

3-1. 문항카드 양식 1 (자연1계열)

1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	신입학 수시 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 1 (자연대·공대) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 미적분
	핵심개념 및 용어	삼차방정식과 사차방정식, 이계도함수
예상 소요 시간	25분	

2. 문항 및 제시문

아래 논제에 답하시오. (25점)

다음 네 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 의 개수를 구하고, 그 함수를 모두 찾으시오.

- (i) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (단, a, b, c 는 실수)
- (ii) 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축은 서로 다른 세 점 $A(2 - \sqrt{5}, 0)$, $B(2 + \sqrt{5}, 0)$, $C(\gamma, 0)$ 에서 만난다.
- (iii) 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점 P 의 x 좌표는 양의 정수이다.
- (iv) 원점 O 에 대하여 삼각형 OPB 와 삼각형 OPC 는 모두 예각삼각형이다. (단, 예각삼각형은 모든 각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 보다 작은 삼각형이다.)

3. 출제 의도

주어진 조건과 변곡점의 정의와 예각삼각형의 조건을 이용하여 함수의 올바른 형태를 찾는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호[별책8] “수학과 교육과정” 수학 - (1) 문자와 식 - ⑥ 삼차방정식과 사차방정식 미적분 - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법	
관련 성취기준	과목명: 수학	
	성취기준 1	[10수학01-12] 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.
	과목명: 미적분	
	성취기준 2	[12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외 14명	교학사	2018	72
	수학	류희찬 외 10명	천재교과서	2018	75
	미적분	황선옥 외 8명	미래엔	2018	114
	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	94

5. 문항 해설

변곡점의 좌표와 함수의 그래프가 x 축과 만나는 점을 찾은 후, 문제에서 주어진 삼각형의 변의 길이를 구하여 예각삼각형이 될 조건을 만족시키는지 판별하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	변곡점의 정의를 이용하여 변곡점의 좌표와 그래프가 x 축과 만나는 점을 구하고 이로부터 삼각형의 변의 길이를 구하여 예각삼각형이 될 조건을 판별하고 이로부터 문제의 조건을 만족시키는 함수를 찾을 수 있다.	25

7. 예시 답안

방정식 $f(x) = 0$ 의 해를 $\alpha = 2 - \sqrt{5}, \beta = 2 + \sqrt{5}, \gamma$ 라 하면 $f(x)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$$

변곡점 P를 찾기 위하여 함수 $f(x)$ 의 이계도함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \\ \Rightarrow f''(x) &= 6x - 2(\alpha + \beta + \gamma) \end{aligned}$$

그러므로 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점의 x 좌표를 p 라고 하면, $p = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \frac{4 + \gamma}{3}$ 이다. 조건 (iii)에 의하여 $p = \frac{4 + \gamma}{3}$ 가 양의 정수여야 한다.

1) $p = 1$ 일 때 $\gamma = -1$ 이다. 이때 $f(x) = (x - 2 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{5})(x + 1)$ 이므로 점 P의 좌표는 $(1, -8)$ 이고 점 C의 좌표는 $(-1, 0)$ 이다. 점 P의 x 좌표가 원점과 점 C의 x 좌표보다 크므로 각 COP는 $\frac{\pi}{2}$ 보다 크게 되어 $\triangle OCP$ 는 둔각삼각형이 된다.

따라서 $f(x) = (x - 2 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{5})(x + 1)$ 는 조건 (iv)를 만족시키지 못한다.

2) $p = 2$ 일 때 $\gamma = 2$ 이다. 이때 $f(x) = (x - 2 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{5})(x - 2)$ 이므로 점 P의 좌표는 $(2, 0)$ 이고 점 C의 좌표는 $(2, 0)$ 이다. 따라서 점 O, 점 P, 점 B, 점 C는 모두 x 축 위에 있으므로 예각삼각형을 이루지 못한다.

3) $p = 3$ 일 때 $\gamma = 5$ 이다. 이때 $f(x) = (x - 2 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{5})(x - 5)$ 이므로 점 P의 좌표는 $(3, 8)$ 이고 점 C의 좌표는 $(5, 0)$ 이다.

$\triangle POC$ 의 변의 길이의 제곱은 각각 다음과 같다.

$$\overline{OP}^2 = 3^2 + 8^2 = 73$$

$$\overline{PC}^2 = 2^2 + 8^2 = 68$$

$$\overline{OC}^2 = 5^2 = 25$$

이때 가장 긴 변의 길이는 \overline{OP} 이고 $\overline{OP}^2 < \overline{PC}^2 + \overline{OC}^2$ 이므로 $\triangle POC$ 는 예각삼각형이다.

각 $\angle OPB$ 는 각 $\angle OPC$ 보다 작고, 점 P 의 x 좌표가 원점의 x 좌표보다 크고 점 B 의 x 좌표 $2 + \sqrt{5}$ 보다 작으므로 $\triangle OPB$ 는 예각삼각형이다.

따라서 $f(x) = (x - 2 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{5})(x - 5)$ 는 조건 (iv)를 만족시킨다.

4) $p = 4$ 일 때 $\gamma = 8$ 이다. 이때 $f(x) = (x - 2 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{5})(x - 8)$ 이므로 점 P 의 좌표는 $(4, 4)$ 이고 점 C 의 좌표는 $(8, 0)$ 이다.

$\triangle OPC$ 의 변의 길이의 제곱은 각각 다음과 같다.

$$\overline{OP}^2 = 4^2 + 4^2 = 32$$

$$\overline{PC}^2 = 4^2 + 4^2 = 32$$

$$\overline{OC}^2 = 8^2 = 64$$

이때 가장 긴 변의 길이는 \overline{OC} 이고 $\overline{OC}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{OP}^2$ 이므로 $\triangle POC$ 는 직각삼각형이다.

따라서 $f(x) = (x - 2 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{5})(x - 8)$ 는 조건 (iv)를 만족시키지 못한다.

5) $p \geq 5$ 이면 점 P 의 x 좌표가 원점과 점 B 의 x 좌표보다 크다. 따라서 각 $\angle OBP$ 는 $\frac{\pi}{2}$ 보다 크게 되어 $\triangle OBP$ 는 둔각삼각형이 된다. 이 경우 함수 $f(x)$ 는 조건 (iv)를 만족시키지 못한다.

