문항카드 4	자연계 1번

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열(수학) / 공통문항 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학
	핵심 개념 및 용어	이차함수의 그래프와 직선의 위치관계, 원과 직선의 위치관계
예상 소요 시간	35분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

【공통문항 1】 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라고 할 때,
> (ⅰ) $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
> (ⅱ) $D=0$이면 중근을 갖는다.
> (ⅲ) $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

실수 k와 양의 실수 r에 대하여 직선 l과 두 곡선 C_1, C_2를

$$l:\ y=kx+k-6$$

$$C_1:\ y=\frac{1}{2}x^2+k-2$$

$$C_2:\ x^2+(y-k)^2=r^2$$

이라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

[1-1] 양의 실수 r에 대하여 곡선 C_1과 곡선 C_2의 교점의 개수를 $N(r)$라 할 때, $N(r)$를 구하시오. (15점)

[1-2] 두 곡선 C_1, C_2 위의 모든 점을 원소로 갖는 집합이 나타내는 도형을 C라 하자.
$r=\sqrt{3}$일 때, 도형 C와 직선 l의 교점의 개수가 3이 되도록 하는 모든 실수 k의 값을 구하시오. (20점)

3. 출제 의도

본 문항에서는 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀고 근을 판별하여 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계 및 원과 직선의 위치관계를 설명할 수 있는지를 평가한다.

[1-1] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀어 서로 다른 실근의 개수를 판별하고 곡선과 곡선의 교점의 개수를 구하는 문항이다.

[1-2] 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계 및 원과 직선의 위치관계를 이해하고 교점의 개수를 구하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정		교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문		학습내용 성취기준
제시문	적용교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{4}$ 복소수와 이차방정식 [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학] - (1) 문자와 식 - (라) 복소수와 이차방정식 [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다. (중) 판별식을 이용하여 이차방정식의 근을 판별할 수 있다.
[1-1]	적용교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{5}$ 이차방정식과 이차함수 [10수학01-09] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다. [수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{6}$ 여러 가지 방정식과 부등식 [10수학01-13] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학] - (1) 문자와 식 - (마) 이차방정식과 이차함수 [10수학01-09] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다. (상) 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다. [수학] - (1) 문자와 식 - (바) 여러 가지 방정식과 부등식 [10수학01-13] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다. (중) 두 이차방정식으로 구성된 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.
[1-2]	적용교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{5}$ 이차방정식과 이차함수 [10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해한다. [수학] - (2) 기하 - $\boxed{3}$ 원의 방정식 [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.
	성취기준·평가기준	[수학] - (1) 문자와 식 - (마) 이차방정식과 이차함수 [10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해한다. (상) 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해하고, 이를 활용하여 다양한 문제를 해결할 수 있다. [수학] - (2) 기하 - (다) 원의 방정식 [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. (상) 원과 직선의 위치관계를 활용하여 다양한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	박교식 외	동아출판	2018	50, 59-63, 76-77, 133-137
	수학	류희찬 외	천재교과서	2018	56, 64-67, 79-81, 140-144
	수학	김원경 외	비상교육	2018	50, 59-62, 74-75, 131-136

5. 문항 해설

본 문항은 주어진 직선의 방정식, 이차함수, 원의 방정식을 연립하여 연립이차방정식을 풀고 실근을 구할 수 있는지를 평가하고, 구한 실근의 개수를 이용하여 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계, 원과 직선의 위치관계 및 교점의 개수를 구할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	$0<r<\sqrt{3}$ 일 때, $N(r)=0$ 임을 구할 수 있다.	3
	$r=\sqrt{3}$ 일 때, $N(r)=2$ 임을 구할 수 있다.	3
	$\sqrt{3}<r<2$일 때, $N(r)=4$ 임을 구할 수 있다.	3
	$r=2$ 일 때, $N(r)=3$ 임을 구할 수 있다.	3
	$r>2$ 일 때, $N(r)=2$ 임을 구할 수 있다.	3
[1-2]	직선 l과 곡선 C_1의 교점의 개수를 k의 범위에 따라 구할 수 있다.	5
	직선 l과 곡선 C_2의 교점의 개수를 k의 범위에 따라 구할 수 있다.	5
	두 곡선 C_1, C_2와 직선 l이 동시에 지나는 점의 개수를 구할 수 있다.	5
	도형 C와 직선 l의 교점의 개수가 3이 되는 모든 실수 k의 값을 구할 수 있다.	5

7. 예시 답안

[1-1]

두 곡선 C_1, C_2의 교점의 개수는 연립방정식

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2+k-2 & \cdots ① \\ x^2+(y-k)^2=r^2 & \cdots ② \end{cases}$$

을 동시에 만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

①을 ②에 대입하면

$$x^2+\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+k-2\right)-k\right\}^2=r^2$$

$$x^4-4x^2+16-4r^2=0 \quad \cdots ③$$

이다. ①에서 y는 x의 값에 따라 유일하게 결정되므로 $N(r)$는 ③을 만족하는 x의 개수와 같다.

$X=x^2$으로 치환하면 $X^2-4X+16-4r^2=0$이고, 이 이차방정식의 판별식은

$$D/4=4-(16-4r^2)=4(r^2-3)$$

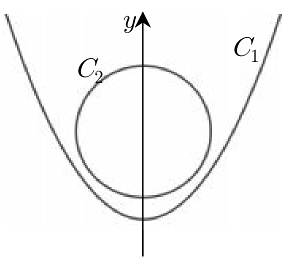
이다. 따라서

$r^2-3<0$일 때 실수 X의 값은 존재하지 않는다. … ⅰ)

$r^2-3=0$일 때 실수 X의 값은 오직 하나를 갖는다. … ⅱ)

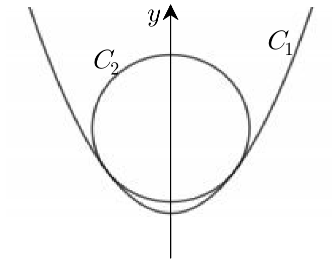
$r^2-3>0$일 때 실수 X의 값은 서로 다른 2개를 갖는다. … ⅲ)

ⅰ) $r^2-3<0$ 즉, $0<r<\sqrt{3}$ 이면 $N(r)=0$



[$0<r<\sqrt{3}$ 일 때]

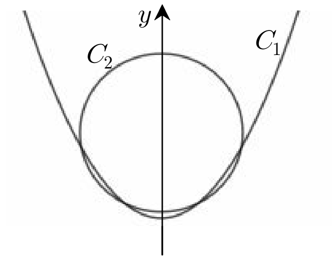
ⅱ) $r^2-3=0$ 즉, $r=\sqrt{3}$ 이면
$X^2-4X+4=(X-2)^2=0$.
따라서 $X=2$ 이고 이때의 $x=\pm\sqrt{2}$ 이므로 $N(r)=2$ … 【※】



[$r=\sqrt{3}$ 일 때]

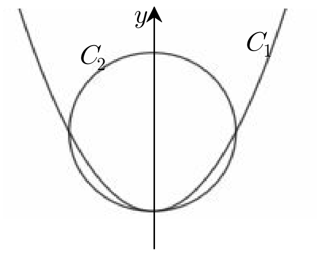
ⅲ) $r^2-3>0$ 즉, $r>\sqrt{3}$ 일 때
$x^2=2+2\sqrt{r^2-3}$ 또는 $x^2=2-2\sqrt{r^2-3}$ 이다.

① $0<r^2-3<1$ 즉, $\sqrt{3}<r<2$이면
$2-2\sqrt{r^2-3}>0$ 이 되어 이차방정식 $x^2=2+2\sqrt{r^2-3}$ 과 $x^2=2-2\sqrt{r^2-3}$ 이 각각 서로 다른 두 개의 실수 x 의 값을 가지므로 $N(r)=4$



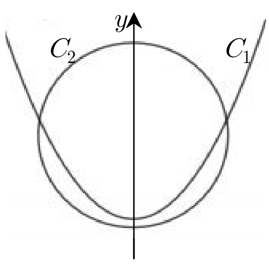
[$\sqrt{3}<r<2$일 때]

② $r^2-3=1$ 즉, $r=2$ 이면
$x^2=4$ 또는 $x^2=0$ 이므로 $x=\pm2$ 또는 $x=0$이다. 따라서 $N(r)=3$



[$r=2$ 일 때]

③ $r^2-3>1$ 즉, $r>2$ 이면
$2-2\sqrt{r^2-3}<0$ 이 되어 $x^2=2-2\sqrt{r^2-3}$ 를 만족하는 실수 x 의 값은 존재하지 않고,
이차방정식 $x^2=2+2\sqrt{r^2-3}$ 은 서로 다른 두 개의 실수 x의 값을 가지므로 $N(r)=2$



[$r>2$ 일 때]

그러므로 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해서 $N(r)=\begin{cases} 0 & (0<r<\sqrt{3}) \\ 2 & (r=\sqrt{3} \text{ 또는 } r>2) \\ 3 & (r=2) \\ 4 & (\sqrt{3}<r<2) \end{cases}$

[1-1 별해]

두 곡선 C_1, C_2의 교점의 개수는 연립방정식

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 + k - 2 & \cdots ① \\ x^2 + (y-k)^2 = r^2 & \cdots ② \end{cases}$$

을 동시에 만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

①에서 $x^2 = 2(y-k+2)$이므로 이를 ②에 대입하면

$$(y-k)^2 + 2(y-k+2) = r^2$$

$$y^2 - 2(k-1)y + k^2 - 2k + 4 - r^2 = 0$$

이고, 이 이차방정식의 판별식은

$$D/4 = (k-1)^2 - \left(k^2 - 2k + 4 - r^2\right) = r^2 - 3$$

이다. 따라서

$r^2 - 3 < 0$일 때 실수 y의 값은 존재하지 않는다. ⋯ ⅰ)

$r^2 - 3 = 0$일 때 실수 y의 값은 오직 하나를 갖는다. ⋯ ⅱ)

$r^2 - 3 > 0$일 때 실수 y의 값은 서로 다른 2개를 갖는다. ⋯ ⅲ)

ⅰ) $r^2 - 3 < 0$ 즉, $0 < r < \sqrt{3}$이면 $N(r) = 0$

ⅱ) $r^2 - 3 = 0$ 즉, $r = \sqrt{3}$이면

$y^2 - 2(k-1)y + (k-1)^2 = 0$, $\{y - (k-1)\}^2 = 0$

따라서 $y = k-1$이고 이때의 $x = \pm\sqrt{2}$이므로 $N(r) = 2$ ⋯ 【※】

ⅲ) $r^2 - 3 > 0$ 즉, $r > \sqrt{3}$일 때

방정식 $y^2 - 2(k-1)y + k^2 - 2k + 4 - r^2 = 0$에서

$y = (k-1) \pm \sqrt{r^2-3}$이고 이때의 $x^2 = 2(y-k+2) = 2\left(1 \pm \sqrt{r^2-3}\right)$

① $0 < r^2 - 3 < 1$ 즉, $\sqrt{3} < r < 2$이면 $x^2 > 0$이 되어

$y = (k-1) \pm \sqrt{r^2-3}$일 때 각각 서로 다른 두 개의 실수 x의 값을 가지므로 $N(r) = 4$

② $r^2 - 3 = 1$ 즉, $r = 2$이면

$y = k$일 때 $x = \pm 2$이고,

$y = k-2$일 때 $x = 0$이므로 $N(r) = 3$

③ $r^2 - 3 > 1$ 즉, $r > 2$이면

$y = (k-1) - \sqrt{r^2-3}$일 때 $x^2 < 0$이므로 실수 x의 값은 존재하지 않고

$y = (k-1) + \sqrt{r^2-3}$일 때 $x^2 > 0$이 되어 서로 다른 두 개의 실수 x의 값을 가지므로 $N(r) = 2$

그러므로 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해서 $N(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < \sqrt{3}) \\ 2 & (r = \sqrt{3} \text{ 또는 } r > 2) \\ 3 & (r = 2) \\ 4 & (\sqrt{3} < r < 2) \end{cases}$

[1-2]

직선 l과 곡선 C_1의 교점의 개수를 n_1,

직선 l과 곡선 C_2의 교점의 개수를 n_2,

두 곡선 C_1, C_2와 직선 l이 동시에 지나는 점이 개수를 n_3라 하면

도형 C와 직선 l의 교점의 개수는 $n_1 + n_2 - n_3$와 같다.

ⅰ) 직선 l과 곡선 C_1의 교점의 개수는 연립방정식 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + k - 2 \\ y = kx + k - 6 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

$\frac{1}{2}x^2 + k - 2 = kx + k - 6$ 이므로 $x^2 - 2kx + 8 = 0$이다.

이 이차방정식의 판별식은 $D/4 = k^2 - 8$ 이므로

$$n_1 = \begin{cases} 2 & (k < -\sqrt{8} \text{ 또는 } k > \sqrt{8}) \\ 1 & (k = \pm\sqrt{8}) \\ 0 & (-\sqrt{8} < k < \sqrt{8}) \end{cases}$$

ⅱ) 직선 l과 곡선 C_2의 교점의 개수는 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + (y-k)^2 = 3 \\ y = kx + k - 6 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

$x^2 + (kx-6)^2 = 3$ 이므로 $(k^2+1)x^2 - 12kx + 33 = 0$ 이다.

이 이차방정식의 판별식은 $D/4 = 3\left(k^2 - 11\right)$이므로

$$n_2 = \begin{cases} 2 & (k < -\sqrt{11} \text{ 또는 } k > \sqrt{11}) \\ 1 & (k = \pm\sqrt{11}) \\ 0 & (-\sqrt{11} < k < \sqrt{11}) \end{cases}$$

ⅲ) 【※】에 의해서 두 곡선 C_1, C_2는 두 점 $(\sqrt{2}, k-1)$, $(-\sqrt{2}, k-1)$에서 만난다.

