5 자연계열 논술고사 (오전)

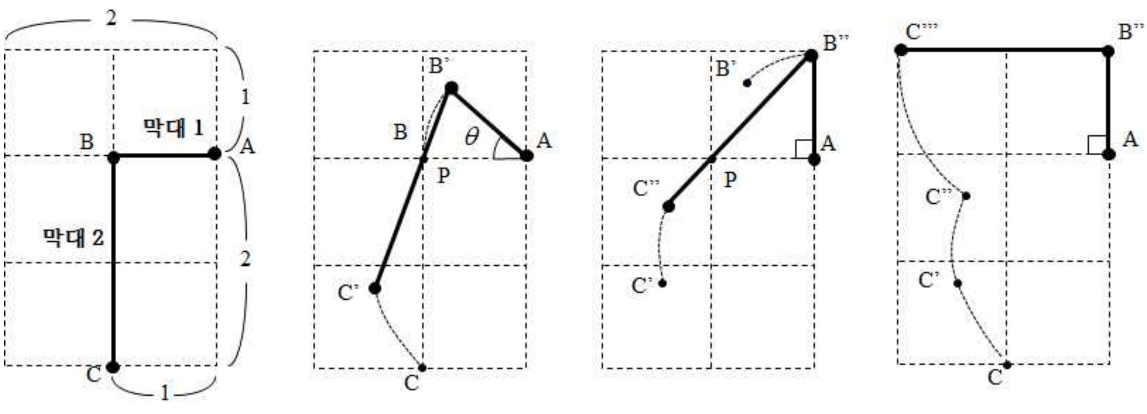
1. 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연계열 / 문제 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학 I, 미적분, 기하</td></tr>
<tr><td>핵심 개념 및 용어</td><td>삼각함수, 삼각함수의 미분, 속도, 가속도</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">40분 / 전체 120분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

문제 1 (20점)

막대 1과 막대 2가 <그림 1>과 같이 B에서 연결되어 있다. 막대 1은 A를 중심으로 시곗바늘이 도는 방향으로 회전하고, 막대 1과 막대 2 사이의 각도는 자유롭게 변할 수 있다. 막대 1이 회전할 때 막대 2는 <그림 2>와 같이 항상 P 점을 지나면서 움직인다. 이때, 막대 1과 막대 2가 연결된 점의 속력은 항상 1이다. 막대 1이 <그림 3>과 같은 위치로 가면, 그다음에는 막대 2가 <그림 4>와 같은 모양이 될 때까지 B”을 중심으로 회전한다.



<그림 1> <그림 2> <그림 3> <그림 4>

(1) <그림 2>에서 $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때 A와 C' 사이의 거리를 구하시오.

(2) <그림 2>에서 $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때 C'을 지나는 막대 2의 끝의 속력을 구하시오.

(3) <그림 2>에서 $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때 C'을 지나는 막대 2의 끝의 가속도 크기를 구하시오.

3. 출제 의도

좌표평면 위의 점의 좌표를 삼각함수와 평면벡터의 합을 이용하여 나타낼 수 있는지 평가한다. 좌표평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도를 삼각함수의 미분을 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제1 제시문	**[수학 I] - (2) 삼각함수- 1 삼각함수** [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분** [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - 3 도함수의 활용** [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. **[기하] - (2) 평면벡터 - 2 평면벡터의 성분과 내적** [12기하02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.
문항 (1)	**[수학 I] - (2) 삼각함수- 1 삼각함수** [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. **[기하] - (2) 평면벡터 - 2 평면벡터의 성분과 내적** [12기하02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.
문항 (2)	**[수학 I] - (2) 삼각함수- 1 삼각함수** [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분** [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법** [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.

	[기하] - (2) 평면벡터 - ② 평면벡터의 성분과 내적 [12기하02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.
문항 (3)	**[수학 I] - (2) 삼각함수- ① 삼각함수** [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분** [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법** [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용** [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. **[기하] - (2) 평면벡터 - ② 평면벡터의 성분과 내적** [12기하02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	홍성복 외 10인	지학사	2018	75-80
	수학 I	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2018	70-74
	수학 I	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	77-82
	미적분	김원경 외 14인	비상교육	2019	85-86, 106-108
	미적분	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2019	70-71, 112-114
	미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2019	90-93, 121-123
	기하	류희찬 외 9인	천재교과서	2019	78-88
	기하	권오남 외 14인	교학사	2019	82-89
	기하	황선욱 외 8인	미래엔	2019	86-95

5. 문항 해설

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$이면 <그림 2>에서 삼각형$\triangle$AB'P는 정삼각형이다. 이를 이용하여 점 C'의 좌표를 구하고 A와 C'사이의 거리를 구할 수 있다.

(2) <그림 2>에서 두 평면벡터 $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{B'C'}$의 성분을 삼각함수를 이용하여 나타낼 수 있다. 이로부터 점 C'의 좌표를 구하고, 삼각함수의 미분을 이용하여 속도와 속력을 구할 수 있다.

(3) 움직이는 점 C'의 가속도와 그 크기를 삼각함수의 미분을 이용하여 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	거리를 구함 (4점)	4점
(2)	막대 1과 막대 2가 연결된 점의 좌표 $(-\cos\theta, \sin\theta)$를 구함 (2점) $\theta = t$로 치환을 함 (1점) 벡터의 합을 이용하여 막대 2 끝의 좌표를 구함 (5점) 위치 벡터의 좌표를 미분하여 속도와 속력을 구함 (4점)	12점
(3)	위치 벡터의 좌표를 두 번 미분하여 가속도와 그 크기를 구함 (4점)	4점

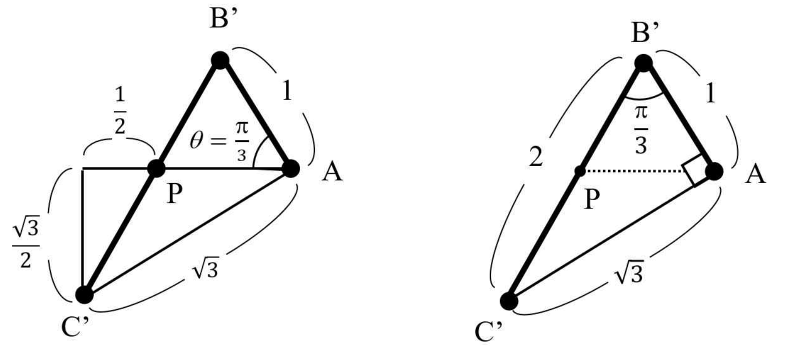
7. 예시 답안

(1) $\theta = \frac{\pi}{3}$이면 $\triangle$AB'P는 정삼각형이므로 아래 오른쪽 그림과 같이 $\triangle$AB'C'은 한 각이 $\frac{\pi}{3}$인 직각삼각형이 된다. 따라서 A와 C'사이의 거리는 $\sqrt{3}$ 이다.

(별해) $\triangle$AB'P는 한변의 길이가 1인 정삼각형이므로 아래 왼쪽 그림에서

$\overrightarrow{PB'} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{PC'} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이다. $\overrightarrow{PA} = (1,0)$ 이므로

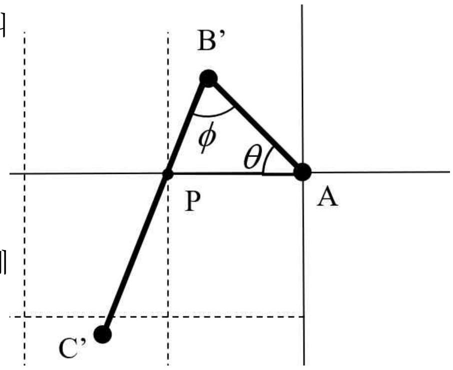
A와 C'사이의 거리는 $\sqrt{3}$ 이다.



(2) <그림 2>에서 $\overrightarrow{AB'} = (-\cos\theta, \sin\theta)$이다. 두 막대가 연결된 점 B'은 점 A를 중심으로 원운동을 하는데 속력이 1이므로 $\theta = t$ 이다.

$\triangle$AB'P는 이등변 삼각형이므로 $\phi = \frac{1}{2}(\pi - \theta)$이다. 따라서 점 B'을 지나고 선분 PA와 수직인 직선과 선분 B'C'사이의 각도는 $\phi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\theta}{2}$이고 선분 B'C'의 길이는 2이므로

$\overrightarrow{\mathrm{B'C'}} = \left(-2\sin\frac{\theta}{2}, -2\cos\frac{\theta}{2}\right)$ 이다.



A점을 원점으로 하고 직선 PA를 x축으로 하는 좌표에 대하여

막대 2의 끝 C'의 좌표를 (x,y)라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AC'}} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} = \left(-\cos\theta - 2\sin\frac{\theta}{2}, \sin\theta - 2\cos\frac{\theta}{2}\right)$ 이므로

$x = -\cos t - 2\sin\frac{t}{2}$, $y = \sin t - 2\cos\frac{t}{2}$ 이다.