1)-5)로부터 문제의 조건을 모두 만족하는 삼차함수 $f(x)$ 는 1개이고 이때 함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = (x - 2 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{5})(x - 5) = (x^2 - 4x - 1)(x - 5) = x^3 - 9x^2 + 19x + 5$$

3-2. 문항카드 양식 1 (자연1계열)

1. 일반 정보

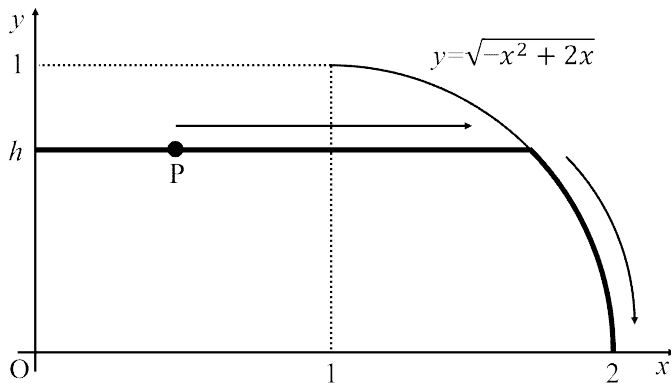
유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	신입학 수시 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 1 (자연대·공대) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 미적분
	핵심개념 및 용어	일반각과 호도법, 속도와 거리
예상 소요 시간	25분	

2. 문항 및 제시문

아래 문제에 답하십시오. (25점)

좌표평면 위의 점 P가 다음 조건을 모두 만족시키며 움직인다고 하자.

- (i) 시각 $t=0$ 에서의 점 P의 위치는 $(0, h)$ 이며 $0 \leq h \leq 1$ 이다.
- (ii) 점 P는 시각 t 에서 속력 $v(t)=t$ 로 x 축과 평행한 직선 위를 움직이다가 곡선 $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$ ($1 \leq x \leq 2$)를 만나면 곡선을 따라 일정한 속력 $\sqrt{3}$ 으로 움직인다.
- (iii) 시각 t 에서의 점 P의 x 좌표 $x(t)$ 는 $t_1 < t_2$ 일 때 $x(t_1) < x(t_2)$ 이다.



점 P가 점 $(0, h)$ 에서 점 $(2, 0)$ 까지 이동하는데 걸리는 시간이 최대가 되도록 하는 h 를 구하십시오.

3. 출제 의도

속력과 시간의 관계 및 도함수를 활용하여 주어진 함수가 최대가 되도록 하는 조건을 찾는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호[별책8] “수학과 교육과정” 수학 I - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 미적분 - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용 미적분 - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법	
관련 성취기준	과목명: 수학 I	
	성취기준 1	[12수학I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.
	성취기준 2	[12수학I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
	과목명: 미적분	
	성취기준 1	[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.
	성취기준 2	[12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	류희찬 외 10명	천재교과서	2018	70,77
	수학 I	권오남 외 14명	교학사	2018	74,80
	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	81,162
	미적분	황선욱 외 8명	미래엔	2019	86,173

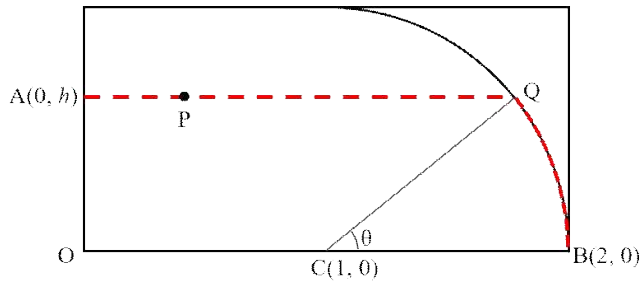
5. 문항 해설

점 P가 움직이는 거리와 시간을 원호의 길이 θ 에 대한 함수로 나타낸 후 도함수를 이용하여 시간이 최대가 되도록 하는 시각 $t=0$ 에서의 점 P에서의 위치를 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	점 P가 움직이는 거리와 시간을 원호의 길이 θ 에 대한 함수로 나타내고 도함수 및 극값의 조건으로부터 시각 $t=0$ 에서의 점 P에서의 위치를 구할 수 있다.	25

7. 예시 답안



위의 그림과 같이 시각 $t=0$ 에서의 점 P의 위치를 A로 나타내고 곡선 $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$ 를 만날 때의 점 P의 위치를 Q로 나타내자.

$1 \leq x \leq 2$ 일 때 곡선 $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$ 은 중심이 $C(1, 0)$ 이고 반지름이 1인 원의 일부이므로, 위의 그림에서 $\angle QCB = \theta$ 이면 $Q = (1 + \cos\theta, \sin\theta)$ 이다.

점 P가 곡선 $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$ 를 만날때의 시각을 T 라고 하면, 조건 (ii)에 의하여 $0 \leq t \leq T$ 일 때 시각 t 에서의 점 P의 x 좌표는 $x_0 + \int_0^t u \, du$ 인데 $x_0 = 0$ 이므로 $\frac{t^2}{2}$ 이다.

따라서 점 P의 시각 t 에서의 위치는 $\left(\frac{t^2}{2}, h\right)$ 이고 $h = \sin\theta$ 이다.

또한 $\frac{T^2}{2} = 1 + \cos\theta$ 로부터 $T = \sqrt{2(1 + \cos\theta)}$ 이다.

점 P는 점 Q로부터 $(2, 0)$ 까지 곡선 $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$ 위를 속력 $\sqrt{3}$ 으로 움직이는데 이때

점 P가 움직이는 거리는 $r\theta = \theta$ 이므로, 곡선 $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$ 를 움직이는데 걸리는 시간은 $\frac{\theta}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 점 P가 $(0, h) = (0, \sin\theta)$ 를 출발하여 $(2, 0)$ 에 도착하는데 걸리는 시간 $t(\theta)$ 와 $t(\theta)$ 의 도함수 및 이계도함수는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} t(\theta) &= \sqrt{2+2\cos\theta} + \frac{\theta}{\sqrt{3}} \\ t'(\theta) &= \frac{-\sin\theta}{\sqrt{2+2\cos\theta}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ t''(\theta) &= -\frac{\sqrt{2(1+\cos\theta)}}{4} \end{aligned}$$

$\theta = \theta_1$ 에서 함수 $t(\theta)$ 가 극값을 가질 때 $t'(\theta_1) = 0$ 이므로

$$\frac{\sin\theta_1}{\sqrt{2+2\cos\theta_1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\sin^2\theta_1}{2+2\cos\theta_1} = \frac{1-\cos^2\theta_1}{2(1+\cos\theta_1)}$$

$0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ 이므로 $1+\cos\theta_1 \neq 0$ 이고 $\frac{1-\cos\theta_1}{2} = \frac{1}{3}$

이로부터 $\cos\theta_1 = \frac{1}{3}$ 이고 $\sin\theta_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다. 이때 $t(\theta_1)$ 은 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 유일한 극값이고, $t''(\theta_1) < 0$ 이므로 $t(\theta_1)$ 은 극댓값이다.