이 점이 직선 $l : y = kx + k - 6$ 을 지나면

$k - 1 = \pm\sqrt{2}k + k - 6$

을 만족하므로 $k = \pm\frac{5}{\sqrt{2}} = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 가 되어

$$n_3 = \begin{cases} 1 & \left(k = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \\ 0 & \left(k \neq \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해서 $n_1 + n_2 - n_3 = 3$ 이 되는 경우는

① $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$ 일 때 $k = \pm\sqrt{11}$

② $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 0$ 일 때 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

③ $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$ 일 때 $k = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$

그러므로 도형 C와 직선 l의 교점의 개수가 3이 되는 k의 값은 $k = \pm\sqrt{11}$, $k = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

[1-2 별해]

직선 l : $kx - y + k - 6 = 0$ 과 원 C_2의 교점의 개수를 다음과 같은 방법으로도 구할 수 있다.

원 C_2의 중심 $(0, k)$와 직선 l과의 거리 d는 $\frac{|k \times 0 - k + (k-6)|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{k^2+1}}$ 이다. 따라서

$d < \sqrt{3}$ 즉, $k < -\sqrt{11}$ 또는 $k > \sqrt{11}$ 이면 $n_2 = 2$

$d = \sqrt{3}$ 즉, $k = \pm\sqrt{11}$ 이면 $n_2 = 1$

$d > \sqrt{3}$ 즉, $-\sqrt{11} < k < \sqrt{11}$ 이면 $n_2 = 0$

문항카드 5	자연계 2번

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열(수학) / 공통문항 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ
	핵심 개념 및 용어	접선의 방정식, 연속함수, 사잇값정리, 극대와 극소
예상 소요 시간	35분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

【공통문항 2】다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 원과 직선의 위치관계는 다음과 같다.

(ⅰ) $d < r$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.

(ⅱ) $d = r$이면 한 점에서 만난다.(접한다.)

(ⅲ) $d > r$이면 만나지 않는다.

(나) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c) = k$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

함수 $f(x) = x^4 - x^2 + 2$에 대하여 원점 O에서 곡선 $y = f(x)$에 그은 두 접선 l_1, l_2의 접점 중 제1사분면 위에 있는 점을 A라 하자. 함수 $f(x)$의 최솟값을 k라 할 때, 직선 $y = k$와 두 접선 l_1, l_2로 만들어지는 삼각형에 내접하는 원을 C라 하자. 다음 물음에 답하시오.

[2-1] 원 C의 반지름의 길이를 구하시오. (15점)

[2-2] 선분 OA 위의 점 중 원점이 아닌 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 원 C의 내부에 존재하는 10개의 점 $\mathrm{Q}_n(0, q_n)$ $(n = 1, 2, \cdots, 10)$에 대하여

$$S_n = \begin{cases} (\text{삼각형 } \mathrm{PHQ}_n \text{의 넓이}) & (b \neq q_n) \\ 0 & (b = q_n) \end{cases}$$

이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} S_n = 1$을 만족시키는 점 P가 적어도 하나 존재함을 보이시오. (20점)

3. 출제 의도

본 문항에서는 도함수를 활용하여 함수의 그래프를 그리고 함수의 최솟값과 접선의 방정식을 구할 수 있는지와 점의 위치에 따라 변하는 값을 함수로 표현하고 연속의 성질을 이용하여 특정 함숫값이 존재함을 보일 수 있는지를 평가하고자 한다.

[2-1] 도함수를 이용하여 곡선 밖에서 그은 접선의 방정식과 최솟값을 구하고 조건에 맞는 원의 방정식을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[2-2] 구하려는 값을 함수로 표현하고 사잇값 정리를 적용할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정		교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문		학습내용 성취기준
제시문 (가)	적용교육과정	[수학] - (3)도형의 방정식 - $\boxed{3}$ 원의 방정식 [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.
	성취기준·평가기준	[수학] - (3)도형의 방정식 - $\boxed{3}$ 원의 방정식 [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. (상) 원의 정의를 이용하여 원의 방정식을 이끌어 내고, 다양한 조건에서 원의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 (나)	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (나) 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (중) 연속함수에 관한 최대·최소 정리와 사잇값 정리를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.
[2-1]	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. (상) 주어진 점에서 다항함수 $y=f(x)$의 그래프에 그은 접선의 방정식을 구할 수 있다. (상) 다항함수의 극댓값과 극솟값을 구하고, 구하는 과정을 설명할 수 있다. (중) 다항함수의 증가, 감소를 조사하여 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [수학] - (3)도형의 방정식 - $\boxed{2}$ 직선의 방정식 [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. (중) 점과 직선사이의 거리를 구할 수 있다. [수학] - (3)도형의 방정식 - $\boxed{3}$ 원의 방정식 [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. (상) 원의 정의를 이용하여 원의 방정식을 이끌어 내고, 다양한 조건에서 원의 방정식을 구할 수 있다.
[2-2]	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (상) 주어진 구간에서 함수의 연속성을 판별할 수 있다. (중) 연속함수에 관한 최대최소 정리와 사잇값 정리를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상교육	2018	131-136
	수학	배종숙 외	금성출판사	2018	145-146
	수학	홍성복 외	지학사	2018	144-149
	수학Ⅱ	황선욱 외	미래엔	2018	35-39
	수학Ⅱ	고성은 외	좋은책 신사고	2018	35-39
	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2018	36-40

5. 문항 해설

본 문항은 도함수를 이용하여 다항함수의 최솟값과 접선의 방정식을 구하고 주어진 조건에 맞는 원의 방정식을 구할 수 있는지를 평가한다. 또한 접선 위의 한 점과 주어진 두 점들을 연결한 삼각형의 넓이의 합을 함수로 정의하고 이 함수가 연속함수임을 판별한 후 특정 값을 함숫값으로 가질 수 있음을 사잇값 정리를 이용하여 설명할 수 있는지를 평가하고자 한다.

6. 채점 기준

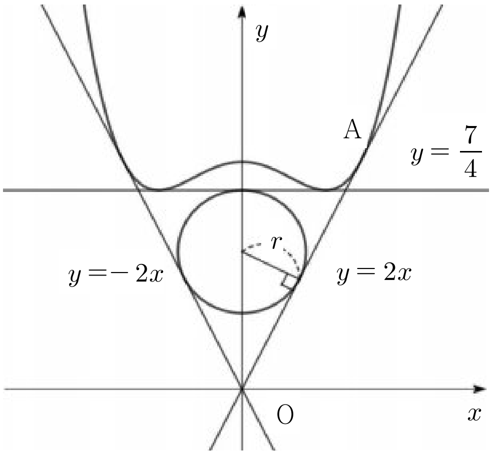
하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	함수의 최솟값을 구할 수 있다.	5
	곡선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있다.	5
	세 직선에 동시에 접하는 원의 반지름을 구할 수 있다.	5
[2-2]	$\sum_{n=1}^{10} S_n$ 을 구할 수 있다.	5
	$\sum_{n=1}^{10} S_n - 1$ 또는 $\sum_{n=1}^{10} S_n$ 을 함수로 나타내고 연속임을 확인할 수 있다.	5
	함숫값을 확인하고 사잇값 정리를 적용할 수 있다.	5
	조건을 만족하는 점 P 가 존재함을 보일 수 있다.	5

7. 예시 답안

[2-1]

$f'(x) = 4x^3 - 2x = 4x\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$이므로 함수 $y=f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{7}{4}$	↗	2	↘	$\frac{7}{4}$	↗



함수의 최솟값 $k=\frac{7}{4}$

점 (t, t^4-t^2+2) 에서의 접선의 방정식은 $y=(4t^3-2t)(x-t)+t^4-t^2+2$

이 직선이 원점을 지나므로 $t=\pm 1$ 이고 접선의 방정식은 $y=\pm 2x$ 이다.

$y=\frac{7}{4}$ 와 $y=\pm 2x$ 에 접하는 원 C의 반지름을 r 라 하면 원의 중심 $\left(0, \frac{7}{4}-r\right)$ 와 직선 $y=2x$ 사이의 거리가 r 이므로

$\frac{\left|\frac{7}{4}-r\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=r$ 이고 $r<\frac{7}{4}$ 이므로

$r=\frac{7(\sqrt{5}-1)}{16}$

[2-2]

[2-1]에서 $\mathrm{A}(1,2)$ 임을 알 수 있다.

$S_n=\frac{1}{2}\times\frac{b}{2}\times|b-q_n|$ 이므로 $\sum_{n=1}^{10}S_n=\sum_{n=1}^{10}\frac{b}{4}|b-q_n|=1$ 을 만족시키는 b 의 존재성을 살펴보자.

$g(y)=\sum_{n=1}^{10}\frac{y}{4}|y-q_n|-1$이라 하면, 함수 g 는 닫힌구간 $[0,2]$ 에서 연속이고

$g(0)=-1$

$q_n<\frac{7}{4}$ 이므로 $\sum_{n=1}^{10}q_n<\frac{35}{2}$

$g(2)=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}|2-q_n|-1=9-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}q_n>0$

$g(0)<0$, $g(2)>0$ 이므로 사잇값 정리에 의해 $g(c)=0$ 을 만족하는 c 가 열린구간 $(0,2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $\sum_{n=1}^{10}S_n=1$ 을 만족시키는 점 P 가 선분 $\overline{\mathrm{OA}}$ 위에 적어도 하나 존재한다.

[별해]

[2-1]에서 $\mathrm{A}(1,2)$ 임을 알 수 있다.

$S_n = \frac{1}{2} \times a \times |2a - q_n|$ 이므로 $\sum_{n=1}^{10} S_n = \sum_{n=1}^{10} \frac{a}{2}|2a - q_n| = 1$ 을 만족시키는 a 의 존재성을 살펴보자.

$g(x) = \sum_{n=1}^{10} \frac{x}{2}|2x - q_n| - 1$이라 하면, 함수 g 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고

$g(0) = -1$

$q_n < \frac{7}{4}$ 이므로 $\sum_{n=1}^{10} q_n < \frac{35}{2}$

$g(1) = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2}|2 - q_n| - 1 = 9 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10} q_n > 0$

$g(0) < 0$, $g(1) > 0$ 이므로 사잇값 정리에 의해 $g(c) = 0$ 을 만족하는 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $\sum_{n=1}^{10} S_n = 1$ 을 만족시키는 점 P 가 선분 $\overline{\mathrm{OA}}$ 위에 적어도 하나 존재한다.

문항카드 6	자연계 선택문항 유형1 - 미적분

바. 문항카드6

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열(수학) / 선택문항 유형1(미적분)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분
	핵심 개념 및 용어	곡선의 길이, 함수의 극한의 대소관계, 정적분과 급수의 관계
예상 소요 시간	30분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

【선택문항 유형1(미적분)】다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) $x=a$에서 $x=b$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이 l은 다음과 같다.

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

(나) 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$와 a에 가까운 모든 실수 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$f(x)\le h(x)\le g(x) \text{ 이고 } \lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=L \text{ 이면 } \lim_{x\to a}h(x)=L$$

(다) 닫힌구간 $[a,b]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$(b-a)f(a)<\int_a^b f(x)\,dx<(b-a)f(b)$$

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $p(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(ⅰ) $t<p(t)$
(ⅱ) $x=t$에서 $x=p(t)$까지의 곡선 $y=x^2$의 길이는 1이다.

다음 물음에 답하시오.

[미적분-1] $\lim_{t\to\infty}\{p(t)-t\}=0$임을 보이시오. (10점)

[미적분-2] $\lim_{t\to\infty}t\{p(t)-t\}$의 값을 구하시오. (10점)

[미적분-3] $\lim_{t\to\infty}t^2\{1-(p'(t))^2\}$의 값을 구하시오. (10점)

3. 출제 의도

본 문항에서는 곡선의 길이를 정적분으로 표현하고 피적분함수가 증가함수일 때 정적분의 범위를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지에 대해 평가하고자 한다. 또한 정적분의 위 끝이 함수로 표현되어 있을 때 합성함수 미분법을 통해 미분을 할 수 있는지와 구해진 극한값을 이용하여 주어진 극한값을 구할 수 있는지에 대해 평가하고자 한다.

[미적분-1] 곡선의 길이를 정적분으로 표현할 수 있는지와 피적분함수가 증가함수일 때 정적분의 범위와 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지에 대해 평가하는 문항이다.

[미적분-2] [미적분-1]의 결과와 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지에 대해 평가하는 문항이다.

