2) 2022학년도 논술우수자_자연계열 (오전/오후)

① 논술우수자 자연계(오전)

문항카드 2

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후
			■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학	
	핵심개념 및 용어	명제, 귀류법, 부등식	
예상 소요 시간	30분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 어떤 명제가 참임을 증명할 때, 주어진 명제의 결론을 부정하여 가정 또는 이미 알려진 수학적 사실 등에 모순됨을 보여 원래의 명제가 참임을 증명하는 방법을 귀류법이라고 한다.

(나) 양수 a, b에 대하여, 다음이 성립한다.

$a \le b \iff \dfrac{1}{a} \ge \dfrac{1}{b}$

(※) 어떤 자연수들의 집합 S는 다음 조건을 만족한다.

S의 임의의 두 원소 $x, y\,(x<y)$에 대하여

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y} \ge \frac{1}{30}$$

이다.

(1-1) 집합 S에는 30보다 크거나 같은 원소가 최대 몇 개까지 있을 수 있겠는가? (7점)

(1-2) 집합 $\{i \mid i\text{는 } 1 \le i \le k \text{ 인 자연수}\}$를 포함하는 집합 S가 존재하도록 하는 자연수 k의 최댓값을 구하시오. (8점)

(1-3) 집합 S가 가질 수 있는 원소의 개수의 최댓값을 구하시오. (15점)

3. 출제 의도

문제에서 주어진 명제를 잘 이해하고 그것을 논리적으로 해결할 수 있는지를 평가하는 문제이다. 또한 부등식 조작 능력과 그 결과로 얻어진 새로운 부등식을 문제에 맞게 잘 해석하고 활용할 수 있는지를 평가한다. 이 문제를 해결하기 위해서는 복잡한 계산을 할 필요는 없고 귀류법을 활용할 수 있는 기본적인 논리력과 간단한 수식 조작을 할 수 있는 능력만 있으면 된다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	□ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정" ■ 수학 □ 수학Ⅰ □ 수학Ⅱ □ 미적분		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학)
	(가)	성취기준 1	[10수학03-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.
	(나)	성취기준 2	[10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학	권오남 등	교학사	2017년	197	(가)	
수학	홍성복 등	지학사	2017년	205	(가)	
수학	권오남 등	교학사	2017년	199	(나)	재구성
수학	홍성복 등	지학사	2017년	206	(나)	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 - 해당사항 없음

5. 문항 해설

(1-1) 귀류법을 써서 S에 30 이상인 원소가 2개 있다면 모순임을 보일 수 있다. 간단한 절대부등식 조작을 통하여 증명한다. 비교적 작은 자연수 x, y가 주어진 부등식 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}<\frac{1}{30}$ $(x>y)$을 만족하고, 큰 두 자연수 x, y는 이 부등식을 만족하지 않는다는 것은 관찰하는 것은 쉽다.

(1-2) $1 \le i \le 6$일 때, $\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i} \ge \frac{1}{30}$이 됨을 보임으로써 1~6까지 S에 속함을 보이면 된다.

(1-3) 이미 구한 a_i로부터 부등식 $a_{i+1} \ge \frac{30\,a_i}{30-a_i}$를 만족하는 최소의 a_{i+1}을 귀납적으로 구해 나가면 된다. 1부터 6까지는 (1-2)에서 구했으므로 a_7부터 a_{10}을 차례로 구하면 된다. 이렇게 구한 10개의 자연수가 최대임을 보일 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(1-1)	귀류법으로써 S에 30 이상의 원소가 2개 이상 있다면 모순임을 보인다.	7점
(1-2)	1부터 6까지 S에 속함을 보인다.	8점
(1-3)	a_i로부터 부등식 $a_{i+1} \ge \frac{30\,a_i}{30-a_i}$를 만족하는 최소의 a_{i+1}을 구하고자 한다.	4점
	a_7부터 a_{10}을 모두 구한다.	8점
	10이 최대임을 보인다.	3점

7. 예시 답안

(1-1) S에 $n > m \ge 30$인 원소가 있다고 가정하자. 그러면 $\frac{1}{m} \le \frac{1}{30}$이므로

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{n} \le \frac{1}{30}-\frac{1}{n} < \frac{1}{30}$$

이고 모순이다. 따라서 2개 이상 있을 수는 없다. $S=\{1,30\}$은 문제의 조건을 만족하므로 집합 S에는 30보다 큰 원소가 최대 1개까지 있을 수 있다.

(1-2) $2 \le i \le 6$에 대하여, $\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}=\frac{1}{i(i-1)} \ge \frac{1}{30}$이므로 6까지 가능하다. 따라서, $k=6$이다.

(1-3) $a_i = i,\ 1 \le i \le 6$이라 하자.

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y} \ge \frac{1}{30} \Leftrightarrow y \ge \frac{30\,x}{30-x}$이므로 a_7을 $a_7 \ge \frac{30\,a_6}{30-a_6}$을 만족하는 가장 작은 자연수로 잡는다.

$a_7 \ge \frac{30 \cdot 6}{30-6}=\frac{180}{24}>7$ 이므로 $a_7=8$. 마찬가지로,

$a_8 \ge \frac{30 \cdot 8}{30-8}=\frac{240}{22}>10$ 이므로 $a_8=11$

이와 같이 하여 $a_9 = 18,\ a_{10} = 45$라 하면 $S = \{a_1,\ a_2, \cdots, a_{10}\}$는 주어진 조건을 만족한다. (1-1)에 의해 30 이상의 수는 한 개뿐이어야 하므로 S의 원소의 개수의 최댓값은 10개이다.

이렇게 구한 $a_1 < a_2 < \ \cdots \ < a_{10}$이 최대 개수인 이유는 다음과 같다. 만일 또 다른 $b_1 < b_2 < \ \cdots \ < b_m \ (m \geq 11)$이 주어진 조건을 만족한다면, $a_1 < a_2 < \ \cdots \ < a_{10}$은 조건 $a_i \geq \dfrac{30\,a_{i-1}}{30 - a_{i-1}}$을 만족하는 가장 작은 자연수들을 차례로 고른 것이기 때문에 모든 $1 \leq i \leq 10$에 대하여 $a_i \leq b_i$이다. 그러므로 $b_{10} \geq a_{10} > 30$이 되는데 이는 (1-1)에 모순이 된다.

[별해] 집합 S의 원소 중 6 이상 30 미만인 것을 $c_1 < c_2 < \ \cdots \ < c_k$라고 하면

$$\frac{k-1}{30} \leq \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right) + \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_3}\right) + \ \cdots \ + \left(\frac{1}{c_{k-1}} - \frac{1}{c_k}\right) = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_k} < \frac{1}{6} - \frac{1}{30} = \frac{4}{30}$$

그러므로 $k \leq 4$이어야 한다. (1-1)에 의해 S의 원소의 개수는 $5+4+1=10$ 이하이다. $S = \{1,2,3,4,5,6,8,11,18,45\}$는 문제의 조건을 만족하므로 최댓값은 10이다.

8. 대입전형 선행학습 자체영향평가위원회 의견

항목	의견 요약
고교 교육과정 수준 준수여부	· 1학년 수학 과목의 명제와 부등식에 관한 개념을 바탕으로 새로운 부등식을 문제 조건에 맞게 해석하고 귀류법을 활용하는 점 등은 현 고등학교 수학과 교육과정을 충실히 반영함
문항 유형의 적절성	· 개연적 추론을 사용해 논제가 가진 규칙성이나 원리를 추측해 보는 과정을 통해 대수적 명제에 대한 이해 및 분석능력을 평가할 수 있는 문항이므로 논리적 사고력과 종합적 사고력을 평가하는데 적절한 문항임 · 제시문과 논제의 용어 및 내용이 현 고등학교 교과서 범위 내임
문항 난이도의 적절성	· 간단한 부등식을 만족하는 자연수와 관련된 집합의 원소에 관한 문항들로 구성되어 있어 현 고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 수험생이라면 충분히 해결 가능함

문항카드 3

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후
			□ 1번 ■ 2번(의예 1번) □ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분	
	핵심개념 및 용어	수열의 극한, 정적분의 성질, 부분적분법	
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n \le c_n$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$이다.

