유증이라 정의한다. 섬유화가 폐에 발생한 경우를 폐섬유증이라고 한다. 폐는 수백만 개의 폐포와 모세혈관으로 이루어져 있다. 폐포의 얇은 벽에 반복적인 상처로 흉터 조직이 쌓이면, 호흡을 통해 유입된 산소가 혈류 속으로 확산(diffusion)되기 어려워질 수 있다. 또한 흉터 조직은 폐를 뻣뻣하게 만들어 폐포의 확장 능력을 저하시킨다. 결과적으로, 폐의 섬유화는 우리 몸으로의 산소공급을 어렵게 만들어, 생명유지에 치명적일 수 있다. 심장 섬유증은 여러 요인으로 인하여 심장의 근육세포가 손상되었을 때 유발될 수 있다. 심장에 섬유증이 발생하면 심장 근육이 경직되어 심부전[5]을 일으킨다. 이외에도 신장과 간에 섬유증이 발생하면 각각 신부전과 간기능 부전을 초래할 수 있다.

(나) 상처의 복구 메카니즘은 상처의 발생, 복구, 흉터 형성의 3단계를 거친다. A. 상처의 발생 단계에서 상처부위의 상피세포 또는 내피세포는 화학 신호물질을 분비한다. B. 복구 단계에서는 화학 신호물질에 의해 모세혈관이 확장되며 면역세포와 섬유아세포가 상처부위로 침투한다. 이 단계에서 면역세포들은 사이토카인[6]들을 분비하여 섬유아세포의 증식 및 근섬유아세포로의 전환을 도와준다. C. 흉터의 형성 단계에서는 근섬유아세포로에서 분비된 세포외기질로 인해 정상적인 조직구조가 복원되고 손상된 세포가 정상세포로 대체된다. 흉터 조직에 존재하는 근섬유아세포와 세포외기질은 시간이 지나면서 사라지고 결과적으로 흉터가 사라지지만, 섬유증에서는 근섬유아세포와 세포외기질이 사라지지 않아 과도한 흉터를 남긴다.



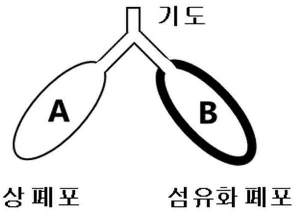
주[1]. 상처 : 조직의 절단, 조직 구성 세포의 사멸 등으로 조직의 구조가 변형된 상태
주[2]. 섬유아세포(Fibroblsat) : 세포외기질을 분비하는 세포
주[3]. 세포외기질(Extracellualr matrix) : 피브로넥틴, 콜라겐 등 장기의 구조유지를 담당하는 결합물질
주[4]. 흉터 : 상처가 아문 후에 남은 자국. 주로 결합조직으로 구성됨
주[5]. 심부전 : 심장의 구조적 혹은 기능적 이상으로 말초 기관에 필요한 만큼의 산소를 전달하지 못하는 상태
주[6]. 사이토카인 : 주로 면역세포에서 분비되는 단백질로 호르몬과 유사하게 세포 간의 정보교환에 사용됨

[문제 2-1] (8점) 폐섬유증은 환자 발생비율이 높은 섬유증의 하나로 심각한 호흡 장애를 불러일으키는 호흡기 질환이다. 폐섬유증은 COVID-19 감염으로 발생하는 여러 후유증 중 하나이며, COVID-19 감염으로 입원한 환자의 약 1/3에서 발생하는 것으로 추정된다. 다음의 질문에 답하시오.

(1) (4점) 중증의 폐섬유증 환자가 응급실에 입원하였다. 환자의 혈중 산소농도가 위험할 수준으로 떨어지고 있다, 인공호흡기를 통하여 강제로 공기의 호흡 횟수를 늘려도 혈중 산소의 농도가 위험한 수준에 머무르고 있다면, 어떠한 처치를 시행해야할지 제안하시오. 단, 약물의 투여는 고려하지 않는다고 가정한다. 인공호흡기는 강제로 폐에

기체를 넣고 빼주는 장치이다.

(2) (4점) 폐섬유증 환자의 폐에는 정상적인 폐포와 섬유화된 폐포가 모두 존재한다. 아래에 제시된 그림과 같이 정상적인 폐포(A) 한 개와 섬유화된 폐포(B) 한 개가 기도에 연결되어 있다고 가정한다면, 공기를 들이 마실 때 섬유화된 폐포(B)로 공기가 잘 들어가지 않는 이유를 보일의 법칙을 이용하여 설명하시오.