$\frac{dx}{dt} = \sin t - \cos\frac{t}{2}$, $\frac{dy}{dt} = \cos t + \sin\frac{t}{2}$ 이므로

막대 2의 끝 C'의 속력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{(\sin t - \cos\frac{t}{2})^2 + (\cos t + \sin\frac{t}{2})^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2} - 2(\sin t\cos\frac{t}{2} - \cos t\sin\frac{t}{2})} \\ &= \sqrt{2 - 2\sin\frac{t}{2}}\end{aligned}$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ (즉, $t = \frac{\pi}{3}$)일 때 속력을 구하면 $\sqrt{2 - 2\sin\frac{\pi}{6}} = 1$ 이다.

(3) 막대 2의 끝 C'의 가속도는 (2)의 결과로부터

$\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) = \left(\cos t + \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}, -\sin t + \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right)$ 이고, 가속도의 크기는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} &= \sqrt{(\cos t + \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2})^2 + (\sin t - \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2})^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{4}(\sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2}) - (\sin t\cos\frac{t}{2} - \cos t\sin\frac{t}{2})} \\ &= \sqrt{\frac{5}{4} - \sin\frac{t}{2}}\end{aligned}$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ (즉, $t = \frac{\pi}{3}$)일 때 가속도의 크기를 구하면 $\sqrt{\frac{5}{4} - \sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

6 자연계열 논술고사 (오전)

1. 일반정보

유형		☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사
전형명		논술전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		자연계열 / 문제 2
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심 개념 및 용어	확률의 덧셈정리, 확률의 곱셈정리, 조건부확률, 정규분포
예상 소요 시간		40분 / 전체 120분

2. 문항 및 제시문

문제 2 (20점)

송신기 A와 수신기 B로 이루어져 있는 무선 네트워크를 가정하자. 송신기 A와 수신기 B의 거리는 r km 이다 ($r>0$). 이 무선 네트워크에서 송신기 A는 수신기 B에게 0 또는 1을 보낸다. B는 A로부터 받은 신호 X를 이용하여 A가 0을 보냈는지 또는 1을 보냈는지를 결정하는데, B가 받은 신호 X는 다음과 같은 확률분포를 따른다.

a) 0을 전송한 경우: X는 정규분포 $N(0,\, 0.5^2)$을 따른다.
b) 1을 전송한 경우: X는 정규분포 $N(r^{-2},\, 0.5^2)$을 따른다.

그리고, 수신기 B는 X를 이용하여, 송신기 A가 어떤 것을 보냈는지를 결정한다. 만약 $X>0.5r^{-2}$이라면 수신기 B는 송신기 A가 1을 보냈다고 결정하고, 그 외의 경우에는 송신기 A가 0을 보냈다고 결정한다. 송신기 A가 0을 보낼 확률과 1을 보낼 확률이 모두 0.5이다.

(1) 송신기 A가 0을 보낼 확률, 1을 보낼 확률을 각각 $P(0\text{보냄})$, $P(1\text{보냄})$이라 하자. 수신기 B에서 오류가 일어날 확률은 조건부 확률을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$P(\text{오류})=P(0\text{결정}|1\text{보냄})\times P(1\text{보냄})+\ P(1\text{결정}|0\text{보냄})\times P(0\text{보냄})$$

송신기 A와 수신기 B 사이의 거리 $r=1$ km 일 때 수신기 B에서 오류가 일어날 확률을 아래의

표준정규분포표 <표 1>을 이용하여 계산하시오.

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.25	0.10
0.50	0.19
0.75	0.27
1.00	0.34
1.25	0.39
1.50	0.43
1.75	0.46
2.00	0.48

<표 1>

(2) 수신기 B에서 오류가 일어날 확률을 거리 $r=1$ km와 거리 $r=2$ km인 두 경우에 대하여 각각 계산하시오. 그리고, $r=1$ km인 경우 오류가 일어날 확률의 제곱과 $r=2$ km인 경우 오류가 일어날 확률 각각을 소수점 셋째 자리에서 반올림하여 소수점 둘째 자리까지 구하고, 그 둘의 크기를 비교하시오.

(3) 직선 위의 A-B-C로 이루어진 릴레이 통신을 생각해 보자. A는 B에 0 또는 1을 보내고 B는 A로부터 받은 신호 X 를 이용하여 A가 무엇을 보냈는지를 결정한다. 그리고, 릴레이 B는 결정된 신호 (0 또는 1) 를 C에게 보낸다. 이때, C가 B로부터 받은 신호의 확률분포는 제시문에서 언급된 수신기 B가 송신기 A로부터 받은 신호의 확률분포와 동일하다. A와 B 사이의 거리는 1 km이고 B와 C 사이의 거리 또한 1 km라고 하자. 이때, A로부터 2 km 떨어진 수신기 C에서 오류가 일어날 확률을 표준정규분포표 <표 1>을 이용하여 소수점 둘째 자리까지 구하시오. 이를 (2)에서 구한 거리가 $r=2$ km일 때 수신기 B에서 오류가 일어날 확률과 비교하시오.

3. 출제 의도

확률의 덧셈정리, 확률의 곱셈정리, 사건의 독립, 조건부확률, 정규분포를 이해하고 이를 이용하여 확률을 구할 수 있는지 평가한다.

(1) 조건부확률의 의미를 이해하는지 평가한다. 또한, 정규분포를 따르는 확률변수를 표준화하고 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구할 수 있는지 평가한다.

(2) (1)에서 구한 확률을 두 가지 경우에 비교할 수 있는지 평가한다.

(3) 확률의 덧셈정리, 여사건의 확률, 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제2 제시문	**[확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포** [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
문항 (1)	**[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률** [12확통02-07] 확률의 곱셈 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **[확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포** [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
문항 (2)	**[확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포** [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
문항 (3)	**[확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용** [12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다. **[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률** [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **[확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포** [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	박교식 외	동아출판	2018	66-74
	확률과 통계	김원경 외	비상	2019	44-46, 53-60, 91-96,
	확률과 통계	고성은 외	좋은책 신사고	2019	50-52, 58-64, 99-101
	확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2019	50-52, 58-64, 99-102

5. 문항 해설

(1) 정규분포를 따르는 확률변수를 표준화하고 표준정규분포표를 이용하여 문제의 식에서 주어진 확률을 계산할 수 있다.

(2) (1)에서 구한 확률을 두 경우 비교한다.

(3) 수신기 C에서 오류가 일어나는 경우를 나누어 각 사건이 서로 독립, 배반인지 고려한다. 여사건의 확률, 확률의 곱셈정리, 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	오류가 일어날 (조건부) 확률을 정규분포 확률변수로 나타냄 (2점) 이 확률을 표준정규분포 확률변수 Z로 변환하여 나타냄 (2점) 표준정규분포표를 이용하여 확률값을 계산함 (2점)	6점
(2)	r = 2일 때 확률을 계산함 (3점) r = 1일 때 확률의 제곱을 구하고 이를 비교함 (1점)	4점
(3)	C에서 오류가 일어나는 경우를 설명하고, 이를 이용하여 C에서 오류가 일어날 확률을 나타냄 (4점) A-B와 B-C에서 오류가 일어날 확률을 각각 구함 (4점) C에서 오류가 일어날 확률을 구함 (2점)	10점

7. 예시 답안

(1) 정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$를 따르는 확률변수 X에 대해

확률변수 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$는 표준정규분포 $N(0,1)$를 따른다.

송신기 A가 1을 보냈을 때, 수신기 B가 받은 신호 X는 정규분포 $N(r^{-2}, 0.5^2)$을 따르므로

$$P(0\text{결정}|1\text{보냄}) = P(X \le 0.5r^{-2})$$
$$= P(0.5Z + r^{-2} \le 0.5r^{-2}) = P(Z \le -r^{-2}) = P(Z > r^{-2}) \text{ 이다.}$$

마찬가지로 A가 0을 보냈을 때, B가 받은 신호 X는 $N(0, 0.5^2)$을 따르므로

$$P(1\text{결정}|0\text{보냄}) = P(X > 0.5r^{-2}) = P(0.5Z > 0.5r^{-2}) = P(Z > r^{-2}) \text{ 이다.}$$

송신기 A가 0과 1을 보내는 확률을 각각 0.5이므로 오류가 일어날 확률은 주어진 식으로부터

$$P(\text{오류}) = P(0\text{결정}|1\text{보냄}) \times P(1\text{보냄}) + P(1\text{결정}|0\text{보냄}) \times P(0\text{보냄})$$
$$= P(Z > r^{-2}) \times 0.5 + P(Z > r^{-2}) \times 0.5 = P(Z > r^{-2}) \quad \text{이다.}$$

$r = 1$ 일 때, 이 확률은 표준정규분포표로부터 $P(Z > 1) = 0.5 - P(0 \le Z \le 1) = 0.16$ 이다.

(2) (1)에서 구한 식으로부터

r = 2km일 때 오류가 일어날 확률은 P(Z > 0.25) = 0.4 가 된다.

r = 1km일 때 확률의 제곱의 값은 0.16^2 = 0.0256 이다.

둘을 비교하면 r = 2일 때 오류를 일으킬 확률이 더 크다.

(3) 송신기-수신기 A-B와 B-C 각각에서 오류가 일어날 수 있다.

