[문항카드2] 논술 우수자 전형 : 자연계열A-문항1

1. 일반 정보

유형	☑논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(A형) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	함수의 극한, 치환적분법, 부분적분법
예상 소요 시간	36분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 미분가능한 함수 $f(x)$와 $g(x)=(x^2+2)e^{2x}+e^{4x}$이 모든 실수 $x>0$에 대하여 $(g\circ f)(x)=x$를 만족시킨다.

(1-1) 방정식 $g(x)=3e^2+e^4$의 해는 $x=1$뿐임을 보이시오. 또한 방정식 $g(x)=3$의 해는 $x=0$뿐임을 보이시오. (70점)

(1-2) 극한 $\lim_{x\to 0+} xf'(x)$를 구하시오. (80점)

(1-3) $\int_3^{3e^2+e^4} f(x)\,dx$를 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

주어진 조건을 만족하는 함수의 극한과 적분을 계산할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열 A-문제1	수학Ⅱ (1) 함수의 극한과 연속 ① 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. 미적분 (3) 적분법 ① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	홍성복 외	지학사	2022	144-149
	미적분	박교식 외	동아출판	2022	134-144
기타					

5. 문항 해설

주어진 조건을 만족하는 함수의 미분을 계산하고 치환적분법 또는 부분적분법을 이용하여 적분을 계산한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	▪$g'(x)=(2x^2+2x+4)e^{2x}+4e^{4x}$을 구하면 (+20점) ▪$g'(x)>0$을 설명하고 $g(x)$가 일대일함수임을 언급하면 (+30점) ▪$g(1)=3e^2+e^4$을 얻으면 (+10점) ▪$g(0)=3$을 얻으면 (+10점)	70
(1-2)	▪$x\to 0+$일 때 $f(x)\to -\infty$ 임을 보이면 (+30점) ▪$xf'(x)=\dfrac{f(x)^2+2+e^{2f(x)}}{2f(x)^2+2f(x)+4+4e^{2f(x)}}$ 을 구하면 (+30점) ▪답 $\dfrac{1}{2}$을 구하면 (+20점)	80
(1-3)	▪적절한 적분식 $\displaystyle\int_0^1 t\{(2t^2+2t+4)e^{2t}+4e^{4t}\}dt$ 또는 $3e^2+e^4-\displaystyle\int_0^1\{(t^2+2)e^{2t}+e^{4t}\}dt$ 를 구하면 (+40점) ▪답 $\dfrac{3}{4}e^4+\dfrac{7}{4}e^2+\dfrac{3}{2}$을 구하면 (+40점)	80

7. 예시 답안 혹은 정답

(1-1) 모든 실수 x에 대하여 $g'(x) = (2x^2+2x+4)e^{2x}+4e^{4x} > 0$이다. 따라서 $g(x)$는 증가함수이므로 일대일함수이다. 그런데 $g(1) = 3e^2+e^4$이므로 $x=1$이 방정식 $(x^2+2)e^{2x}+e^{4x} = 3e^2+e^4$의 유일한 해이다. 또한 $g(0)=3$이므로 $x=0$이 방정식 $(x^2+2)e^{2x}+e^{4x}=3$의 유일한 해이다.

(1-2) $x = g(f(x)) = \{f(x)^2+2\}e^{2f(x)}+e^{4f(x)} = \{f(x)^2+2+e^{2f(x)}\}e^{2f(x)}$에 대하여 $x \to 0+$일 때 우변의 극한은 0이고, $f(x)^2+2+e^{2f(x)} > 2$이므로 $\lim\limits_{x\to 0+} e^{2f(x)} = 0$이다. 따라서 $f(x)=t$로 치환하면

$x \to 0+$일 때 $t \to -\infty$이다. $f'(x) = \dfrac{1}{\{2f(x)^2+2f(x)+4\}e^{2f(x)}+4e^{4f(x)}}$ 이므로

$xf'(x) = \dfrac{(f(x)^2+2)e^{2f(x)}+e^{4f(x)}}{\{2f(x)^2+2f(x)+4\}e^{2f(x)}+4e^{4f(x)}} = \dfrac{f(x)^2+2+e^{2f(x)}}{2f(x)^2+2f(x)+4+4e^{2f(x)}}$ 이고,

$\lim\limits_{x\to 0+} xf'(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x)^2+2+e^{2f(x)}}{2f(x)^2+2f(x)+4+4e^{2f(x)}} = \lim\limits_{t\to -\infty} \dfrac{t^2+2+e^{2t}}{2t^2+2t+4+4e^{2t}} = \dfrac{1}{2}$이다.

(1-3) $g(x)$는 증가함수이므로 일대일함수이다. (1-1)에 의하여 $f(3)=0$이고 $f(3e^2+e^4)=1$이다.
$f(x)=t$로 치환하면

$dt = f'(x)dx = \dfrac{1}{\{2f(x)^2+2f(x)+4\}e^{2f(x)}+4e^{4f(x)}}dx = \dfrac{1}{(2t^2+2t+4)e^{2t}+4e^{4t}}dx$를 얻는다.

따라서 $dx = \{(2t^2+2t+4)e^{2t}+4e^{4t}\}dt$가 되고

$\displaystyle\int_3^{3e^2+e^4} f(x)dx = \int_0^1 t\{(2t^2+2t+4)e^{2t}+4e^{4t}\}dt = \frac{3}{4}e^4+\frac{7}{4}e^2+\frac{3}{2}$이다.

(별해1) 부분적분법에 의하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_3^{3e^2+e^4} f(x)dx &= [xf(x)]_3^{3e^2+e^4} - \int_3^{3e^2+e^4} xf'(x)dx \\ &= 3e^2+e^4 - \int_3^{3e^2+e^4}\{(f(x)^2+2)e^{2f(x)}+e^{4f(x)}\}f'(x)dx \\ &= 3e^2+e^4 - \int_0^1 \{(t^2+2)e^{2t}+e^{4t}\}dt \\ &= \frac{3}{4}e^4+\frac{7}{4}e^2+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(별해2) $f(x)=t$ 로 치환하면 $x = g(f(x)) = g(t)$ 로부터 $dx = g'(t)\,dt$ 이고,

$$\begin{aligned}\int_3^{3e^2+e^4} f(x)\,dx &= \int_0^1 t\,g'(t)\,dt \\ &= [t\,g(t)]_0^1 - \int_0^1 g(t)\,dt \\ &= 3e^2+e^4 - \int_0^1 \{(t^2+2)\,e^{2t}+e^{4t}\}\,dt \\ &= \frac{3}{4}e^4+\frac{7}{4}e^2+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

이다.