그러므로 $t(\theta)$ 는 $\theta = \theta_1$ 에서 최댓값을 가지고 이때 $h = \sin\theta_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다.

3-3. 문항카드 양식 1 (자연1계열)

1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	신입학 수시 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 1 (자연대·공대) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 매개변수로 나타낸 함수의 미분법
예상 소요 시간	25분	

2. 문항 및 제시문

아래 논제에 답하시오. (25점)

혜성과 혜성을 관측하기 위한 우주선의 위치를 좌표평면 위에서 나타낼 수 있다고 하자.

시각 t 에서의 혜성의 위치 (x, y) 가 $x = 2\sqrt{2}t - 4\sqrt{2}$, $y = t^2 - 2t + 3$ 으로 주어져 있다. 우주선은 직선 $\ell: y = \sqrt{2}x - 1$ 위를 움직이며, 시각 t 에서의 우주선의 속도는 $(\sqrt{2}, 2)$ 로 주어진다고 하자. 직선 ℓ 과 혜성이 움직이는 곡선은 서로 만나지 않는다.

이때 다음 문항에 답하시오. (단, 혜성과 우주선의 크기는 무시한다.)

(1) 시각 $t=0$ 에서의 우주선의 위치가 $(-2\sqrt{2}, -5)$ 라고 하자. 이때 혜성과 우주선 사이의 거리가 최소가 되는 시각 t 와, 그 때의 혜성과 우주선 사이의 거리를 구하시오.

(2) 이번에는 시각 $t=0$ 에서의 우주선의 위치를 직선 ℓ 위에서 조정하여 혜성을 더 가까운 거리에서 관측하려고 한다.

혜성과 우주선이 가장 가까워질 수 있도록 하는 시각 $t=0$ 에서의 우주선의 위치와, 이때 혜성과 우주선이 가장 가까워지는 시각 t 를 구하시오.

3. 출제 의도

매개화된 두 곡선 위를 움직이는 점의 위치를 계산하고 두 점 사이의 거리의 최솟값을 계산하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호[별책8] “수학과 교육과정” 수학II - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 미적분 - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법
관련 성취기준	과목명: 수학
	성취 기준 [12수학II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	과목명: 수학 I
	성취 기준 [12미적 02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	김원경 외 14명	비상교육	2018	78
	수학 II	류희찬 외 10명	천재교과서	2018	78
	미적분	황선욱 외 8명	미래엔	2019	90
	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	91

5. 문항 해설

우주선의 시각 t 에서의 위치를 계산하고 혜성과 우주선 사이의 거리의 최솟값을 구하며, 혜성이 지나는 곡선과 우주선이 지나는 직선이 최소가 될 때의 시각을 찾아서 우주선이 시각 $t=0$ 에서 어느 위치에 있을 때 혜성과 가능한 가장 가까운 거리를 지나는지를 파악하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	우주선의 시각 t 에서의 위치를 계산하고 혜성과 우주선 사이의 거리를 함수로 나타내어 최솟값을 구할 수 있다.	10
(2)	혜성이 지나는 곡선과 우주선이 지나는 직선이 가장 가까울 때 혜성이 지나는 시각을 구하고 이로부터 우주선이 시각 $t=0$ 에서 어느 위치에 있어야 하는지 계산할 수 있다.	15

7. 예시 답안

(1) 우주선의 시각 t 에서의 위치는 $x = \sqrt{2}t - 2\sqrt{2}$, $y = 2t - 5$ 이다.
시각 t 에서 우주선과 혜성 사이의 거리를 $r(t)$ 라고 할 때

$$(r(t))^2 = 2(t-2)^2 + (t^2 - 4t + 8)^2$$

$s(t) = (r(t))^2$ 이라고 하고 함수 $s(t)$ 의 도함수를 구하자.

$$s'(t) = 4(t-2) + 2(t^2 - 4t + 8)(2t-4) = 4(t-2)(t^2 - 4t + 9)$$

이로부터 함수 $s(t)$ 의 증감을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	\cdots	2	\cdots
$s'(t)$	$-$	0	$+$
$s(t)$	\searrow	16	\nearrow

그러므로 함수 $s(t)$ 는 $t=2$ 에서 최솟값 16을 가지고, 이때 $r(2)=4$ 이다.

즉, 혜성과 우주선 사이의 거리가 최소가 되는 시각은 $t=2$ 이고 그 때의 혜성과 우주선 사이의 거리는 4이다.

(2) 혜성을 가능한 가장 가까운 거리에서 관측하기 위해서는 혜성이 움직이는 곡선 C 위의 점과 우주선이 움직이는 직선 ℓ 위의 점 중 가장 가까운 두 점을 혜성과 우주선이 각

각 같은 시각에 지나야 한다.

우주선이 움직이는 직선의 기울기는 $\sqrt{2}$ 이므로 곡선 C 위의 점 중 직선 ℓ 과 가장 가까운 점을 P 라고 할 때, 곡선 C 위의 점 P 에서 접하는 접선의 기울기는 $\sqrt{2}$ 이다. 매개변수로 나타낸 함수의 미분법에 의하여 곡선 C 위의 시각 t 에서의 점에서 접하는 접선의 기울기 $\frac{dy}{dx}$ 는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t-2}{2\sqrt{2}}$$

따라서 $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2}$ 일 때, 즉 $t=3$ 일 때 곡선 C 위의 점 P 와 직선 ℓ 사이의 거리가 최솟값이 된다.

$t=3$ 일 때의 혜성의 위치는 $P(2\sqrt{2}, 6)$ 이다. 점 P 에서 직선 ℓ 에 내린 수선을 직선 ℓ' 이라고 할 때 직선 ℓ' 은 기울기가 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이고 점 $P(2\sqrt{2}, 6)$ 를 지나는 직선이다.

$$\ell': y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - 2\sqrt{2}) + 6 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 8,$$

직선 ℓ 과 ℓ' 의 교점 Q 의 위치를 일차연립방정식으로 계산하면 $Q(3\sqrt{2}, 5)$ 이다.