(나) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(i) $m \le f(x) \le M$이고 $g(x) \ge 0$이면

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

이고

(ii) $m \le f(x) \le M$이고 $g(x) \le 0$이면

$$M\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le m\int_a^b g(x)dx$$

이다.

(다) 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

이다.

(※) 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx, \quad b_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos x}{x^2}dx$$

로 주어진다.

(2-1) $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$의 값을 구하시오. (10점)

(2-2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 b_n$의 값을 구하시오. (10점)

(2-3) $\lim\limits_{n\to\infty} \{n(n+1)a_n - f(n)\} = 0$이 되는 다항식 $f(x)$를 구하시오. (15점)

3. 출제 의도

이 문제는 수열의 성질을 이용하여 수열의 극한을 구할 수 있는지와 정적분의 의미와 부분적분법을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td>□ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정“
□ 수학 □ 수학 I □ 수학 II ■ 미적분</td></tr>
<tr><td>관련
성취기준</td><td><table>
<tr><th>관련 제시문</th><th>성취기준</th><th>과목명: (미적분)</th></tr>
<tr><td>(가)</td><td>성취기준 1</td><td>[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>(나)</td><td>성취기준 2</td><td>[12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.</td></tr>
<tr><td>(다)</td><td>성취기준 3</td><td>[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분	류희찬 외	천재교과서	2020	18-22	(가)	
미적분	이준열 외	천재교육	2020	17-20	(가)	
미적분	류희찬 외	천재교과서	2020	177-180	(나)	재구성
미적분	이준열 외	천재교육	2020	164-166	(나)	재구성
미적분	류희찬 외	천재교과서	2020	172-175	(다)	
미적분	이준열 외	천재교육	2020	155-158	(다)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 - 해당사항 없음

5. 문항 해설

(2-1), (2-2) 정적분으로 주어진 수열의 범위를 구하고, 이를 이용하여 수열의 극한을 구할 수 있다.

(2-3) 부분적분법을 이용하여 두 수열 사이의 관계를 구하고, (2-1), (2-2)의 결과를 이용하여 조건을 만족하는 다항식을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(2-1)	$\dfrac{2}{(n+1)\pi} \le a_n \le \dfrac{2}{n\pi}$임을 보임.	5점
	$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \dfrac{2}{\pi}$임을 보임.	5점
(2-2)	$0 < b_{2k} < \dfrac{1}{(2k)^2\pi^2} - \dfrac{1}{(2k+1)^2\pi^2}$임을 보임.	5점
	$0 < \lvert b_n \rvert < \dfrac{1}{n^2\pi^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2\pi^2}$임을 보임.	3점
	$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 b_n = 0$임을 보임.	2점
(2-3)	$a_n = \dfrac{1}{(n+1)\pi} + \dfrac{1}{n\pi} + (-1)^{n+1} b_n$임을 보임.	10점
	$\lim\limits_{n\to\infty} \left\{ n(n+1)a_n - \dfrac{2n+1}{\pi} \right\} = 0$임을 보임.	5점

7. 예시 답안

(2-1) $n\pi \le x \le (n+1)\pi$일 때, $\dfrac{1}{(n+1)\pi} \le \dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{n\pi}$이고 $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \lvert \sin x \rvert dx = 2$이므로 제시문 (나)에 의해서

$\dfrac{2}{(n+1)\pi} \le a_n \le \dfrac{2}{n\pi}$이다. 그러므로 $\dfrac{2n}{(n+1)\pi} \le na_n \le \dfrac{2}{\pi}$이고 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{(n+1)\pi} = \dfrac{2}{\pi}$이므로 제시문 (가)에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \dfrac{2}{\pi}$이다.

(2-2) 자연수 k에 대하여 $2k\pi \le x \le \left(2k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$일 때 $\dfrac{1}{\left(2k\pi + \dfrac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \le \dfrac{1}{x^2} \le \dfrac{1}{4k^2\pi^2}$이고

$\displaystyle\int_{2k\pi}^{(2k+1/2)\pi} \cos x dx = 1$이므로 제시문 (나)에 의해서

$$\frac{1}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2} \le \int_{2k\pi}^{(2k+1/2)\pi} \frac{\cos x}{x^2}dx \le \frac{1}{4k^2\pi^2} \qquad \text{(A)}$$

이다. 마찬가지로 $\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi \le x \le (2k+1)\pi$일 때 $\frac{1}{(2k+1)^2\pi^2} \le \frac{1}{x^2} \le \frac{1}{\left(2k\pi+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}$이고

$\int_{(2k+1/2)\pi}^{(2k+1)\pi} \cos x dx = -1$이므로 제시문 (나)에 의해서

$$-\frac{1}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2} \le \int_{(2k+1/2)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\cos x}{x^2}dx \le -\frac{1}{(2k+1)^2\pi^2} \qquad \text{(B)}$$

이다. $\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\cos x}{x^2}dx = \int_{2k\pi}^{(2k+1/2)\pi} \frac{\cos x}{x^2}dx + \int_{(2k+1/2)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\cos x}{x^2}dx$이므로 (A), (B)에 의하여

$0 < b_{2k} < \frac{1}{(2k)^2\pi^2} - \frac{1}{(2k+1)^2\pi^2}$이다. 마찬가지로

$\frac{1}{(2k+2)^2\pi^2} - \frac{1}{(2k+1)^2\pi^2} < b_{2k+1} < 0$이므로 $0 < |b_n| < \frac{1}{n^2\pi^2} - \frac{1}{(n+1)^2\pi^2}$이다.

$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n^2\pi^2} - \frac{1}{(n+1)^2\pi^2}\right) = 0$이므로 제시문 (가)에 의해서 $\lim_{n\to\infty} n^2 b_n = 0$이다.

(2-3)
$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}dx \\ &= (-1)^n \left\{ \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos x}{x^2}dx \right\} \\ &= (-1)^n \left\{ \frac{(-1)^n}{(n+1)\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi} - b_n \right\} \\ &= \frac{1}{(n+1)\pi} + \frac{1}{n\pi} + (-1)^{n+1} b_n \end{aligned}$$

이므로 (2-2)의 결과에 의해 $\lim_{n\to\infty}\left\{n(n+1)a_n - \frac{2n+1}{\pi}\right\} = 0$이다. 따라서 $f(x) = \frac{2x+1}{\pi}$이다.

8. 대입전형 선행학습 자체영향평가위원회 의견

항목	의견 요약
고교 교육과정 수준 준수여부	· 현 고등학교 수학 교육과정에 따른 미적분 과목의 내용 중에서 가장 핵심이 되는 내용을 통합적 문항을 활용해 독창적으로 잘 반영함
문항 유형의 적절성	· 풀이 과정에서 문제 이해 및 분석능력을 평가할 수 있을 뿐만 아니라 논리적 사고력도 평가할 수 있다고 사료됨 · 논제를 읽는 과정에서 금방 제시문의 의도를 파악할 수 있을 것으로 판단됨

항목	의견 요약
문항 난이도의 적절성	· 문제 자체가 간단명료하고, 이에 따른 제시문이어서 가독성 또한 높음 · 현 고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 수험생이라면 충분히 이해하고 해결할 수 있는 문제라고 판단됨

문항카드 4

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후
			□ 1번 □ 2번 ■ 3번(의예 2번)
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ	
	핵심개념 및 용어	함수의 그래프, 평행이동, 접선의 방정식	
예상 소요 시간	50분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것은 함수 $y=f(x-p)+q$의 그래프와 같다.

(나) 최고차항의 계수가 1인 임의의 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 어떤 상수 a에 대하여 함수 $y=x^3-ax$의 그래프를 평행이동한 것과 같다.