따라서 C에서 오류가 일어나는 경우는 (즉, C에서 A가 보낸 신호와 반대로 결정하는 경우는)

A-B에서 오류가 발생하고 B-C에서 무오류인 경우와

A-B에서 무오류이고 B-C에서 오류가 발생하는 경우이다.

A-B와 B-C에서 오류가 일어나는 두 사건은 서로 독립사건이며,

여사건의 확률에 의해 (무오류일 확률) = 1 - (오류일 확률) 이므로

A-B에서 오류가 일어날 확률을 p, B-C에서 오류가 일어날 확률을 q라 하면

(수신기 C에서 오류가 일어날 확률) = $p(1-q)+(1-p)q$ 이다.

송신기로부터 거리가 r인 수신기에서 오류가 일어날 확률을 (1)에서와 같이 구하면

$$\begin{aligned} P(\text{오류}) &= P(0\text{결정}|1\text{보냄})\times P(1\text{보냄})+\ P(1\text{결정}|0\text{보냄})\times P(0\text{보냄}) \\ &= P(Z>r^{-2})\times P(1\text{보냄})+\ P(Z>r^{-2})\times P(0\text{보냄}) \\ &= P(Z>r^{-2})\times\{P(1\text{보냄})+P(0\text{보냄})\} = P(Z>r^{-2}) \quad \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 A-B에서 오류가 일어날 확률 p와 B-C에서 오류가 일어날 확률 q는 모두

$P(Z>1)=0.16$ 이고. 위에서 구한 식에 의해

(수신기 C에서 오류가 일어날 확률) = $p(1-q)+(1-p)q = 2\times 0.16\times 0.84 = 0.27$ 이다.

이 확률은 (2)에서 구한 송신기-수신기의 거리가 2km일 때 수신기에서 오류가 일어날 확률 0.4 보다 작다. 즉, A-C 사이에 B가 있어서 신호를 중계할 때 오류가 발생할 확률이 더 작게 된다.

7 자연계열 논술고사 (오전)

1. 일반정보

유형		☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사
전형명		논술전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		자연계열 / 문제 3
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I
	핵심 개념 및 용어	접선, 삼각비, 삼각함수
예상 소요 시간		40분 / 전체 120분

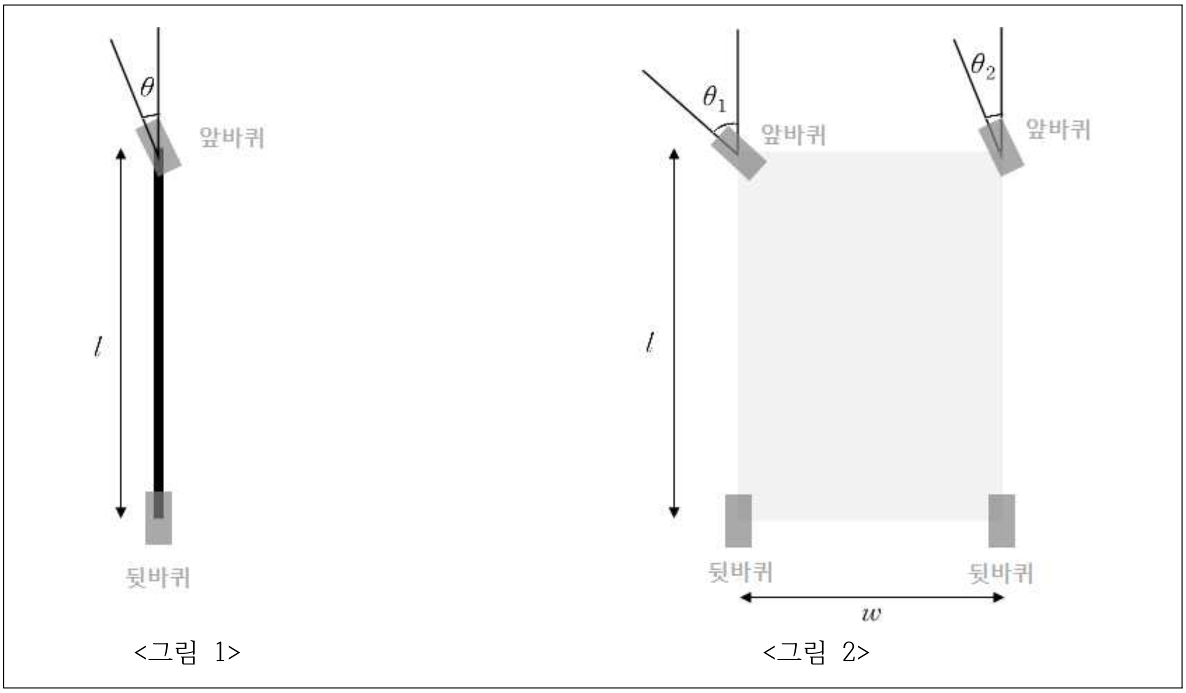
2. 문항 및 제시문

문제 3 (20점)

(가) 자전거를 <그림 1>과같이 각 바퀴의 중심이 양 끝점에 있는 길이가 l인 선분으로 볼 수 있다. 앞바퀴의 진행 방향은 선분과 일정한 각도 θ를 유지하고, 뒷바퀴의 진행 방향은 항상 선분과 같은 방향이다. 각각의 바퀴는 미끄러지지 않고 진행한다 ($\theta > 0$).
※ 앞바퀴와 뒷바퀴가 지나간 자취는 서로 다른 원 위에 있음이 알려져 있다.

(나) 자동차의 움직임을 <그림 2>와 같이 각 바퀴의 중심이 네 꼭짓점에 있는, 가로의 길이가 w이고, 세로의 길이가 l인 직사각형의 움직임으로 볼 수 있다. 두 앞바퀴의 진행 방향은 세로 방향과 일정한 각도 θ_1, θ_2를 각각 유지하고, 뒷바퀴의 진행 방향은 세로 방향과 항상 같은 방향이다 ($\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$). 각각의 바퀴는 미끄러지지 않고 진행한다.

(다) 각 바퀴의 회전 반지름은 '바퀴의 중심에서 해당 바퀴가 그리는 원의 중심까지 거리'로 정의하고, 모든 바퀴의 두께와 크기는 무시한다.



(1) <그림 1>에서 앞바퀴 회전 반지름과 뒷바퀴 회전 반지름을 각각 θ와 l로 나타내시오.

(2) <그림 2>에서 각도 θ_1과 각도 θ_2의 관계식을 l과 w를 사용하여 구하시오.

(3) (2)번과 같은 조건으로 자동차가 움직일 때, 바퀴가 도로에서 벗어나지 않고 지나갈 수 있는 도로의 최소 폭 s를 l, w, θ_2만을 사용하여 구하시오.

3. 출제 의도

삼각형의 내각과 외각, 원과 접선 등 삼각형과 원의 성질을 이해하고 삼각함수를 이용하여 도형의 길이를 구할 수 있는지 평가한다.

(1) 주어진 각도와 길이로부터 삼각함수를 이용하여 원의 반지름을 구할 수 있는지 평가한다.

(2) (1)에서 구한 식을 이용하여 두 각도 사이의 관계를 구할 수 있는지 평가한다.

(3) 문제에서 요구하는 길이가 두 원의 반지름의 차이임을 이해하고 (1), (2)의 결과를 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제3 제시문 문항 (1), (2), (3)	**[수학] - (2) 기하 - ③ 원의 방정식** [10수학 02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. **[수학 I] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	홍성복 외 10인	지학사	2018	75-80
	수학 I	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2018	70-74, 92-96
	수학 I	김원경 외 14인	비상교육	2018	71-75
	수학	황선욱 외 8인	미래엔	2018	146-148
	수학	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	142-144
	수학	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2018	139-141

5. 문항 해설

(1) 원의 중심은 접점에서 접선과 수직인 직선 상에 있으므로 중심이 일치하는 두 원의 접선과 접점을 각각 알면 두 수선의 교점이 공통의 중심이 된다. 문제에서 주어진 각도와 길이로부터 삼각함수를 이용하여 원의 반지름을 구한다.

(2) (1)의 결과를 두 경우에 적용하여 문제에서 주어진 두 각도 사이의 관계를 구한다.