시각 $t=0$ 일 때의 우주선의 위치를 $(x_0, \sqrt{2}x_0 - 1)$ 이라고 하면 시각 t 에서의 우주선의 위치를

$$x = \sqrt{2}t + x_0, \quad y = 2t + \sqrt{2}x_0 - 1$$

로 놓을 수 있다.

$t=3$ 일 때 우주선이 점 $Q(3\sqrt{2}, 5)$ 를 지나야 하므로,

$$3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + x_0, \quad 5 = 6 + \sqrt{2}x_0 - 1$$

따라서 $t=0$ 일 때 $x_0 = 0$ 이고 우주선의 위치는 $(0, -1)$ 이다.

※(2)번의 다른 풀이

혜성을 가능한 가장 가까운 거리에서 관측하기 위해서는 혜성이 움직이는 곡선 C 위의 점

과 우주선이 움직이는 직선 ℓ 위의 점 중 가장 가까운 두 점을 혜성과 우주선이 각각 같은 시각에 지나야 한다.

우주선이 움직이는 직선의 기울기는 $\sqrt{2}$ 이므로 곡선 C 위의 점 중 직선 ℓ 과 가장 가까운 점을 P 라고 할 때, 곡선 C 위의 점 P 에서 접하는 접선의 기울기는 $\sqrt{2}$ 이다. 매개변수로 나타낸 함수의 미분법에 의하여 곡선 C 위의 시각 t 에서의 점에서 접하는 접선의 기울기 $\frac{dy}{dx}$ 는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t-2}{2\sqrt{2}}$$

따라서 $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2}$ 일 때, 즉 $t=3$ 일 때 곡선 C 위의 점 P 와 직선 ℓ 사이의 거리가 최솟값이 된다.

시각 $t=0$ 에서의 우주선의 위치를 $(a, \sqrt{2}a-1)$ 이라고 하면 시각 t 에서의 우주선의 위치는 $(\sqrt{2}t+a, 2t+\sqrt{2}a-1)$ 이다. 시각 t 에서 혜성과 우주선 사이의 거리를 $r(t)$ 라고 할 때

$$\begin{aligned} (r(t))^2 &= (2\sqrt{2}t-4\sqrt{2}-\sqrt{2}t-a)^2 + (t^2-2t+3-2t-\sqrt{2}a+1)^2 \\ &= (\sqrt{2}t-4\sqrt{2}-a)^2 + (t^2-4t+4-\sqrt{2}a)^2 \end{aligned}$$

$s(t) = (r(t))^2$ 이라고 할 때 함수 $s(t)$ 는 $t=3$ 에서 최솟값을 가져야 하므로 $s'(3)=0$ 이다.

$$s'(t) = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}t-4\sqrt{2}-a) + 2(t^2-4t+4-\sqrt{2}a)(2t-4)$$

$s'(3)=0$ 이기 위해서는

$$-3\sqrt{2}a = 0$$

따라서 $a=0$ 이고, 시각 $t=0$ 에서의 우주선의 위치는

$$x=0, y=-1$$

3-4. 문항카드 양식 1 (자연1계열)

1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	신입학 수시 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 1 (자연대·공대) / 문제 4	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 미적분
	핵심개념 및 용어	여러 가지 수열의 합, 치환적분법
예상 소요 시간	25분	

2. 문항 및 제시문

아래 논제에 답하시오. (25점)

함수 $g(x)$ 는 $x \leq 0$ 에서 정의된 연속함수이며, 일반항이 $a_n = n(n-1)$ 인 수열 $\{a_n\}$ 과 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 모두 만족시키는 연속함수라고 하자.

(i) $x \leq 0$ 일 때 $f(x) = g(x)$

(ii) 1보다 크거나 같은 정수 n 에 대하여 $n-1 \leq x < n$ 일 때

$$f(x) = g(-S_n + (n-1-x)a_{n+1})$$

(iii) 2보다 크거나 같은 정수 n 에 대하여 $\int_0^{a_n} f(x - S_n) dx = 1$

이때 다음 문항에 답하시오.

(1) 2보다 크거나 같은 정수 n 에 대하여 정적분 $\int_{-S_{n-1}}^{-S_n} g(x) dx$ 의 값을 구하시오.

(2) 정적분 $\int_0^{2023} f(x) dx$ 의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

구하는 정적분을 치환적분법을 이용하여 변형한 후 주어진 조건으로부터 정적분의 값을 계산하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호[별책8] “수학과 교육과정” 수학 I - (3) 수열 - ② 수열의 합 미적분 - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법
관련 성취기준	과목명: 수학 I
	성취기준 [12수학 I 03-05] 여러 가지 수열의 첫째 항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.
	과목명: 미적분
	성취기준 [12미적 03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	류희찬 외 10명	천재교과서	2018	140
	수학 I	권오남 외 14명	교학사	2018	141
	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	134
	미적분	황선욱 외 8명	미래엔	2019	143

5. 문항 해설

조건을 이용하여 구하는 정적분의 형태를 변형한 후 문제에서 주어진 다른 조건으로부터 정적분의 값을 찾으며, 정적분의 성질을 이용하여 주어진 정적분을 정적분의 합으로 나타낸 후 치환적분법, 문제의 조건 및 부분분수 표현으로부터 정적분의 값을 계산하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	치환적분법 및 문제의 조건을 이용하여 정적분의 값을 계산할 수 있다.	7.5
(2)	정적분의 성질을 이용하여 주어진 정적분의 형태를 변형한 후 치환적분법, 문제의 조건 및 부분분수 표현을 이용하여 정적분의 값을 계산할 수 있다.	17.5

7. 예시 답안

(1) $t = x - S_n$ 으로 치환하면 $\int_0^{a_n} f(x - S_n) dx = \int_{-S_n}^{-S_n + a_n} f(t) dt$ 이고, $-S_n + a_n = -S_{n-1}$ 이므로

$$\int_{-S_n}^{-S_n + a_n} f(t) dt = \int_{-S_n}^{-S_{n-1}} f(t) dt$$

a_n 은 모두 0보다 크거나 같으므로 $-S_n \leq 0$ 이다. 조건 (i)에 의하여

$$\int_{-S_n}^{-S_{n-1}} f(t) dt = \int_{-S_n}^{-S_{n-1}} g(t) dt$$

따라서

$$\int_{-S_n}^{-S_{n-1}} g(x) dx = \int_0^{a_n} f(x - S_n) dx = 1,$$

$$\int_{-S_{n-1}}^{-S_n} g(x) dx = -1$$

(2) 정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^{2023} f(x) dx = \sum_{n=1}^{2023} \int_{n-1}^n f(x) dx$$

n 이 1보다 크거나 같은 정수일 때

$$\int_{n-1}^n f(x) dx = \int_{n-1}^n g(-S_n + (n-1-x)a_{n+1}) dx$$

$t = -S_n + (n-1-x)a_{n+1}$ 라고 두면

$$\begin{aligned} \int_{n-1}^n f(x) dx &= \int_{n-1}^n g(-S_n + (n-1-x)a_{n+1}) dx \\ &= \int_{-S_n}^{-S_n - a_{n+1}} \left(-\frac{g(t)}{a_{n+1}} \right) dt \\ &= \int_{-S_n - a_{n+1}}^{-S_n} \frac{g(t)}{a_{n+1}} dt \end{aligned}$$