보일의 법칙 :

온도와 기체의 양이 일정한 닫힌 계 내에서 일정한 질량의 이상 기체가 가하는 절대압력은 그것이 차지하고 있는 부피에 반비례한다.

$PV = \kappa$ (P : 기체의 압력, V : 기체의 부피, κ : 상수)

[문제 2-2] (8점) 경증의 폐섬유증 환자의 신진대사를 확인하기 위하여, 정상인군과 폐섬유증 환자군을 인공호흡기를 통하여 호흡 횟수를 동일하게 유지하며 걷기운동을 30분간 수행시켰다. 운동 직후 인체성분을 검사하였다. 검사결과에 대한 질문에 답하시오.

(1) (4점) 인체성분 분석 결과 인체 수분함량이 낮은 군을 예상하고 그 이유를 기술하시오. 단, 땀의 분비와 신장을 통한 수분의 유출에 있어 정상인군과 환자군의 차이가 없다고 가정한다.

(2) (4점) 혈액의 성분 분석 결과 pH가 낮은 군을 예상하고 그 이유를 기술하시오.

[문제 2-3] (4점) 폐섬유증 환자는 폐포에서 산소 흡수가 어려워 혈중 산소의 농도가 정상인보다 낮아진다. 환자의 몸은 이를 만회하기 위하여 무의식적으로 호흡 횟수를 증가시킨다. 혈액중 산소농도가 낮다는 자극은 혈관에 존재하는 산소 농도 변화 수용기가 감지한다고 할 때, 자극으로부터 폐까지 반사가 일어나는 반응경로를 순차적으로 기술하고, 각 경로를 담당하는 기관을 기술하시오.

[문제 2-4] (6점) Eeyarestatin은 새로 생성되는 폴리펩타이드가 소포체로 이동하는 과정을 저해하는 약물로 알려져 있다. 연구실에서 실험한 결과, Eeyarestatin을 주입하였을 때 실험동물모델에서 폐섬유증의 발생이 감소되는 것을 발견하였다. 이러한 연구 결과를 바탕으로 Eeyarestatin을 폐섬유증 치료제로 개발하려 하였으나, Eeyarestatin이 실험동물모델에서 당뇨병을 유발하는 것으로 밝혀져 결국 치료제로서의 개발이 실패하였다. 다음의 질문에 답하시오.

(1) (4점) Eeyarestatin이 주입된 실험동물모델에서 폐섬유증의 발생 감소가 가능한 원리를 자세히 설명하시오.

(2) (2점) Eeyarestatin이 주입된 실험동물모델에서 당뇨병이 발생하는 원리를 설명하시오.

[문제 2-5] (6점) 폐섬유증 발생의 원인을 규명하기 위하여 폐섬유증 환자의 폐 조직을 약간 잘라 폐 조직에 존재하는 mRNA의 양을 분석하였다. 환자 폐 조직에 존재하는 mRNA의 양과 혈중 CCL-18 단백질의 양이 아래 표와 같을 때, 폐섬유증과 관련이 있을 것으로 예상되는 유전자를 모두 제시하고 그 이유를 설명하시오. 단, 폐섬유증 증상의 중증도를 대변하는 생체지표는 혈액에 존재하는 CCL-18 단백질의 양이라 가정한다. 혈중 CCL-18 단백질의 양이 많을수록 폐섬유증 증상이 심화된다.

	환자1	환자2	환자3	환자4	환자5	환자6
CCL-18 단백질 양	20	15	10	25	35	30
Gene1 mRNA 양	105	45	75	30	90	105
Gene2 mRNA 양	60	45	30	75	105	90
Gene3 mRNA 양	60	70	80	50	30	40
Gene4 mRNA 양	30	30	30	30	30	30

[문제 2-6] (8점) 초미세먼지는 매우 작은 입자로 흔히 공장 배출 오염물질, 자동차 매연 등 세포에 유해한 독성물질과 결합하여 공기 중에 떠돌아다닌다. 초미세먼지는 크기가 작아 호흡할 때 폐를 통하여 우리 몸에 흡수되어 몸 전체로 퍼진다. 오랜 기간 초미세먼지를 포함한 공기를 호흡하면, 세포가 독성물질을 흡수하여 파괴되므로 폐섬유증, 심장섬유증 등의 질환이 발생할 확률이 높아진다. 다음의 질문에 답하시오.