(3) 문제에서 구하는 길이는 (1), (2)에서 구한 네 개의 원 중 두 원의 반지름의 차이다. 이를 (1), (2)의 결과를 이용하여 문제에서 주어진 길이와 각도로 나타낸다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	앞바퀴와 뒷바퀴의 회전 반지름을 각각 구함 (각 2점씩)	4점
(2)	뒷바퀴 2개의 회전 반지름을 각각 구함 (각 2점씩) 위의 두 회전 반지름과 자동차의 너비 w 사이의 관계를 이용하여 식을 구함 (4점)	8점
(3)	네 바퀴의 회전 반지름 중 최솟값과 최댓값을 구함 (각 2점씩) 두 반지름의 차이가 도로의 최소 폭임을 설명하고 l, w, θ_2을 이용하여 그 값을 구함 (4점)	8점

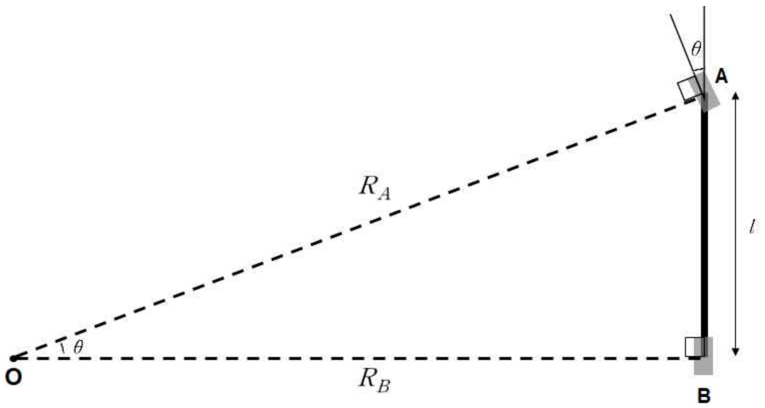
7. 예시 답안

(1) 각 바퀴의 진행 방향은 회전 반지름과 수직이다.

따라서 아래의 그림에서 앞바퀴의 진행 방향에 수직인 직선과 뒷바퀴의 진행 방향에 수직인 직선의 교점 O는 앞바퀴, 뒷바퀴가 각각 그리는 두 원의 공통의 중심이다. 그림에서 앞바퀴의 회전 반지름(빗변)은 $\overline{OA} = R_A$, 뒷바퀴의 회전 반지름(밑변)은 $\overline{OB} = R_B$ 이다.

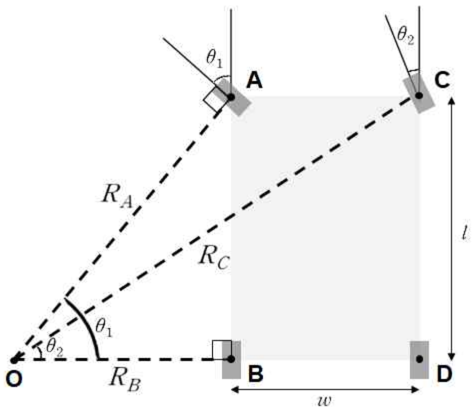
직각삼각형 AOB의 높이는 두 바퀴 사이의 거리 l이고 $\angle AOB$는 앞바퀴의 진행 방향 각도 θ와 같으므로 $l = R_A \sin(\theta) = R_B \tan(\theta)$ 이다. 즉,

$$R_A = \frac{l}{\sin(\theta)}, \qquad R_B = \frac{l}{\tan(\theta)} \quad \text{이다.}$$



(2) 아래 그림에서와 같이 O를 중심으로 회전하는 자동차의 안쪽 앞바퀴 A, 안쪽 뒷바퀴 B, 바깥쪽 앞바퀴 C, 바깥쪽 뒷바퀴 D의 회전 반지름을 각각 R_A, R_B, R_C, R_D 라 하자. 그림에서 $\theta_1 = \angle AOB$, $\theta_2 = \angle COD$ 라 하면, (1)에서와 같이

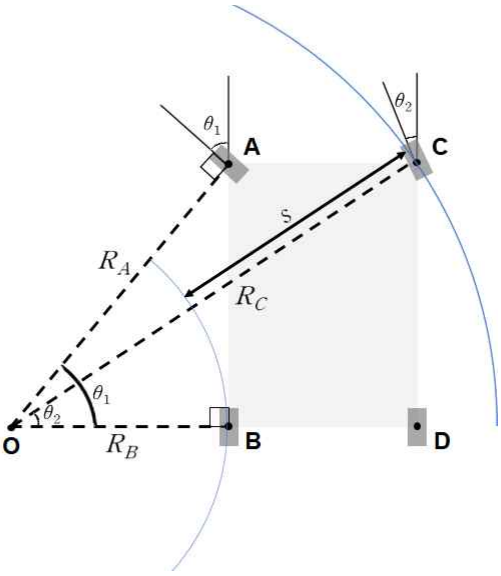
$$R_A = \frac{l}{\sin(\theta_1)},\ R_B = \frac{l}{\tan(\theta_1)},\ R_C = \frac{l}{\sin(\theta_2)},\ R_D = \frac{l}{\tan(\theta_2)} \quad \text{이다.}$$



$R_D = R_B + w$ 이므로 $R_B = \frac{l}{\tan(\theta_1)}$, $R_D = \frac{l}{\tan(\theta_2)}$을 대입하여 정리하면 아래 식을 얻는다.

$$\frac{1}{\tan(\theta_2)} = \frac{1}{\tan(\theta_1)} + \frac{w}{l}$$

(3) 다음 그림에서 표시된 s가 문제에서 묻는 길의 최소 폭이다.



이는 가장 작은 회전 반지름을 가지는 안쪽 뒷바퀴 B와 가장 큰 회전 반지름을 가지는 바깥쪽 앞바퀴 C의 회전 반지름의 차이이다. 즉, $s = R_C - R_B$ 이다. (1), (2)에서 구한 $R_B = \dfrac{l}{\tan(\theta_1)}$, $R_C = \dfrac{l}{\sin(\theta_2)}$, $\dfrac{1}{\tan(\theta_2)} = \dfrac{1}{\tan(\theta_1)} + \dfrac{w}{l}$ 를 대입하여 정리하면 아래 식을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
s = R_C - R_B &= \frac{l}{\sin(\theta_2)} - \frac{l}{\tan(\theta_1)} \\
&= \frac{l}{\sin(\theta_2)} - \frac{l}{\tan(\theta_2)} + w = \frac{l(1-\cos(\theta_2))}{\sin(\theta_2)} + w
\end{aligned}
$$

8 자연계열 논술고사 (오후)

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I
	핵심 개념 및 용어	등비수열, 지수함수와 로그함수
예상 소요 시간	40 분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

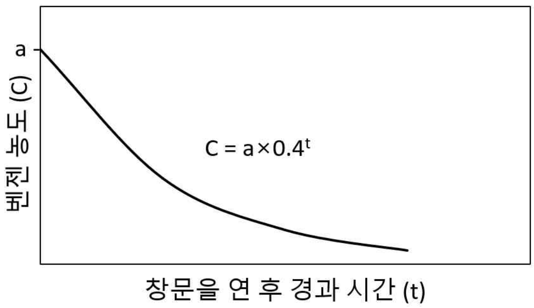
문제 1 (20점)

아파트 신축 과정에서 사용한 건축 재료에는 휘발성 성분인 벤젠을 비롯한 각종 유기화합물들이 포함되어 있다. 신축 아파트 입주민들이 이를 지속적으로 흡입하게 되면 두통이 발생하는 등 새집 증후군이라고 알려진 증상이 나타나기도 한다. 벤젠(C_6H_6)은 국제 암연구소에서 제시한 물질별 위해성 등급에 따르면 1급 발암물질로 알려져 있다. 이에 정부에서는 신축 아파트의 실내공기질 권고기준을 마련하였으며, 이 중 벤젠 농도는 30 ㎍/㎥ 이하로 설정되어 있다.

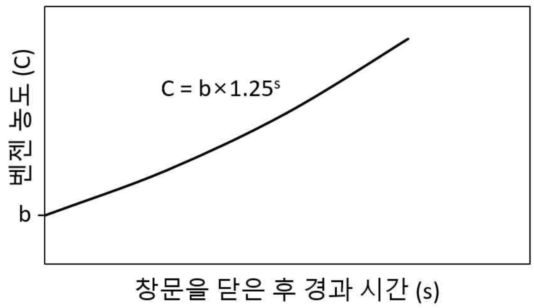
신축 아파트 A의 완공 직후 실내공기질 검사 결과, 벤젠 농도가 150 ㎍/㎥ 으로 측정되었으며, 벤젠 농도는 다음의 조건 (가), (나)에 따라 변동한다.

(가) 창문을 열어 환기하는 경우, [그림 1]과 같이 창문을 열기 직전 벤젠 농도가 a ㎍/㎥ 이면, 환기 시작 후 t시간이 경과했을 때, 벤젠 농도 $C = a \times 0.4^t$ ㎍/㎥ 이다.

(나) 창문을 닫아 놓는 경우, [그림 2]와 같이 창문을 닫기 직전 벤젠 농도가 b ㎍/㎥ 이면, 창문을 닫은 후 s시간이 경과했을 때, 벤젠 농도 $C = b \times 1.25^s$ ㎍/㎥ 이다.



[그림 1]



[그림 2]

(다) 신축 아파트 A의 벤젠 농도를 대략적으로 알아보기 위해 $\log 2$는 0.3으로 계산한다. 예를 들어, $\log 5 = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$ 이므로, $\log 5$는 $1 - 0.3 = 0.7$로 계산한다.

(1) 완공 직후부터 창문을 열어 환기하기 시작하면 몇 시간 후 벤젠 농도가 실내공기질 권고기준을 만족하게 되는지 구하시오.

(2) 매일 일정한 t시간 동안 창문을 열어 환기한 후, 나머지 $24-t$시간 동안은 창문을 닫아 놓으려 한다. 완공 직후부터 벤젠 농도가 실내공기질 권고기준을 위반하는 시간의 총합을 최소화하려면 적어도 몇 시간 이상 매일 환기해야 하는지 구하시오.