[미적분-3] 정적분의 위 끝이 함수로 표현되어 있을 때 합성함수 미분법을 통해 미분을 할 수 있는지와 [미적분-1]과 [미적분-2]의 결과와 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는지에 대해 평가하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정		교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문		학습내용 성취기준
제시문(가)	적용교육과정	[미적분] - (2) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[미적분] - (2) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (중) 정적분을 활용하여 평면 위를 움직이는 점의 이동거리를 구할 수 있다.
제시문(나)	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{1}$ 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{1}$ 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. (중) 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있다.
제시문(다)	적용교육과정	[미적분] - (2) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
	성취기준·평가기준	[미적분] - (2) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다. (중) 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 말할 수 있다.
[미적분-1]	적용교육과정	[미적분] - (2) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. [수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{1}$ 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [미적분] - (2) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
	성취기준·평가기준	[미적분] - (2) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (상) 평면 위를 움직이는 점의 속도, 거리에 대한 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. [미적분] - (2) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다. (중) 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 말할 수 있다. [수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{1}$ 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. (상) 여러 가지 함수의 극한을 구하고, 이유를 설명할 수 있다.
[미적분-2]	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{1}$ 함수의 극한

		[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
	성취기준· 평가기준	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - 1 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. (상) 여러 가지 함수의 극한을 구하고, 이유를 설명할 수 있다.
[미적분-3]	적용교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - 1 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
	성취기준· 평가기준	[미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. (상) 여러 가지 합성함수를 미분할 수 있다. [수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - 1 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. (상) 여러 가지 함수의 극한을 구하고, 이유를 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅱ	최부림 외	천재교육	2018	20-23
	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2018	21-25
	미적분	박교식 외	동아출판	2019	81-82, 151-153, 164-165
	미적분	권오남 외	교학사	2019	88-89, 168-171, 181

5. 문항 해설

본 문항은 곡선의 길이를 정적분으로 표현할 수 있는지와 함수의 극한의 대소 관계와 함수의 극한의 기본정리를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지를 평가한다. 피적분함수가 증가함수일 때 정적분의 범위를 표현할 수 있는 부등식을 구할 수 있어야 하고, 함수의 극한의 대소 관계를 사용할 수 있도록 적절하게 식을 변형할 수 있어야 한다. 또한 위끝이 함수로 표현된 정적분을 합성함수 미분법을 이용하여 미분할 수 있어야 한다. 구해진 극한값과 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 주어진 극한값을 구할 수 있는지에 대해 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[미적분-1]	부등식 $\{p(t)-t\}\sqrt{1+4t^2} < \int_t^{p(t)} \sqrt{1+4x^2}\,dx < \{p(t)-t\}\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}$ 를 구할 수 있다.	4
	부등식 $\frac{1}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}} < p(t)-t < \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$ 를 구할 수 있다.	4
	함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 $\lim_{t\to\infty}\{p(t)-t\}=0$ 임을 보일 수 있다.	2
[미적분-2]	$\lim_{t\to\infty}\frac{p(t)}{t}=1$ 를 구할 수 있다.	4
	부등식 $\frac{t}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}} < t\{p(t)-t\} < \frac{t}{\sqrt{1+4t^2}}$ 를 구할 수 있다.	2

	함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 $\lim_{t\to\infty} t\{p(t)-t\}=\frac{1}{2}$ 를 구할 수 있다.	4
[미적분-3]	$\int_t^{p(t)} \sqrt{1+4x^2}\,dx=1$ 의 양변을 미분하여 $\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}\times p'(t)-\sqrt{1+4t^2}=0$ 를 구할 수 있다.	4
	$t^2\{1-(p'(t))^2\}=\frac{4t^2\{\{p(t)\}^2-t^2\}}{1+\{4p(t)\}^2}$ 로 식을 정리할 수 있다.	2
	$\lim_{t\to\infty} t^2\{1-(p'(t))^2\}=1$ 를 구할 수 있다.	4

7. 예시 답안

[미적분-1]

$y=x^2$ 에서 $y'=2x$ 이므로 구간 $[t,\ p(t)]$ 에서 곡선의 길이는

$$\int_t^{p(t)} \sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_t^{p(t)} \sqrt{1+4x^2}\,dx=1 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

이다.

$\sqrt{1+4x^2}$ 이 구간 $[t,\,p(t)]$에서 증가하는 연속함수이므로 제시문 (다)에 의해

$$\{p(t)-t\}\sqrt{1+4t^2}<\int_t^{p(t)} \sqrt{1+4x^2}\,dx<\{p(t)-t\}\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}$$

이다. ①에 의해

$$\{p(t)-t\}\sqrt{1+4t^2}<1<\{p(t)-t\}\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}$$

이고 이 부등식을 정리하면

$$\frac{1}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}}<p(t)-t<\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \quad \cdots\cdots \text{②}$$

이다. $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}=0$ 이고, $\lim_{t\to\infty}p(t)=\infty$ 이므로 $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}}=0$ 이다.

따라서 제시문 (나)에 의해 $\lim_{t\to\infty}\{p(t)-t\}=0$ 이다.

[미적분-1 별해]

$y=x^2$ 에서 $y'=2x$ 이므로 구간 $[t,\ p(t)]$ 에서 곡선의 길이는

$$\int_t^{p(t)} \sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_t^{p(t)} \sqrt{1+4x^2}\,dx=1 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$\sqrt{1+4x^2}$ 이 구간 $[t,\,p(t)]$에서 증가하는 연속함수이므로 제시문 (다)에 의해

$$\{(p(t)-t)\}\sqrt{1+4t^2}<\int_t^{p(t)} \sqrt{1+4x^2}\,dx<\{(p(t)-t)\}\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}$$

이다. 각 변을 $p(t)-t$ 로 나누면

$$\sqrt{1+4t^2}<\frac{\int_t^{p(t)} \sqrt{1+4x^2}\,dx}{p(t)-t}<\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}$$

이고

사잇값정리에 의해 $\dfrac{\int_t^{p(t)} \sqrt{1+4x^2}\,dx}{p(t)-t} = \sqrt{1+4c^2}$ 인 c가 t와 $p(t)$ 사이에 존재한다.

즉, $\int_t^{p(t)} \sqrt{1+4x^2}\,dx = \{p(t)-t\}\sqrt{1+4c^2}$ 을 만족하는 c가 $t < c < p(t)$에 존재한다.

①에 의해 $\{p(t)-t\}\sqrt{1+4c^2} = 1$이고 양변을 $\sqrt{1+4c^2}$ 으로 나누면 $p(t)-t = \dfrac{1}{\sqrt{1+4c^2}}$ 이다.

또, $t < c < p(t)$이므로 $t \to \infty$ 이면 $c \to \infty$ 이다.

따라서 $\lim_{t\to\infty}\{p(t)-t\} = \lim_{c\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+4c^2}} = 0$ 이다.

[미적분-2]

[미적분-1]에서 $\lim_{t\to\infty}\{p(t)-t\} = 0$이고, $\lim_{t\to\infty} p(t) = \infty$ 이므로

$\lim_{t\to\infty}\{p(t)-t\}\dfrac{1}{p(t)} = \lim_{t\to\infty}\left\{1-\dfrac{t}{p(t)}\right\} = 0$이다. 따라서 $\lim_{t\to\infty}\dfrac{t}{p(t)} = 1$이고

$$\lim_{t\to\infty}\frac{p(t)}{t} = 1 \quad \cdots\cdots ③$$

이다.

②의 각 변에 t를 곱하면, $\dfrac{t}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}} < t\{p(t)-t\} < \dfrac{t}{\sqrt{1+4t^2}}$ 이다.

$\lim_{t\to\infty}\dfrac{t}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}} = \lim_{t\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+4\left\{\dfrac{p(t)}{t}\right\}^2}} = \dfrac{1}{2}$ 이고, $\lim_{t\to\infty}\dfrac{t}{\sqrt{1+4t^2}} = \lim_{t\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+4}} = \dfrac{1}{2}$ 이므로

제시문 (나)에 의해 $\lim_{t\to\infty} t\{p(t)-t\} = \dfrac{1}{2}$ 이다.

[미적분-2 별해]

[미적분-1]에서 $\lim_{t\to\infty}\{p(t)-t\} = 0$이고, $\lim_{t\to\infty} p(t) = \infty$ 이므로

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{p(t)}{t}-1\right\} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\{p(t)-t\} = 0$$

이다. 따라서

$$\lim_{t\to\infty}\frac{p(t)}{t} = 1 \quad \cdots\cdots ③$$

이다.

②의 각 변에 t를 곱하면, $\dfrac{t}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}} < t\{p(t)-t\} < \dfrac{t}{\sqrt{1+4t^2}}$ 이다.

$\lim_{t\to\infty}\dfrac{t}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}} = \lim_{t\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+4\left\{\dfrac{p(t)}{t}\right\}^2}} = \dfrac{1}{2}$ 이고, $\lim_{t\to\infty}\dfrac{t}{\sqrt{1+4t^2}} = \lim_{t\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+4}} = \dfrac{1}{2}$ 이므로

제시문 (나)에 의해 $\lim_{t\to\infty} t\{p(t)-t\} = \dfrac{1}{2}$ 이다.

[미적분-3]

①의 양변을 t에 대하여 미분하면 $\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}\times p'(t)-\sqrt{1+4t^2}=0$이다.

식을 정리하면 $\{p'(t)\}^2=\dfrac{1+4t^2}{1+4\{p(t)\}^2}$, $1-\{p'(t)\}^2=1-\dfrac{1+4t^2}{1+4\{p(t)\}^2}=\dfrac{4\{p(t)\}^2-4t^2}{1+4\{p(t)\}^2}$이고,

$t^2\{1-\{p'(t)\}^2\}=\dfrac{4t^2\{\{p(t)\}^2-t^2\}}{1+4\{p(t)\}^2}$ 이다.

③에 의해

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}t^2\{1-(p'(t))^2\}&=\lim_{t\to\infty}4t\{p(t)-t\}\frac{tp(t)+t^2}{1+\{4p(t)\}^2}\\&=\lim_{t\to\infty}4t\{p(t)-t\}\frac{\dfrac{p(t)}{t}+1}{\dfrac{1}{t^2}+4\left\{\dfrac{p(t)}{t}\right\}^2}\\&=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1+1}{4}=1\end{aligned}$$

이다.

[미적분-3 별해]

①의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}\times p'(t)-\sqrt{1+4t^2}=0$$

식을 정리하면 $\{p'(t)\}^2=\dfrac{1+4t^2}{1+4\{p(t)\}^2}$이고,

$$1-\{p'(t)\}^2=1-\frac{1+4t^2}{1+4\{p(t)\}^2}=\frac{4\{p(t)\}^2-4t^2}{1+4\{p(t)\}^2}=\frac{4\{p(t)+t\}\{p(t)-t\}}{1+4\{p(t)\}^2}$$

[미적분-1]의 별해에서 $p(t)-t=\dfrac{1}{\sqrt{1+4c^2}}$ 이므로 $1-\{p'(t)\}^2=\dfrac{4\{p(t)+t\}}{1+4\{p(t)\}^2}\dfrac{1}{\sqrt{1+4c^2}}$ 이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}t^2\{1-(p'(t))^2\}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2\{p(t)+t\}}{1+4\{p(t)\}^2}\frac{1}{\sqrt{1+4c^2}}$ 이다.

우변의 분자, 분모를 $\{p(t)\}^3$으로 나누면

$$\lim_{t\to\infty}t^2\{1-(p'(t))^2\}=\lim_{t\to\infty}\frac{4\left\{\dfrac{t}{p(t)}\right\}^2\left\{1+\dfrac{t}{p(t)}\right\}}{\dfrac{1}{\{p(t)\}^2}+4}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\{p(t)\}^2}+4\left\{\dfrac{c}{p(t)}\right\}^2}}$$

이다.

한편 $t<c<p(t)$에서 $\dfrac{t}{p(t)}<\dfrac{c}{p(t)}<1$이고 ③과 제시문 (나)에 의해 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{c}{p(t)}=1$이다.

따라서

$$\lim_{t\to\infty}t^2\{1-(p'(t))^2\}=\frac{4\times1^2\times(1+1)}{4}\frac{1}{\sqrt{4\times1^2}}=1$$

이다.

문항카드 7	자연계 선택문항 유형2 - 기하

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열(수학) / 선택문항 유형2(기하)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 기하
	핵심 개념 및 용어	코사인법칙, 직선과 평면의 위치 관계, 이면각, 정사영
예상 소요 시간	30분 / 전체 100분	

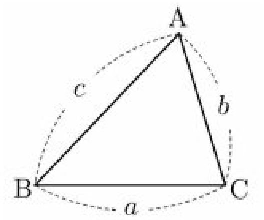
2. 문항 및 제시문

【선택문항 유형2(기하)】다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

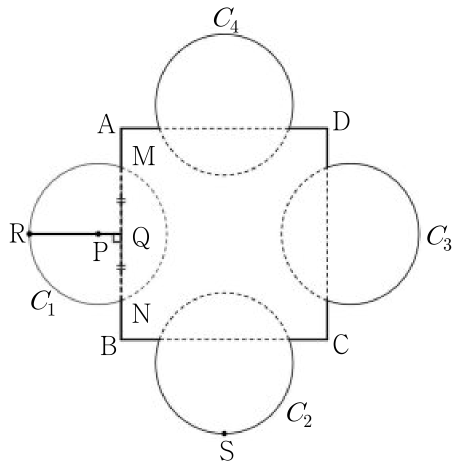
(가) 평면 β 위의 도형의 넓이를 S, 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$라고 하면 $S' = S\cos\theta$이다.

(나) 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 a, b, c일 때 다음이 성립한다.

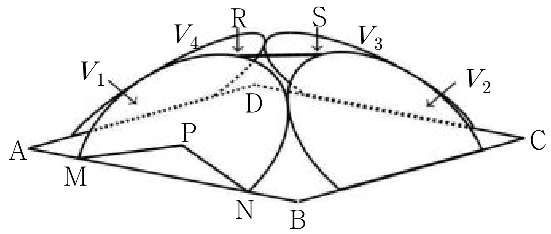
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



[그림1]과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD의 각 변에 반지름의 길이가 2인 네 원 C_1, C_2, C_3, C_4의 일부가 붙어 있는 모양의 종이가 있다. 이때 원 C_1은 선분 AB의 수직이등분선에 대하여 대칭이고, 원 C_1, C_2는 직선 AC에 대하여 각각 원 C_4, C_3에 대칭이며, 원 C_1, C_4는 직선 BD에 대하여 각각 원 C_2, C_3에 대칭이다. 원 C_1의 중심을 P라 하고, 원 C_1이 선분 AB와 만나는 두 점을 각각 M, N이라 하자. 또 한 선분 MN의 중점을 Q, 반직선 QP와 원 C_1이 만나는 점을 R, 점 R를 직선 BD에 대하여 대칭이동한 점을 S라 하자.
이 종이에서 [그림2]와 같이 선분 AB를 접는 선으로 하여 원 C_1의 일부를 접어 올린 도형을 V_1이라 하고, 같은 방식으로 선분 BC, CD, DA를 접는 선으로 하여 각각 원 C_2, C_3, C_4의 일부를 접어 올린 도형을 순서대로 V_2, V_3, V_4라 하자. 이때 정사각형 ABCD와 도형 V_n $(n = 1, 2, 3, 4)$이 이루는 각의 크기는 같고, 1 이상 3 이하의 자연수 n에 대하여 도형 V_n과 V_{n+1}의 테두리는 각각 한 점에서 만난다. 그리고 도형 V_1 위의 점 R와 V_2 위의 점 S 사이의 거리는 $\sqrt{2}$이다. (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)



$\Rightarrow$



[그림1] [그림2]

다음 물음에 답하시오.