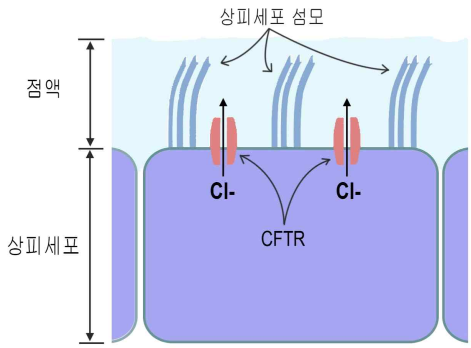
(1) (4점) 심장은 우심방, 우심실, 좌심방, 좌심실로 나뉜다. 우심방은 대정맥에 우심실은 폐동맥에 연결되어 있고, 좌심방은 폐정맥에 좌심실은 대동맥에 각각 연결되어 있다. 초미세먼지에 의하여 유발되는 심장섬유증은 대부분 우심실에 비하여 좌심실에서 심하게 나타난다. 그 이유를 설명하시오

(2) (4점) 초미세먼지로 인하여 심장섬유증이 발생한 환자들은 폐정맥의 혈압이 정상인보다 높은 경우가 많다. 그 이유를 설명하시오.

[문제 2-7] (10점) 폐의 낭성 섬유증은 폐조직의 상피세포막에서 기관지 내부로 염소이온을 통과시키는 통로단백질인 CFTR의 돌연변이와 이에 따른 기능이상으로 발생하는 유전질환이다.

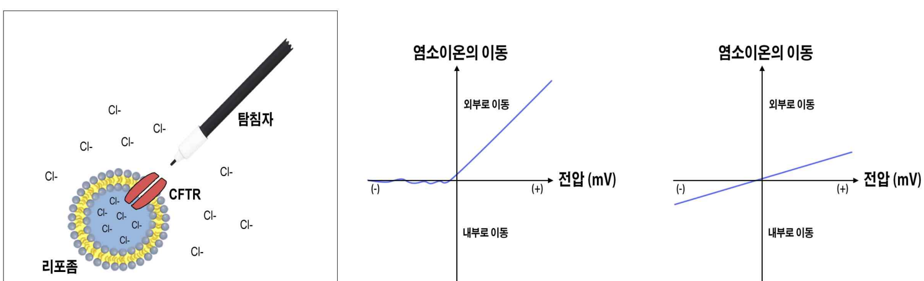
(1) (2점) 통로단백질을 통한 물질의 이동을 설명하시오.

(2) (4점) 아래의 그림을 참고하여 CFTR의 정상기능과 CFTR의 기능이상이 폐의 섬유증을 유발하는 기전을 설명하시오. 단, 점액의 분비량은 변하지 않는다고 가정한다.



<정상 CFTR 통로 단백질의 기능>

(3) (4점) 아래의 그림은 정상 CFTR 단백질과 돌연변이 CFTR 단백질을 리포좀[1]에 각각 삽입한 후, 리포좀 내부와 외부의 전압 변화에 따른 염소이온 전류를 탐침자[2]로 측정한 그래프이다. 그래프에서 정상 CFTR 단백질과 돌연변이 CFTR 단백질에 의한 염소이온 이동의 특징을 설명하시오. (주[1]: 리포좀, 두층의 인지질로 이루어진 세포막과 유사한 구형체; 주[2]: 탐침자, 국소적인 염소이온 전류를 측정할 수 있는 기구)



<정상 CFTR 단백질> <돌연변이 CFTR 단백질>

3. 출제 의도

생명과학 I 과정의 “항성성과 몸의 조절” 과정에서 순환계와 호흡계 그리고 우리몸의 방어 작용에 대한 이해도와 이를 바탕으로 문제를 해결할 수 있는 능력을 검증하고자 하고자 하였으며 추가하여 생명과학 II 과정의 세포의 구조와 기능 그리고 세포막을 통한 물질의 출입 과정을 이해하고 제시문의 내용에 응용할 수 있는가를 확인하고자 하였다.