(3) 완공 직후부터 2시간 동안 창문을 열어 환기한 후, 6시간 동안 창문을 닫아놓는 방식으로 창문 열고 닫기를 주기적으로 반복할 경우, 최소 몇 시간 후 입주가 가능한지 구하시오. (단, 입주 후에도 같은 방식으로 계속 환기하며, 벤젠 농도가 실내공기질 권고기준을 항상 만족해야 한다.)

3. 출제 의도

사회적으로 이슈가 되고 있는 다양한 환경 문제들 가운데, 일반적으로 경험할 수 있는 것을 출제 문제의 배경으로 삼고자 하였다. 창문이 열려 있을 때와 닫혀 있을 때 실내공기 중 유해물질의 농도가 각각 지수함수로 주어졌다. 지수함수와 로그함수의 성질을 이해하고 적절히 활용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다. 로그의 성질을 이해하고 계산에 활용할 수 있는지 평가한다.

(1) 지수함수와 로그함수의 성질을 이해하고 활용하여 간단한 방정식을 풀 수 있는지 평가한다.

(2) 지수함수를 이용하여 문제의 조건에 맞는 적절한 부등식을 찾고 로그함수를 활용하여 이를 풀 수 있는지 평가한다.

(3) 등비수열, 지수함수를 이용하여 문제의 조건에 맞는 적절한 부등식을 찾고 로그함수를 활용하여 이를 풀 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제1 제시문	**[수학Ⅰ] - (1) 지수함수와 로그함수 - ① 지수와 로그** [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. **[수학Ⅰ] - (1) 지수함수와 로그함수 - ② 지수함수와 로그함수** [12수학Ⅰ01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.
문항 (1)	**[수학Ⅰ] - (1) 지수함수와 로그함수 - ① 지수와 로그** [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. **[수학Ⅰ] - (1) 지수함수와 로그함수 - ② 지수함수와 로그함수** [12수학Ⅰ01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
문항 (2)	**[수학Ⅰ] - (1) 지수함수와 로그함수 - ① 지수와 로그** [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. **[수학Ⅰ] - (1) 지수함수와 로그함수 - ② 지수함수와 로그함수** [12수학Ⅰ01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
문항 (3)	**[수학Ⅰ] - (1) 지수함수와 로그함수 - ① 지수와 로그** [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. **[수학Ⅰ] - (1) 지수함수와 로그함수 - ② 지수함수와 로그함수** [12수학Ⅰ01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학I	홍성복 외 10인	지학사	2018	26-32, 43-57
	수학I	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	29-34, 42-50, 53-58
	수학I	황선욱 외 8인	미래엔	2018	24-31, 41-55

5. 문항 해설

(1) 창문을 열어 환기할 때 실내 벤젠 농도는 제시문의 지수함수로 주어진다. 이 값이 기준치 이하(30 ㎍/㎥ 이하)가 되는 시간 t를 구한다.

(2) 창문을 열어 t시간 동안 환기시킨 후 $24-t$시간 동안 창문을 닫아 두었을 때 벤젠 농도가 기준치 이하가 되면 된다. 이를 주어진 지수함수를 이용하여 부등식으로 나타내고 로그함수를 활용하여 t의 범위를 구한다.

(3) 8시간 단위로 경과 후, 즉, 8시간, 16시간, 24시간, ... 경과 후의 벤젠 농도는 등비수열을 이룬다. 이 등비수열의 값이 처음으로 기준치 이하가 되는 때(32시간 경과 후)를 로그함수를

활용하여 먼저 구한다. 마지막 8시간 중(즉, 24시간 경과 후부터 32시간 까지) 벤젠 농도가 기준치 이하로 내려가는 시간을 (1)에서와 같이 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	적절한 부등식을 제시함 (3점) 농도가 권고기준을 만족하게 되는 시간을 올바르게 계산하여 구함 (1점)	4점
(2)	적절한 부등식을 제시함 (3점) log0.2, log0.4, log1.25를 모두 log2와 연관된 형태로 변환함 (4점) 구하는 환기 시간을 올바르게 계산하여 얻음 (1점)	8점
(3)	적절한 부등식을 제시함 (3점) 적어도 네 번 창문 열고 닫기를 반복해야 됨을 구하고 24시간에서 32시간 사이에 구하는 답이 존재함을 설명함 (4점) 문항에서 요구하는 답을 올바르게 계산하여 구함 (1점)	8점

7. 예시 답안

(1) 창문을 열어두었을 때 t시간 후 벤젠 농도(C)가 기준치 이하(30 ㎍/㎥ 이하)로 내려갔다면 $C = 150(0.4)^t \le 30$ 이다. 로그함수를 이용하여 이 부등식을 풀면

$(0.4)^t \le 0.2$

$t \times \log 0.4 \le \log 0.2$

$t \times \log \frac{4}{10} \le \log \frac{2}{10}$

$t \times (\log 4 - \log 10) \le \log 2 - \log 10$

$t \times (2\log 2 - \log 10) \le \log 2 - \log 10$

($\log 2 = 0.3$으로 주어졌으므로 $\log 4$를 $2\log 2$로 변환하여 계산)

$t \times (2 \times 0.3 - 1) \le 0.3 - 1$

$t \times (-0.4) \le -0.7$ (※ $\log 0.4 = -0.4$, $\log 0.2 = -0.7$)

$t \ge 1.75$ 또는 $\frac{7}{4}$ 이다.

즉, 1.75시간 (= $\frac{7}{4}$시간 = 1시간 45분) 후 권고기준을 만족하게 된다.

(2) 문제에서와 같이 24시간마다 일정하게 환기를 반복할 때 벤젠 농도가 30 이상인 시간의 총합을 최소화하려면 처음 24시간 경과했을 때 벤젠 농도가 30 이하이어야 한다. 즉, 처음 창문을 열어 t시간 동안 환기시킨 후 창문을 닫고 $24-t$시간 지났을 때 30 ㎍/㎥ 이하가 되면 된다. 이를 부등식으로 나타내면

$$150(0.4)^t(1.25)^{24-t} \le 30$$

이고 이를 로그함수를 이용하여 풀면

$(0.4)^t(1.25)^{24-t} \le 0.2$

$t\times\log 0.4+(24-t)\times\log 1.25 \le \log 0.2$

(※ $\log 1.25=\log\frac{25}{100}=\log 25-\log 100=3\log 5-2\log 10=3\times 0.7-2=0.1$)

$t\times(-0.4)+(24-t)\times(0.1) \le -0.7$

$t\times(-0.4-0.1) \le -0.7-24\times 0.1$

$t\times(-0.5) \le -3.1$

$t \ge 6.2$ 또는 $\frac{31}{5}$ 이다.

즉, 매일 적어도 6.2시간 (= $\frac{31}{5}$시간 = 6시간 12분) 동안 환기해야 한다.

(3) 문제에서와 같이 8시간마다 일정하게 환기를 반복할 때 8시간마다 벤젠 농도는 직전 농도에 $0.4^2\times 1.25^6$을 곱한 값이 된다. 8시간씩 n번 지난 후 벤젠 농도가 30 ㎍/㎥ 이하가 되었다면

$$150(0.4)^{2n}(1.25)^{6n} \le 30$$

이다. 이를 (1), (2)에서와 같이 로그함수를 이용하여 풀면 $n \ge 3.5$이다. n은 정수이므로 $n=4$이다. 즉, $8\times 3=24$시간 후($n=3$) 벤젠 농도는 30보다 크지만 $8\times 4=32$시간 후($n=4$) 벤젠 농도는 30보다 작게 된다.

그런데, 24시간과 32시간 사이에 벤젠 농도가 30 이하로 내려가는 때가 있고 그 이후에는 항상 벤젠 농도가 30 이하이다. 이 시점을 $24+t$라 하면 (단, $0<t<8$)

$$150(0.4)^6(1.25)^{18}(0.4)^t \le 30$$

이고, 이를 로그함수를 이용하여 풀면

$(0.4)^6(1.25)^{18}(0.4)^t \le 0.2$

$6\times\log 0.4+18\times\log 1.25+t\times\log 0.4 \le \log 0.2$

$6\times(-0.4)+18\times(0.1)+t\times(-0.4) \le -0.7$

$t\times(-0.4) \le -0.1$

$t \ge 0.25$ 이다.

즉, $24+0.25=24.25$시간 (= $\frac{97}{4}$시간 = 24시간 15분) 후 입주가 가능하다.