(3-1) 함수 $y=x^3-6x^2+9x+1$의 그래프가 함수 $y=x^3-ax$의 그래프를 평행이동한 것 일때, 상수 a의 값을 구하시오. (5점)

(3-2) 두 직선 $y=-x$와 $y=-x+4$가 곡선 $y=x^3-mx+n$에 접할 때, 상수 m, n의 값을 구하시오. (10점)

(3-3) 네 직선 $y=-x$, $y=-x+4$, $y=2x$, $y=2x+k$ (k는 양수)를 각각 l_1, l_2, l_3, l_4라고 하자. 다음 조건을 만족하는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4)의 집합을 S라고 하자.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 존재하여, 모든 $i=1,2,3,4$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 l_i의 교점의 개수가 a_i이다.

(a) $(2,2,2,2)\in S$가 되도록 하는 k의 값을 구하시오. (10점)

(b) $(2,2,2,2)\in S$ 일 때 S의 원소의 개수를 구하시오. (10점)

3. 출제 의도

좌표평면에서 평행이동을 활용해서 문제를 해결할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 미적분에서 기본적인 개념인 접선의 방정식을 구하고 이와 관련한 계산을 할 수 있는지, 삼차함수의 그래프의 개형을 알고 있는지 그리고 이러한 개념들을 조합해서 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	☐ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"** ■ 수학 ☐ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ ☐ 미적분		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학)
	(가), (나)	성취기준 1	[10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다.
	(가), (나)	성취기준 2	[10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.
	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학Ⅱ)
		성취기준 1	[12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
		성취기준 2	[12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학I	이준열 외	천재교육	2020	146-153	(가), (나)	재구성
수학I	배종숙 외	금성출판사	2020	163-160	(가), (나)	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 - 해당사항 없음

5. 문항 해설

(3-1) 함수의 그래프를 평행이동한 곡선의 식을 계산할 수 있는지 확인하는 간단한 계산문제이다.

(3-2) 삼차함수의 그래프의 개형을 이해하고 있다면 미분을 이용한 접선의 방정식을 계산하여 답을 구할 수 있는 문제이다.

(3-3) 이 문제를 해결하기 위해서는 수학명제로 구성된 문제의 조건을 읽고 이해할 수 있어야 한다. 이 문제는 최고차항의 계수가 1인 함수에 대한 일반식을 이용한 계산만으로는 해결하기가 어렵고, 조건을 이해한 후 (3-2)에서 계산한 결과와 좌표평면에서 함수의 그래프의 평행이동을 개념적으로 활용하여 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	제시문 (가)의 식을 이용해서 a의 값을 구하면	5점
(3-2)	삼차함수의 그래프의 개형을 이용해서 조건에 맞도록 방정식을 세팅하면	5점
	이로부터 m, n의 값을 구하면	5점
(3-3) (a)	문제의 조건을 파악하고 상황에 맞는 식을 설정하면	5점
	이로부터 k의 값을 구하면	5점
(3-3) (b)	평행이동을 이용하여 여러 가지 순서쌍을 만들어내는 방법을 만들어낼 수 있으면	6점
	S의 원소의 개수를 정확히 세면	4점

7. 예시 답안

(3-1) $x^3-6x^2+9x+1=(x-2)^3-3(x-2)+3$이므로 제시문 (가)에 의하여 $y=x^3-6x^2+9x+1$의 그래프는 $y=x^3-3x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다. 따라서 $a=3$이다.

[별해] $(x-p)^3-a(x-p)+q=x^3-3px^2+(3p^2-a)x+(-p^3+ap+q)=x^3-6x^2+9x+1$인 p,q가 존재한다.

이때 $-3p=-6$에서 $p=2$이고 $3p^2-a=12-a=9$이므로 $a=3$이다.

(3-2) $f(x)=x^3-mx+n$라고 하면 $f'(x)=3x^2-m$이다. 따라서 $y=f(x)$의 기울기가 -1인 접선의 접점의 x좌표는, $\alpha=\sqrt{\dfrac{m-1}{3}}$라고 하면, $\pm\alpha$이다. 삼차함수의 그래프의 개형으로부터 접선 $y=-x$의 접점의 x좌표가 접선 $y=-x+4$의 x좌표보다 크므로, 두 접선의 접점의 좌표는 각각 $(\alpha,-\alpha), (-\alpha, \alpha+4)$이다.

따라서 $f(\alpha)=\alpha^3-(3\alpha^2+1)\alpha+n=-\alpha$, $f(-\alpha)=-\alpha^3+(3\alpha^2+1)\alpha+n=\alpha+4$이고 두 식으로부터 $n=2$, $\alpha=1$을 얻는다. 이때 $m=3\alpha^2+1=4$이다.

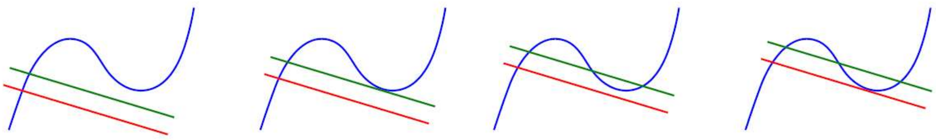
[별해] $f(x)=(x^3-mx+n)-(-x)=x^3-(m-1)x+n$은 $f'(x)=3x^2-(m-1)$의 두 실근을 $\pm\alpha$ $\left(\alpha=\sqrt{\dfrac{m-1}{3}}\right)$이라고 하면 $x=-\alpha$에서 극댓값 4를 $x=\alpha$에서 극솟값 0을 갖는다. $m=3\alpha^2+1$이므로 $f(\alpha)=-2\alpha^3+n=0, f(-\alpha)=2\alpha^3+n=4$이다. 따라서 $n=2, \alpha=1$이고 $m=4$이다.

(3-3)

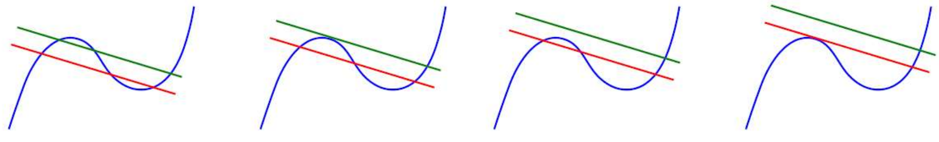
(a) (3-2)로부터 l_1, l_2를 접선으로 갖는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수의 그래프는 곡선 $y=x^3-4x$을 적당히 평행이동한 것이다. $(2,2,2,2)\in S$이려면 이 삼차함수의 그래프를 $y=-x$방향으로 적당히 평행이동하였을 때 두 직선 l_3, l_4가 접선이어야 한다.

$y=x^3-4x$이면 $y'=3x^2-4$이므로 곡선 $y=x^3-4x$의 기울기가 2인 접선의 접점의 x좌표는 방정식 $3x^2-4=2$의 두 근 $\pm\sqrt{2}$이다. 따라서 $y=x^3-4x$의 기울기가 2인 두 접선의 방정식은 각각 $y=2(x-\sqrt{2})-2\sqrt{2}=2x-4\sqrt{2}$과 $y=2x+4\sqrt{2}$이다. 이 두 접선의 y절편의 차이는 $8\sqrt{2}$이다. 삼차함수 $y=x^3-4x$을 적당히 평행이동해서 이 두 접선이 각각 l_3, l_4가 되어도 y절편의 차이는 변하지 않으므로 $k=8\sqrt{2}$이어야 한다.

(b) $f(x)=x^3-ax$ $(a>4)$라고 하면, 곡선 $y=f(x)$의 기울기가 -1인 두 접선의 y절편의 차이는 (3-2)의 계산과정으로부터 $(-\alpha+f(-\alpha))-(\alpha+f(\alpha))=-2(\alpha+\alpha^3-(3\alpha^2+1)\alpha)=4\alpha^3$ (단, $\alpha=\sqrt{\dfrac{a-1}{3}}$)이므로 4보다 크고, 마찬가지로 기울기가 2인 두 접선의 y절편의 차이는 $8\sqrt{2}$보다 크다. 따라서 두 순서쌍 (a_1,a_2)와 (a_3,a_4)가 모두 $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$에 속하면 곡선 $y=f(x)$를 적당히 평행이동해서 얻어지는 곡선과 직선 l_i $(i=1,2,3,4)$의 교점의 개수가 a_i이다. 따라서 이 경우 $(a_1,a_2,a_3,a_4)\in S$이다.