[문항카드3] 논술 우수자 전형 : 자연계열A-문항2

1. 일반 정보

유형		☑논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사
전형명		논술우수자 전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		자연계열(A형) / 문제 2
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	음함수의 미분법, 이계도함수, 극대, 극소
예상 소요 시간		40분

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$라 할 때 $y+\ln(x+y)=x$가 성립한다.

(2-1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\frac{e+1}{2}, \frac{e-1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기를 구하시오. (70점)

(2-2) 함수 $f(x)$의 최솟값을 구하시오. (80점)

(2-3) $f(0)=f(\alpha)=\beta$일 때, β를 α의 식으로 표현하고 $\alpha<2$임을 보이시오. (단, $\alpha\neq 0$)
(80점)

3. 출제 의도

음함수의 도함수와 이계도함수를 이해하고 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열 A-문제2	수학II (2) 미분 ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법 [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	권오남 외	교학사	2022	96~99
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2022	87~92
기타					

5. 문항 해설

음함수의 도함수와 이계도함수를 이용하여 함수의 그래프의 개형을 그리고 함수의 최대, 최소를 계산한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	▪ $y' = \dfrac{x+y-1}{x+y+1}$ 을 구하면 (+40점) ▪ 답 $\dfrac{e-1}{e+1}$ 을 구하면 (+30점)	70
(2-2)	▪ $x = \dfrac{1}{2}$ 에서만 $y' = 0$을 보이면 (+30점) ▪ $y'' = \dfrac{1}{2} > 0$을 보이면 (+40점) ▪ 답 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ 을 구하면 (+10점) [별해1] ▪ $x = \dfrac{1}{2}$ 에서만 $y' = 0$을 보이면 (+30점) ▪ $y'' = \dfrac{4(x+y)}{(x+y+1)^3} > 0$을 보이면 (+40점) ▪ 답 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ 을 구하면 (+10점) [별해2] ▪ $x = \dfrac{1}{2}$ 에서만 $y' = 0$을 보이면 (+30점) ▪ $x < \dfrac{1}{2}$ 이면 $y' < 0$을 보이면 (+20점) ▪ $x > \dfrac{1}{2}$ 이면 $y' > 0$을 보이면 (+20점) ▪ 답 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ 을 구하면 (+10점)	80
(2-3)	▪ $\beta = \dfrac{\alpha}{e^{\alpha}-1}$ 를 구하면 (+30점) ▪ $2\alpha+1 > e^{\alpha}$을 얻으면 (+10점) ▪ 왼쪽 그래프로부터 $\alpha < 2$를 보이면 (+40점)	80

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답

(2-1) 음함수 미분법에 의하여 $y' = \dfrac{x+y-1}{x+y+1}$ 이므로, $x = \dfrac{e+1}{2}$, $y = \dfrac{e-1}{2}$ 에서 접선의 기울기 $y' = \dfrac{e-1}{e+1}$ 이다.

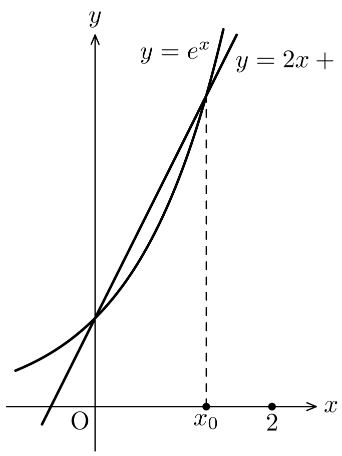
(2-2) $y' = \dfrac{x+y-1}{x+y+1} = 0$ 이면 $x+y=1$ 이고 식 $y+\ln(x+y)=x$ 로부터 $x=y$ 이다.
따라서 $x = \dfrac{1}{2}$ 에서만 $y'=0$ 이다. $y'' = \dfrac{(1+y')(x+y+1)-(x+y-1)(1+y')}{(x+y+1)^2}$ 이므로 $x=\dfrac{1}{2}$ 에서 $y'' = \dfrac{1}{2} > 0$ 이고 최솟값은 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ 이다.

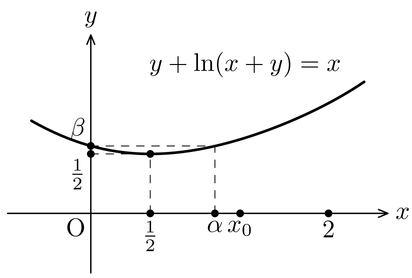
(별해1) $y' = \dfrac{x+y-1}{x+y+1} = 0$ 이면 $x+y=1$ 이고 식 $y+\ln(x+y)=x$ 로부터 $x=y$ 이다.
따라서 $x=\dfrac{1}{2}$ 에서만 $y'=0$ 이다. 또한 $x+y>0$ 이므로 $y'' = \dfrac{4(x+y)}{(x+y+1)^3} > 0$ 이고, 최솟값은 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ 이다.

(별해2) $y' = \dfrac{x+y-1}{x+y+1} = 0$ 이면 $x+y=1$ 이고 식 $y+\ln(x+y)=x$ 로부터 $x=y$ 이다. 따라서 $x=\dfrac{1}{2}$ 에서만 $y'=0$ 이다. 그리고 $y+\ln(x+y)=x$ 로부터 $x+y>1$ 이면 $x>y$ 을 얻는다.
또한 $y'>0$ 이면 $x+y>1$ 이고, 이 때 $x>y$ 이므로 $x>\dfrac{1}{2}$ 이다. 그리고 $y'<0$ 이면 $x+y<1$ 이고, 이 때 $x<y$ 이므로 $x<\dfrac{1}{2}$ 이다. 따라서 $f(x)$ 의 최솟값은 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ 이다.