[기하-1] 선분 PQ의 길이를 구하시오. (단, $0 < \overline{\mathrm{PQ}} < 2$) (15점)

[기하-2] [그림2]에서 도형 V_2가 포함된 평면을 α라 하자. 삼각형 PMN의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 구하시오. (15점)

3. 출제 의도

본 문항에서는 주어진 조건을 만족하는 공간도형에 대하여 직선과 평면의 위치 관계, 이면각 등을 활용하여 특징을 파악하고 이를 통해 특정 선분의 길이와 정사영의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[기하-1] 주어진 모양의 종이를 접어 만든 공간도형의 특징을 파악하여 특정 조건을 만족하기 위한 선분의 길이를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[기하-2] 이면각의 원리와 코사인법칙을 활용하여 입체도형의 두 면을 포함하는 각각의 평면이 이루는 각을 구하고, 특정 도형의 주어진 평면 위로의 정사영의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정		교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문		학습내용 성취기준
제시문 (가)	적용교육과정	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - 1 공간도형 [12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - (가) 공간도형 [12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. (상) 삼수선의 정리를 활용하여 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
제시문 (나)	적용교육과정	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학 I] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수 [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (중) 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
[기하-1]	적용교육과정	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - 1 공간도형 [12기하03-01-00] 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.

<table>
<tr><td></td><td>성취기준·
평가기준</td><td>[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - (가) 공간도형
[12기하03-01-00] 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.
(상) 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계와 관련된 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">[기하-2]</td><td>적용교육과정</td><td>[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - ① 공간도형
[12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·
평가기준</td><td>[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - (가) 공간도형
[12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
(상) 삼수선의 정리를 활용하여 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하	이준열 외	천재교육	2022	127-128
	기하	류희찬 외	천재교과서	2020	139-140
	기하	권오남 외	교학사	2020	134-135
	수학 I	고성은 외	좋은책 신사고	2019	95-97
	수학 I	황선욱 외	미래엔	2020	104-106
	수학 I	홍성복 외	지학사	2020	98-100

5. 문항 해설

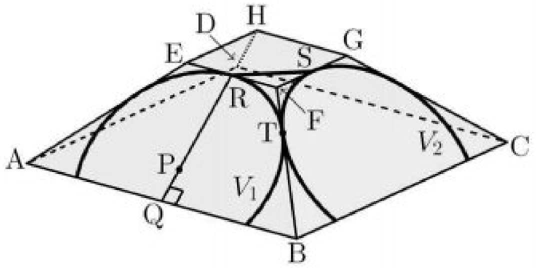
본 문항은 주어진 모양의 종이를 접어 만든 공간도형에 대하여 직선과 평면의 위치 관계, 이면각 등을 활용하여 특징을 파악하여 특정 조건을 만족하기 위한 선분의 길이를 구하고, 이면각의 원리와 코사인법칙을 활용하여 특정 도형의 주어진 평면 위로의 정사영의 넓이를 구할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[기하-1]	도형 V_1과 접하는 사다리꼴 ABFE에 대하여 $\overline{\mathrm{RF}}=1$임을 나타낼 수 있다.	3
	선분 PQ의 길이를 a라 할 때, 선분 BP의 길이를 $\sqrt{a^2+9}$로 나타낼 수 있다.	2
	선분 TB의 길이를 $\sqrt{a^2+5}$로 나타낼 수 있다.	3
	직각삼각형 FUB의 각 변의 길이 사이의 관계를 $(a+2)^2+2^2=\left(1+\sqrt{a^2+5}\right)^2$으로 로 나타내고. 선분 PQ의 길이가 $\frac{2}{3}$임을 구할 수 있다.	7
[기하-2]	$\triangle\mathrm{PMN}$의 넓이가 $\frac{8\sqrt{2}}{9}$임을 구할 수 있다.	3
	평면 ABF와 평면 BCF의 이면각의 크기를 정의할 수 있다.	3
	평면 BCF위에 있는 원의 중심을 W라 할 때, 선분 PW의 길이가 $\frac{5}{2}\sqrt{2}$임을 구할 수 있다.	3
	$\angle\mathrm{PTW}=\theta$라 할 때, $\cos\theta=-\frac{9}{16}$임을 구할 수 있다.	3
	도형 V_2가 포함된 평면으로의 $\triangle\mathrm{PMN}$의 정사영의 넓이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$임을 구할 수 있다.	3

7. 예시 답안

[기하-1] $\overline{\mathrm{AE}}$, $\overline{\mathrm{EF}}$, $\overline{\mathrm{FB}}$에 도형 V_1이 접하도록 사각뿔대 $\mathrm{ABCD}-\mathrm{EFGH}$를 만들면 다음과 같다.

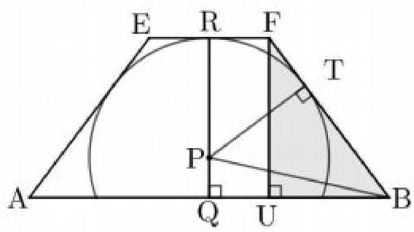


$\overline{\mathrm{RS}}=\sqrt{2}$일 때, $\triangle\mathrm{RFS}$는 $\angle\mathrm{F}=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{RF}}=1$이다.

도형 V_1과 도형 V_2가 만나는 점을 T라 할 때, 점 F에서 도형 V_1에 그은 접선의 길이는 같으므로 $\overline{\mathrm{RF}}=1$이다.

이때 $\overline{\mathrm{PQ}}=a$라 하자. 주어진 조건에 의해 $\overline{\mathrm{BQ}}=3$이고, $\triangle\mathrm{PQB}$는 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{a^2+9}$이다.

또한 $\overline{\mathrm{PT}}$와 $\overline{\mathrm{PR}}$은 원의 반지름이므로 $\overline{\mathrm{PT}}=\overline{\mathrm{PR}}=2$이며, $\triangle\mathrm{PTB}$는 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{TB}}=\sqrt{a^2+5}$이다.



점 F에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 U라 하자. $\overline{\mathrm{FU}}=\overline{\mathrm{RQ}}=a+2$이고, $\overline{\mathrm{UB}}=\overline{\mathrm{QB}}-\overline{\mathrm{QU}}=\overline{\mathrm{QB}}-\overline{\mathrm{RF}}=3-1=2$이며,

$\overline{\mathrm{FB}}=\overline{\mathrm{FT}}+\overline{\mathrm{TB}}=1+\sqrt{a^2+5}$이다. $\triangle\mathrm{FUB}$는 직각삼각형이므로 $(a+2)^2+2^2=\left(1+\sqrt{a^2+5}\right)^2$이다.

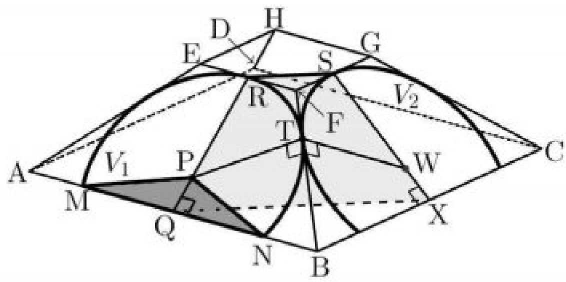
따라서 $a^2+4a+8=1+2\sqrt{a^2+5}+a^2+5$, $4a+2=2\sqrt{a^2+5}$, $(2a+1)^2=a^2+5$, $4a^2+4a+1=a^2+5$

$3a^2+4a-4=0$, $(3a-2)(a+2)=0$, $a=\dfrac{2}{3}$ 또는 $a=-2$ 이고, $a>0$이므로 $a=\dfrac{2}{3}$ 이다.

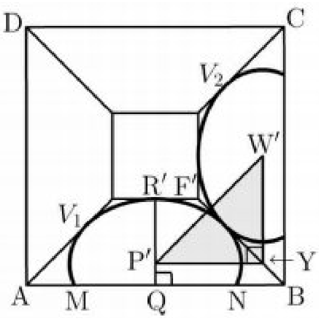
즉, 선분 PQ의 길이는 $\dfrac{2}{3}$이다.

[기하-2] 도형 V_1 위에 있는 $\triangle \mathrm{PMN}$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{2}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{QN}}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{32}{9}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$이다.

따라서 $\triangle \mathrm{PMN}$의 넓이는 $\frac{4\sqrt{2}}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{9}$이다.



도형 V_2가 포함된 평면으로의 $\triangle \mathrm{PMN}$의 정사영을 구하기 위해서는 평면 ABF와 평면 BCF가 이루는 각의 크기를 구하면 된다. 즉, 평면 BCF위에 있는 원의 중심을 W라 하면, 이면각의 정의에 의해 직선 PT와 직선 WT가 이루는 각을 구하면 된다. 점 W에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 X라 하자. 점 P, R, S, W, F의 평면 ABC 위로의 정사영을 각각 P', R', S', W', F'이라 하면 다음 그림과 같다.



점 P는 선분 RQ를 $3:1$로 내분하는 점이므로 점 P'은 선분 $\mathrm{R}'\mathrm{Q}$를 $3:1$로 내분하는 점이다. 이때 $\overline{\mathrm{R}'\mathrm{Q}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{P}'\mathrm{Q}}=\frac{1}{2}$이다. 이때 점 P'을 지나고 선분 AB에 평행인 직선이 선분 $\mathrm{F}'\mathrm{B}$와 만나는 점을 Y라 하면, $\overline{\mathrm{P}'\mathrm{Y}}=\overline{\mathrm{QB}}-\overline{\mathrm{P}'\mathrm{Q}}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$이다.

$\overline{\mathrm{PW}}=\overline{\mathrm{P}'\mathrm{W}'}$이고, $\triangle \mathrm{P}'\mathrm{Y}\mathrm{W}'$은 직각이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{P}'\mathrm{W}}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$이므로 $\angle \mathrm{PTW}=\theta$라 하면, 코사인법칙에 의해

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{PT}}^2+\overline{\mathrm{TW}}^2-\overline{\mathrm{PW}}^2}{2\times\overline{\mathrm{PT}}\times\overline{\mathrm{TW}}}=\frac{4+4-\frac{25}{2}}{2\times2\times2}=\frac{-\frac{9}{2}}{8}=-\frac{9}{16}$$ 이다.

즉, $\cos\theta<0$이므로 $\theta>\frac{\pi}{2}$이고, 따라서 평면 ABF와 평면 BCG가 이루는 각의 크기는 $\pi-\theta$이다.

그러므로 도형 V_2가 포함된 평면으로의 $\triangle \mathrm{PMN}$의 정사영의 넓이는

$$\frac{8\sqrt{2}}{9}\times\cos(\pi-\theta)=\frac{8\sqrt{2}}{9}\times(-\cos\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ 이다.

문항카드 8	의·약학계 1번

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열(수학) / 공통문항 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학
	핵심 개념 및 용어	이차함수의 그래프와 직선의 위치관계, 원과 직선의 위치관계
예상 소요 시간	35분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

【공통문항 1】 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라고 할 때,
> (ⅰ) $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
> (ⅱ) $D=0$이면 중근을 갖는다.
> (ⅲ) $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

실수 k와 양의 실수 r에 대하여 직선 l과 두 곡선 C_1, C_2를

$$l:\ y=kx+k-6$$

$$C_1:\ y=\frac{1}{2}x^2+k-2$$

$$C_2:\ x^2+(y-k)^2=r^2$$

이라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

[1-1] 양의 실수 r에 대하여 곡선 C_1과 곡선 C_2의 교점의 개수를 $N(r)$라 할 때, $N(r)$를 구하시오. (15점)

[1-2] 두 곡선 C_1, C_2 위의 모든 점을 원소로 갖는 집합이 나타내는 도형을 C라 하자.
$r=\sqrt{3}$일 때, 도형 C와 직선 l의 교점의 개수가 3이 되도록 하는 모든 실수 k의 값을 구하시오. (20점)

3. 출제 의도

본 문항에서는 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀고 근을 판별하여 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계 및 원과 직선의 위치관계를 설명할 수 있는지를 평가한다.

[1-1] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀어 서로 다른 실근의 개수를 판별하고 곡선과 곡선의 교점의 개수를 구하는 문항이다.