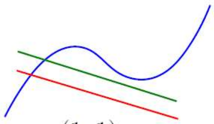


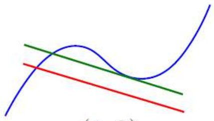
$(1,1)$ $(1,2)$ $(1,3)$ $(2,3)$

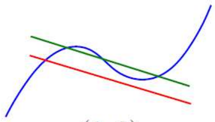


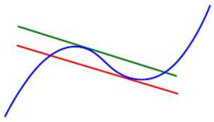
$(3,3)$ $(3,2)$ $(3,1)$ $(2,1)$

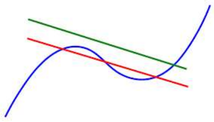
한편 두 순서쌍 (a_1,a_2)와 (a_3,a_4) 중 하나가 $(2,2)$이면 문제의 조건을 만족하는 $y=f(x)$의 그래프는 (a)에 의하여 $y=x^3-4x$의 그래프를 적당히 평행이동한 것이다. 따라서 이 경우 다른 순서쌍이 집합 $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$의 원소일 때에만 $(a_1,a_2,a_3,a_4)\in S$이다.

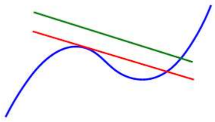

$(1,1)$


$(1,2)$


$(1,3)$


$(2,2)$


$(3,1)$


$(2,1)$

따라서 S의 원소의 개수는 $8^2+6\times2-1=75$이다.
(참고로 $f(x)=x^3-ax$ $(a<4)$를 평행이동하더라도 (a_1,a_2) 또는 (a_3,a_4)가 $(2,2)$가 되는 일은 없으므로 새로운 S의 원소는 얻어지지 않는다.)

8. 대입전형 선행학습 자체영향평가위원회 의견

항목	의견 요약
고교 교육과정 수준 준수여부	· 수학 과목에서 배운 평행이동과 함수 그래프, 수학Ⅱ에서 다루는 접선의 방정식과 함수 그래프의 개형에 관한 기본적인 개념을 바탕으로 평행 이동한 도형의 방정식과 미분을 활용한 접선의 방정식을 구하는 문항이며 현 고등학교 수학과 교육과정을 충실히 반영함
문항 유형의 적절성	· 논제 3-3은 기본 개념에 대한 정확한 이해 없이 단순 암기로 얻은 지식으로 해결할 수 없고, 3-2의 결과를 비롯해 수학적 사실이 도출되는 과정의 추론을 포함하고 있어 논리적 사고력과 종합적 사고력을 평가하는데 적절함 · 제시문과 논제의 용어 및 내용이 현 고등학교 교과서 범위 내임
문항 난이도의 적절성	· 제시문이 평행이동과 관련한 익숙한 내용이고 논제 또한 삼차함수의 접선의 방정식과 교점의 개수에 관한 내용으로 수험생들에게는 평소 학교 수업의 미적분 관련 문제에서 자주 다루어 본 친숙한 유형임

문항카드 5

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후 □ 1번 □ 2번 ■ 의예 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학	
	핵심개념 및 용어	집합, 귀류법, 수열	
예상 소요 시간	30분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 3] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 어떤 명제가 참임을 증명할 때, 주어진 명제의 결론을 부정하여 가정 또는 이미 알려진 수학적 사실 등에 모순됨을 보여 원래의 명제가 참임을 증명하는 방법을 귀류법이라고 한다.

(나) $x+y \neq z+w$이면 실수 $a, b\,(a \neq 0)$에 대하여

$$(ax+b)+(ay+b) \neq (az+b)+(aw+b)$$

이다.

(※) 자연수의 집합 S가 다음 조건을 만족할 때, S를 <u>흩어진 집합</u>이라 하자.

서로 다른 네 자연수 x, y, z, w에 대하여 $x+y=z+w$이면 집합 $\{x, y, z, w\}$는 S에 포함되지 않는다.

예를 들어, $\{1\}, \{1, 2\}, \{4, 5, 7, 9\}$는 흩어진 집합이다. n이 자연수일 때, 집합 $\{1, 2, \cdots, n\}$에 포함된 흩어진 집합 S에 대하여 $n(S)$의 최댓값을 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_5=4$이다.

(3-1) $a_k=4$인 자연수 k를 모두 구하시오. (5점)

(3-2) $a_{k-1}<a_k$인 어떤 자연수 $k\ (k \geq 2)$에 대하여, 집합 S는 $n(S)=a_k$이고 $S \subset \{1, 2, \cdots, k\}$인 흩어진 집합이다. S의 원소 중 가장 큰 것을 M, 가장 작은 것을 m이라 할 때, $M-m$으로 가능한 값을 구하시오. (7점)

(3-3) 수열 $\{p_n\}$을 다음과 같이 귀납적으로 정의한다.

$$p_1 = 1,\ p_2 = 2,\ p_{n+2} = p_{n+1} + p_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(a) 자연수 k에 대하여 $\{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$는 흩어진 집합임을 증명하시오. (10점)

(b) 자연수 k $(k \geq 3)$에 대하여, 다음 두 조건을 만족하는 흩어진 집합 S를 하나 찾으시오. (8점)

(i) $n(S) = k$
(ii) $S \subset \{i \mid i = 1$ 또는 $p_{k-2} < i \leq p_k$인 자연수$\}$

3. 출제 의도

주어진 질문의 상황을 잘 이해하고 논리적으로 사고할 수 있는지를 평가한다. 수학 명제를 간단한 상황에 적용시켜 이해할 수 있고 이를 일반적인 상황으로 확장하는 능력과 귀류법을 이용하여 문제를 해결하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"**		
	■ 수학 □ 수학Ⅰ □ 수학Ⅱ □ 미적분 □ 확률과 통계		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학)
	(가)	성취기준 1	[10수학03-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.
	(나)	성취기준 2	[10수학03-05] 명제의 역과 대우를 이해한다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학	황선욱 외	미래N	2020	201	(가)	
수학	박교식 외	동아출판	2020	196	(가)	
수학	배종숙 외	금성출판사	2020	205	(가)	
수학	고성은 외	신사고	2020	191	(나)	재구성
수학	박교식 외	동아출판	2020	191	(나)	재구성
수학	김원경 외	비상교육	2020	185	(나)	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 - 해당사항 없음

5. 문항 해설

(3-1) k가 작은 경우 $\{1,2,\cdots,k\}$에 포함되는 흩어진 집합을 찾아보면 $a_4=3$, $a_5=4$, $a_6=4$, $a_7=4$, $a_8=5$라는 것을 확인할 수 있다.

(3-2) 제시문 (나)를 이용하면 귀류법으로 S가 1과 k를 항상 포함한다는 것을 증명할 수 있다.