9 자연계열 논술고사 (오후)

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 미적분, 수학II
	핵심 개념 및 용어	이차방정식과 이차함수, 접선의 기울기, 부피
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

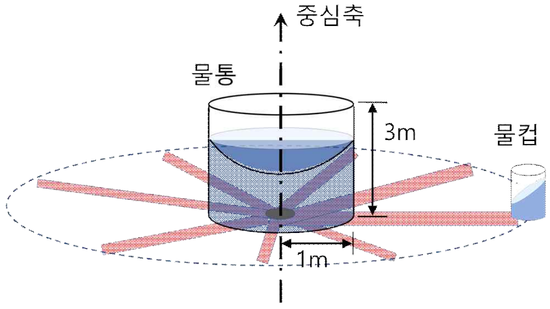
문제 2 (20점)

새로 개장한 홍익대공원에 [그림 1]과 같은 문어 모양의 놀이 기구가 있다. 밑면의 반지름이 $1\,\mathrm{m}$이고 높이가 $3\,\mathrm{m}$인 직원기둥 모양의 물통이 놀이 기구의 가운데 위치하고, 문어 다리 모양의 기구체가 물통에 연결되어 있다. 기구체의 끝에 홍익이가 물컵을 들고 타고 있다. 놀이 기구를 작동시키면, 전체 놀이 기구는 물통의 중심을 지나고 지표면과 수직인 중심축에 대하여 시간당 일정한 회전수로 회전한다. 놀이 기구가 정지해 있을 때는 물통과 물컵의 수면은 수평이지만, 작동하는 동안에는 회전의 영향으로 [그림 1]과 같이 물통 안의 물은 중심축 부근이 움푹 파인 모양이 된다. 물통과 물컵 안의 수면의 높이는 중심축으로부터의 거리가 멀어질수록 증가한다.

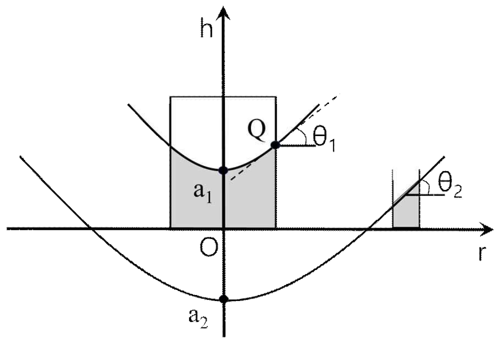
(가) [그림 2]는 놀이 기구의 중심축을 포함하고 물컵의 중심을 지나는 평면으로 자른 단면이다. 물통 안의 수면의 한 점과 중심축과의 거리를 r이라 할 때, 밑면으로부터 그 점까지의 높이 h는 적절한 상수 A, a_1에 대하여, 포물선의 식 $h = Ar^2 + a_1$을 따른다. 흥미롭게도, 물컵 안의 수면의 한 점과 중심축과의 거리를 r이라 할 때, 밑면으로부터 그 점까지의 높이 h도 물통의 경우와 동일한 상수 A와 적절한 상수 a_2에 대하여, $h = Ar^2 + a_2$를 따른다.

(나) [그림 3a]에서 놀이 기구의 중심축과 물통 안 수면이 만나는 점을 점 P라 하자. 점

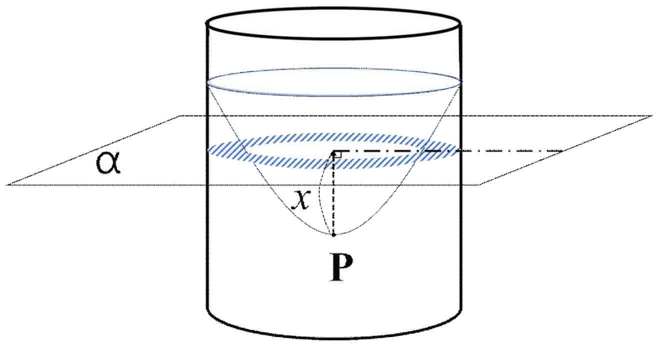
P로부터 높이가 x인 점을 지나고 지표면과 평행인 평면 α를 생각하자. $0 < x < A$ 일 때, 물통 안의 물이 차 있는 부분을 평면 α로 자른 단면은 [그림 3b]와 같다. 이때 단면의 경계를 이루는 두 원은 중심이 같다.



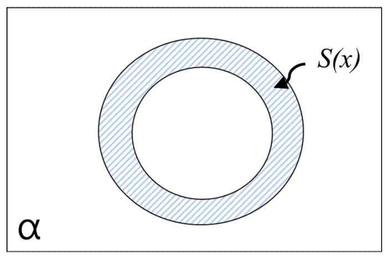
[그림 1]



[그림 2]



[그림 3a]



[그림 3b]

(1) [그림 3b]의 단면의 넓이를 $S(x)\ \mathrm{m}^2$라고 할 때, $S(x)$를 A와 x의 식으로 표현하시오. 이를 이용하여 물통 안의 물의 부피를 A와 a_1의 식으로 나타내시오.

(2) 놀이 기구가 정지하고 있을 때 물통 안의 수면의 높이가 $2\,\mathrm{m}$이고, 놀이 기구가 회전할 때 물통 안의 수면의 최저 높이가 $2-\dfrac{\sqrt{3}}{12}\ \mathrm{m}$ 일 때, A의 값을 구하시오.

(3) 놀이 기구가 회전할 때, 물통의 가장자리에서 물통의 수면과 지표면이 이루는 각의 크기는 [그림 2]의 점 Q에서 포물선의 접선과 r축이 이루는 각의 크기 θ_1으로 나타난다. 문항 (2)와 동일한 가정하에서 각의 크기 θ_1을 구하시오.

(4) 놀이 기구가 정지하고 있을 때 물통에 물을 가득 채우고 놀이 기구를 작동시키면, 놀이 기구가 회전하며 물통의 물이 움푹 파인 모양이 되며, 파인 만큼의 물이 물통에서 넘치게 된다. 이때 수면의 높이는 적절한 상수 a_3에 대하여 $h = Ar^2 + a_3$ 을 따른다고 할 때, 넘치게 되는 물의 부피를 구하시오. 단, 상수 A의 값은 문항 (2)에서 구한 값과 같다.

(5) 홍익이가 들고 있는 물컵의 중심에서 수면이 지표면과 이루는 각의 크기 θ_2가 $60°$를 넘지 않도록 하기 위한 문어 다리의 길이(회전축으로부터 물컵의 중심까지의 거리)의 최댓값을 구하시오.

3. 출제 의도

실생활에서 경험하는 간단한 자연 현상들을 수학적으로 이해하고 해결할 수 있는지 평가한다. 이차방정식과 이차함수의 성질을 이해하고 미분과 적분을 활용하여 접선의 기울기와 입체도형의 부피를 구할 수 있는지 평가한다.

(1) 정적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는지 평가한다.

(2) 주어진 조건으로부터 이차함수의 식을 구할 수 있는지 평가한다.

(3) 도함수를 활용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는지 평가한다.

(4) 정적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는지 평가한다.

(5) 도함수를 활용하여 접선의 기울기에 대한 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

(가) 교육과정 및 관련 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제2 제시문	**[수학] - (1) 문자와 식 - 5 이차방정식과 이차함수** [10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. **[미적분] - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용** [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
문항 (1)	**[미적분] - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용** [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
문항 (2)	**[미적분] - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용** [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다
문항 (3)	**[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

문항 (4)	**[미적분] - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용** [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다
문항 (5)	**[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	이준열 외 7인	천재교육	2019	168-175, 107-128
	미적분	고성은 외 5인	좋은책신사고	2019	155-159, 109-111
	미적분	김원경 외 14인	비상교육	2019	147-152, 96-105
	수학	황선욱 외 8인	미래엔	2018	70-79
	수학	고성은 외 6인	좋은책신사고	2018	60-69
	수학	김원경 외 14인	비상교육	2018	59-69
	수학II	황선욱 외 8인	미래엔	2018	73-102
	수학II	홍성복 외 10인	지학사	2018	74-98
	수학II	김원경 외 14인	비상교육	2018	71-92

5. 문항 해설

(1) 수면의 높이는 중심축으로부터 거리의 이차함수로 주어졌다. 이를 이용하여 단면의 넓이를 구하고 정적분을 활용하여 부피를 구한다.

(2) 주어진 조건과 (1)의 결과로부터 이차함수의 식을 구한다.

(3) (2)에서 구한 이차함수를 미분하여 접선의 기울기를 구한다.

(4) 부피를 구하고자 하는 입체도형의 단면은 모두 원이다. 주어진 조건으로부터 단면의 넓이를 구하고 정적분을 활용하여 부피를 구한다.

(5) 이차함수를 미분하여 접선의 기울기를 구한다. 기울기가 주어진 값을 넘지 않는 중심축으로부터 거리를 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	단면의 넓이 $S(x)$를 주어진 식을 이용하여 구함 (2점) 물의 부피를 적분을 이용하여 구함 (2점)	4점
(2)	물의 부피는 놀이기구가 정지했을 때와 회전할 때 같음을 이용함 (2점) 위의 관계를 이용하여 A를 구함 (2점)	4점
(3)	식을 이용해 수면의 높이를 r에 대해 미분한 도함수를 구함 (2점) 도함수 값을 이용하여 $\tan\theta_1$ 값과 각의 크기 θ_1을 구함 (2점)	4점
(4)	물이 넘친 빈공간의 부피를 구함 (4점)	4점
(5)	앞의 결과가 물컵의 수면에도 적용이 가능함을 이해하고, 거리의 최댓값을 구함 (4점)	4점

7. 예시 답안

(1) [그림 3a]에서 밑면에서 평면 α까지의 높이를 h라 하면 $h=x+a_1$이다. [그림 3b]의 안쪽 원의 반지름을 r이라 하면 $h=Ar^2+a_1$이므로, $x=Ar^2$ 즉, $r=\sqrt{\frac{x}{A}}$이다. 바깥쪽 원의 반지름은 1이므로 $S(x)=\pi-\pi r^2=\pi-\frac{\pi x}{A}$ 이다. 또한 $0\le r\le 1$ 이므로 $0\le x\le A$ 이다.