4. 문항 및 제시문의 출제 근거

가) 교육과정 근거

		영역별 내용
제시문		생명과학 I (2) 사람의 물질대사 [12생과 I 02-01] 물질대사 과정에서 생성된 에너지가 생명 활동에 필요한 ATP로 저장되고 사용됨을 이해하고, 소화, 호흡, 순환 과정과 관련되어 있음을 설명할 수 있다. [12생과 I 02-02] 세포 호흡 결과 발생한 노폐물의 배설 과정을 물질대사와 관련하여 설명할 수 있다. (3) 항상성과 몸의 조절 [12생과 I 03-06] 다양한 질병의 원인과 우리 몸의 특이적 방어 작용과 비특이적 방어 작용을 이해하고, 관련 질환에 대한 예방과 치료 사례를 조사하여 발표할 수 있다.
하위문항	2-1	생명과학 I (2) 사람의 물질대사 [12생과 I 02-01] 물질대사 과정에서 생성된 에너지가 생명 활동에 필요한 ATP로 저장되고 사용됨을 이해하고, 소화, 호흡, 순환 과정과 관련되어 있음을 설명할 수 있다. [12생과 I 02-02] 세포 호흡 결과 발생한 노폐물의 배설 과정을 물질대사와 관련하여 설명할 수 있다.
	2-2	생명과학 I (2) 사람의 물질대사 [12생과 I 02-01] 물질대사 과정에서 생성된 에너지가 생명 활동에 필요한 ATP로 저장되고 사용됨을 이해하고, 소화, 호흡, 순환 과정과 관련되어 있음을 설명할 수 있다. [12생과 I 02-02] 세포 호흡 결과 발생한 노폐물의 배설 과정을 물질대사와 관련하여 설명할 수 있다.

		생명과학 II (3) 세포 호흡과 광합성 [12생과Ⅱ03-02] 세포 호흡 과정과 광합성의 탄소 고정 반응을 단계별로 구분하여 이해하고, 산화적 인산화 과정을 화학 삼투로 설명할 수 있다. [12생과Ⅱ03-03] 산소 호흡과 발효의 차이를 이해하고 실생활 속에서 발효를 이용한 사례를 조사하여 발표할 수 있다.
	2-3	생명과학 I (3) 항상성과 몸의 조절 [12생과Ⅰ03-03] 중추 신경계와 말초 신경계의 구조와 기능을 이해하고, 신경계와 관련된 질환을 조사하여 토의할 수 있다. [12생과Ⅰ03-05] 신경계와 내분비계의 조절 작용을 통해 우리 몸의 항상성이 유지되는 과정을 설명할 수 있다.
	2-4	생명과학 II (2) 세포의 특성 [12생과Ⅱ02-04] 세포 소기관들이 기능적으로 유기적인 관계를 이루고 있음을 이해하고, 이들 간의 관계성을 설명할 수 있다. (4) 유전자의 발현과 조절 [12생과Ⅱ04-03] 전사와 번역 과정을 거쳐 유전자가 발현됨을 이해하고, 모형을 이용하여 유전자 발현 과정을 설명할 수 있다.
	2-5	생명과학 I (1) 생명과학의 이해 [12생과Ⅰ01-02] 생명과학의 통합적 특성을 이해하고, 다른 학문 분야와의 연계성을 예를 들어 설명할 수 있다. [12생과Ⅰ01-03] 생명과학 탐구 방법을 이해하고 생명과학에서 활용되고 있는 다양한 탐구 방법을 비교할 수 있다.
	2-6	생명과학 I (2) 사람의 물질대사 [12생과Ⅰ02-01] 물질대사 과정에서 생성된 에너지가 생명 활동에 필요한 ATP로 저장되고 사용됨을 이해하고, 소화, 호흡, 순환 과정과 관련되어 있음을 설명할 수 있다.
	2-7	생명과학 II (2) 세포의 특성 [12생과Ⅱ02-05] 세포막을 통한 물질 출입 현상을 이해하고, 확산, 삼투, 능동 수송을 실험이나 모형을 통해 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	생명과학 I	이용철 외 3인	와이비엠	2022	37-38 79-80 83-84 87-88
	생명과학 I	이준규 외 5인	천재교육	2022	69-72
	생명과학 II	전상학 외 7인	지학사	2022	48-49 75-78
	생명과학 II	이준규 외 5인	천재교육	2022	38-39 74-76
기타	EBS 수능특강 생명과학 I	권태현 외 5인	EBS	2022	30-31 64-66 77-78
	EBS 수능특강 생명과학 II	염혜민 외 5인	EBS	2022	18-19