(2-3) $f(0)=f(\alpha)=\beta$ 라 놓으면 $\beta+\ln\beta=0$, $\beta+\ln(\alpha+\beta)=\alpha$ 이고 이로부터
$\alpha = -\ln\beta + \ln(\alpha+\beta) = \ln\left(1+\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$ 를 얻고, 이 식을 정리하면 $\beta = \dfrac{\alpha}{e^\alpha - 1}$ 이다. $f(x)$ 의 최솟값이 $\dfrac{1}{2}$ 이므로 $\dfrac{\alpha}{e^\alpha-1} = \beta = f(0) > \dfrac{1}{2}$ 을 얻고 이 식을 정리하면 $2\alpha+1 > e^\alpha$ 이다. $y=e^x$ 와 $y=2x+1$ 의 그래프를 보면 $2x+1>e^x$ 을 만족시키는 x 의 범위는 $0<x<x_0$ 이다. (여기서 x_0 은 $2x_0+1=e^{x_0}$ 을 만족시킨다.) 따라서 $2\alpha+1>e^\alpha$ 과 $2\times 2+1 = 5 < e^2$ 으로부터 $\alpha < x_0 < 2$ 를 얻는다.

[참고]





[문항카드4] 논술 우수자 전형 : 자연계열A-문항3

1. 일반 정보

유형	☑논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(A형) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II
	핵심개념 및 용어	극대, 극소, 미분가능성, 함수의 그래프
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t,\ t+1]$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$로 정의할 때 함수 $g(t)$는 다음을 만족시킨다.

> (가) $g(t)$는 $t=3$에서 미분가능하지 않다.
>
> (나) 닫힌구간 $\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$에 속하는 모든 t에 대하여 $g(t)=7$이다.

(3-1) $f(3)-f(4)$의 값을 구하시오. (80점)

(3-2) $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖는다. α의 최솟값과 최댓값을 각각 구하시오. (80점)

(3-3) $g(4)=7$일 때 $f(3)$을 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

삼차함수의 그래프의 개형과 극댓값, 극솟값 및 미분가능성을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열 A-문제3	수학Ⅱ (2) 미분 ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	이준열 외	천재교육	2022	48-58
	수학II	홍성복 외	지학사	2022	86-93
기타					

5. 문항 해설

미분가능성 및 극대, 극소의 정의와 삼차함수의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 찾고 문제를 해결한다.

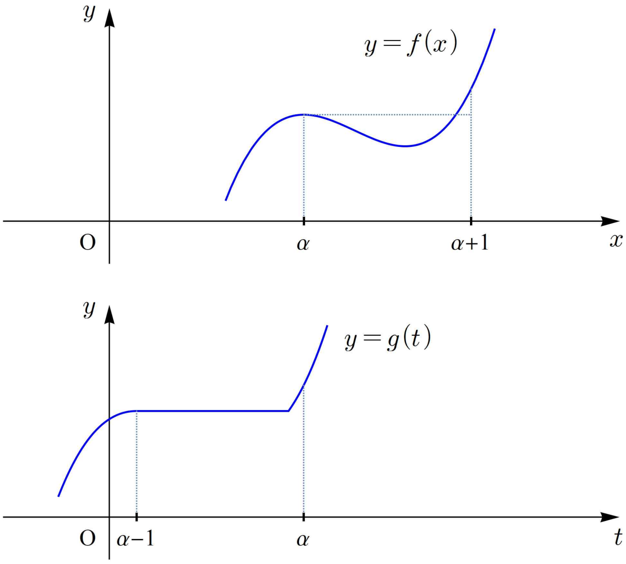
6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	▪ $f(x)$ 가 열린구간 $(3,\ 4)$ 에 속하는 적당한 점에서 극솟값을 가짐을 설명하면 (+40점) ▪ $f(3)=f(4)$ 임을 설명하고 답 $f(3)-f(4)=0$ 을 구하면 (+40점)	80
(3-2)	▪ $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]\subset[\alpha-1,\ \alpha]$ (또는) $\alpha\in[0,\ 1]$ 이고 $\alpha\in\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right]$ 임을 설명하면 (+20점) ▪ α 의 최솟값 $\frac{1}{2}$ 을 구하면 (+30점) ▪ α 의 최댓값 1 을 구하면 (+30점)	80
(3-3)	▪ $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)+7$ 로 두면 (+20점) ▪ $\beta=5$ 를 구하면 (+20점) ▪ $\alpha=2-\sqrt{2}$ 를 구하면 (+20점) ▪ $f(3)=1-4\sqrt{2}$ 를 구하면 (+20점)	80

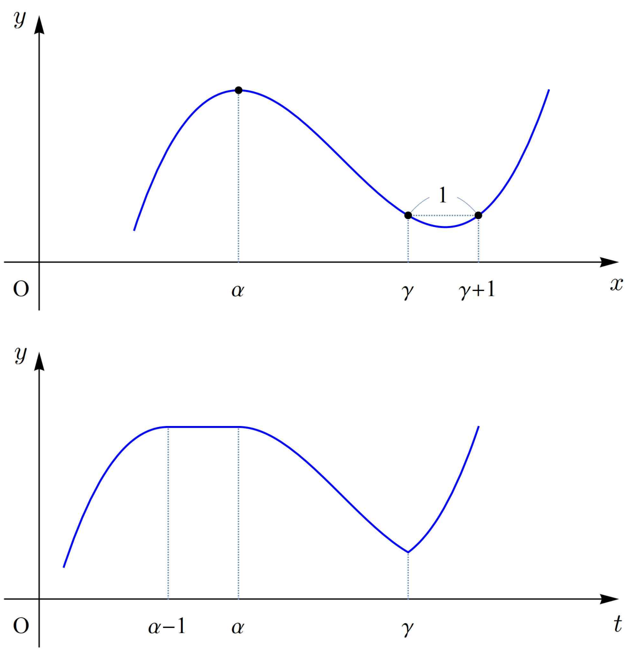
※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답

(3-1) 구간 $[a,\ a+1]$ 에서 증가하는 경우 $g(a)=f(a+1)$ 이고 감소하는 경우 $g(a)=f(a)$ 이다. 만일 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 갖지 않는 경우에는 $f(x)$ 가 증가함수이므로 $g(t)=f(t+1)$ 이고 $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 이 경우 조건 (가)를 만족시키지 못하게 되므로 $f(x)$ 는 극댓값과 극솟값을 가져야 한다. 만일 함수 $f(x)$ 가 $x=\alpha$ 에서 극댓값을 갖고 $f(\alpha+1)\geq f(\alpha)$이면 다음 그림에 의하여 주어진 조건을 만족시키지 않는다.