[1-2] 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계 및 원과 직선의 위치관계를 이해하고 교점의 개수를 구하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정		교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문		학습내용 성취기준
제시문	적용교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - ④ 복소수와 이차방정식 [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학] - (1) 문자와 식 - (라) 복소수와 이차방정식 [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다. (중) 판별식을 이용하여 이차방정식의 근을 판별할 수 있다.
[1-1]	적용교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - ⑤ 이차방정식과 이차함수 [10수학01-09] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다. [수학] - (1) 문자와 식 - ⑥ 여러 가지 방정식과 부등식 [10수학01-13] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학] - (1) 문자와 식 - (마) 이차방정식과 이차함수 [10수학01-09] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다. (상) 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다. [수학] - (1) 문자와 식 - (바) 여러 가지 방정식과 부등식 [10수학01-13] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다. (중) 두 이차방정식으로 구성된 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.
[1-2]	적용교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - ⑤ 이차방정식과 이차함수 [10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해한다. [수학] - (2) 기하 - ③ 원의 방정식 [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.
	성취기준·평가기준	[수학] - (1) 문자와 식 - (마) 이차방정식과 이차함수 [10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해한다. (상) 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해하고, 이를 활용하여 다양한 문제를 해결할 수 있다. [수학] - (2) 기하 - (다) 원의 방정식 [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. (상) 원과 직선의 위치관계를 활용하여 다양한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	박교식 외	동아출판	2018	50, 59-63, 76-77, 133-137
	수학	류희찬 외	천재교과서	2018	56, 64-67, 79-81, 140-144
	수학	김원경 외	비상교육	2018	50, 59-62, 74-75, 131-136

5. 문항 해설

본 문항은 주어진 직선의 방정식, 이차함수, 원의 방정식을 연립하여 연립이차방정식을 풀고 실근을 구할 수 있는지를 평가하고, 구한 실근의 개수를 이용하여 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계, 원과 직선의 위치관계 및 교점의 개수를 구할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	$0 < r < \sqrt{3}$ 일 때, $N(r) = 0$ 임을 구할 수 있다.	3
	$r = \sqrt{3}$ 일 때, $N(r) = 2$ 임을 구할 수 있다.	3
	$\sqrt{3} < r < 2$일 때, $N(r) = 4$ 임을 구할 수 있다.	3
	$r = 2$ 일 때, $N(r) = 3$ 임을 구할 수 있다.	3
	$r > 2$ 일 때, $N(r) = 2$ 임을 구할 수 있다.	3
[1-2]	직선 l과 곡선 C_1의 교점의 개수를 k의 범위에 따라 구할 수 있다.	5
	직선 l과 곡선 C_2의 교점의 개수를 k의 범위에 따라 구할 수 있다.	5
	두 곡선 C_1, C_2와 직선 l이 동시에 지나는 점의 개수를 구할 수 있다.	5
	도형 C와 직선 l의 교점의 개수가 3이 되는 모든 실수 k의 값을 구할 수 있다.	5

7. 예시 답안

[1-1]

두 곡선 C_1, C_2의 교점의 개수는 연립방정식

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + k - 2 & \cdots ① \\ x^2 + (y-k)^2 = r^2 & \cdots ② \end{cases}$$

을 동시에 만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

①을 ②에 대입하면

$$x^2 + \left\{\left(\frac{1}{2}x^2 + k - 2\right) - k\right\}^2 = r^2$$

$$x^4 - 4x^2 + 16 - 4r^2 = 0 \quad \cdots ③$$

이다. ①에서 y는 x의 값에 따라 유일하게 결정되므로 $N(r)$는 ③을 만족하는 x의 개수와 같다.

$X = x^2$으로 치환하면 $X^2 - 4X + 16 - 4r^2 = 0$이고, 이 이차방정식의 판별식은

$$D/4 = 4 - (16 - 4r^2) = 4(r^2 - 3)$$

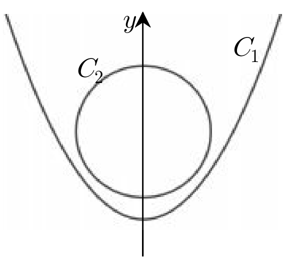
이다. 따라서

$r^2 - 3 < 0$일 때 실수 X의 값은 존재하지 않는다. ⋯ ⅰ)

$r^2 - 3 = 0$일 때 실수 X의 값은 오직 하나를 갖는다. ⋯ ⅱ)

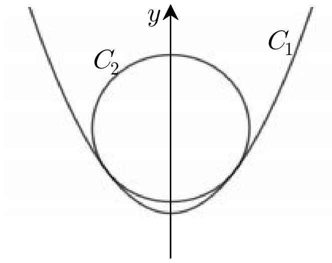
$r^2 - 3 > 0$일 때 실수 X의 값은 서로 다른 2개를 갖는다. ⋯ ⅲ)

ⅰ) $r^2 - 3 < 0$ 즉, $0 < r < \sqrt{3}$ 이면 $N(r) = 0$



[$0 < r < \sqrt{3}$ 일 때]

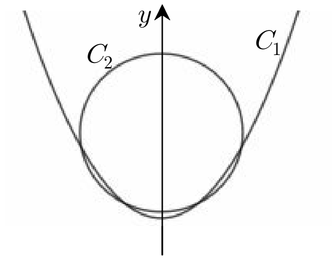
ⅱ) $r^2-3=0$ 즉, $r=\sqrt{3}$ 이면
$X^2-4X+4=(X-2)^2=0$.
따라서 $X=2$ 이고 이때의 $x=\pm\sqrt{2}$ 이므로 $N(r)=2$ … 【※】



[$r=\sqrt{3}$ 일 때]

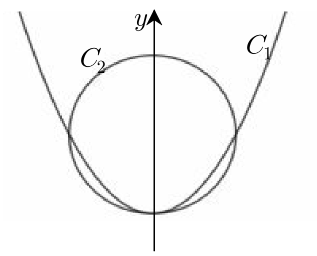
ⅲ) $r^2-3>0$ 즉, $r>\sqrt{3}$ 일 때
$x^2=2+2\sqrt{r^2-3}$ 또는 $x^2=2-2\sqrt{r^2-3}$ 이다.

① $0<r^2-3<1$ 즉, $\sqrt{3}<r<2$이면
$2-2\sqrt{r^2-3}>0$ 이 되어 이차방정식 $x^2=2+2\sqrt{r^2-3}$ 과 $x^2=2-2\sqrt{r^2-3}$ 이 각각 서로 다른 두 개의 실수 x 의 값을 가지므로 $N(r)=4$



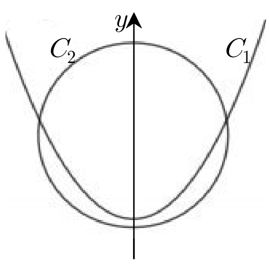
[$\sqrt{3}<r<2$일 때]

② $r^2-3=1$ 즉, $r=2$ 이면
$x^2=4$ 또는 $x^2=0$ 이므로 $x=\pm2$ 또는 $x=0$이다. 따라서 $N(r)=3$



[$r=2$ 일 때]

③ $r^2-3>1$ 즉, $r>2$ 이면
$2-2\sqrt{r^2-3}<0$ 이 되어 $x^2=2-2\sqrt{r^2-3}$ 를 만족하는 실수 x 의 값은 존재하지 않고,
이차방정식 $x^2=2+2\sqrt{r^2-3}$ 은 서로 다른 두 개의 실수 x의 값을 가지므로 $N(r)=2$



[$r>2$ 일 때]

그러므로 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해서 $N(r)=\begin{cases} 0 & (0<r<\sqrt{3}) \\ 2 & (r=\sqrt{3} \text{ 또는 } r>2) \\ 3 & (r=2) \\ 4 & (\sqrt{3}<r<2) \end{cases}$

[1-1 별해]

두 곡선 C_1, C_2의 교점의 개수는 연립방정식

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 + k - 2 & \cdots ① \\ x^2 + (y-k)^2 = r^2 & \cdots ② \end{cases}$$

을 동시에 만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

①에서 $x^2 = 2(y-k+2)$이므로 이를 ②에 대입하면

$$(y-k)^2 + 2(y-k+2) = r^2$$
$$y^2 - 2(k-1)y + k^2 - 2k + 4 - r^2 = 0$$

이고, 이 이차방정식의 판별식은

$$D/4 = (k-1)^2 - \left(k^2 - 2k + 4 - r^2\right) = r^2 - 3$$

이다. 따라서

$r^2 - 3 < 0$일 때 실수 y의 값은 존재하지 않는다. … ⅰ)

$r^2 - 3 = 0$일 때 실수 y의 값은 오직 하나를 갖는다. … ⅱ)

$r^2 - 3 > 0$일 때 실수 y의 값은 서로 다른 2개를 갖는다. … ⅲ)

ⅰ) $r^2 - 3 < 0$ 즉, $0 < r < \sqrt{3}$ 이면 $N(r) = 0$

ⅱ) $r^2 - 3 = 0$ 즉, $r = \sqrt{3}$ 이면

$y^2 - 2(k-1)y + (k-1)^2 = 0$, $\{y - (k-1)\}^2 = 0$

따라서 $y = k-1$이고 이때의 $x = \pm\sqrt{2}$ 이므로 $N(r) = 2$ … 【※】

ⅲ) $r^2 - 3 > 0$ 즉, $r > \sqrt{3}$ 일 때

방정식 $y^2 - 2(k-1)y + k^2 - 2k + 4 - r^2 = 0$에서

$y = (k-1) \pm \sqrt{r^2 - 3}$ 이고 이때의 $x^2 = 2(y-k+2) = 2\left(1 \pm \sqrt{r^2-3}\right)$

① $0 < r^2 - 3 < 1$ 즉, $\sqrt{3} < r < 2$이면 $x^2 > 0$이 되어

$y = (k-1) \pm \sqrt{r^2 - 3}$ 일 때 각각 서로 다른 두 개의 실수 x의 값을 가지므로 $N(r) = 4$

② $r^2 - 3 = 1$ 즉, $r = 2$이면

$y = k$일 때 $x = \pm 2$이고,

$y = k-2$일 때 $x = 0$이므로 $N(r) = 3$

③ $r^2 - 3 > 1$ 즉, $r > 2$이면

$y = (k-1) - \sqrt{r^2-3}$ 일 때 $x^2 < 0$이므로 실수 x의 값은 존재하지 않고

$y = (k-1) + \sqrt{r^2-3}$ 일 때 $x^2 > 0$이 되어 서로 다른 두 개의 실수 x의 값을 가지므로 $N(r) = 2$

그러므로 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해서 $N(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < \sqrt{3}) \\ 2 & (r = \sqrt{3} \text{ 또는 } r > 2) \\ 3 & (r = 2) \\ 4 & (\sqrt{3} < r < 2) \end{cases}$

[1-2]

직선 l과 곡선 C_1의 교점의 개수를 n_1,

직선 l과 곡선 C_2의 교점의 개수를 n_2,

두 곡선 C_1, C_2와 직선 l이 동시에 지나는 점이 개수를 n_3라 하면

도형 C와 직선 l의 교점의 개수는 $n_1 + n_2 - n_3$와 같다.

ⅰ) 직선 l과 곡선 C_1의 교점의 개수는 연립방정식 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + k - 2 \\ y = kx + k - 6 \end{cases}$ 을 동시에

만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

$\frac{1}{2}x^2 + k - 2 = kx + k - 6$ 이므로 $x^2 - 2kx + 8 = 0$이다.

이 이차방정식의 판별식은 $D/4 = k^2 - 8$ 이므로

$$n_1 = \begin{cases} 2 & (k < -\sqrt{8} \text{ 또는 } k > \sqrt{8}) \\ 1 & (k = \pm\sqrt{8}) \\ 0 & (-\sqrt{8} < k < \sqrt{8}) \end{cases}$$

ⅱ) 직선 l과 곡선 C_2의 교점의 개수는 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + (y-k)^2 = 3 \\ y = kx + k - 6 \end{cases}$ 을 동시에

만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

$x^2 + (kx-6)^2 = 3$ 이므로 $(k^2+1)x^2 - 12kx + 33 = 0$ 이다.

이 이차방정식의 판별식은 $D/4 = 3(k^2 - 11)$이므로

$$n_2 = \begin{cases} 2 & (k < -\sqrt{11} \text{ 또는 } k > \sqrt{11}) \\ 1 & (k = \pm\sqrt{11}) \\ 0 & (-\sqrt{11} < k < \sqrt{11}) \end{cases}$$

ⅲ) 【※】에 의해서 두 곡선 C_1, C_2는 두 점 $(\sqrt{2}, k-1)$, $(-\sqrt{2}, k-1)$에서 만난다.

이 점이 직선 $l : y = kx + k - 6$ 을 지나면

$k - 1 = \pm\sqrt{2}k + k - 6$

을 만족하므로 $k = \pm\frac{5}{\sqrt{2}} = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 가 되어

$$n_3 = \begin{cases} 1 & \left(k = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \\ 0 & \left(k \neq \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해서 $n_1 + n_2 - n_3 = 3$ 이 되는 경우는

① $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$ 일 때 $k = \pm\sqrt{11}$

② $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 0$ 일 때 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

③ $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$ 일 때 $k = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$

그러므로 도형 C와 직선 l의 교점의 개수가 3이 되는 k의 값은 $k = \pm\sqrt{11}$, $k = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

[1-2 별해]

직선 l : $kx - y + k - 6 = 0$ 과 원 C_2의 교점의 개수를 다음과 같은 방법으로도 구할 수 있다.

원 C_2의 중심 $(0, k)$와 직선 l과의 거리 d는 $\frac{|k \times 0 - k + (k-6)|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{k^2+1}}$ 이다. 따라서

$d < \sqrt{3}$ 즉, $k < -\sqrt{11}$ 또는 $k > \sqrt{11}$ 이면 $n_2 = 2$

$d = \sqrt{3}$ 즉, $k = \pm\sqrt{11}$ 이면 $n_2 = 1$

$d > \sqrt{3}$ 즉, $-\sqrt{11} < k < \sqrt{11}$ 이면 $n_2 = 0$

문항카드 9	의·약학계 2번

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술(지역인재전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	의학계열(수학) / 공통문항 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ
	핵심 개념 및 용어	함수의 극한, 연속, 도함수, 극값, 정적분
예상 소요 시간	35분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

【공통문항 2】 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 일반적으로 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(ⅰ) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있고

(ⅱ) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하며

(ⅲ) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(나) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 실수 x에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속이라고 한다.