5. 문항 해설

제시문의 내용은 섬유증에 대한 전반적인 설명과 발병 기전을 고등학생의 수준에 맞추어 설명하고자 하였습니다. 저희가 소개한 제시문을 바탕으로 순환계의 작용원리, 신경계와 방어작용, 물질대사, 세포호흡, 세포소기관의 기능, 세포막을 통한 물질의 출입 등 생명과학 I과 II의 광범위한 부분에 대한 종합적인 이해도와 응용 능력을 요구하는 문항을 출제하였습니다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1] (1)	확산속도 (또는 물질의 이동속도)는 농도차(농도 기울기)에 비례한다 기술 1점 고농도 산소 주입 기술 1점 고압 기체 주입 기술 2점	4

[2-1] (1)	보일의 법칙에 의하여 폐포B 내부의 기체압력이 폐포A의 기체 압력보다 높다. 또는 폐포A 내부의 기체 압력이 낮다. 기술 1점 외부공기는 압력이 낮은 폐포A로 먼저 들어간다 기술 1점 폐포B 내부의 공기가 폐포A로 들어간다 기술 2점	4
[2-2] (1)	환자군의 수분함량이 낮다 1점 전자전달계에서 산소가 물이 된다 (산소가 물이 된다) 3(1) 점	4
[2-2] (2)	환자군의 pH가 낮다 1점 근육이 젖산발효로 ATP생산, 혈액 내 젖산 증가에 의한 pH감소 (둘 중 하나만 기술) 1.5 (0.5) 점 이산화탄소 배출이 어려움 1.5점	4
[2-3]	감각 신경, 또는 구심성 신경, 또는 구심성 뉴런 기술 1점 뇌교와 연수 기술 (둘 중 하나만 기술) 2(1) 점 운동 신경, 또는 원심성 신경, 또는 원심성 뉴런 기술 1점 경로 순서가 틀리면 전체 0점	4
[2-4] (1)	리보좀, 소포체, 골지체, 소낭 순서대로 언급 (순서가 틀리거나, 모두 언급하지 않으면) 2(0)점 면역세포에서 사이토카인이 분비되지 못함 1점 근섬유아세포에서 세포외기질이 분비되지 못함 1점	4
[2-4] (2)	리보좀, 소포체, 골지체, 소낭 순서대로 언급 (순서가 틀리거나, 모두 언급하지 않으면) 1(0)점 인슐린이 분비되지 못함 1점	2
[2-5]	Gene2와 Gene3가 폐섬유증과 관련이 있다 (둘 중 하나만 언급하면) 2(1) 점 Gene2은 폐섬유증 증상(또는 CCL-18 단백질양)과 정비례 관계가 있다. Gene3은 폐섬유증 증상(또는 CCL-18 단백질양)과 정비례 관계가 있다. (둘 중 하나만 언급하면) 2(1) 점 그래프를 그려서 설명 (그래프를 그리지 않으면) 2(0) 점	6
[2-6] (1)	좌심방, 좌심실, 대동맥, 대정맥, 우심방, 우심실로 초미세먼지가 거쳐 가는 경로를 순서대로 기술 (순서가 틀리면) 2(0) 점 좌심실의 초미세먼지 농도가 높아 독성이 높다. 또는 우심실의 초미세먼지 농도가 낮아 독성이 낮다 2 점	4

[2-6] (2)	좌심실이 우심실에 비하여 분사능력이 상대적으로 낮다 (또는 우심실이 좌심실에 비하여 분사능력이 상대적으로 높다) 2점 좌심실이 우심실에 비하여 분출하는 혈액양이 상대적으로 적다 (또는 우심실이 좌심실에 비하여 분출하는 혈액양이 상대적으로 많다) 2점	4
[2-7] (1)	촉진확산 기술 1점 촉진확산의 원리를 명확히 기술 1점	2
[2-7] (2)	정상 CFTR 단백질에서 염소이온 이동으로 점액질의 삼투압 증가로 수분이동 증가 기술 1점 정상 CFTR 단백질에서 점액의 점도 감소 기술 1점 정상 CFTR 단백질에서 섬모운동 촉진 기술 1점 돌연변이 CFTR 단백질에서 염소이온 이동 감소로 인하여 점액의 점도 증가와 이로 인한 감염증가 기술 1점	4

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 2-1] (1) A. 폐섬유증 환자는 섬유화로 폐포에서 산소의 확산이 어려워 혈액으로의 산소이동이 어렵다. 산소의 확산속도는 산소의 농도 차에 비례하므로, 산소의 확산을 증가시키는 방법으로 고농도의 산소를 주입하여 폐포에서 혈액으로의 산소 확산 속도를 증가시키면 혈중 산소농도를 증가시킬 수 있다.
B. 기체의 압력은 구성 기체분자들의 농도에 비례한다. 즉, 고압의 기체는 구성 분자들의 농도가 높다는 의미이다. 고압의 기체를 주입하면 산소의 농도차이가 높아져 산소의 확산을 증가시킬 수 있다.