(3-3)
(a) 자연수 x,y,z,w에 대하여 $x+y\neq z+w$를 증명하기 위하여 $x+y>z+w$ 또는 $x+y<z+w$를 증명하면 된다. 이를 이용하면 주어진 집합이 흩어진 집합임을 증명할 수 있다.
(b) 제시문 (나)에서 $a=-1$, $b=p_k+1$로 놓고 집합 $\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$에 적용하면 조건을 만족하는 흩어진 집합을 찾을 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	$a_7=4$를 구하면	3점
	$a_8=5$를 구하면	1점
	$a_4=3$을 보이고 답을 모두 구하면	1점
(3-2)	$M=k$를 보이면	3점
	$m=1$을 보이면	4점
(3-3)(a)	서로 다른 자연수 $a>b>c>d$에 대하여 $p_a+p_d>p_b+p_c$를 보이면	5점
	위의 부등식을 이용하여 주어진 집합이 흩어진 집합임을 보이면	5점
(3-3)(b)	조건을 만족하는 흩어진 집합을 구하면	8점

7. 예시 답안

(3-1) $\{1,2,3\}$은 흩어진 집합이고 $\{1,2,3,4\}$는 $1+4=2+3$이므로 흩어진 집합이 아니다. 그리고 $\{1,2,3,5\}$는 흩어진 집합이므로 $a_4=3,\ a_5=4$이다. $\{1,2,3,5,8\}$은 흩어진 집합이므로 $a_8\geq 5$이다.
$a_7=4$임을 보이자. $n(S)=5$인 흩어진 집합 $S\subset\{1,2,\ \cdots,7\}$이 존재한다고 가정하자.
S의 가장 큰 원소를 M, 가장 작은 원소를 m이라 하면 $k\leq\dfrac{M-m}{2}$인 자연수 k에 대하여 두 자연수 $m+k$, $M-k$ 중 최대 하나만 S에 속할 수 있다. 따라서 S의 원소의 개수는

$2+\dfrac{M-m}{2}$ 이하인데 $n(S)=5$이므로 $m=1$, $M=7$이다. 2와 6 중 하나만 S에 속하고 3과 5 중 하나만 S에 속하므로 $4\in S$이어야 하고, 각각의 경우를 확인해보면 $x+y=z+w$인 서로 다른 네 원소를 항상 찾을 수 있다. 이는 S가 흩어진 집합이라는 것에 모순이고, 따라서 $a_7=4$이다.
또한 $a_5=4$, $a_7=4$이므로 $a_6=4$이다. 따라서 조건을 만족하는 k는 $5,6,7$이다.

(3-2) 귀류법을 이용하여 $1,k\in S$임을 증명하자.
(i) $k\not\in S$라고 가정하자. 이때 $S\subset\{1,2,\cdots,k-1\}$이고 S는 흩어진 집합이므로 $a_{k-1}\geq n(S)=a_k$이다. 이는 $a_{k-1}<a_k$에 모순이다. 따라서 $k\in S$이다.
(ii) $1\not\in S$라고 가정하자. $S'=\{i-1\,|\,i\in S\}$라 하자. S의 모든 원소는 1보다 크기 때문에 S'의 모든 원소는 1 이상 $k-1$ 이하이다. 그리고 제시문 (나)에 의하여 S'은 흩어진 집합이고 $a_{k-1}\geq n(S')=a_k>a_{k-1}$이 되어 모순이 생긴다. 따라서 $1\in S$이다.
그러므로 $m=1$, $M=k$이고 $M-m$으로 가능한 값은 $k-1$뿐이다.

(3-3) (a) 1 이상 k 이하인 서로 다른 자연수 a,b,c,d가 존재하여 $p_a+p_b=p_c+p_d$라 가정하자. 일반성을 잃지 않고 $a>c>d>b$라 하자. a,c,d는 자연수이므로 $c\leq a-1$, $d\leq a-2$이다.
이때 $p_a=p_{a-1}+p_{a-2}\geq p_c+p_d=p_a+p_b>p_a$이므로 $p_a+p_b=p_c+p_d$라는 것에 모순이다. 귀류법에 의하여 $\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$는 흩어진 집합이다.

[별해] 수학적 귀납법으로 증명하자. $k=1$이면 $\{p_1\}=\{1\}$, $k=2$이면 $\{p_1,p_2\}=\{1,2\}$이므로 성립한다.
자연수 $k>2$에 대하여 명제가 $k-1$일 때 성립한다고 가정하고 k일 때 성립함을 보이자.
$A=\{p_1,p_2,\ldots,p_k\}$, $B=\{p_1,p_2,\ldots,p_{k-1}\}$라 하자. A에 $x+y=z+w$를 만족하는 서로 다른 네 자연수 x,y,z,w가 속한다고 하자. 가정에 의해 B가 흩어진 집합이므로 x,y,z,w 중 하나는 반드시 p_k이어야 한다. 일반성을 잃지 않고 $a=p_k$라 하자. 그러면 $x+y\geq p_k+1$인데, $z+w\leq p_{k-1}+p_{k-2}=p_k$이므로 모순이다.
따라서 A는 흩어진 집합이고, k에 대하여도 명제는 성립한다.
그러므로 모든 자연수 k에 대하여 $\{p_1,p_2,\ldots,p_k\}$는 흩어진 집합이다.

(b) $S=\{p_k-p_i+1\,|\,i\text{는 }1\leq i\leq k\text{인 자연수}\}$라 하면 조건 (i), (ii)를 만족한다. 이제 S가 흩어진 집합임을 증명하자. $x_1+x_2=x_3+x_4$인 서로 다른 네 개의 자연수 $x_1,x_2,x_3,x_4\in S$가 존재한다고 가정하자. $i=1,2,3,4$에 대하여 $y_i=p_k+1-x_i$라 정의하자. 그러면 제시문 (나)에 의하여 $y_1+y_2=y_3+y_4$이고 $y_1,y_2,y_3,y_4\in\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$가 성립한다. 이는 집합 $\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$가 흩어진 집합이라는 것에 모순이다. 따라서 S는 흩어진 집합이다.

8. 대입전형 선행학습 자체영향평가위원회 의견

항목	의견 요약
고교 교육과정 수준 준수여부	· 현 고등학교 수학과 교육과정을 충실히 반영하였다고 판단됨
문항 유형의 적절성	· 문항 유형이 단순한 적용보다는 주어진 상황을 수학적으로 표현하여 문제를 해결하는 능력과 그 과정을 논리적으로 서술하는 능력을 요구하고 있어 논리적 사고력과 종합적 사고력을 평가할 수 있음 · 제시문과 논제의 용어 및 내용이 현 고등학교 교과서 범위 내에서 주어졌으므로 수험생들은 출제 문제의 의도 파악뿐만 아니라 답안 작성 방법을 충분히 이해했을 것이라고 사료됨
문항 난이도의 적절성	· 논술 문항의 수준은 고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 수험생이라면 충분히 준비가 가능하므로 선행학습 요구나 사교육 유발의 위험성이 없으며, 평가 문항으로서의 공정성은 확보됨

② 논술우수자 자연계(오후)

문항카드 6

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 오전 ■ 오후
			■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학II	
	핵심개념 및 용어	정적분, 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이, 절대부등식	
예상 소요 시간	30분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

이다.

(나) $a>0$, $b>0$일 때, 다음 부등식이 성립한다.

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

여기서 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

(※) 함수 $f(x)=x^3+x+1$과 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=f(t)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라 하자.

(1-1) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t^4+1}$의 값을 구하시오. (8점)

(1-2) $x>0$일 때, $\dfrac{S(x)}{xf(x)}$의 값의 범위를 구하시오. (10점)

(1-3) 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)=\dfrac{S(x)}{x^2(f(x))^2}\left(\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right)$가 $x=a$에서 최댓값을 가질 때, a와 $h(a)$의 값을 구하시오. (12점)

3. 출제 의도

정적분과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이의 상관관계를 이해하는지를 확인하고, 다항식의 정적분 계산 능력을 확인한다. 절대부등식을 사용하여 최댓값을 구하고, 등호가 성립할 조건을 활용할 수 있는지를 확인한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td>☐ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
■ 수학 ☐ 수학 Ⅰ ■ 수학 Ⅱ ☐ 미적분</td></tr>
<tr><td>관련 성취기준</td><td>
<table>
<tr><td>관련 제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (수학II)</td></tr>
<tr><td>(가)</td><td>성취기준 1</td><td>[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>관련 제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (수학)</td></tr>
<tr><td>(나)</td><td>성취기준 1</td><td>[10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학II	이준열 외	천재교육	2020	134	(가)	
수학II	고성은 외	좋은책 신사고	2020	137	(가)	
수학	김원경 외	비상	2020	192	(나)	
수학	고성은 외	좋은책 신사고	2020	196	(나)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 - 해당사항 없음

5. 문항 해설

(1-1) 제시문 (가)를 통해서 도형의 넓이를 이용하면 $S(t)+\int_0^t f(x)dx = tf(t)$의 관계식을 얻어낼 수 있다. 이를 통해 $S(t)$를 다항식으로 표현할 수 있다.