구하는 물의 부피는 점 P 아래쪽 부분의 부피와 점 P 위쪽 부분의 부피의 합이므로

$\pi a_1+\int_0^A S(x)\,dx=\pi a_1+\pi A-\frac{\pi A^2}{2A}=\pi a_1+\frac{\pi A}{2}$ 이다.

(2) 놀이기구가 정지했을 때 물의 부피는 2π인데 회전할 때도 물통 안의 물의 부피는 이와 동일하므로 (1)의 결과에서 $\pi a_1+\frac{\pi A}{2}=2\pi$ 이다.

$a_1=2-\frac{\sqrt{3}}{12}$ 로부터 $A=4-2a_1=4-2\left(2-\frac{\sqrt{3}}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 이다.

(3) 수면의 높이는 $h=Ar^2+a_1$ 이므로 $\frac{dh}{dr}=2Ar$ 이고 점 Q에서 (즉, $r=1$일 때) 접선의 기울기는 $2A=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다. $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 $\theta_1=\frac{\pi}{6}$ = 30° 이다.

(4) 물이 넘친 부분의 부피는 회전으로 인해 움푹 파이게 되는 부분의 부피와 같다. 이 부분의 부피를 (1)에서와 같이 구한다. 움푹 파인 부분의 바닥에서부터 높이가 x인 지면과 평행한 평면으로 자른 단면은 [그림 3b]의 안쪽원과 같이 반지름 $\sqrt{\dfrac{x}{A}}$ 인 원이다. 단면적은 $\dfrac{\pi x}{A}$이고 $0 \le x \le A$이므로 구하는 부피는 $\displaystyle\int_0^A \frac{\pi x}{A} dx = \frac{\pi A}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$ 이다.

(5) 물컵 안의 수면의 높이는 $h = Ar^2 + a_2$ 이므로 (3)에서와 같이 놀이기구 중심축과 거리 r인 점에서 기울기는 $2Ar = \dfrac{r}{\sqrt{3}}$ 이다. 물컵의 중심에서 수면이 지표면과 이루는 각이 60° 이하라면 $\dfrac{r}{\sqrt{3}} \le \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 이므로 구하는 최댓값은 $r = 3$ (m) 이다.

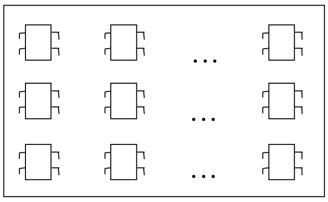
10 자연계열 논술고사 (오후)

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 확률과 통계
	핵심 개념 및 용어	순열과 조합, 사건의 독립, 이항분포, 여사건, 확률의 덧셈정리
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

문제 3 (20점)



위의 그림과 같이 3개의 소자로 이루어진 세로줄이 n개 있어서, 모두 $3n$개의 소자로 이루어진 장치를 생각하자. (단, $n \geq 3$)

전원을 켜면 장치는 초기 상태에 들어가고, 이때 각각의 소자에는 독립적으로 1/2의 확률로 오류가 생긴다. 오류가 없는 소자의 상태를 ○, 오류가 있는 상태를 ×로 표시하자. 예를 들어, $n=4$인 경우, 다음과 같은 초기 상태들이 있을 수 있다.

(a)	(b)
○ × ○ ×	○ × ○ ○
× × ○ ○	× × × ○
○ ○ × ○	× ○ × ×

이후 아래와 같이 보호장치가 작동하여 일부 소자의 오류를 수정하는데, 이 장치의 정상작동 여부는 다음의 순서로 결정된다.

(가) [세로줄 수정] 각 세로줄에서 생긴 오류가 1개 이하이면 보호장치가 해당 세로줄의 오류를 수정하고, 오류가 2개 이상이면 오류는 모두 그대로 남는다.

(나) [가로줄 수정] 세로줄 수정 후 남은 오류들 중, 각 가로줄에서 오류가 2개 이하이면 보호장치가 해당 가로줄의 오류를 모두 수정하고, 3개 이상이면 오류는 모두 그대로 남는다.

(다) 위의 (가), (나)에서 수정되지 않고 남아있는 오류가 있으면 장치는 오작동한다.

예를 들어, 수정된 오류를 $\otimes$로 나타낼 때, 초기 상태가 (a)라면, [세로줄 수정]에 의해 (a′)의 상태가 되고, [가로줄 수정]에 의해 (a″)의 상태가 되어 장치는 정상작동한다. 초기 상태 (b)는 [세로줄 수정]에 의해 (b′)의 상태가 되고, [가로줄 수정]에 의해 (b″)의 상태가 되어 장치가 오작동한다.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\begin{matrix}\bigcirc & \times & \bigcirc & \times \\ \times & \times & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \times & \bigcirc\end{matrix} & \Rightarrow & \begin{matrix}\bigcirc & \times & \bigcirc & \otimes \\ \otimes & \times & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \otimes & \bigcirc\end{matrix} & \Rightarrow & \begin{matrix}\bigcirc & \otimes & \bigcirc & \otimes \\ \otimes & \otimes & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \otimes & \bigcirc\end{matrix} & \quad & \begin{matrix}\bigcirc & \times & \bigcirc & \bigcirc \\ \times & \times & \times & \bigcirc \\ \times & \bigcirc & \times & \times\end{matrix} & \Rightarrow & \begin{matrix}\bigcirc & \times & \bigcirc & \bigcirc \\ \times & \times & \times & \bigcirc \\ \times & \bigcirc & \times & \otimes\end{matrix} & \Rightarrow & \begin{matrix}\bigcirc & \otimes & \bigcirc & \bigcirc \\ \times & \times & \times & \bigcirc \\ \otimes & \bigcirc & \otimes & \otimes\end{matrix} \\
\text{(a)} & & \text{(a′)} & & \text{(a″)} & & \text{(b)} & & \text{(b′)} & & \text{(b″)}
\end{array}$$

장치의 정상작동 여부는 초기 상태에 의해 결정되고, 초기 상태는 2^{3n}개가 있다. 이 장치의 전원을 켰을 때, [세로줄 수정] 직후, n개의 세로줄들 중에서 오류가 남아있는 세로줄이 3개 이상이 되는 초기 상태들의 집합을 사건 A라 하자. [세로줄 수정]과 [가로줄 수정]을 거쳐 장치의 오작동을 일으키는 초기 상태들의 집합을 사건 B라 하자.

(1) 장치의 전원을 켰을 때, [세로줄 수정] 직후, 첫 번째 세로줄에 오류가 남아있을 확률을 구하시오.

(2) $n \geq 3$인 경우, 확률 $\mathrm{P}(A)$를 n에 대한 식으로 나타내시오.

(3) $n=3$인 경우, 아래에 주어진 초기 상태 (c)는 A에 포함되고 B에는 포함되지 않는다. 반면, (d)는 A와 B에 모두 포함된다. 사건 $C=A-B$라 할 때, 확률 $\mathrm{P}(C)$를 구하시오.

$$\begin{array}{ccc}
\begin{matrix}\bigcirc & \times & \times \\ \times & \bigcirc & \times \\ \times & \times & \bigcirc\end{matrix} & \qquad & \begin{matrix}\times & \times & \times \\ \times & \bigcirc & \times \\ \times & \times & \bigcirc\end{matrix} \\
\text{(c)} & & \text{(d)}
\end{array}$$

(4) $n=3$인 경우, 확률 $\mathrm{P}(B)$를 구하시오.

(5) $n=4$인 경우, 확률 $\mathrm{P}(B)$를 구하시오.

3. 출제 의도

제시문에서 주어진 확률적 상황을 파악하여 경우의 수를 구하고 확률을 계산할 수 있는지 평가한다.

(1) 사건의 독립을 이해하는지 평가한다.

(2) 이항정리 또는 이항분포를 이해하고 이용할 수 있는지 평가한다.

(3) 사건, 여사건 등의 확률적 개념을 잘 이해하고 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 계산할 수 있는지 평가한다.

(4), (5) 순열과 조합을 이용한 경우의 수를 계산할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제3 제시문	**[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ① 순열과 조합** [12확통01-01] 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
문항 (1)	**[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률** [12확통02-07] 확률의 곱셈 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 (2)	**[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ② 이항정리** [12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다. **[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률** [12확통02-07] 확률의 곱셈 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 (3)	**[수학] - (5) 확률과 통계 - ② 순열과 조합** [10수학05-02] 순열의 의미를 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있다. **[확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용** [12확통02-02] 확률의 기본 성질을 이해한다.
문항 (4)	**[확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용** [12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.