$f(\alpha+1) < f(\alpha)$인 경우 아래 그림의 예처럼 α 보다 오른쪽에 있는 적당한 점 $t=\gamma$에서 $g(t)$가 미분불가능 하게 되며, 구간 $[\alpha-1,\ \alpha]$에서는 $g(t)$의 함숫값이 $f(\alpha)$로 일정하다.



이 경우 $t=\alpha-1$에서의 좌미분계수와 우미분계수가 모두 0이므로 미분가능하다. 마찬가지로 $t=\alpha$에서도 좌미분계수와 우미분계수가 모두 0이므로 미분가능하다. 그러므로 조건 (나)를 만족시키면서, 동시에 조건 (가)를 만족시키려면, 즉 $g(t)$가 $t=3$에서 미분가능하지 않으려면 열린구간 $(3,\ 4)$에 속하는 적당한 점에서 $f(x)$가 극솟값을 갖고 $f(3)=f(4)$이어야 한다. 따라서 $f(3)-f(4)=0$이다.

(3-2) 조건 (나)에서 닫힌구간 $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$에 속하는 모든 t에 대하여 $g(t)=7$이므로, (3-1)에서와 같이 생각하면 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극댓값 7을 가져야 하고 $\alpha \le 1$임을 알 수 있다. 그런데 $f(x)$가 극소가 되는 점은 $x=\alpha$에서 거리가 2 이상 떨어져서 오른쪽에 있으므로 구간 $[\alpha-1,\ \alpha]$에 속하는 모든 t에 대하여 $g(t)=7$이다. (위의 그림 참조) 그러므로 $\left[0,\ \frac{1}{2}\right] \subset [\alpha-1,\ \alpha]$이어야 한다. 따라서

$\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$ 임을 알 수 있고, α 의 최솟값은 $\frac{1}{2}$, 최댓값은 1 이다.

(3-3) (3-1)과 (3-2)의 결과를 이용하면 적당한 상수 α 와 β에 대하여 다음과 같이 둘 수 있다.

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)+7 \ \ (\text{단}, \ \frac{1}{2} \le \alpha \le 1\,,\ \beta > 3)$$

그런데 삼차함수 $f(x)$의 개형을 생각하면 적어도 구간 $[4, \infty)$ 에서는 $f(x)$ 가 증가해야 하므로 $g(4) = f(5)$ 이다. 주어진 조건식 $g(4) = 7$ 을 이용하면

$$7 = g(4) = f(5) = (5-\alpha)^2(5-\beta)+7 \ \ (\frac{1}{2} \le \alpha \le 1\,,\ \beta > 3)$$

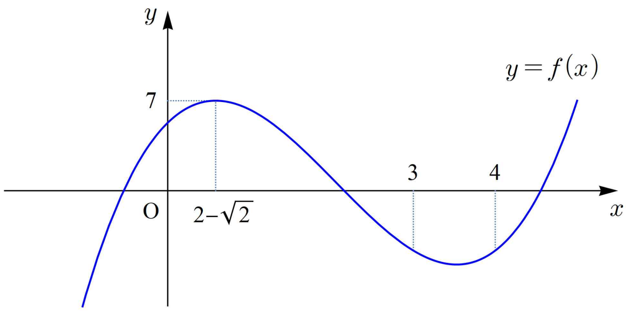
에서 $\beta = 5$ 이다. 그러므로 $f(x) = (x-\alpha)^2(x-5)+7$ 이다. $f(3) = f(4)$ 임을 다시 이용하면

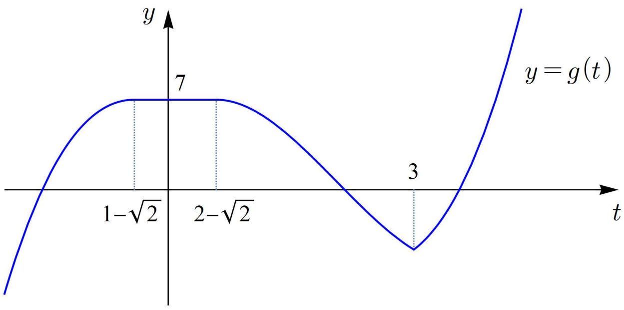
$$-2(3-\alpha)^2 + 7 = -(4-\alpha)^2 + 7$$

에서 $\alpha = 2 \pm \sqrt{2}$ 인데 $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$ 이므로 $\alpha = 2-\sqrt{2}$ 이다. 따라서

$f(x) = (x-2+\sqrt{2})^2(x-5)+7$ 이고 $f(3) = 1-4\sqrt{2}$ 이다.

참고: (3-3)에서의 $y = f(x)$ 와 $y = g(t)$ 의 그래프는 각각 다음과 같다.





[문항카드5] 논술 우수자 전형 : 자연계열B-문항1

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(B형) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 미적분
	핵심개념 및 용어	역함수의 미분법, 평행이동, 대칭이동
예상 소요 시간	36분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 다음을 만족시킨다.

(가) $0 \le x \le 2$일 때 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$이다.
(나) 임의의 실수 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$이다.
(다) 임의의 실수 x에 대하여 $f(x) = f(x+4)$이다.

열린구간 $(2, 4)$에서 정의된 함수 $h(x)$는 열린구간 $(2, 4)$에 속하는 모든 x에 대하여 $h(x) = f(x)$이다. $h(x)$의 역함수를 $h^{-1}(x)$라 하자.