(1-2) (1-1)에서 구체적으로 얻은 $S(t)$를 이용하여 $\frac{d}{dx}\left(\frac{S(x)}{xf(x)}\right)$를 계산하여 양수임을 확인할 수 있다. 즉, $\frac{S(x)}{xf(x)}$가 증가함수임을 알 수 있다. 또한 $x\to 0$ 및 $x\to\infty$일 때, $\frac{S(x)}{xf(x)}$의 극한값을 구하여 $\frac{S(x)}{xf(x)}$의 범위를 찾을 수 있다. 경계값에 관련해서는 $\frac{S(x)}{xf(x)}=0,\frac{3}{4}$를 만족하는 x가 존재하지 않음을 확인할 수 있다.

(1-3) (1-1)에서 얻은 등식을 $x>0$일 때, 양변을 $xf(x)$로 나누면 $\frac{S(x)}{xf(x)}+\frac{\int_0^x f(t)dt}{xf(x)}=1$을 얻을 수 있다. 또한 제시문 (나)를 이용하면 $h(x)\le(1/2)^2$임과 $2S(x)=xf(x)$일 때 등호가 성립함을 알 수 있다. 방정식 $2S(x)=xf(x)$는 대수방정식의 풀이로 해결된다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(1-1)	$S(t)+\int_0^t f(x)dx=tf(t)$를 얻으면	3점
	$S(x)$를 구하면	3점
	극한을 구하면	2점
(1-2)	도함수를 구하여 증가함수임을 확인하면	5점
	두 극한을 구하여 범위를 찾으면	5점
(1-3)	넓이를 이용하여 $A(x)+B(x)=1$을 구하면	3점
	제시문 (나)를 정확히 이용하여 최댓값을 구하면	3점
	제시문 (나)의 등호 조건을 이용하여 최댓값을 가질 조건(방정식)을 구하면	2점
	대수방정식을 정확히 유도하여 풀면	4점

7. 예시 답안

(1-1) 제시문 (가)를 이용하면 $S(t)+\int_0^t f(x)dx$가 원점과 $(t,f(t))$를 대각선의 양 끝점으로 하는 직사각형의 넓이이므로 $S(t)+\int_0^t f(x)dx=tf(t)$가 됨을 알 수 있다. $f(x)=x^3+x+1$을 대입하면 $S(t)=\frac{3}{4}t^4+\frac{1}{2}t^2$을 얻을 수 있다. 따라서 구하고자 하는 극한값은 $\frac{3}{4}$이 된다.

(1-2) (1-1)에서 얻은 $S(x)$를 이용하면 $x>0$일 때,

$\frac{d}{dx}\left(\frac{S(x)}{xf(x)}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{(3/4)x^4+(1/2)x^2}{x^4+x^2+x}\right)=\frac{2x^3+9x^2+2}{4(x^3+x+1)^2}>0$임을 알 수 있다. 따라서 $x>0$일 때, $\frac{S(x)}{xf(x)}$는 증가한다. 또한 $\lim_{x\to 0}\frac{S(x)}{xf(x)}=0$이고 $\lim_{x\to\infty}\frac{S(x)}{xf(x)}=\frac{3}{4}$ 이므로 $0<\frac{S(x)}{xf(x)}<\frac{3}{4}$이다.

(1-3) $A(x)=\frac{S(x)}{xf(x)}$라 하고 $B(x)=\frac{\int_0^x f(t)dt}{xf(x)}$라 하자. 그러면 (1-1)과 같이 제시문 (가)를 이용하면 $A(x)+B(x)=1$임을 알 수 있다. 또한 (1-2)에서 $0<A(x)<\frac{3}{4}$이다. 제시문 (나)를 이용하면 $h(x)=A(x)B(x)\le\left(\frac{A(x)+B(x)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$이 성립하고 등호는 $A(x)=\frac{1}{2}$일 때 성립한다. $A(x)=\frac{1}{2}$을 풀면 $x^4-2x=0$이므로 $x>0$을 만족하는 x의 값은 $\sqrt[3]{2}$가 된다. 따라서 $a=\sqrt[3]{2}$이고 $h(a)=\frac{1}{4}$이다.

[별해] $h(x)$를 $A(x)+B(x)=1$을 이용하여 $h(x)=A(x)(1-A(x))=-\left(A(x)-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}$임을 알 수 있다. 따라서 (1-2)로부터 $0<A(x)<\frac{3}{4}$이므로 $A(x)=\frac{1}{2}$일 때, $h(x)$가 최댓값 $\frac{1}{4}$을 갖고, $A(x)=\frac{1}{2}$이면 $x^4-2x=0$이므로 $x=\sqrt[3]{2}$이다. 따라서 $a=\sqrt[3]{2}$이고 $h(a)=\frac{1}{4}$이다.

8. 대입전형 선행학습 자체영향평가위원회 의견

항목	의견 요약
고교 교육과정 수준 준수여부	· 각각의 논제가 수능 유형과 유사하면서 오히려 현 고등학교 수학과 교육과정을 더욱더 충실히 반영함
문항 유형의 적절성	· 논제의 결과를 바탕으로 산술기하평균을 활용해 문제에서 요구하는 최댓값을 구하는 과정을 통해 종합적 사고력을 평가할 수 있음
문항 난이도의 적절성	· 제시문이 정적분과 절대부등식에 관한 내용이고, 논제 또한 정적분으로 정의된 함수의 극한과 치역 및 최댓값에 관련한 문항이어서 수험생들에게는 평소 학교 수업의 미적분 관련 문제에서 자주 다루어 본 친숙한 유형이었을 것으로 예상됨

문항카드 7

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 오전 ■ 오후
			□ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I	
	핵심개념 및 용어	집합과 명제, 삼각함수	
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

한 변의 길이가 1인 정오각형 $ABCDE$에 대하여 두 대각선 AC와 BD의 교점을 F라고 하자. 그러면 $\angle AFB = \angle ABF$이므로 $\overline{AF} = 1$이다. $\overline{BF} = \overline{CF} = x$라고 하면 두 닮은 삼각형 BCF와 ACB로부터 $1 : x = x+1 : 1$이므로, $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$이다. 삼각형 BCF에서 $\angle BCF = \frac{\pi}{5}$이므로 코사인법칙에 의하여

$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+x^2-x^2}{2x} = \frac{1}{2x} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$를 얻는다.

이때 정오각형 $ABCDE$의 대각선 AC의 길이는 $1+x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

(※) X가 좌표평면의 부분집합이고 $P \in X$일 때, 다음 조건을 만족하는 $P_0, P_1, \cdots, P_n \in X$가 존재하는 점 Q의 집합을 X_n이라고 하자. (단, n은 자연수이다.)

(i) $P_0 = P$, $P_n = Q$이다.
(ii) $1 \le i \le n$인 모든 정수 i에 대하여 선분 $P_{i-1}P_i$의 길이는 1이다.

(2-1) X가 반지름의 길이가 r인 원일 때, $P \in X$에 대하여 X_1의 원소의 개수가 1이 되도록 하는 r의 값을 구하시오. (7점)

(2-2) X가 한 변의 길이가 1인 정7각형의 꼭짓점의 집합일 때, $P \in X$에 대하여 $X_n = X$가 되도록 하는 가장 작은 자연수 n의 값을 구하시오. (8점)

(2-3) X가 반지름의 길이가 r인 원이고 $P \in X$이다. (단, $r > \frac{1}{2}$이다.)