[문제 2-1] (2) 섬유화된 폐포(B)는 뻣뻣하여 정상 폐포(A)보다 확장이 어렵다. 즉, 공기를 들이 마실 때 섬유화된 폐포는 정상 폐포에 비하여 부피가 덜 증가한다. 보일의 법칙에 의하면 기체의 압력은 부피에 반비례한다. 부피가 덜 증가한 섬유화 폐포(B) 내부의 기체압력은 정상 폐포(A) 내부의 기체 압력보다 높다. 기체는 압력이 높은 곳에서 낮은 곳으로 흐르므로, 외부 공기는 압력이 더 낮은 정상 폐포로 먼저 들어가고, 또한 섬유화 폐포(B) 내부에 존재하는 기체도 정상 폐포(A)로 이동한다. 그러므로 공기를 들이 마실 때 섬유화된 폐포로 공기가 잘 들어가지 않는다.

[문제 2-2] (1) 폐섬유증 환자군이 인체 수분함량이 낮다. 그 이유는 환자 몸으로 산소의 흡수가 떨어져 인체내 산소 농도가 낮아지기 때문이다. 체내에 흡수된 산소는 대부

분 조직세포의 미토콘드리아에 존재하는 전자전달계에서 물로 전환된다. 그러므로 체내 산소 농도가 낮은 환자군은 생산되는 물의 양이 정상군보다 인체 수분함량이 적다.

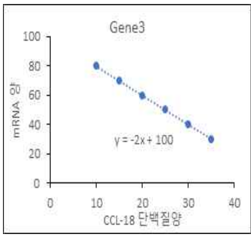
[문제 2-2] (2) 폐섬유증 환자군의 혈액 pH가 낮다. 그 이유는 A. 환자 몸으로 산소의 흡수가 떨어져 체내 산소 농도가 낮아지기 때문이다. 산소 공급이 불충분한 상태에서 운동을 하면 근육은 젖산발효로 ATP를 생산하기 때문에 혈액의 젖산 농도가 높아져 혈액의 pH가 낮아진다 B. 폐섬유증 환자는 폐포에서 물질의 확산이 어려우므로, 혈액 내의 이산화탄소 배출이 어렵다. 이는 혈액 내 이산화탄소의 농도를 증가시키고, 이산화탄소는 혈액에서 탄산수소이온으로 존재하여 pH를 낮춘다.

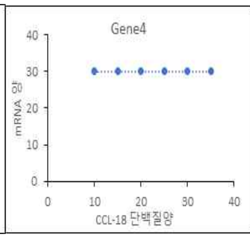
[문제 2-3] ① 혈중 산소농도의 감소, ② 산소 농도 변화 수용기에서 자극 감지, ③ 감각 신경(또는 구심성 신경, 또는 구심성 뉴런)을 통하여 ④ 뇌교와 연수에 정보전달, 뇌교와 연수에서 ⑤ 운동 신경(또는 원심성 신경, 또는 원심성 뉴런)을 통하여 폐 근육에 신호전달, ⑥ 폐의 호흡운동 수 증가

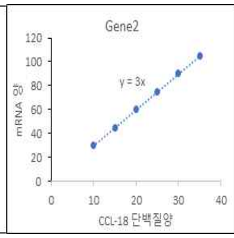
[문제 2-4] (1) 면역세포에서 사이토카인이 분비되기 위하여, 사이토카인은 리보좀에서 합성된 후 소포체(ER, Endoplasmic reticulum)로 이동되고, 골지체(Golgi apparatus)를 거쳐 수송소낭(secretory vesicle)(또는 분비소낭 또는 소낭)에 담겨져야 한다(Exocytosis). Eeyarestatin은 새로 생성되는 단백질이 소포체로 이동하는 과정을 저해하는 약물로, 사이토카인이 최종적으로 수송소낭에 담기는 것을 저해한다. 이로 인하여 A. 상처부위에 모여든 면역세포에서 사이토카인이 분비되는 과정이 저해된다. 결국 상처부위에 모여든 면역세포에서 사이토카인 분비가 감소하여 섬유아세포의 과도한 근섬유아세포로의 전환이 억제된다, B. 동일한 이유로 근섬유아세포에서 세포외기질 분비도 저해된다. 이러한 이유들로 폐섬유증의 발생이 감소한다.