$0 < t < 2$인 실수 t에 대하여 실수 전체 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(ⅰ) $f(x) = \begin{cases} (x+t)(x+t+2) & (-2 \le x < 0) \\ -4(x-t)(x-t-2) & (0 \le x < 2) \end{cases}$

(ⅱ) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = f(x+4)$

실수 a와 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x) = f(x)f(x-a)$라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

[2-1] $a=1$일 때, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 t의 집합과 $a = \frac{3}{2}$일 때, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 t의 집합을 각각 구하시오. (20점)

[2-2] $a=2$라 하자. $0 < t < 2$인 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속임을 보이고, 열린구간 $(0, 2)$에서 함수 $h(t) = \int_0^2 g(x)\,dx$가 극대가 되는 t의 값을 구하시오. (15점)

3. 출제 의도

본 문항에서는 한 점에서 연속이 되기 위한 조건을 알고 서로 다른 두 불연속인 함수의 곱으로 표현된 함수가 연속이 되기 위한 조건을 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[2-1] 한 점에서 연속이 되기 위한 조건을 알고 서로 다른 두 불연속인 함수의 곱으로 표현된 함수가 연속이 되기 위한 조건을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[2-2] 함수가 연속이 되기 위한 조건을 구하고, 연속함수의 정적분을 미분을 이용하여 극값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정		교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문		학습내용 성취기준
제시문 (가)	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (1)함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (1)함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. (상) 주어진 구간에서 함수의 연속성을 판별할 수 있다.
제시문 (나)	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (1)함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (1)함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. (상) 주어진 구간에서 함수의 연속성을 판별할 수 있다.
[2-1]	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (1)함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (1)함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. (상) 주어진 구간에서 함수의 연속성을 판별할 수 있다. (중) 주어진 점에서 함수의 연속성을 판별할 수 있다.
[2-2]	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (1)함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. [수학Ⅱ] - (2)미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [수학Ⅱ] - (3)적분 - $\boxed{2}$ 정적분 [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (1)함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. (상) 주어진 구간에서 함수의 연속성을 판별할 수 있다. (중) 주어진 점에서 함수의 연속성을 판별할 수 있다. [수학Ⅱ] - (2)미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. (중) 다항함수의 증가, 감소를 조사하여 그래프의 개형을 그릴 수 있다. 수학Ⅱ] - (3)적분 - $\boxed{2}$ 정적분 [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. (상) 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅱ	류희찬	천재교과서	2017	30, 31
	수학Ⅱ	고성은	좋은책 신사고	2017	31, 32
	수학Ⅱ	황선욱	미래엔	2017	32, 33
	수학Ⅱ	홍성복	지학사	2017	32, 35
	수학Ⅱ	이준열	천재교육	2017	31, 33
	수학Ⅱ	김원경	비상교육	2017	32, 33

5. 문항 해설

본 문항은 한 점에서 연속이 되기 위한 조건을 알고 서로 다른 두 불연속인 함수의 곱으로 표현된 함수가 연속이 되기 위한 조건을 구할 수 있는지를 평가하고자 한다. 또한, 미분 가능한 함수의 도함수를 이용하여 극값을 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	$a=1$일 때, 실수 전체의 집합에서 $g(x)$가 연속이 되기 위해서 연속성이 보장되어야 하는 4개의 x값에 대한 연속성을 확인할 수 있다.	10
	$a=1$일 때, 주어진 조건을 만족하는 t값의 집합을 구할 수 있다.	2.5
	$a=\frac{3}{2}$일 때, 실수 전체의 집합에서 $g(x)$가 연속이 되기 위해서 연속성이 보장되어야 하는 2개 이상의 x값에 대한 연속성을 확인할 수 있다.	5
	$a=\frac{3}{2}$일 때, 주어진 조건을 만족하는 t값의 집합을 구할 수 있다.	2.5
[2-2]	$a=2$일 때, 실수 전체의 집합에서 $g(x)$가 연속이 되기 위해서 연속성이 보장되어야 하는 2개의 x값에 대한 연속성을 확인하여 주어진 명제가 참임을 보일 수 있다.	6
	$a=2,\ 0<t<2$일 때 $g(x)$와 그 때의 $h(t)$를 구할 수 있다.	5
	$h(t)$의 도함수를 이용하여 $h(t)$가 극대가 되는 x의 값을 구할 수 있다.	4

7. 예시 답안

[2-1]

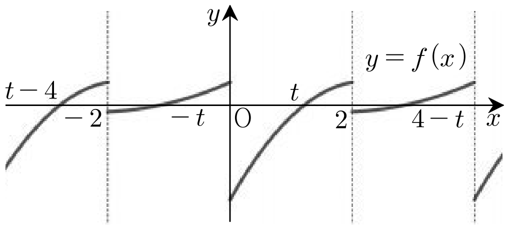
모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$이므로

$$g(x+4)=f(x+4)f(x+4-a)=f(x)f(x-a)=g(x)$$

이다. $[-2,\ 2)$에서 함수 $g(x)$가 연속이라는 것을 보이면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 있다.

또한, $f(x)$는 모든 실수 t에 대하여 $f(t)=\lim_{x\to t+}f(x)$이므로

$g(t)=\lim_{x\to t+}g(x)$가 되어 $x=t$에서 $g(x)$의 연속성은 $g(t)=\lim_{x\to t-}g(x)$를 보이는 것만으로 충분하다.



[i] $a=1$일 때, 함수 $g(x)=f(x)f(x-a)$는 $[-2,\ 2)$에서

$f(x)$는 $x=0$, $x=-2$ 에서만 불연속이고, $f(x-1)$는 $x=1$, $x=-1$에서만 불연속이 되므로

$g(x)$가 $x=0$, $x=-2$, $x=1$, $x=-1$에서 연속이 되면 $[-2,\ 2)$에서 $g(x)$는 연속이 된다.

$x=0$에서 $g(x)$는

1) 함숫값 $g(0)=f(0)f(-1)=-4t(t+2)f(-1)$

2) 좌극한 $\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)f(x-1)=t(t+2)\times f(-1)$

이므로 $x=0$에서 $g(x)$가 연속이 되려면

$-4f(-1)=f(-1)$ 즉, $f(-1)=(t-1)(t+1)=0$, $t=1$이다. … ①

$x=-2$에서 $g(x)$는

1) 함숫값 $g(-2)=f(-2)f(-3)=t(t-2)f(-3)$

2) 좌극한 $\lim_{x\to -2-}g(x)=\lim_{x\to -2-}f(x)f(x-1)=-4t(t-2)f(-3)$

이므로 $x=-2$에서 $g(x)$가 연속이 되려면

$f(-3)=-4f(-3)$ 즉, $f(-3)=f(1)=-4(t-1)(t+1)=0$, $t=1$이다. … ②

$x=1$에서 $g(x)$는

1) 함숫값 $g(1)=f(1)f(0)=-4t(t+2)f(1)$

2) 좌극한 $\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)f(x-1)=t(t+2)f(1)$

이므로 $x=1$에서 $g(x)$가 연속이 되려면

$-4f(1)=f(1)$ 즉, $f(1)=-4(t-1)(t+1)=0$, $t=1$이다. … ③

$x=-1$에서 $g(x)$는

1) 함숫값 $g(-1)=f(-1)f(-2)=t(t-2)f(-1)$

2) 좌극한 $\lim_{x\to -1-}g(x)=\lim_{x\to -1-}f(x)f(x-1)=-4t(t-2)f(-1)$

이므로 $x=-1$에서 $g(x)$가 연속이 되려면

$f(-1)=-4f(-1)$ 즉, $f(-1)=(t-1)(t+1)=0$, $t=1$이다. … ④

따라서 ①, ②, ③, ④에 의해서

$a=1$ 일 때, 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 t 의 집합은 $\{1\}$,

[ⅱ] $a=1.5$ 일 때, 함수 $g(x)=f(x)f(x-a)$ 는 $[-2, 2)$ 에서

$f(x)$ 는 $x=0$, $x=-2$ 에서만 불연속이고, $f(x-1.5)$ 는 $x=1.5$, $x=-0.5$에서만 불연속이 되므로

$g(x)$가 $x=0, x=-2, x=1.5, x=-0.5$에서 연속이 되면 $[-2, 2)$ 에서 $g(x)$ 는 연속이 된다.

$x=0$ 에서 $g(x)$ 는

1) 함숫값 $g(0)=f(0)f(-1.5)=-4t(t+2)f(-1.5)$

2) 좌극한 $\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)f(x-1.5)=t(t+2)\times f(-1.5)$

이므로 $x=0$ 에서 $g(x)$ 가 연속이 되려면

$-4f(-1.5)=f(-1.5)$ 즉, $f(-1.5)=(t-1.5)(t+0.5)=0$, $t=1.5$ 이다. … ⑤

$x=-2$에서 $g(x)$ 는

1) 함숫값 $g(-2)=f(-2)f(-3.5)=t(t-2)f(-3.5)$

2) 좌극한 $\lim_{x\to -2-} g(x)=\lim_{x\to -2-} f(x)f(x-1.5)=-4t(t-2)f(-3.5)$

이므로 $x=-2$에서 $g(x)$ 가 연속이 되려면

$f(-3.5)=-4f(-3.5)$

즉, $f(-3.5)=f(0.5)=-4(t-0.5)(t+1.5)=0$, $t=0.5$ 이다. … ⑥

$x=1.5$, $x=-0.5$에서 $g(x)$ 가 연속이 되는 조건과 상관없이

⑤, ⑥에 의해서 $a=1.5$ 일 때, $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 t 는 존재하지 않는다.

그러므로

$a=1$ 일 때, 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 t 의 집합은 $\{1\}$,

$a=1.5$ 일 때, 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 t 의 집합은 $\varnothing$ 이다.

[2-1 별해]

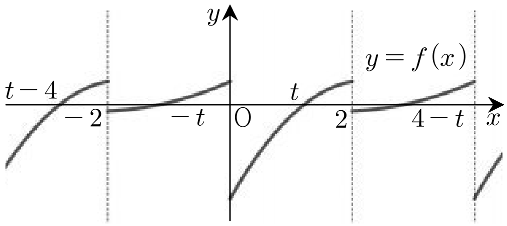
모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$이므로

$$g(x+4)=f(x+4)f(x+4-a)=f(x)f(x-a)=g(x)$$

이다. $[-2,\,2)$에서 함수 $g(x)$가 연속이라는 것을 보이면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 있다.

또한, $f(x)$는 모든 실수 t에 대하여 $f(t)=\lim_{x\to t+}f(x)$이므로

$g(t)=\lim_{x\to t+}g(x)$가 되어 $x=t$에서 $g(x)$의 연속성은 $g(t)=\lim_{x\to t-}g(x)$를 보이는 것만으로 충분하다.



함수 $g(x)=f(x)f(x-a)$는 $0<a<2$일 때

$[-2,\,2)$에서 $f(x)$는 $x=0$, $x=-2$에서만 불연속이고, $f(x-a)$는 $x=a$, $x=a-2$에서만 불연속이 되므로 $g(x)$가 $x=0$, $x=-2$, $x=a$, $x=a-2$에서 연속이 되면 $[-2,\,2)$에서 $g(x)$는 연속이 된다.

$x=0$에서 $g(x)$는

1) 함숫값 $g(0)=f(0)f(-a)=-4t(t+2)f(-a)$

2) 좌극한 $\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)f(x-a)=t(t+2)\times f(-a)$

이므로 $x=0$에서 $g(x)$가 연속이 되려면

$-4f(-a)=f(-a)$ 즉, $f(-a)=0$, $-a=-t$이어야 한다. … ①

$x=-2$에서 $g(x)$는

1) 함숫값 $g(-2)=f(-2)f(-2-a)=t(t-2)f(-2-a)$

2) 좌극한 $\lim_{x\to -2-}g(x)=\lim_{x\to -2-}f(x)f(x-a)=-4t(t-2)f(-2-a)$

이므로 $x=-2$에서 $g(x)$가 연속이 되려면

$f(-2-a)=-4f(-2-a)$ 즉, $f(-2-a)=f(2-a)=0$, $2-a=t$이어야 한다. … ②

$x=a$에서 $g(x)$는

1) 함숫값 $g(a)=f(a)f(0)=-4t(t+2)f(a)$

2) 좌극한 $\lim_{x\to a-}g(x)=\lim_{x\to a-}f(x)f(x-a)=t(t+2)f(a)$

이므로 $x=a$에서 $g(x)$가 연속이 되려면

$-4f(a)=f(a)$ 즉, $f(a)=0$, $a=t$이어야 한다. … ③

$x=a-2$에서 $g(x)$는

1) 함숫값 $g(a-2)=f(a-2)f(-2)=t(t-2)f(a-2)$

2) 좌극한 $\lim_{x\to (a-2)-}g(x)=\lim_{x\to (a-2)-}f(x)f(x-a)=-4t(t-2)f(a-2)$

이므로 $x=a-2$에서 $g(x)$가 연속이 되려면

$f(a-2)=-4f(a-2)$ 즉, $f(a-2)=0$, $a-2=-t$이어야 한다. … ④

따라서 ①, ②, ③, ④에 의해서 $a=1$, $t=1$이면 $[-2,\,2)$에서 $g(x)$는 연속이다.

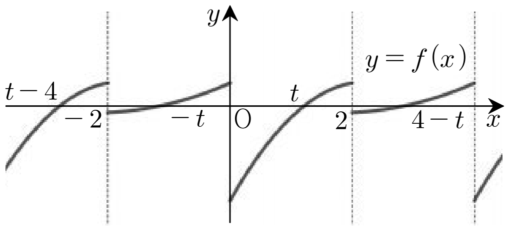
그러므로

$a=1$일 때, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 t의 집합은 $\{1\}$,

$a=1.5$일 때, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 t의 집합은 $\varnothing$ 이다.

[2-2]

$a=2$일 때



$[-2, 2)$에서 $f(x)$는 $x=0$, $x=-2$ 에서만 불연속이고,

$f(x-a)$는 $x=0$, $x=-2$에서만 불연속이 되므로

$g(x)$가 $x=0$, $x=-2$에서 연속이 되면 $[-2, 2)$에서 $g(x)$는 연속이 된다.

$x=0$에서 $g(x)$는

1) 함숫값 $g(0)=f(0)f(-2)=-4t^2(t+2)(t-2)$

2) 좌극한 $\lim\limits_{x \to 0-} g(x)=\lim\limits_{x \to 0-} f(x)f(x-2)=-4t^2(t+2)(t-2)$

이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$x=-2$에서 $g(x)$는

1) 함숫값 $g(-2)=f(-2)f(-4)=f(-2)f(0)=-4t^2(t+2)(t-2)$

2) 좌극한 $\lim\limits_{x \to -2-} g(x)=\lim\limits_{x \to -2-} f(x)f(x-2)=-4t^2(t+2)(t-2)$

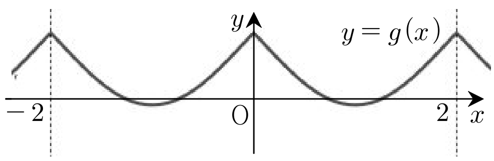
이므로 $g(x)$는 $x=-2$에서 연속이다.