(1-1) $h^{-1}(2)$를 구하시오. (70점)

(1-2) $(h^{-1})'(2)$를 구하시오. (80점)

(1-3) 실수 $t > 0$에 대하여 두 점 $(0, f(0))$과 $(t, f(t))$를 지나는 직선의 기울기를 $g(t)$라 하자. $(h^{-1})'(x) = |g(t)|$를 만족시키는 실수 x가 존재하도록 하는 t의 최댓값을 t_0이라 할 때, $n < t_0 < n+1$을 만족시키는 자연수 n을 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

역함수의 미분법을 이용하여 역함수의 미분계수를 계산하고, 이를 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열 B-문제1	미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법 [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. 수학 (2) 기하 ④ 도형의 이동 [10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다. [10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	홍성복 외	지학사	2022	98~103
	수학	김원경 외	비상교육	2022	141~151
기타					

5. 문항 해설

역함수의 미분법을 이용하여 역함수의 미분계수를 구하고, 이를 평행이동과 대칭이동을 이용하여 주어진 문제를 해결한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	▪올바른 풀이가 있고 답 $h^{-1}(2)=3$임을 구하면 (70점) ▪ 방정식 $x^3-3x^2+4=2$의 해 $x=1$, 또는 $-x^3-3x^2+4=2$의 해 $x=-1$ 또는 $-(x-4)^3-3(x-4)^2+4=2$의 해 $x=3$을 구하면 (+40점)	70
(1-2)	▪$(h^{-1})'(2)=\dfrac{1}{h'(h^{-1}(2))}$을 얻으면 (+30점) ▪답 $\dfrac{1}{3}$을 구하면 (+50점)	80
(1-3)	▪$(h^{-1})'(x)\geq\dfrac{1}{3}$을 구하면 (+20점) ▪$t_1>10$임을 설명하면 (+20점) ▪$t\geq 11$일 때 $g(t)>-\dfrac{1}{3}$이라고 설명하면 (+20점) ▪답 $n=10$을 구하면 (+20점)	80

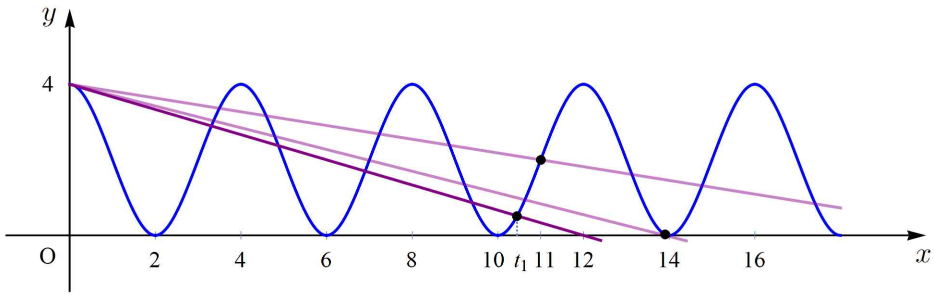
※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답

(1-1) $0 \le x \le 2$ 일 때 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ 이므로 $x^3 - 3x^2 + 4 = 2$ 를 풀면
$(x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0$ 에서 $x = 1$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{3}$ 인데 이 중에서 $0 \le x \le 2$ 인 것은
$x = 1$ 뿐이다. 따라서
$h^{-1}(2) = h^{-1}(f(1)) = h^{-1}(f(-1)) = h^{-1}(f(-1+4)) = h^{-1}(f(3)) = h^{-1}(h(3)) = 3$ 이다.

(1-2) $0 < x < 2$ 일 때 $f'(x) = 3x^2 - 6x$ 임을 이용하면 그래프의 개형으로부터
$(h^{-1})'(2) = \dfrac{1}{h'(h^{-1}(2))} = \dfrac{1}{f'(3)} = \dfrac{-1}{f'(1)} = \dfrac{1}{3}$ 을 얻는다.
(별해) $2 < x < 4$ 인 x 에 대하여, $0 < 4 - x < 2$ 이고,
$h(x) = f(x) = f(x-4) = f(-(x-4)) = f(4-x)$ 가 된다. 따라서
$(h^{-1})'(2) = \dfrac{1}{h'(h^{-1}(2))} = \dfrac{1}{h'(3)} = \dfrac{-1}{f'(4-3)} = \dfrac{-1}{f'(1)} = \dfrac{1}{3}$ 이다.

(1-3) $0 < x < 2$ 일 때 $f'(x) = 3x^2 - 6x$ 이므로 $-3 \le f'(x) < 0$ 이다. 따라서 그래프의 개형을 생각하면 $(h^{-1})'(x) \ge \dfrac{1}{3}$ 이다. (단, $0 < x < 4$) 그리고 $t > 0$ 에 대하여 $g(t) \le 0$ 이다. 따라서 $t > 0$ 이면서 $|g(t)| \ge \dfrac{1}{3}$, 즉 $g(t) \le -\dfrac{1}{3}$ 인 경우를 생각해야 한다. 그러므로 다음 그림과 같이 $(0,\ f(0))$ 을 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{3}$ 인 직선과 곡선 $y = f(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표의 최댓값이 t_1 라 하면 $t_1 > 10$ 이다. $g(11) = -\dfrac{2}{11} > -\dfrac{1}{3}$ 이므로 $t_1 < 11$ 이다. $t \ge 11$ 일 때 그림으로부터 $g(t) > -\dfrac{1}{3}$ 이다. 따라서 $t_0 = t_1$ 이고, 문제의 조건을 만족시키는 자연수 n 은 10 이다.



다.

[문항카드6] 논술 우수자 전형 : 자연계열B-문항2

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(B형) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	부분적분법, 치환적분법
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] $e^{-\frac{\pi}{2}} < x < e^{\frac{\pi}{2}}$ 에 대하여 $f(x) = \int_e^x \tan(\ln t)\, dt$ 라 하자.