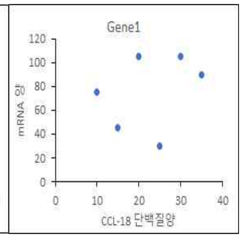
[문제 2-4] (2) 당뇨병은 호르몬인 인슐린의 분비가 정상적으로 일어나지 못할 때 발생한다. 인슐린은 호르몬 단백질로 분비되기 위하여 리보좀에서 합성된 후 소포체(ER, Endoplasmic reticulum)로 이동되고, 골지체(Golgi apparatus)를 거쳐 수송소낭(secretory vesicle)(또는 분비소낭 또는 소낭)에 담겨져야 한다(Exocytosis). Eeyarestatin은 단백질이 소포체로 이동하는 과정을 저해하는 약물로, 인슐린이 최종적으로 수송소낭(또는 분비소낭 또는 소낭)에 담기는 것을 저해한다. 결국 Eeyarestatin을 처리하면 인슐린의 분비가 감소하여(또는 저해되어) 당뇨병이 발생한다.

[문제 2-5] CCL-18 단백질의 양과 Gene의 mRNA양의 상관관계를 그래프로 그려보면 아래와 같다.









Gene2 mRNA양은 CCL-18 단백질양과 정비례관계가 있고, Gene 3 mRNA양은 CCL-18 단백질양과 반비례관계가 있으나, Gene1과4의 mRNA양은 CCL-18 단백질양과 상관관계가 없다. 이는 폐섬유증의 증상이 심할수록 Gene2 mRNA양은 증가하고 Gene3 mRNA양은 감소한다는 상관관계가 성립하여, Gene2와 Gene3가 폐섬유증과 관계있는 유전자들이라고 추론할 수 있다.

[문제 2-6] (1) 폐에서 흡수된 초미세먼지는 폐정맥을 거쳐 좌심방, 좌심실에 먼저 도착한다. 이후 대동맥과 몸 전체의 혈관을 거친 후 대정맥을 통하여 우심방, 우심실로 도착한다. 초미세먼지는 세포들에 의하여 흡수되므로, 먼저 도착한 좌심실의 초미세먼지의 농도는 가장 나중에 도착하는 우심실의 농도보다 높다. 초미세먼지의 농도가 높을수록 독성이 높으므로 좌심실의 세포들이 파괴될 확률이 높다.

[문제 2-6] (2) 초미세먼지로 인한 심장 섬유증은 좌심실에서 심하게 나타난다. 좌심실이 섬유화되면, 좌심실의 확장력이 떨어져 좌심실의 부피증가가 제한적이 된다. 이는 좌심실에서 혈액 펌핑능력(또는 분사능력)을 떨어뜨린다. 반면 우심실은 상대적으로 섬유화가 덜 진행되므로 우심실에서 혈액 펌핑능력(또는 분사능력)은 좌심실보다 높다. 이로 인하여 좌심실에서 대동맥으로 분사하는 혈액의 양보다 우심실에서 폐동맥으로 분사하는 혈액의 양이 상대적으로 많기 때문에 폐정맥의 혈압이 높아진다.

[문제 2-7] (1) 세포막을 통한 물질의 이동방법 중, 촉진확산의 하나로써, 물질이 인지질을 직접 통과하지 않고 통로 단백질을 통해 통과함으로써 특정물질의 확산 속도를 증가시키는 것을 말한다.

[문제 2-7] (2) 정상 상피세포는 CFTR을 통해 염소이온을 기관지 내부로 통과시켜 폐 점액의 삼투압을 증가시킨다. 증가된 점액의 삼투압은 수분의 이동을 촉진시켜, 결과적으로 폐 조직 내부의 점액의 점도를 감소시켜 섬모의 운동을 원활하게 하여 폐 조직에 점액이 고이지 않고 배출하게 한다. 그러나 CFTR이 기능하지 못하면 폐에 점액이 축적되어 감염이 자주 일어나게 되고 이에 따른 상처 조직의 과도한 형성에 의해 폐 조직의 섬유증을 유발한다.