그런데 $-S_n - a_{n+1} = -S_{n+1}$ 이고 $n \geq 2$ 일 때 문항 (1)의 결과에 의하여

$$\int_{-S_n}^{-S_{n-1}} g(t) dt = 1 \text{ 이므로, } n \geq 1 \text{ 일 때 } \int_{-S_{n+1}}^{-S_n} g(t) dt = 1 \text{ 이다.}$$

그러므로

$$\int_{-S_n - a_{n+1}}^{-S_n} \frac{g(t)}{a_{n+1}} dt = \frac{1}{a_{n+1}} \int_{-S_{n+1}}^{-S_n} g(t) dt = \frac{1}{a_{n+1}}$$

$$\text{따라서 } \int_{n-1}^n f(x) dx = \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ 이고,}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2023} f(x) dx &= \sum_{n=1}^{2023} \int_{n-1}^n f(x) dx = \sum_{n=1}^{2023} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024}
\end{aligned}$$

부록

4

문항카드 양식 3 (자연2계열 - 수학)

4-1. 문항카드 양식 1 (자연2계열)

1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	신입학 수시 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 2 (IT대) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I
	핵심개념 및 용어	원의 방정식, 사인법칙과 코사인 법칙
예상 소요 시간	20분	

2. 문항 및 제시문

아래 논제에 답하시오. (20점)

다음 조건을 모두 만족시키는 삼각형의 넓이의 최댓값을 구하시오.

- (i) 실수 m 에 대하여 두 직선 $x + 2my = 0$ 과 $2mx - y - 2m = 0$ 의 교점을 P_m 이라고 할 때, 서로 다른 세 실수 m_1, m_2, m_3 에 대하여 $P_{m_1}, P_{m_2}, P_{m_3}$ 을 꼭짓점으로 갖는다.
- (ii) 한 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$ 이다.

3. 출제 의도

사인법칙을 이용하여 원에 내접하는 삼각형의 변의 길이와 넓이를 구하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호[별책8] “수학과 교육과정” 수학 - (2) 기하 - ③ 원의 방정식 수학I - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수
관련 성취기준	과목명: 수학
	성취기준 1 [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다.
	과목명: 수학 I
	성취기준 1 [12수학102-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	류희찬 외 10명	천재교과서	2018	136
	수학	권오남 외 14명	교학사	2018	131
	수학 I	류희찬 외 10명	천재교과서	2018	97
	수학 I	권오남 외 14명	교학사	2018	97

5. 문항 해설

주어진 조건을 만족시키는 세 점으로 이루어진 삼각형의 외접원을 구하고, 한 각의 대변의 길이를 사인법칙을 이용하여 구한 후 넓이가 최대가 되기 위한 조건을 찾아 넓이를 계산하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	주어진 조건을 만족시키는 삼각형의 외접원과 한 변의 길이를 구한 후 삼각형의 넓이가 최대가 되려면 이등변삼각형이 됨을 이용하여 넓이를 계산할 수 있다.	20

7. 예시 답안

직선 $\ell: x + 2my = 0$ 과 $\ell': 2mx - y - 2m = 0$ 은 m 과 관계없이 각각 점 $(0, 0)$ 과 점 $(1, 0)$ 을 지나는 직선이다. $m \neq 0$ 인 경우 직선 ℓ 과 ℓ' 의 기울기는 각각 $-\frac{1}{2m}$ 과 $2m$ 이므로 두 직선은 항상 수직으로 만난다. $m = 0$ 인 경우 직선 ℓ 과 ℓ' 은 각각 y 축, x 축이므로 역시 수직으로 만난다. 따라서 실수 m 에 대하여 두 직선 ℓ 과 ℓ' 의 교점 P_m 은 점 $(0, 0)$ 과 점 $(1, 0)$ 을 이은 선분을 지름으로 하는 원 위에 있게 된다.

서로 다른 세 실수 m_1, m_2, m_3 으로부터 얻어진 세 점 $P_{m_1}, P_{m_2}, P_{m_3}$ 을 각각 A, B, C 로 나타내자. 삼각형 ABC 의 외접원은 점 $(0, 0)$ 과 점 $(1, 0)$ 을 이은 선분을 지름으로 하는 원이므로 사인법칙을 이용하면

$$\frac{a}{\sin A} = 2R = 1$$

$A = \frac{\pi}{6}$ 이면 $a = \sin A = \frac{1}{2}$ 이다. 그러므로 조건을 만족시키는 삼각형은 반지름 $\frac{1}{2}$ 인 원에 내접하고 변 BC 의 길이 a 가 $\frac{1}{2}$ 인 삼각형이다.

이러한 삼각형의 넓이가 최대가 되기 위해서는 변 BC 로부터 거리가 최대가 되는 원 위의 점이 삼각형의 나머지 한 점 A 가 되어야 하고, 이때 삼각형 ABC 는 이등변삼각형이다.

밑변 BC 의 길이가 $\frac{1}{2}$ 이고 각 A 가 $\frac{\pi}{6}$ 인 이등변삼각형의 높이는 $\frac{\tan \frac{5\pi}{12}}{4}$ 이다.

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}\tan \frac{5\pi}{12} &= \tan \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

따라서 조건을 만족시키는 삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{2+\sqrt{3}}{16}$ 이다.

4-2. 문항카드 양식 1 (자연2계열)

1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	신입학 수시 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 2 (IT대) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II
	핵심개념 및 용어	함수의 연속, 함수의 그래프
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

아래 논제에 답하시오. (30점)

실수 k 에 대하여 방정식 $\frac{|2x|}{x^2+1} = k$ 의 서로 다른 실수해의 개수를 $f(k)$ 라고 하자.

이때 다음 문항에 답하시오.

(1) 함수 $f(k)$ 의 그래프를 그리시오.