(2-1) $f(x)$가 최소가 되는 x의 값을 구하시오. (70점)

(2-2) $f(1) = a$라 할 때, $\int_0^1 e^x \tan^2 x\, dx$를 a의 식으로 나타내시오. (80점)

(2-3) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{f'(x)}{x^2} dx - f\left(\frac{1}{e}\right)$을 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

주어진 조건을 만족시키는 함수의 적분을 계산할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열 B-문제2	수학Ⅱ (2) 미분 ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적분 (3) 적분법 ① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	홍성복 외	지학사	2022	144-149
	미적분	박교식 외	동아출판	2022	134-144
기타					

5. 문항 해설

주어진 조건을 만족시키는 함수의 적분을 부분적분법과 치환적분법을 이용하여 계산한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	▪ $f'(x)=\tan(\ln x)$를 구하면 (+20점) ▪ $f'(1)=0$을 보이면 (+20점) ▪ "$x<1$이면 $f'(x)<0$이고 $x>1$이면 $f'(x)>0$이다"를 기술하면 (+20점) ▪ 답 $x=1$을 쓰면 (+10점) (별해) ▪ $f'(x)=\tan(\ln x)$를 구하면 (+20점) ▪ $f'(1)=0$을 보이면 (+20점) ▪ $f''(x)=\dfrac{\sec^2(\ln x)}{x}>0$ 구하면 (+20점) ▪ 답 $x=1$을 쓰면 (+10점)	70
(2-2)	▪ 부분적분을 이용하여 $\int_e^1 \sec^2(\ln x)dx=-e\tan 1-f(1)$을 구하면 (+40점) ▪ 치환적분을 이용하여 $\int_0^1 e^x\tan^2 x dx=e\tan 1+a-e+1$을 구하면 (+40점) (별해) ▪ 치환적분을 이용하여 $a=-\int_0^1 e^x \tan x\, dx$를 구하면 (+30점) ▪ 부분적분을 이용하여 $a=-e\tan 1+\int_0^1 e^x \sec^2 x\, dx$를 구하면 (+40점) ▪ $\int_0^1 e^x\tan^2 x dx=e\tan 1+a-e+1$을 구하면 (+10점)	80
(2-3)	▪ 문제를 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\tan(\ln x)\,dx$ 형태로 변형하면 (+20점) ▪ $y=\dfrac{1}{x}$로 치환하거나 $\theta=\ln x$로 치환하면 (+20점) ▪ 답이 0임을 보이면 (+40점)	80

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답

(2-1) $f'(x)=\tan(\ln x)$이므로 $f'(1)=0$이다. $e^{-\frac{\pi}{2}}<x<1$이면 $-\frac{\pi}{2}<\ln x<0$ 이고

$f'(x)=\tan(\ln x)<0$이다. $1<x<e^{\frac{\pi}{2}}$이면 $0<\ln x<\frac{\pi}{2}$이고 $f'(x)=\tan(\ln x)>0$이다. 따라서 $x=1$에서 $f(x)$는 최소이다.

(별해) $f'(x)=\tan(\ln x)$이므로 $f'(1)=0$이다.

$f''(x)=\dfrac{\sec^2(\ln x)}{x}>0$이므로 $x=1$에서 $f(x)$는 최소이다.

(2-2) $f(1)=\int_e^1 \tan(\ln x)\,dx=[x\tan(\ln x)]_e^1-\int_e^1 \sec^2(\ln x)dx$ 이므로

$\int_e^1 \sec^2(\ln x)dx=[x\tan(\ln x)]_e^1-f(1)=-e\tan 1-f(1)$이다.

$x=e^t$로 치환하면

$\int_e^1 \sec^2(\ln x)dx=-\int_0^1 e^t\sec^2 t\,dt=-\int_0^1 e^t\tan^2 t\,dt-\int_0^1 e^t\,dt=-e\tan 1-f(1)$이고,

$\int_0^1 e^x\tan^2 x dx=e\tan 1+a-e+1$이다.

(별해) $t=e^x$ 로 치환하면 $a=f(1)=\int_e^1 \tan(\ln t)\,dt=-\int_0^1 e^x\tan x\,dx$ 이다. 따라서

$$a=-\int_0^1 e^x\tan x\,dx=[-e^x\tan x]_0^1+\int_0^1 e^x\sec^2 x\,dx=-e\tan 1+\int_0^1 e^x(1+\tan^2 x)dx$$
$$=-e\tan 1+[e^x]_0^1+\int_0^1 e^x\tan^2 x\,dx$$

이므로 $\int_0^1 e^x\tan^2 x dx=e\tan 1+a-e+1$이다.

(2-3) $I=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\dfrac{f'(x)}{x^2}dx-f\left(\dfrac{1}{e}\right)$이라 두면,

$$I=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{f'(x)}{x^2}dx-f\left(\frac{1}{e}\right)=-\int_e^{\frac{1}{e}}\frac{\tan(\ln x)}{x^2}dx-\int_e^{\frac{1}{e}}\tan(\ln x)\,dx=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\tan(\ln x)\,dx$$

이다. $x=\dfrac{1}{y}$로 치환하면 $I=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\tan(\ln x)\,dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1+\dfrac{1}{y^2}\right)\tan(\ln y)\,dy=-I$이므로

$I=0$이다.

(별해) $I=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\dfrac{f'(x)}{x^2}dx-f\left(\dfrac{1}{e}\right)$이라 두면,

$$I=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{f'(x)}{x^2}dx-f\left(\frac{1}{e}\right)=-\int_e^{\frac{1}{e}}\frac{\tan(\ln x)}{x^2}dx-\int_e^{\frac{1}{e}}\tan(\ln x)\,dx=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\tan(\ln x)\,dx$$

이다.

$\theta=\ln x$ 로 치환하면 $d\theta=\dfrac{1}{x}dx$ 에서 $dx=x\,d\theta=e^{\theta}d\theta$ 이고

$I=\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\tan(\ln x)\,dx=\int_{-1}^{1}\left(e^{\theta}+e^{-\theta}\right)\tan\theta\,d\theta$ 이다. $y=-\theta$ 로 치환하면

$I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(e^{\theta}+e^{-\theta}\right)\tan\theta\,d\theta=-\int_{-1}^{1}\left(e^{y}+e^{-y}\right)\tan y\,dy=-I$ 이므로 $I=0$ 이다.