문항 (5)	**[수학] - (5) 확률과 통계 - ② 순열과 조합** [10수학05-02] 순열의 의미를 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있다. **[확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용** [12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다. **[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률** [12확통02-07] 확률의 곱셈 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외 14인	비상교육	2018	243-260
	수학	고성은 외 6인	좋은책신사고	2018	249-265
	수학	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	258-274
	확률과 통계	권오남 외 14인	교학사	2019	12-76, 96-101
	확률과 통계	김원경 외 14인	비상교육	2019	11-68, 83-87
	확률과 통계	배종숙 외 6인	금성출판사	2019	13-84, 107-113

5. 문항 해설

(1) 3개의 소자 중 각각의 소자에 오류가 생길 사건은 서로 독립이며 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 이항분포 $\mathrm{B}(3, \frac{1}{2})$를 이용하여 구할 수 있다. 3개의 소자 중 2개 이상에 오류가 생길 확률이므로 ${}_3C_2\frac{1}{2^3}+{}_3C_3\frac{1}{2^3}=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$ 이다.

(2) n개의 세로줄 중 각각의 세로줄에 [세로줄 수정]직후 오류가 남아있을 사건은 서로 독립이며 확률은 동일하므로 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 이용하여 구할 수 있다. $p=\frac{1}{2}$는 (1)에서 구한 확률이다.

(3) $3\times3=9$개의 소자의 오류 여부를 O, X로 그림 (c), (d)와 같이 나타낸다면 $2^9=516$개의 모든 경우가 있다. 이 중 사건 C에 해당하는 경우는 (c)와 같이 각각의 세로줄, 가로줄에 O가 하나씩만 있는 경우임을 알 수 있다. 이러한 경우는 순열을 이용하면 $3!=6$가지이다.

(4) $C=A-B$ 이므로 $B\cap C=\varnothing$, 즉 B와 C는 서로 배반사건이다. 또한 $B\subset A$ 이므로 $A=B\cup C$ 이다. 따라서 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$ 이다.

(5) (3)에서와 같이 $n=4$일 때 사건 C에 해당하는 경우의 수를 구하여 $\mathrm{P}(C)$를 구한다. (2), (4)의 결과를 이용하여 $\mathrm{P}(B)$를 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점기준	배점
(1)	사건의 확률을 구함 (2점)	2점
(2)	각 세로줄에 오류가 남아 있을 사건이 서로 독립임을 설명함 (1점) 이항정리 또는 이항분포를 이용하여 사건의 확률을 구함 (3점)	4점
(3)	사건 C에 포함되는 초기 상태를 정확히 설명함 (4점) 경우의 수를 계산하여 사건의 확률을 구함 (2점)	6점
(4)	두 확률의 차이를 이용하여 원하는 사건의 확률을 구함 (2점)	2점
(5)	$n=4$인 경우, 사건 C에 포함되는 초기 상태를 정확히 설명함 (3점) $n=4$인 경우, 경우의 수를 계산하여 사건 C의 확률을 구함 (2점) $n=4$인 경우, 올바른 $\mathrm{P}(A)$의 값을 이용하여 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(C)$인 사실을 이용하여 계산함 (1점)	6점

7. 예시 답안

(1) 3개의 소자 중 각각의 소자에 오류가 생길 사건은 서로 독립이며 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 오류가 생긴 소자의 개수는 이항분포 $\mathrm{B}(3,\frac{1}{2})$를 따른다. [세로줄 수정]직후 첫 번째 세로줄에 오류가 남아있는 경우는 처음에 그 세로줄의 3개의 소자중 오류가 생긴 소자가 2개 또는 3개인 경우이므로 확률은 ${}_3C_2\times\frac{1}{2^3}+{}_3C_3\times\frac{1}{2^3}=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$ 이다.

(2) 각 세로줄에 대해 [세로줄 수정] 직후 오류가 남아있을 사건은 서로 독립이고, (1)의 결과에 의해 각각의 확률은 1/2이다. 따라서, [세로줄 수정] 직후 n개의 세로줄 중 k개의 세로줄에 오류가 남아있을 확률은 이항분포에 의해 ${}_nC_k\times\frac{1}{2^n}$이다. 구하는 확률은 n개 중 2개 이하의 세로줄에 오류가 남아있는 사건의 여사건의 확률이므로

$$\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{2^n}\left({}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2\right)=1-\frac{1}{2^n}\left(1+n+\frac{n(n-1)}{2}\right)=1-\frac{1}{2^{n+1}}\left(n^2+n+2\right)$$ 이다.

(3) $n=3$일 때, $3\times3=9$개의 소자의 오류 여부를 O, X로 그림 (c), (d)와 같이 나타낸다면 $2^9=516$가지 경우가 있다. 이들 중 각각의 세로줄에 두 개 이상의 오류가 있는 초기상태들의 집합이 A이다. A에 속하는 경우 중 만약 (d)와 같이 한 세로줄에 세 개의 오류가 있으면 세 개의 오류를 포함한 가로줄이 있게 되어서 장치는 오작동한다. 그러므로, 초기상태 $I\in C$이면, I는 각 세로줄에 오직 두 개씩의 오류를 가진다.

그런데, 두 개씩의 오류를 가진 세로줄은 $\begin{matrix} \bigcirc & \times & \times \\ \times & \bigcirc & \times \\ \times, & \times, & \bigcirc \end{matrix}$ 중 하나이다. 만약, $\begin{matrix} \bigcirc & \times & \bigcirc \\ \times & \times & \times \\ \times & \bigcirc & \times \end{matrix}$와 같이, 같은 모양의 세로줄이 있으면, 역시 세 개의 오류를 포함한 가로줄이 있게 되어서 장치는 오작동한다.

그러므로, $C=A-B$에 포함되는 초기상태는 (c)와 같이 $\begin{matrix} \bigcirc & \times & \times \\ \times & \bigcirc & \times \\ \times, & \times, & \bigcirc \end{matrix}$를 (중복없이) 나열한 것들이다. 따라서 $3!=6$가지가 있다. 그러므로 $\mathrm{P}(C)=6/2^9=3/256$이다.

(4) $C=A-B$ 이므로 $B\cap C=\varnothing$, 즉 B와 C는 서로 배반사건이다. 또한 $B\subset A$ 이므로 $A=B\cup C$ 이다. 따라서 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$ 이다. $n=3$인 경우, (2)의 결과에 의해 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{8}$ 이므로 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(C)=\frac{1}{8}-\frac{3}{256}=\frac{29}{256}$ 이다.

(5) (3)에서와 같이 $n=4$일 때 A, B, C에 속하는 경우를 구한다. 먼저 $4\times 3=12$개의 소자의 오류 여부를 O, X로 아래 그림 (e), (f)와 같이 나타낸다면 2^{12}가지 경우가 있다. 이 중 A에 속하는 경우는 $\begin{matrix} \times & \bigcirc & \times & \times \\ \times & \times & \bigcirc & \times \\ \times, & \times, & \times, & \bigcirc \end{matrix}$와 같은 세로줄이 (중복을 허용하여) 세 개 이상 있는 경우이다.

이때, 네 세로줄 중에 하나가 $\begin{matrix} \times \\ \times \\ \times \end{matrix}$ 이거나, $\begin{matrix} \bigcirc & \times & \times \\ \times & \bigcirc & \times \\ \times, & \times, & \bigcirc \end{matrix}$ 중 같은 세로줄이 2개 이상 있으면 (3)에서와 같이 [세로줄 수정]직후 세 개 이상의 오류를 포함한 (즉, X가 세 개 이상인) 가로줄이 있어서 오작동한다. (즉, B에 속하는 경우이다.)

따라서, C에 속하는 경우는 네 개의 세로줄 중 $\begin{matrix} \bigcirc & \times & \times \\ \times & \bigcirc & \times \\ \times, & \times, & \bigcirc \end{matrix}$이 하나씩 있고 나머지 한 세로줄은 오류가 한 개 이하인 즉, 아래그림의 (g) 중 하나인 경우이다. 이러한 경우의 수는 4개의 세로줄 중 3개를 선택하여 $\begin{matrix} \bigcirc & \times & \times \\ \times & \bigcirc & \times \\ \times, & \times, & \bigcirc \end{matrix}$을 나열하고 나머지 한줄에 (g)의 세로줄 4가지 중 하나를 선택하는 경우의 수이므로 ${}_4C_3\times 3!\times 4$ 이다. 따라서 $\mathrm{P}(C)=\frac{{}_4C_3\times 3!\times 4}{2^{12}}=\frac{3}{128}$ 이다.

(2)에 의해 $n=4$일 때 $\mathrm{P}(A)=\frac{5}{16}$ 이고, (4)에서와 같이 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$ 이므로,

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(C)=\frac{5}{16}-\frac{3}{128}=\frac{37}{128} \text{ 이다.}$$

$$\begin{matrix} \bigcirc & \times & \bigcirc & \times \\ \times & \times & \times & \bigcirc \\ \times & \bigcirc & \times & \times \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \bigcirc & \times & \times & \bigcirc \\ \times & \times & \times & \bigcirc \\ \times & \bigcirc & \times & \times \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \bigcirc & \times & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \times & \bigcirc \\ \bigcirc, & \bigcirc, & \bigcirc, & \times \end{matrix}$$

(e) (f) (g)