따라서 $a=2$이면 t의 값에 관계없이 $[-2, 2)$에서 $g(x)$는 연속이다.

$a=2$, $0<t<2$이면 구간 $[0, 2)$에서 $g(x)$는

$$g(x)=f(x)f(x-2)=-4(x-t)(x-t-2)\times(x-2+t)(x+t)$$
$$=-4(x-t)(x+t)(x-t-2)(x+t-2)$$

이므로



$$h(t)=\int_0^2 g(x)\,dx=-4\int_0^2 (x^2-t^2)(x^2-4x-t^2+4)\,dx$$
$$=-4\int_0^2 \left\{x^4-4x^3+\left(4-2t^2\right)x^2+4t^2x+t^4-4t^2\right\}dx$$

에서

$$h(t)=-4\times\left\{\frac{8}{3}\left(4-2t^2\right)+8t^2+\left(t^4-4t^2\right)\times 2-\frac{48}{5}\right\}$$

$$h'(t)=-4\times\left(8t^3-\frac{32}{3}t\right)=-32t\times\left(t^2-\frac{4}{3}\right)$$

따라서 $S(t)=\int_0^2 g(x)\,dx$가 극대가 되는 t의 값은 $t=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다.

문항카드 10	의·약학계 선택문항 유형1 - 미적분

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술(지역인재전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	의·약학계열(수학) / 선택문항 유형1(미적분)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심 개념 및 용어	정적분의 성질, 함수의 그래프, 정적분과 급수의 관계, 이계도함수
예상 소요 시간	30분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

【선택문항 유형1(미적분)】다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때 다음이 성립한다.

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

(나) 닫힌구간 $[a, b]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x)\,dx < (b-a)f(b)$$

자연수 n에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[미적분-1] 함수 $f(x) = x^n e^{1-x}$에 대하여 방정식 $f''(x) = 0$의 0이 아닌 두 실근을 α, β라 하자.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right\}^{\frac{1}{n}}$$ 의 값을 구하시오. (15점)

[미적분-2] $x \ge 0$에서 부등식 $x^n e^{1-x} \le n!$이 성립함을 보이시오. (15점)

3. 출제 의도

본 문항에서는 수열의 극한을 자연로그를 이용하여 급수로 변형하고 이를 정적분으로 표현할 수 있는지에 대해 평가하고자 한다. 또한 피적분함수가 증가함수일 때 정적분의 범위를 이용하여 주어진 부등식을 증명할 수 있는지에 대해 평가하고자 한다.

[미적분-1] 수열의 극한을 자연로그를 이용하여 급수로 변형하고 이를 정적분으로 표현할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[미적분-2] 함수의 극댓값을 찾아 함숫값의 범위를 찾아내고 피적분함수가 증가함수일 때 정적분의 범위를 이용하여 주어진 부등식을 증명할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정		교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문		학습내용 성취기준
제시문(가)	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - $\boxed{2}$ 정적분 [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - $\boxed{2}$ 정적분 [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. (상) 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.
제시문(나)	적용교육과정	[미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
	성취기준·평가기준	[미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다. (중) 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 말할 수 있다.
[미적분-1]	적용교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
	성취기준·평가기준	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. (상) 함수의 그래프의 개형에 대한 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다. (중) 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 말할 수 있다.
[미적분-2]	적용교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다. [수학Ⅰ] - (3) 수열 - $\boxed{3}$ 수학적 귀납법 [12수학Ⅰ03-07] 수학적 귀납법의 원리를 이해한다. [12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다. (상) 여러 가지 함수의 이계도함수를 구할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다. (중) 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 활용하여 여러 가지 급수의 합을 구할 수 있다. [수학Ⅰ] - (3) 수열 - $\boxed{3}$ 수학적 귀납법 [12수학Ⅰ03-07] 수학적 귀납법의 원리를 이해한다. [12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다. (상) 수학적 귀납법의 원리를 이해하고, 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅰ	김원경 외	비상	2020	145-150
	수학Ⅰ	황선욱 외	미래엔	2020	158-161
	수학Ⅱ	고성은 외	좋은책 신사고	2018	123-125
	수학Ⅱ	류희찬 외	천재교과서	2018	125-127
	미적분	박교식 외	동아출판	2019	94-95, 106-107, 151-153
	미적분	이준열 외	천재교육	2019	102, 115-116, 164-166

5. 문항 해설

본 문항은 수열의 극한을 자연로그를 이용하여 급수로 변형하고 이를 정적분으로 표현할 수 있는지를 평가한다. 또한 주어진 함수의 극댓값을 구하고 이를 통해 함숫값의 범위를 구할 수 있어야 하고, 피적분함수가 증가함수일 때 정적분의 범위를 이용하여 주어진 부등식을 증명할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[미적분-1]	$f(x)$의 이계도함수를 구할 수 있다.	2
	$\dfrac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}$ 를 n에 대한 식으로 표현할 수 있다.	4
	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right\}^{\frac{1}{n}}$을 정적분으로 표현할 수 있다.	7
	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right\}^{\frac{1}{n}}$을 계산할 수 있다.	2
[미적분-2]	$f(x)$의 극댓값을 구할 수 있다.	2
	$n^n e^{1-n} \le n!$ 임을 보일 수 있다	11
	$x^n e^{1-x} \le n!$ 임을 보일 수 있다	2

7. 예시 답안

[미적분-1]

$f'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^n e^{1-x} = (nx^{n-1} - x^n)e^{1-x}$

$f''(x) = \{n(n-1)x^{n-2} - nx^{n-1}\}e^{1-x} - (nx^{n-1} - x^n)e^{1-x}$

$\quad = x^{n-2}e^{1-x}(x^2 - 2nx + n^2 - n)$

따라서 $f''(x) = 0$을 만족시키는 두 양의 실근 α, β는 근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha + \beta = 2n,\ \alpha\beta = n^2 - n$이다.

이때, $f(\alpha) = \alpha^n e^{1-\alpha}$, $f(\beta) = \beta^n e^{1-\beta}$ 이므로

$f(\alpha)f(\beta) = (\alpha\beta)^n e^{2-\alpha-\beta} = \{n(n-1)\}^n e^{2-2n}$ 이다.

따라서 $\left\{\dfrac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right\}^{\frac{1}{n}} = \left\{\dfrac{4n(4n-1)\cdots(2n+1)}{n^n(n-1)^n e^{2-2n}}\right\}^{\frac{1}{n}}$

$$= \left\{\frac{1}{e^{2-2n}} \times \frac{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}{n^n} \times \frac{(2n+1)(2n+2)\cdots(2n+n)}{(n-1)^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left\{\frac{1}{e^{2-2n}} \times \left(\frac{3n+1}{n} \times \frac{3n+2}{n} \times \cdots \times \frac{3n+n}{n}\right) \times \left(\frac{2n+1}{n-1} \times \frac{2n+2}{n-1} \times \cdots \times \frac{2n+n}{n-1}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$$

이고, 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln\left(\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\left\{\ln\frac{1}{e^{2-2n}}+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{3n+k}{n}\right)+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{2n+k}{n-1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{2n-2+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(3+\frac{k}{n}\right)+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(2+\frac{k}{n}\right)+n\ln\frac{n}{n-1}\right\}$$

이다. 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left\{2-\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(3+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(2+\frac{k}{n}\right)+\ln\frac{n}{n-1}\right\}$$

$$=2+\int_{2}^{3}\ln x\,dx+\int_{3}^{4}\ln x\,dx=2+\int_{2}^{4}\ln x\,dx=2+\left[x\ln x-x\right]_{2}^{4}=2+(4\ln4-4)-(2\ln2-2)=6\ln2$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right)^{\frac{1}{n}}=2^{6}=64$ 이다.

[미적분-1 별해]

$f'(x)=nx^{n-1}e^{1-x}-x^{n}e^{1-x}=(nx^{n-1}-x^{n})e^{1-x}$

$f''(x)=\{n(n-1)x^{n-2}-nx^{n-1}\}e^{1-x}-(nx^{n-1}-x^{n})e^{1-x}$

$\quad=x^{n-2}e^{1-x}(x^{2}-2nx+n^{2}-n)$

따라서 $f''(x)=0$을 만족시키는 두 양의 실근 α,β는 근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2n,\ \alpha\beta=n^{2}-n$이다.

이때, $f(\alpha)=\alpha^{n}e^{1-\alpha},\ f(\beta)=\beta^{n}e^{1-\beta}$ 이므로

$f(\alpha)f(\beta)=(\alpha\beta)^{n}e^{2-\alpha-\beta}=\{n(n-1)\}^{n}e^{2-2n}$ 이다.

따라서 $\left\{\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right\}^{\frac{1}{n}}=\left\{\frac{4n(4n-1)\cdots(2n+1)}{n^{n}(n-1)^{n}e^{2-2n}}\right\}^{\frac{1}{n}}$이고,

양변에 자연로그를 취하면

$$\ln\left(\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\left\{\ln\frac{1}{e^{2-2n}}+\sum_{k=1}^{2n}\ln(2n+k)-n\ln n(n-1)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln\left(\frac{2n+k}{n}\times n\right)-\ln n(n-1)+\frac{2n-2}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n}\ln\frac{2n+k}{n}+2n\ln n\right)-\ln n(n-1)+\frac{2n-2}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{2n+k}{n}+\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{3n+k}{n}\right)+2\ln n-\ln n(n-1)+\frac{2n-2}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(2+\frac{k}{n}\right)+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(3+\frac{k}{n}\right)\right\}+2\ln n-\ln n(n-1)+\frac{2n-2}{n}$$ 이다.

정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(2+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(3+\frac{k}{n}\right)+\ln\frac{n^{2}}{n(n-1)}+\frac{2n-2}{n}\right\}$$

$$=\int_{2}^{3}\ln x\,dx+\int_{3}^{4}\ln x\,dx+2=\int_{2}^{4}\ln x\,dx+2=\left[x\ln x-x\right]_{2}^{4}+2=(4\ln4-4)-(2\ln2-2)+2=6\ln2$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right)^{\frac{1}{n}}=2^{6}=64$ 이다.

[미적분-2]

$f'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^n e^{1-x} = (n-x)x^{n-1}e^{1-x}$ 이므로

$x \geq 0$ 에서 $f(x)$ 의 증감표는 아래와 같다.

x	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$

따라서, $f(x)$ 는 $x = n$ 에서 극댓값 $f(n) = n^n e^{1-n}$ 을 가진다.

이는 $x \geq 0$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값이 된다.

이제 $n^n e^{1-n} \leq n!$ 임을 보이자.

(i) $n = 1$ 일 때 $(\text{좌변}) = 1^1 e^0 = 1$, $(\text{우변}) = 1! = 1$이므로 성립한다.

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$y = \ln x$ 는 증가함수이므로 $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln x dx < \ln k$ 이다. (단, $k = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)

k 에 $2,\ 3,\ \cdots,\ n$ 을 차례로 대입하여 더하면

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln x dx < \sum_{k=2}^{n} \ln k$ 이다.

좌변을 계산하면, $\displaystyle\int_{1}^{n} \ln x dx = [x \ln x - x]_1^n = n \ln n - n + 1 = \ln n^n e^{1-n}$ 이고,

우변을 계산하면, $\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n = \ln(n!)$ 이다.

따라서, $\ln n^n e^{1-n} \leq \ln n!$ 이다. 즉, $n^n e^{1-n} \leq n!$ 이다.

(i)과 (ii)에 의해 $n^n e^{1-n} \leq n!$ 이다. $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

즉, $x^n e^{1-x} \leq n^n e^{1-n} \leq n!$ 이다.

[미적분-2 별해1]

$f'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^n e^{1-x} = (n-x)x^{n-1}e^{1-x}$ 이므로

$x \geq 0$ 에서 $f(x)$ 의 증감표는 아래와 같다.

x	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$

따라서, $f(x)$ 는 $x = n$ 에서 극댓값 $f(n) = n^n e^{1-n}$ 을 가진다.

이는 $x \geq 0$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값이 된다.

이제 $n^n e^{1-n} \leq n!$ 임을 보이자.

(i) $n = 1$ 일 때 $(\text{좌변}) = 1^1 e^0 = 1$, $(\text{우변}) = 1! = 1$이므로 성립한다.

(ii) $n = k(k \geq 1)$ 일 때, $k^k e^{1-k} \leq k!$ 이 성립한다고 가정하면,

$(k+1)^{k+1} e^{1-(k+1)} = (k+1)^{k+1} e^{1-k} e^{-1}$ 이고, 가정에서 $e^{1-k} \leq \dfrac{k!}{k^k}$ 이므로

$(k+1)^{k+1} e^{1-k} e^{-1} \leq (k+1)^{k+1} \dfrac{k!}{k^k} e^{-1} = (k+1)! \left(\dfrac{k+1}{k}\right)^k e^{-1} = (k+1)! \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k e^{-1}$ 이다.

$g(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \ (x > 0)$ 라 두고, 양변에 자연로그를 취하면,

$\ln g(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x\{\ln(x+1) - \ln x\}$ 이고 미분하면

$\frac{g'(x)}{g(x)} = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}$ 이므로 $g'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left\{\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}\right\}$ 이다.

$h(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}$ $(x>0)$ 이라 두면

$h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-2x-1}{x(x+1)^2} < 0$ 이고 $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$ 이므로 $h(x) > 0$ 이다.

따라서, $g'(x) > 0$ 이므로 $g(x)$ 는 증가함수이고 $\lim_{x\to\infty} g(x) = e$ 이므로 $g(x) < e$ 이다.

이를 이용하면, $(k+1)^{k+1}e^{1-(k+1)} \leq (k+1)!\left(1+\frac{1}{k}\right)^k e^{-1} < (k+1)!$

즉, $n=k+1$ 에서도 성립한다.

(ⅰ) 과 (ⅱ)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 $n^n e^{1-n} \leq n!$ 이다.

따라서, $x^n e^{1-x} \leq n^n e^{1-n} \leq n!$ 이다.