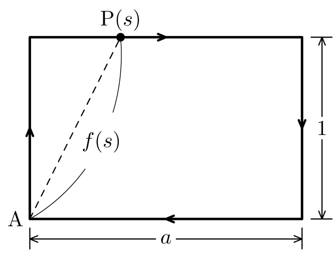
[문항카드7] 논술 우수자 전형 : 자연계열B-문항3

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(B형) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	이계도함수, 함수의 그래프
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 그림과 같이 가로의 길이가 $a>1$이고 세로의 길이가 1인 직사각형이 있다.
꼭짓점 A에서 출발하여 직사각형의 네 변을 따라서 시계 방향으로 이동한 거리가 s인 위치의 점 $\mathrm{P}(s)$와 점 A 사이의 거리를 $f(s)$라 하자. (단, $0 \le s \le 2a+2$)



또한 곡선 $y=f(s)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선을 ℓ_t 라 하자. (단, $1<t<a+1$ 또는 $a+1<t<a+2$)

(3-1) $0 \le s \le 2a+2$에서 $f(s)$를 구하시오. 또한 곡선 $y=f(s)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선 ℓ_2의 방정식을 구하시오. (80점)

(3-2) $1<\alpha<a+1$일 때 ℓ_α와 곡선 $y=f(s)$의 교점의 개수를 α의 값의 범위에 따라 구하시오. 또한 $a+1<\beta<a+2$일 때 ℓ_β와 곡선 $y=f(s)$의 교점의 개수를 구하시오. (80점)

(3-3) $1<\alpha<a+1$이고 $a+1<\beta<a+2$인 $\alpha,\ \beta$에 대하여 두 직선 ℓ_α와 ℓ_β가 이루는 예각을 $\theta(\alpha,\beta)$라 하자. 실수 $a>1$에 대하여 집합 I_a는 다음과 같이 주어진다.

$$I_a=\{\theta(\alpha,\beta)\ |\ 1<\alpha<a+1,\ a+1<\beta<a+2\}$$

I_a는 열린구간 $(L(a),\ R(a))$이다. 이 때 $\lim\limits_{a\to\infty} L(a)$와 $\lim\limits_{a\to\infty} R(a)$를 각각 구하시오.

(80점)

3. 출제 의도

주어진 조건으로부터 함수를 찾고, 함수의 볼록성을 이해하는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열 B-문제3	미적분 (2) 미분법 $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다. 미적분 (2) 미분법 $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2021	97~111
	미적분	홍성복 외	지학사	2021	111~124
기타					

5. 문항 해설

주어진 조건으로부터 함수를 찾고, 미분법을 이용하여 함수의 증감, 볼록성 등을 얻어 문제를 해결한다.

6. 채점 기준 *※ 선다형의 경우 생략 가능*

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	▪모든 경우의 $f(s)$를 구하면 (+40) ▪ℓ_2의 방정식 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(s-2)+\sqrt{2}$ 또는 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}s$를 구하면 (+40)	80
(3-2)	▪볼록성이 보이는 $y=f(s)$의 그래프가 있으면 (+20점) ▪f의 볼록성을 보이면 (+20점) ▪(f의 볼록성을 보이고) $1<\alpha\le 2$일 때 ℓ_α와 $y=f(s)$의 교점의 개수가 3이고, $2<\alpha<a+1$일 때 ℓ_α와 $y=f(s)$의 교점의 개수가 2임을 보이면 (+20점)	80

	■(f의 볼록성을 보이고) $a+1<\beta<a+2$에서 ℓ_β와 $y=f(s)$의 교점의 개수가 3임을 보이면 (+20점)	
(3-3)	■$\theta(\alpha,\beta)=\pi-\theta_\beta+\theta_\alpha$ (+10점) ■ $\lim_{a\to 0+} L(a)=0$을 구하면 (+30점) ■$\lim_{a\to\infty} R(a)=\frac{\pi}{4}$를 구하면 (+40점)	80

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답

(3-1) 좌표평면에서 점 A의 좌표를 $(0,0)$이라 두면, 점 $\mathrm{P}(s)$의 좌표는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(s)=\begin{cases}(0,s) & 0\le s\le 1\\ (s-1,1) & 1\le s\le a+1\\ (a,a+2-s) & a+1\le s\le a+2\\ (2a+2-s,0) & a+2\le s\le 2a+2\end{cases}$$

따라서 $f(s)$는 다음과 같이 구하여진다.

$$f(s)=\begin{cases}s & 0\le s\le 1\\ \sqrt{(s-1)^2+1} & 1\le s\le a+1\\ \sqrt{(s-a-2)^2+a^2} & a+1\le s\le a+2\\ 2a+2-s & a+2\le s\le 2a+2\end{cases}$$

$1<s<a+1$에서 $f(s)=\sqrt{s^2-2s+2}$로부터 $f'(s)=\dfrac{s-1}{\sqrt{s^2-2s+2}}$을 얻어, $f(2)=\sqrt{2}$이고,

$f'(2)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로, 구하는 접선의 방정식은 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(s-2)+\sqrt{2}$, 즉 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}s$이다.

(3-2) $1<s<a+1$에서 $f'(s)=\dfrac{s-1}{\sqrt{s^2-2s+2}}>0$, $f''(s)=\dfrac{1}{(s^2-2s+2)^{3/2}}>0$이므로

$y=f(x)$는 아래로 볼록인 함수이며 증가한다. 또한 $a+1<s<a+2$에서

$f'(s)=\dfrac{s-a-2}{\sqrt{s^2-2(a+2)s+2a^2+4a+4}}<0$,

$f''(s)=\dfrac{a^2}{(s^2-2(a+2)s+2a^2+4a+4)^{3/2}}>0$이므로 $y=f(x)$는 아래로 볼록인 함수이며

감소한다.

따라서 $0\le s\le 2a+2$에서 $y=f(s)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

$1<\alpha<a+1$일 때, $\dfrac{\sqrt{\alpha^2-2\alpha+2}}{\alpha}=\dfrac{f(\alpha)-0}{\alpha-0}=f'(\alpha)=\dfrac{\alpha-1}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha+2}}$을 이용하여 ℓ_α가 $(0,0)$을 지나는 α를 구하면 $\alpha=2$이다. 그런데 $1<s<a+1$에서 $y=f(s)$는 아래로 볼록한 증가함수이므로 $1<\alpha\le 2$일 때 ℓ_α의 s절편은 0보다 작거나 같고 ℓ_α와 $y=f(s)$의 접점을 포함한 교점의 개수는 3이다. $2<\alpha<a+1$일 때는 ℓ_α의 s절편이 0보다 크고 $a+1$보다 작으므로 ℓ_α와 $y=f(s)$의 접점을 포함한 교점의 개수는 2이다.