(a) 모든 자연수 n에 대하여 X_n의 원소의 개수가 3 이하가 되도록 하는 r의 값을 모두 구하시오. (10점)

(b) 모든 자연수 n에 대하여 $X_n \cup X_{n+1}$의 원소의 개수가 5 이하가 되도록 하는 r^2의 값을 모두 구하시오. (10점)

3. 출제 의도

좌표평면에서 기본적인 개념만으로 구성된 명제에 대해 이해하고 상황을 파악해서 문제를 해결할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 문제를 해결하는 과정에서 수학Ⅰ에서 배우는 삼각함수를 활용하는 계산을 통해 정답을 구할 수 있으므로 삼각함수를 이해하고 있는지도 평가한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"** ■ 수학 ■ 수학Ⅰ □ 수학Ⅱ □ 미적분
관련 성취기준	(see below)

관련 제시문	성취기준	과목명: (수학Ⅰ)
제시문	성취기준 1	[12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
관련 제시문	성취기준	과목명: (수학)
제시문	성취기준 1	[10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학Ⅰ	이준열 외	천재교육	2020	98-107	제시문	재구성
수학Ⅰ	권오남 외	교학사	2020	97-104	제시문	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 - 해당사항 없음

5. 문항 해설

(2-1) 문제의 조건에서 원에서 한 점이 주어졌을 때 그 점에서 특정한 거리에 있는 점이 단 하나일 조건이 두 점이 지름의 양 끝점이라는 것을 파악할 수 있는지 평가한다.

(2-2) 문제의 조건을 정확하게 이해하고 있는지 평가하고 다음 문제를 해결하는 힌트를 제공하고자 하였다.

(2-3) 최대/최소의 문제의 조건에서 정의된 X_n이 n이 증가함에 따라서 어떤 성질을 갖는지 파악할 수 있는지를 평가한다. 이러한 성질을 이해하고 삼각함수와 문제에서 제시된 계산과정을 이용해서 최종 정답에 이를 수 있다.

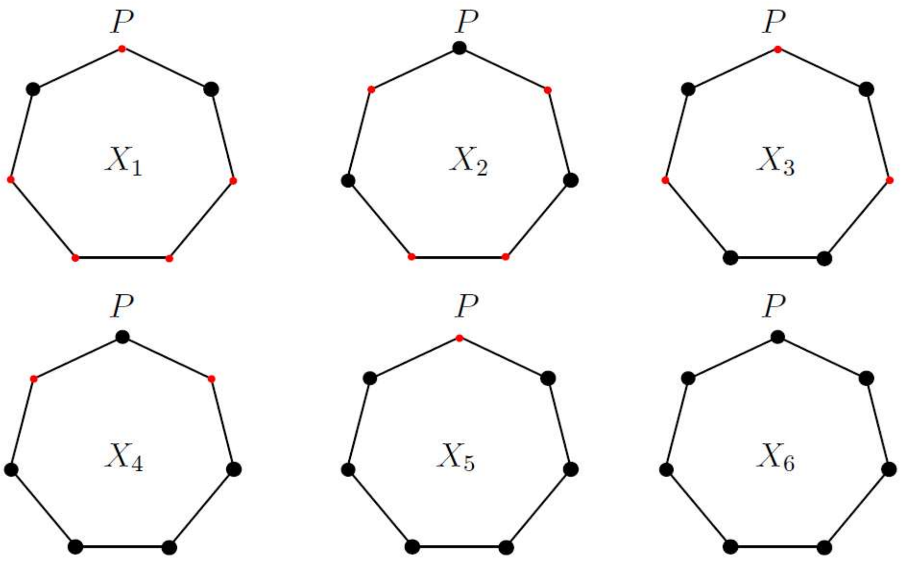
6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(2-1)	원에서 주어진 한 점이 주어졌을 때 그 점에서 특정한 거리에 있는 점이 단 하나일 조건이 두 점이 지름의 양 끝점이라는 것을 파악하고 답을 구하면	7점
(2-2)	집합 X_n을 순차적으로 구하는 과정에서 정의를 잘 이해하고 있으면	4점
	$n=6$을 정확하게 구하면	4점
(2-3) (a)	모든 X_n에 속한 점들의 집합의 원소의 개수가 6 이하임을 파악하면	4점
	문제의 조건을 만족하는 r을 정확히 구하면	6점
(2-3) (b)	(2-3) (a)에서 구한 r 중에서 $r=1$을 제외한 다른 경우가 답이 된다는 것을 파악하면	4점
	문제의 조건을 만족하는 r을 정확히 구하면	6점

7. 예시 답안

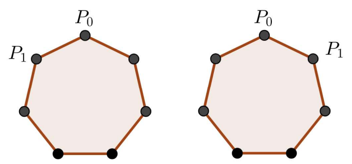
(2-1) 문제의 조건으로부터 원 위의 점 중 P와의 거리가 1인 점이 원 위에 단 한 개 존재해야 하므로 원의 지름이 1이어야 한다. 따라서 $r=\frac{1}{2}$이다.

(2-2) X_n이 구해지면 X_{n+1}의 점들은 X_n의 점들로부터 거리가 1인 X위의 점들이다. 따라서 $X_1, X_2, \dots$을 다음과 같이 차례대로 구할 수 있고, $n=6$이다.

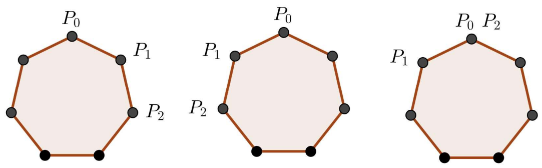


[별해] 문제의 조건을 n개의 점 $P_0, P_1, \cdots, P_n$이 만족하면, $n+2$개의 점 $P_0, P_1, \cdots, P_n, P_{n-1}, P_n$이 문제의 조건을 만족하므로 $X_n \subset X_{n+2}$임을 알 수 있다.

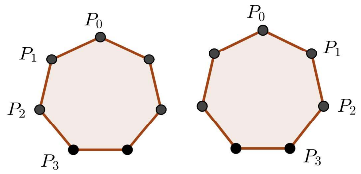
- $n(X_1) = 2$



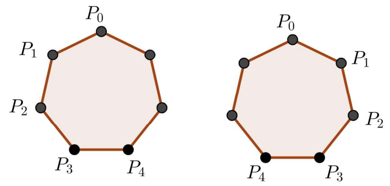
- $n(X_2) = 3$



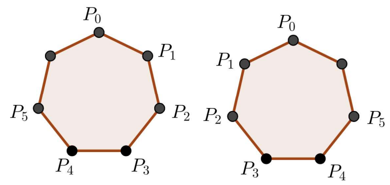
- 다음 경우를 고려하면 $n(X_3) = n(X_1) + 2 = 4$



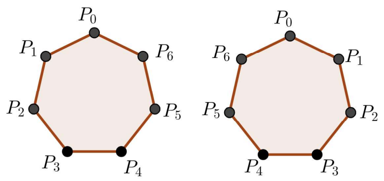
- 다음 경우를 고려하면 $n(X_4) = n(X_2) + 2 = 5$



- 다음 경우를 고려하면 $n(X_5)=n(X_3)+2=6$



- 다음 경우를 고려하면 $n(X_6)=n(X_4)+2=7$



따라서 $n=6$이다.

(2-3) X_n $(n \geq 1)$의 임의의 점을 Q라고 하면 Q로부터 거리가 1인 집합 X의 점이 존재하고 이 점은 X_{n+1}에 속하므로 Q는 X_{n+2}의 원소이기도 하다.

따라서 $X_1 \subset X_3 \subset X_5 \subset \cdots$ 이고 $X_2 \subset X_4 \subset X_6 \subset \cdots$이다.

그러므로 어떤 n에 대하여 X_n에 속하는 점들의 집합을 Y이라고 하면, Y의 임의의 점은 어떤 자연수 n에 대하여 $X_n \cup X_{n+1}$에 속한다.

또한 $r > \dfrac{1}{2}$이므로 모든 자연수 n에 대하여 X_n의 원소는 2개 이상이다.