[미적분-2 별해2]

$f'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^n e^{1-x} = (n-x)x^{n-1}e^{1-x}$ 이므로

$x \geq 0$ 에서 $f(x)$ 의 증감표는 아래와 같다.

x	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗		↘

따라서, $f(x)$ 는 $x=n$ 에서 극댓값 $f(n) = n^n e^{1-n}$ 을 가진다.

이는 $x \geq 0$ 에 대하여 $x^n e^{1-x} \leq n^n e^{1-n}$ - (ㄱ)

이제 $n^n e^{1-n} \leq n!$ 임을 보이자.

(ⅰ) $n=1$ 일 때 (좌변) $= 1^1 e^0 = 1$, (우변) $= 1! = 1$ 이므로 성립한다.

(ⅱ) $n=k(k \geq 1)$ 일 때, $k^k e^{1-k} \leq k!$ 이 성립한다고 가정하면, 모든 $x \geq 0$ 에 대하여 (ㄱ)을 이용하면

$x^{k+1}e^{1-x} = x \cdot x^k e^{1-x} \leq x \cdot k^k e^{1-k} \leq x \cdot k!$ 가 성립한다. 이때 $x=k+1$ 을 대입하면

$(k+1)^{k+1}e^{1-(k+1)} \leq (k+1)!$ 가 성립한다. 즉, $n=k+1$ 에서도 성립한다.

(ⅰ) 과 (ⅱ)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 $n^n e^{1-n} \leq n!$ 이다.

따라서, $x^n e^{1-x} \leq n^n e^{1-n} \leq n!$ 이다.

문항카드 11	의·약학계 선택문항 유형2 - 기하

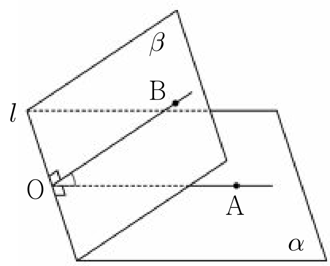
1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술(지역인재전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	의·약학계열(수학) / 선택문항 유형2(기하)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 기하
	핵심 개념 및 용어	코사인법칙, 이면각, 삼수선, 정사영
예상 소요 시간	30분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

【선택문항 유형2(기하)】 다음 제시문을 읽고 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 직선 l 위의 한 점 O를 지나고 l에 수직인 두 반직선 OA, OB를
두 반평면 α, β 위에 각각 그을 때,
$\angle\mathrm{AOB}$의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다.
이 각의 크기를 이면각의 크기라 한다.
서로 다른 두 평면이 만나서 생기는 이면각 중에서
그 크기가 크지 않은 쪽의 각을 두 평면이 이루는 각이라 한다.



(나) 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 $\mathrm{A'B'}$, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를
$\theta\,(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$라고 하면 $\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$이다.

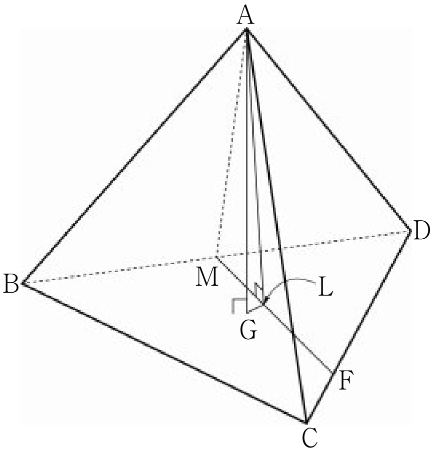
한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 선분 CD를 $1:3$으로 내분하는 점을 F, 선분 BD의 중점을 M이라 하자. 다음 물음에 답하시오.

[기하-1] [그림1]과 같이 꼭짓점 A에서 평면 BCD와 직선 MF에 내린 수선의 발을 각각 G와 L이라 하자.
삼각형 AGL의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. (7점)

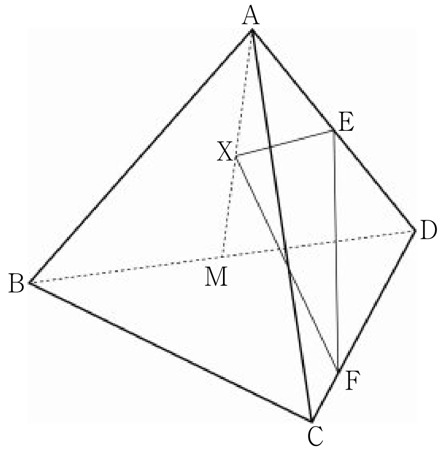
[기하-2] [그림2]와 같이 선분 AD의 중점을 E라 하고, 선분 AM 위를 움직이는 점 X에 대하여
삼각형 XEF의 둘레의 길이가 최소가 되도록 하는 점 X를 P라 하자.

(1) 선분 PE의 평면 ACD 위로의 정사영의 길이를 구하시오. (13점)

(2) 평면 PEF와 평면 ACD가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\dfrac{113}{14}\sin^2\theta$의 값을 구하시오. (10점)



[그림1]



[그림2]

3. 출제 의도

본 문항에서는 정사면체의 선분의 내분점, 꼭짓점 등을 이은 선분에 대해 삼수선의 정리를 적용하여 구하는 도형을 찾아 해결할 수 있는지, 선분 위를 움직이는 점을 통해 삼각형의 둘레의 길이가 최소가 되는 상황을 찾고 선분의 정사영의 길이 및 이면각의 크기 θ에 대해 $\sin\theta$를 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[기하-1] 삼수선의 정리 및 코사인법칙을 이용해 선분의 길이를 찾고, 정사면체의 높이를 구해 삼각형의 넓이를 구하는 문항이다.

[기하-2] (1) 선분 위를 움직이는 점 X에 대해 삼각형 XEF의 둘레의 길이가 최소가 되는 상황을 찾고, 코사인법칙, 삼각형의 성질, 정사영을 적용하여 선분 PE의 정사영의 길이를 구하는 문항이다.

(2) [기하-2] (1)의 상황에서 두 평면 PEF와 ACD가 이루는 각의 크기 θ는 삼수선의 정리를 적용하여 두 직선이 이루는 각의 크기와 같음을 파악하여 $\sin\theta$를 구하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td colspan="2">적용교육과정</td><td>교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”</td></tr>
<tr><td colspan="2">문항 및 제시문</td><td>학습내용 성취기준</td></tr>
<tr><td rowspan="2">제시문 (가)</td><td>적용교육과정</td><td>[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - ① 공간도형
[12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·
평가기준</td><td>[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - (가) 공간도형
[12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
(상) 삼수선의 정리를 활용하여 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">제시문 (나)</td><td>적용교육과정</td><td>[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - ① 공간도형
[12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·
평가기준</td><td>[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - (가) 공간도형
[12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
(상) 정사영과 관련된 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>[기하-1]</td><td>적용교육과정</td><td>[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - ① 공간도형</td></tr>
</table>

		[12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - (가) 공간도형 [12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (상) 삼수선의 정리를 활용하여 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다. [수학 I] - (3) 삼각함수 - (나) 삼각함수의 활용 [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (상) 사인법칙과 코사인법칙의 증명 과정을 설명할 수 있고, 이를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
[기하-2]	적용교육과정	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - 1 공간도형 [12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. [수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - (가) 공간도형 [12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (상) 삼수선의 정리를 활용하여 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다. [12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. (상) 정사영과 관련된 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다. [수학 I] - (3) 삼각함수 - (나) 삼각함수의 활용 [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (상) 사인법칙과 코사인법칙의 증명 과정을 설명할 수 있고, 이를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하	황선욱 외	미래엔	2020	127-136
	기하	고성은 외	좋은책 신사고	2020	114-124
	기하	이준열 외	천재교육	2022	121-128
	기하	홍성복 외	지학사	2021	128-135
	수학 I	김원경 외	비상교육	2020	99-101
	수학 I	배종숙 외	금성출판사	2022	102-104

5. 문항 해설

본 문항에서는 정사면체에서 삼수선의 정리를 통해 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지, 주어진 상황에서 삼각형의 둘레의 길이가 최소가 되는 상황을 분석하여 선분의 평면 위로의 정사영의 길이와 이면각이 이루는 각의 크기의 $\sin$ 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[기하-1]	코사인 법칙을 이용하여 $\overline{\mathrm{MF}}=\sqrt{7}$ 을 계산할 수 있다.	2
	코사인 법칙과 사인값을 이용하여 $\overline{\mathrm{GL}}=\dfrac{1}{\sqrt{21}}$ 을 계산할 수 있다.	3
	삼수선의 정리를 이용하여 정사면체의 높이와 $\triangle\mathrm{AGL}$ 의 넓이 S 를 찾고, $S^2=\dfrac{8}{63}$ 을 구할 수 있다.	2
[기하-2] (1)	$\triangle\mathrm{PEF}$ 의 둘레의 길이가 최소가 되는 상황을 설명하고, $\cos(\angle\mathrm{FMA})=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$ 을 계산할 수 있다.	4
	직각삼각형의 성질과 닮음삼각형의 성질을 통해 $\overline{\mathrm{PE}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{7}$ 을 찾을 수 있다.	4
	정사면체의 높이 성질과 정사영을 이용하여 $\overline{\mathrm{PE}}$ 의 정사영의 길이 $\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$ 을 구할 수 있다.	5
[기하-2] (2)	$\triangle\mathrm{PEF}$ 에서 코사인법칙을 이용하여 $\sin(\angle\mathrm{PEF})=\dfrac{\sqrt{339}}{2\sqrt{91}}$ 의 값을 찾을 수 있다.	3
	수선의 발을 이용하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{\sqrt{339}}{7\sqrt{7}}$ 의 값을 계산할 수 있다.	3
	삼수선의 정리와 정사영을 이용하여 $\dfrac{113}{14}\sin^2\theta=\dfrac{64}{9}$ 를 구할 수 있다.	4

7. 예시 답안

[기하-1]

$\triangle \mathrm{DMF}$ 에서 코사인법칙에 의해 $\overline{\mathrm{MF}}$ 는

$$\overline{\mathrm{MF}}^2 = 2^2 + 3^2 - 2\times 2\times 3\times \cos 60^\circ = 4+9-6=7$$

이므로 $\overline{\mathrm{MF}} = \sqrt{7}$ 이다.

$\triangle \mathrm{MCF}$ 에서 $\cos(\angle \mathrm{CMF}) = \dfrac{\overline{\mathrm{MC}}^2 + \overline{\mathrm{MF}}^2 - \overline{\mathrm{CF}}^2}{2\times \overline{\mathrm{MC}}\times \overline{\mathrm{MF}}} = \dfrac{9}{2\sqrt{21}}$ 이므로 $\sin(\angle \mathrm{CMF}) = \dfrac{1}{2\sqrt{7}}$ 이다.

한편, 점 L 은 직선 MF 에 내린 수선의 발이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{GL}} \perp \overline{\mathrm{MF}}$ 이고,

$$\overline{\mathrm{GL}} = \overline{\mathrm{MG}}\sin(\angle \mathrm{CMF}) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{21}}$$

이다.

점 G 는 점 A 에서 평면 BCD 에 내린 수선의 발이고, 선분 AG 는 정사면체의 높이이므로 $\overline{\mathrm{AG}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ 이므로

구하는 $\triangle \mathrm{AGL}$ 의 넓이는

$$S^2 = \left(\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AG}}\times\overline{\mathrm{GL}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{21}}\right)^2 = \frac{8}{63}$$

이다.

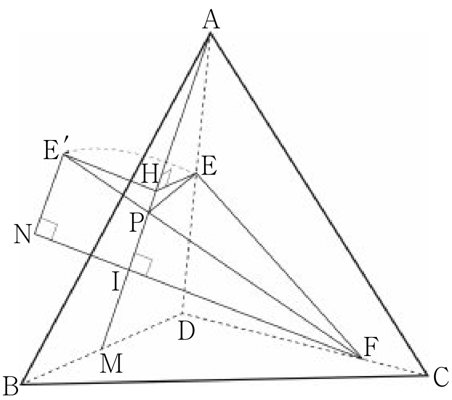
[기하-2]

(1) $\overline{\mathrm{EF}}$ 의 값이 항상 일정하므로 $\triangle \mathrm{XEF}$ 의 둘레의 길이의 최솟값은 $\overline{\mathrm{EX}} + \overline{\mathrm{XF}}$ 의 값이 최소일 때 갖는다.

그림과 같이 $\overline{\mathrm{XE}}$ 를 점 X 를 중심으로 하고, $\angle \mathrm{EXA} = \angle \mathrm{E'XA}$ 가 되도록 직선 AM 을 회전축으로 하여 점 E 가 평면 AFX 위의 점 $\mathrm{E'}$ 에 오도록 하자.

그러면 $\overline{\mathrm{EX}} + \overline{\mathrm{XF}} = \overline{\mathrm{E'X}} + \overline{\mathrm{XF}} \geq \overline{\mathrm{E'F}}$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{EX}} + \overline{\mathrm{XF}}$ 의 값이 최소가 되는 경우는 점 X 가 $\overline{\mathrm{E'F}}$ 위에 있는 경우이다.



점 E 에서 $\overline{\mathrm{AM}}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{\mathrm{EH}} = \overline{\mathrm{E'H}} = 1,\ \overline{\mathrm{AH}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AM}} = \sqrt{3}$$

이다.

한편, $\triangle \mathrm{ACF}$ 에서 코사인법칙에 의해 $\overline{\mathrm{AF}}$ 는

$$\overline{\mathrm{AF}}^2 = 4^2 + 1^2 - 2\times 4\times 1\times \cos 60^\circ = 16+1-4=13$$

이므로 $\overline{\mathrm{AF}} = \sqrt{13}$ 이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{MF}} = \sqrt{7}$ 와 $\triangle \mathrm{AMF}$ 에서

$$\cos(\angle \mathrm{FMA}) = \frac{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{13})^2}{2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{7}} = \frac{12+7-13}{4\sqrt{21}} = \frac{3}{2\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{14}$$

이다.