(2) 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 $g(x)$ 에 대하여 항상 $g(0) > c$ 가 되도록 하는 실수 c 중 가장 큰 값을 구하시오.

- (i) 함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이다.
- (ii) 모든 정수 n 에 대하여 $g(n) \geq 0$ 이다.
- (iii) 합성함수 $g \circ f$ 는 실수 전체에서 연속이다.
- (iv) 함수 $h(x) = [x]$ 에 대하여 합성함수 $f \circ g \circ h$ 는 실수 전체에서 연속이다. (단, 실수 x 에 대하여 $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 정수 중 가장 큰 정수이다.)

3. 출제 의도

함수의 그래프를 그리는 능력 및 연속성의 정의를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수의 형태를 파악하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호[별책8] “수학과 교육과정” 수학 II - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속 수학 II - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용
관련 성취기준	과목명: 수학 II
	성취기준 1 [12수학II 01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.
	성취기준 2 [12수학II 01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준 3 [12수학II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	김원경 외 14인	비상	2018	31,86
	수학 II	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	29.86

5. 문항 해설

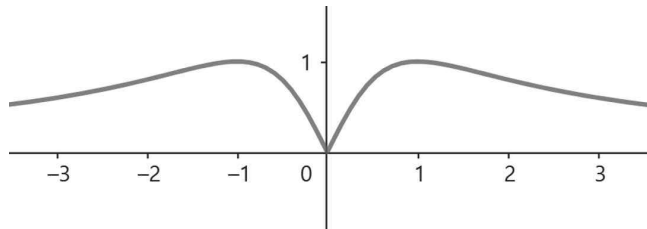
두 함수의 그래프의 개형을 미분계수 등을 이용하여 그린 후 교점의 개수를 파악하여 서로 다른 실수해의 개수를 구하며, 주어진 합성함수의 연속성으로부터 함수 $g(x)$ 의 정수에서의 함숫값이 만족시키는 조건을 찾고 실수 c 의 값을 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	함수의 그래프를 올바르게 그리고 각 k 에 따른 교점의 개수를 올바르게 구할 수 있다.	9
(2)	합성함수의 연속성으로부터 함수 $g(x)$ 의 형태를 기술하고 상수항이 만족시켜야 할 조건을 찾을 수 있다.	21

7. 예시 답안

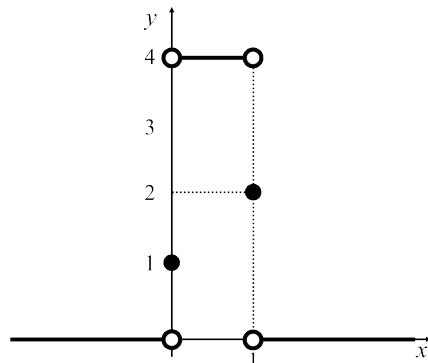
(1) $y = \frac{|2x|}{x^2 + 1}$ 의 그래프는 다음과 같다.



$p(x) = \frac{|2x|}{x^2 + 1}$ 은 $x = 1$ 과 $x = -1$ 에서 최댓값 1을 가지고, $x \rightarrow \infty$ 혹은 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 0으로 수렴한다.

따라서 함수 $f(k)$ 와 그래프는 각각 다음과 같다.

$$f(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k = 0 \\ 4 & 0 < k < 1 \\ 2 & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$



(2) 함수 $g(x)$ 가 조건 (iii)을 만족시키면, 즉 함수 $(g \circ f)(x)$ 가 모든 실수에서 연속이면 $x=0$ 에서도 연속이다. 따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} (g \circ f)(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(0), \\ \lim_{x \rightarrow 0+} (g \circ f)(x) &= g(4), \quad \lim_{x \rightarrow 0-} (g \circ f)(x) = g(0), \quad (g \circ f)(0) = g(1) \end{aligned}$$

이므로

$$g(0) = g(1) = g(4)$$

마찬가지로 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} (g \circ f)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(1), \\ \lim_{x \rightarrow 1+} (g \circ f)(x) &= g(0), \quad \lim_{x \rightarrow 1-} (g \circ f)(x) = g(4), \quad (g \circ f)(1) = g(2) \end{aligned}$$

이로부터 $g(0) = g(2) = g(4)$ 를 얻을 수 있고, $g(0) = g(1) = g(2) = g(4)$ 이다.
조건 (i)과 (iii)을 만족시키는 함수 $g(x)$ 는 실수 a 에 대하여

$$g(x) = x(x-1)(x-2)(x-4) + a$$

함수 $g(x)$ 가 조건 (iv)를 만족시킨다면, 즉 함수 $(f \circ g \circ h)(x)$ 가 모든 실수에서 연속이면 n 이 정수일 때 $x=n$ 에서도 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow n-} (f \circ g \circ h)(x) = f(g(n-1)), \quad \lim_{x \rightarrow n+} (f \circ g \circ h)(x) = f(g(n))$$

그러므로 $f(g(n-1))=f(g(n))$, 즉 $f(g(n))$ 의 값이 모든 정수 n 에 대하여 같다.

함수 $g(x)$ 가 조건 (i)을 만족시키는 함수라면 $g(m) > 1$ 인 정수 m 이 항상 존재하고 이때 $f(g(m))=0$ 이다. 함수 $g(x)$ 가 조건 (ii)를 만족시키고 $g(m') \leq 1$ 인 정수 m' 이 존재하는 함수이면 $0 \leq g(m') \leq 1$ 이기 때문에 $f(g(m'))=1, 2$ 혹은 4 가 되고, $f(g(m)) \neq f(g(m'))$ 이 된다. 이때 $(f \circ g \circ h)(x)=0$ 이다.

그러므로 조건 (i), (ii), (iii), (iv)를 만족시키는 함수 $g(x)$ 는 다음과 같다.

$$g(x) = x(x-1)(x-2)(x-4) + a, \quad n \text{이 정수일 때 } g(n) > 1$$

함수 $g(x) = x(x-1)(x-2)(x-4) + a$ 의 그래프의 개형으로부터 함수 $g(x)$ 의 정수에서의 함숫값 중 가장 작은 값은 $g(3)$ 임을 알 수 있다. 따라서 모든 정수 n 에 대하여 $g(n) > 1$ 인 것은 $g(3) > 1$ 과 동치이다.

$$g(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1) + a = a - 6 > 1, \quad a = g(0) > 7$$

그러므로 실수 c 가 문제의 조건을 만족시키는 모든 함수 $g(x)$ 에 대하여 $g(0) > c$ 를 만족시키기 위해서는 $c \leq 7$ 이어야 하고, 구하는 실수 c 의 값은 7 이다.