$2<a+1<\beta<a+2$일 때,

$-\dfrac{\sqrt{\beta^2-2(a+2)\beta+2a^2+4a+4}}{(2a+2)-\beta}=\dfrac{0-f(\beta)}{(2a+2)-\beta}=f'(\beta)=\dfrac{\beta-a-2}{\sqrt{\beta^2-2(a+2)\beta+2a^2+4a+4}}$를 이용하여 ℓ_β가 $(2a+2,0)$을 지나는 β를 구하면 $\beta=2$이고 $\beta>2$인 것에 모순이다.

$a+1<s<a+2$에서 $y=f(s)$가 아래로 볼록한 감소함수이므로, 위 모순은 ℓ_β의 s절편이 $2a+2$보다 작거나 같을 수 없음을 의미한다. 그러므로 $a+1<\beta<a+2$에서 ℓ_β의 s절편은 $2a+2$보다 크고, ℓ_β와 $y=f(s)$의 접점을 포함한 교점의 개수는 3이다.

(별해) $a+1<\beta<a+2$일 때, ℓ_β의 s절편이 $2a+2$보다 큰 것은 다음과 같이 보일 수도 있다: ℓ_β의 방정식은 $y-f(\beta)=f'(\beta)(s-\beta)$로 주어지고, s절편은 $\beta-\dfrac{f(\beta)}{f'(\beta)}$이다. 따라서 $a+1<\beta<a+2$인 경우는 접선의 s절편이 $\beta-\dfrac{f(\beta)}{f'(\beta)}=(2a+2)-\dfrac{a(\beta-2)}{\beta-a-2}$로 주어지는데, $2<a+1<\beta<a+2$이므로 $(2a+2)-\dfrac{a(\beta-2)}{\beta-a-2}>2a+2$이다.

(3-3) $1<\alpha<a+1$에서의 접선 ℓ_α가 s축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_α라 하면 $\tan\theta_\alpha=f'(\alpha)=\dfrac{\alpha-1}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha+2}}$ 이다. 또 $a+1<\beta<a+2$ 에서의 접선 ℓ_β가 s축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_β라 하면 $\tan\theta_\beta=f'(\beta)=\dfrac{\beta-a-2}{\sqrt{\beta^2-2(a+2)\beta+2a^2+4a+4}}$ 이다.

$1<\alpha<a+1$에서 $0<\dfrac{\alpha-1}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha+2}}<1$이고, $a+1<\beta<a+2$에서 $-1<\dfrac{\beta-a-2}{\sqrt{\beta^2-2(a+2)\beta+2a^2+4a+4}}<0$이므로 $0<\theta_\alpha<\dfrac{\pi}{4}$이고, $\dfrac{3\pi}{4}<\theta_\beta<\pi$이다. 따라서

ℓ_α와 ℓ_β가 이루는 예각 $\theta(\alpha,\beta)$는 $\theta(\alpha,\beta)=\pi-\theta_\beta+\theta_\alpha$이다. 이제, $\lim_{\alpha\to 1+}\frac{\alpha-1}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha+2}}=0$이고,

$\lim_{\beta\to(a+2)-}\frac{\beta-a-2}{\sqrt{\beta^2-2(a+2)\beta+2a^2+4a+4}}=0$이므로 a값에 상관없이 $L(a)=\pi-\pi+0=0$이다.

또한 $\lim_{\alpha\to(a+1)-}\frac{\alpha-1}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha+2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$,

$\lim_{\beta\to(a+1)+}\frac{\beta-a-2}{\sqrt{\beta^2-2(a+2)\beta+2a^2+4a+4}}=\frac{-1}{\sqrt{a^2+1}}$이고, $\lim_{a\to\infty}\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}=1$,

$\lim_{a\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{a^2+1}}=0$이므로 $\lim_{a\to\infty}R(a)=\pi-\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$이다.

■ 자연계열 A형, B형에 대한 선행학습영향평가위원회 자문의견

구분	내용
종합 검토 의견	자연계열(A/B형) 논술 문항은 현행 고등학교 교육과정에 대한 정확한 이해를 바탕으로 적절한 성취기준 및 핵심 역량 요소를 균형감 있게 나타내고 있습니다. 수학, 수학Ⅱ, 미적분 등 과목에서 핵심개념 및 용어를 적절히 조합하여 수험생 입장에서 익숙함과 동시에 수학적 역량을 알아볼 수 있도록 출제되어 있어 정상적인 고등학교 교육과정을 이수한 학생들이 큰 무리없이 제시된 조건을 바탕으로 문항을 이해하고 결과를 구할 수 있도록 설계되어 있습니다. 각 문항별 특징으로는 특정 단원이나 주제에 치우치지 않고 3개 문항이 균형있게 출제되어 있으며 풀이과정에서 소요되는 계산량 또한 과도하지 않고 적절하게 구성되어 있습니다. 따라서 고등학교 교육과정을 바탕으로 대학수학능력시험을 준비하는 수험생 입장에서 익숙한 구성과 더불어 단순 정답을 찾는 문제풀이가 아닌 소문항을 해결해가며 꾸준하고 깊이 있는 학습의 중요성을 강조할 수 있는 점 또한 장점으로 보입니다. 수학Ⅱ 및 미적분 과목에서 단원간 유기적 학습을 통해 극대와 극소, 미분가능성, 음함수의 미분법, 이계도함수, 함수의 그래프 등 계산이 필요한 영역과 이해를 바탕으로 문제를 해결하는 영역이 조화롭게 구성되어 있으며 적분 단원 또한 대학수학능력시험에서 빈도 높게 다루고 있는 치환적분법과 부분적분법을 활용하는 문항이 적절하게 출제되어 있습니다. 전체적으로 2023학년도 자연계열 논술 문항은 A형, B형 모두 사교육 유발 요소보다는 고등학교 교육과정을 바탕으로 고교교육 정상화를 도모하는 취지에 부합하는 것으로 보이며 대학수학능력시험을 준비하는 수험생을 기준으로 큰 무리없이 문항을 파악하고, 제시된 조건을 바탕으로 풀이과정을 기술하고 정답을 구하는데 적절하게 구성되어 있다고 생각합니다.