4-3. 문항카드 양식 1 (자연2계열)

1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	신입학 수시 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 2 (IT대) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 입체도형의 부피
예상 소요 시간	25분	

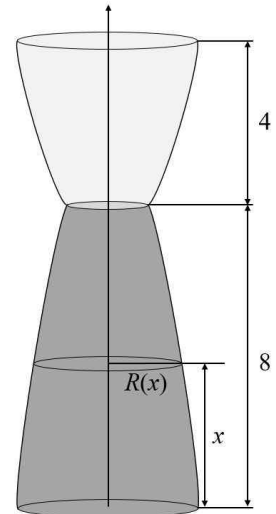
2. 문항 및 제시문

아래 논제에 답하시오. (25점)

오른쪽 그림과 같이 높이가 12인 용기가 있다. 이 용기를 밑면에 평행한 평면으로 자른 단면은 원이며, 밑면으로부터 높이가 x 인 지점에서 단면의 반지름 $R(x)$ 는 다음과 같이 주어져 있다.

$$R(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{8-x}{2}} + 1 & (0 \leq x \leq 8) \\ \sqrt{x-7} & (8 \leq x \leq 12) \end{cases}$$

용기의 높이가 $0 \leq x \leq 8$ 인 부분과 $8 \leq x \leq 12$ 인 부분에는 각각 물과 기름이 가득 차 있다.



이제 용기의 바닥, 즉 높이 $x=0$ 인 부분에 구멍을 뚫어 천천히 물을 용기 밖으로 내보낸다고 하자. 물을 내보냄에 따라 기름층도 아래로 이동하면서 기름층의 두께가 변하게 된다.

(단, 기름층의 두께는 기름층의 윗면의 높이와 아랫면의 높이의 차이를 의미한다. 기름과

물은 항상 위와 아래로 분리되어 층을 이루며 기름층의 윗면과 아랫면은 항상 밑면과 평행하다고 가정하자.)

이때 기름층의 두께의 최댓값을 구하시오.

3. 출제 의도

정적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구하고, 문제의 조건으로부터 함수를 정의한 후 그 함수의 최댓값을 구하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호[별책8] “수학과 교육과정” 수학II - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 미적분 - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용
관련 성취기준	과목명: 수학 II
	성취기준 1 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	과목명: 미적분
	성취기준 1 [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	김원경 외 14인	비상교육	2018	78
	수학 II	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	78
	미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2019	168
	미적분	홍성복 외 10인	지학사	2019	167

5. 문항 해설

기름의 부피 조건으로부터 기름층의 두께를 기름이 용기의 윗부분에서 차지하는 높이에 대한 함수로 나타낸 후 그 함수의 최댓값을 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	주어진 기름의 부피로부터 기름층의 두께를 기름이 용기의 윗부분에서 차지하는 높이에 대한 함수로 나타낸 후 도함수 및 최댓값을 계산할 수 있다.	25

7. 예시 답안

기름의 부피를 V 라고 하면

$$V = \int_8^{12} \pi(\sqrt{x-7})^2 dx = \int_8^{12} \pi(x-7) dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2 - 7x \right]_8^{12} = 12\pi$$

1) 기름층의 윗면의 높이가 8보다 크거나 같다고 하자.

$0 \leq a \leq 4$ 일 때 기름층의 윗면의 높이를 $8+a$, 아랫면의 높이를 $8-b$ ($b \geq 0$) 라고 하면

$$12\pi = \int_8^{8+a} \pi(\sqrt{x-7})^2 dx + \int_{8-b}^8 \pi\left(\sqrt{\frac{8-x}{2}}+1\right)^2 dx$$

$x-8=t$ 로 치환하여 계산하면

$$\begin{aligned}
12\pi &= \int_0^a \pi(\sqrt{t+1})^2 dt + \int_{-b}^0 \pi(\sqrt{-\frac{t}{2}+1})^2 dt \\
&= \pi \left[\frac{t^2}{2} + t \right]_0^a + \pi \left[-\frac{t^2}{4} + t \right]_{-b}^0 \\
&= \pi \left(\frac{a^2}{2} + a + \frac{b^2}{4} + b \right)
\end{aligned}$$

$b^2 + 4b + 2a^2 + 4a - 48 = 0$ 이고, $b = -2 \pm \sqrt{-2a^2 - 4a + 52}$ 인데 $0 \leq a \leq 4$ 일 때 $-2a^2 - 4a + 52 \geq 4$ 이므로 $b = -2 + \sqrt{-2a^2 - 4a + 52}$ 일 때 $b \geq 0$ 이 된다. 따라서

$$b = -2 + \sqrt{-2a^2 - 4a + 52}$$

그러므로 기름층의 윗면의 높이가 $8 + a$ ($a \geq 0$)일 때 기름층의 두께는

$$a + b = a - 2 + \sqrt{-2a^2 - 4a + 52}$$

이때 기름층의 두께를 a 에 대한 함수 $h(a) = a - 2 + \sqrt{-2a^2 - 4a + 52}$ ($0 \leq a \leq 4$)로 나타내면

$$h'(a) = 1 - \frac{2a+2}{\sqrt{-2a^2 - 4a + 52}}$$

$h'(a) = 0$ 이면

$$2a+2 = \sqrt{-2a^2 - 4a + 52}, \quad 4(a+1)^2 = -2a^2 - 4a + 52$$

이때 $a^2 + 2a - 8 = (a+4)(a-2) = 0$ 이고, $0 \leq a \leq 4$ 이므로 $h(a)$ 는 $a=2$ 에서 극값을 갖는다.

$0 \leq a \leq 4$ 일 때 $\sqrt{-2a^2 - 4a + 52} \geq 0$ 이므로 함수 $h(a)$ 의 증감을 다음과 같이 표로 나타낼 수 있다.

a	0	$0 < a < 2$	2	$2 < a \leq 4$	4
$h'(a)$		+	0	-	
$h(a)$	$-2 + 2\sqrt{13}$	\nearrow	6	\searrow	4

기름층의 윗면의 높이가 8일 때 기름층의 두께는 $-2 + \sqrt{52} = -2 + 2\sqrt{13}$ 이고 6보다 작다.

2) 기름층의 윗면의 높이가 8보다 작으면 기름층이 아래로 이동할수록 용기의 단면적이 점점 커지게 되므로 기름층의 두께가 감소한다.

1), 2)로부터 기름층의 두께의 최댓값은 6 이다.

4-4. 문항카드 양식 1 (자연2계열)

1. 일반 정보

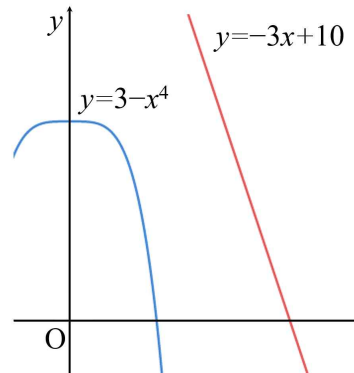
유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	신입학 수시 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 2 (IT대) / 문제 4	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	함수의 증가와 감소, 극대와 극소 삼각함수의 덧셈정리, 속도와 거리
예상 소요 시간	25분	

2. 문항 및 제시문

아래 문제에 답하시오. (25점)

좌표평면에서 점 P가 다음 조건을 만족시키며 움직인다고 하자.

점 P는 원점 O를 출발하여 함수 $y = 3 - x^4$ 의 그래프의 한 점 Q까지 선분 OQ를 따라 일정한 속력 a 로 움직인 후, 직선 $\ell: y = -3x + 10$ 의 한 점 R까지 선분 QR를 따라 속력 1로 움직인다. (단, a 는 양수)



점 P가 직선 ℓ 위의 한 점 R까지 가장 빨리 도착할 때 점 Q의 좌표는 $(1, 2)$ 라고 하자. 이때 다음 문항에 답하시오.

- (1) $\theta = \angle OQR$ 일 때 $\tan \theta$ 의 값을 구하시오. (단, $0 \leq \theta \leq \pi$)
- (2) a 를 구하시오.

3. 출제 의도

삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 주어진 두 직선의 기울기로부터 두 직선 사이의 각의 삼각함수를 계산하며, 시간을 속력과 거리에 대한 함수로 나타낸 후 극값의 조건으로부터 속력을 계산하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호[별책8] “수학과 교육과정” 수학 II - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 미적분 - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분 미적분 - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용	
관련 성취기준	과목명: 수학 II	
	성취기준 1	[12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	과목명: 미적분	
	성취기준 1	[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
	성취기준 2	[12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	김원경 외 14인	비상교육	2018	78
	수학 II	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	78
	미적분	황선옥 외 8인	미래엔	2019	63,172
	미적분	박교식 외 19인	동아출판	2019	61,162

5. 문항 해설

점 P가 직선으로 가장 빨리 도착한다는 조건으로부터 점 Q와 R을 지나는 직선이 문제의 직선과 직교하므로 이로부터 두 직선이 이루는 사잇각의 탄젠트를 삼각함수의 덧셈정리로부터 계산하며, 시간을 점 Q의 x 좌표에 대한 함수로 나타낸 후 $x=1$ 이 극값이 될 조건을 이용하여 속력 a 를 계산하는 문제이다.

6. 채점 기준

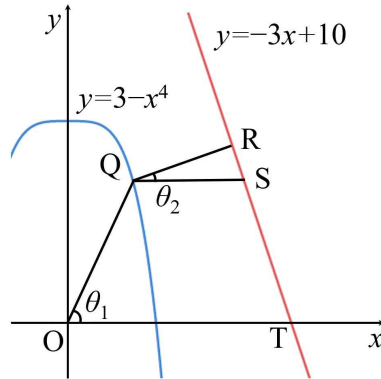
하위 문항	채점 기준	배점
(1)	삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 사잇각의 탄젠트를 올바르게 계산한다.	10
(2)	점 P가 움직이는 시간을 함수로 나타내고 도함수를 계산한 후 $x=1$ 에서 함숫값이 극값이 되는 조건으로부터 속력을 계산한다.	15

7. 예시 답안

(1) 점 P가 문제의 조건을 만족시키면서 직선 $\ell: y = -3x + 10$ 위의 점까지 가장 빨리 도착하기 위해서는 점 Q와 R을 잇는 직선이 직선 ℓ 과 수직이어야 한다. 이때 점 Q와 R을 잇는 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$ 이고 점 O와 Q를 잇는 직선의 기울기는 2이다.

직선 ℓ 과 x 축의 교점을 T라고 하고 $\theta_1 = \angle QOT$ 라고 하자. 또한 점 Q를 지나고 x 축과 평행한 직선이 직선 ℓ 과 만나는 점을 S라고 하고 $\theta_2 = \angle RQS$ 라고 하자. 그러면

$$\tan \theta_1 = 2, \tan \theta_2 = \frac{1}{3}, \tan \theta = \tan(\pi - \theta_1 + \theta_2) = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$



삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \tan\theta_1} = \frac{\frac{1}{3} - 2}{1 + \frac{2}{3}} = -1$$

그러므로 $\tan\theta = -1$ 이다.

(2) 원점과 함수 $y = 3 - x^4$ 의 그래프 위의 점 $(x, 3 - x^4)$ 을 잇는 선분의 길이는 $\sqrt{x^2 + x^8 - 6x^4 + 9}$ 이고, 점 $(x, 3 - x^4)$ 과 직선 $\ell: y = -3x + 10$ 사이의 거리는 $\frac{|3x + (3 - x^4) - 10|}{\sqrt{10}}$ 이다.

그러므로 점 P가 원점을 출발하여 점 Q($x, 3 - x^4$)까지 움직인 후 Q에서 직선 ℓ 위의 점 R에 내린 수선을 따라 움직일 때 점 R에 도착하기까지 걸리는 시간은 다음과 같다.

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x^8 - 6x^4 + 9}}{a} + \frac{|3x + (3 - x^4) - 10|}{\sqrt{10}}$$

문제의 그림으로부터 $3x + (3 - x^4) - 10 < 0$ 이므로

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x^8 - 6x^4 + 9}}{a} - \frac{3x + (3 - x^4) - 10}{\sqrt{10}}$$

이고 함수 $t(x)$ 는 미분가능하다.

$t(x)$ 는 $x = 1$ 일 때 최솟값을 가지므로 $t'(1) = 0$ 이다. 함수 $t(x)$ 의 도함수를 계산하면

$$t'(x) = \frac{8x^7 - 24x^3 + 2x}{2a\sqrt{x^8 - 6x^4 + x^2 + 9}} + \frac{4x^3 - 3}{\sqrt{10}},$$

$$t'(1) = \frac{-14}{2a\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{10}} = 0$$

따라서 $a = 7\sqrt{2}$ 이다.