(a) 문제의 조건에 의하여 Y의 원소는 기껏해야 6개이다. $r > \dfrac{1}{2}$이므로 Y는 원소의 개수가 적어도 3개이다.

$n(Y)=3$인 경우 세 점들 사이의 거리는 1이어야 하므로 원 X는 한 변의 길이가 1인 정삼각형에 외접하고 $r=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{2\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.

$n(Y)=4$이면 원 X는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 외접하고 $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

$n(Y)=5$이면 어떤 n에 대하여 $X_n=X_{n+2}=\cdots=2$ 이고 $X_{n+1}=X_{n+3}=\cdots=3$이어야 하는데 이런 경우는 X가 원일 때는 불가능하다.

마지막으로 $n(Y)=6$이라고 하자. 어떤 n에 대하여 $X_n=X_{n+2}=\cdots=2$ 이고 $X_{n+1}=X_{n+3}=\cdots=4$인 경우는 불가능하므로, 어떤 n에 대하여 $X_n=X_{n+1}=X_{n+2}=\cdots=3$이다. 이 경우 원 X가 한 변의 길이가 1인 정육각형에 외접하므로 $r=1$이다.

(b) 문제의 조건에서 $n(Y) \le 5$이어야 한다. (a)에 의하여 $n(Y)=3$이면 $r^2 = \frac{1}{3}$, $n(Y)=4$이면 $r^2 = \frac{1}{2}$이다.

마지막으로 $n(Y)=5$이라고 하자. 원래의 P 대신에 Y의 P가 아닌 네 점 중 하나를 P로 대체해도 집합 Y는 변하지 않으므로, Y의 임의의 이웃하는 두 점 사이의 거리는 모두 같다. 따라서 Y는 정오각형의 꼭짓점의 집합이고, 원 X는 이 정오각형의 외접원이다. 이때 정오각형의 한 변의 길이가 1이거나 대각선의 길이가 1이어야 하는데, 제시문을 이용하면 각각의 경우

$r^2 = \left(\frac{1}{2\sin(\pi/5)}\right)^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$ 또는 $r^2 = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$이다.

8. 대입전형 선행학습 자체영향평가위원회 의견

항목	의견 요약
고교 교육과정 수준 준수여부	· 삼각함수를 활용한 원의 반지름의 길이를 구하는 문제가 출제되어 현 고등학교 수학과 교육과정을 충실히 반영하였다고 판단됨
문항 유형의 적절성	· 논제의 결과를 활용해 문제의 속성을 파악하고 그 해결 전략을 구상하면서 답을 도출하기 위한 절차적 서술 과정을 통해 논리적 사고력과 종합적 사고력을 평가할 수 있는 문항이라고 판단됨
문항 난이도의 적절성	· 논제는 간단명료하며 제시문은 현재 고등학교 교과서에 나오는 내용을 다루고 있으면서 학생들이 이해하지 못하는 용어나 논법은 배제되어 있어 내용상 어려움은 없는 것으로 판단됨

문항카드 8

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 오전 ■ 오후
			□ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분	
	핵심개념 및 용어	합성함수의 미분법, 지수함수와 로그함수의 극한	
예상 소요 시간	50분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오

(가) $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$은 존재하고 그 값은 $e = 2.7182\cdots$이다.

(나) $x > 0$일 때 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$\frac{d}{dx}x^{f(x)} = \frac{d}{dx}e^{f(x)\ln x} = e^{f(x)\ln x}\left(f'(x)\ln x + \frac{f(x)}{x}\right) = x^{f(x)}\left(f'(x)\ln x + \frac{f(x)}{x}\right)$$

이다.

(다) $\ln 2 = 0.6931\cdots$, $\ln 3 = 1.0986\cdots$, $\ln 5 = 1.6094\cdots$ 이다.

(※) $a^b = b^a$, $a < b$를 만족하는 임의의 양의 실수 a, b에 대하여 $t = \frac{b}{a}$일 때

$$a = f(t),\ b = g(t)\ (t > 1)$$

인 함수 $f(t)$, $g(t)$가 존재한다.

(3-1) $f(t)$, $g(t)$를 t의 식으로 나타내시오. (10점)

(3-2) 함수 $h(t) = f(t)\ln g(t)$ $(t > 1)$의 치역을 구하시오. (15점)

(3-3) $a^b = b^a = n$을 만족하는 서로 다른 양의 실수 a, b가 존재하도록 하는 최소의 자연수 n을 구하시오. (10점)

3. 출제 의도

합성함수의 미분을 이용하여 부등식에 관한 문제를 해결할 수 있는지와 자연로그에 대하여 이해하고 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	☐ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정" ☐ 수학 ☐ 수학 I ☐ 수학 II ■ 미적분
관련 성취기준	관련 제시문 / 성취기준 / 과목명: (미적분) (가), (다) / 성취기준 1 / [12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다. (나) / 성취기준 2 / [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.

관련 제시문	성취기준	과목명: (미적분)
(가), (다)	성취기준 1	[12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다.
(나)	성취기준 2	[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분	류희찬 외	천재교과서	2020	54-60	(가)	
미적분	이준열 외	천재교육	2020	55-59	(가)	
미적분	류희찬 외	천재교과서	2020	103-106	(나)	재구성
미적분	이준열 외	천재교육	2020	88-91	(나)	재구성
미적분	류희찬 외	천재교과서	2020	54-60	(다)	재구성
미적분	이준열 외	천재교육	2020	55-59	(다)	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우- 해당사항 없음

5. 문항 해설

(3-1) 주어진 관계식을 정리하여 두 함수를 구할 수 있다.
(3-2) 합성함수의 미분을 이용하여 주어진 함수의 치역을 구할 수 있다.
(3-3) 자연로그의 뜻을 이해하고 주어진 제시문을 활용하여 문제에서 요구하는 최소의 자연수를 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	$b=a^t=ta$ 임을 보임.	5점
	$f(t)=t^{\frac{1}{t-1}}$, $g(t)=t^{\frac{t}{t-1}}$임을 보임.	5점
(3-2)	$h'(t)=\frac{(t-1)^2-t(\ln t)^2}{(t-1)^3}e^{\frac{\ln t}{t-1}}$임을 보임.	5점
	$h'(t)>0$임을 보임.	5점
	h의 치역이 (e,∞)임을 보임.	5점
(3-3)	b^a의 범위가 (e^e,∞)임을 보임.	4점
	$15<e^e<16$임을 보임.	4점
	$n=16$임을 보임.	2점

7. 예시 답안

(3-1) $\frac{\ln b}{\ln a}=\frac{b}{a}=t$이므로 $b=a^t=ta$이다. 따라서 $a=t^{\frac{1}{t-1}}$, $b=t^{\frac{t}{t-1}}$이고 $f(t)=t^{\frac{1}{t-1}}$, $g(t)=t^{\frac{t}{t-1}}$이다.

(3-2) $h(t)=\frac{t\ln t}{t-1}e^{\frac{\ln t}{t-1}}$이므로 제시문 (나)의 미분법을 이용하면

$$h'(t)=\frac{(\ln t+1)(t-1)-t\ln t}{(t-1)^2}e^{\frac{\ln t}{t-1}}+\frac{t\ln t}{t-1}e^{\frac{\ln t}{t-1}}\times\frac{1-\frac{1}{t}-\ln t}{(t-1)^2}=\frac{(t-1)^2-t(\ln t)^2}{(t-1)^3}e^{\frac{\ln t}{t-1}}$$

이다. $k(t)=\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}-\ln t$로 두면, $t>1$일 때

$k'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{1}{2t\sqrt{t}}-\frac{1}{t}=\frac{1}{2t\sqrt{t}}(\sqrt{t}-1)^2>0$이고 $k(1)=0$이므로 $k(t)>0$이다. 그러므로 $h'(t)>0$이고 $h(t)$는 $t>1$일 때 증가한다. 또한 $\lim_{t\to1}h(t)=e$이고 $\lim_{t\to\infty}h(t)=\infty$이므로 h의 치역은 (e,∞)이다.

(3-3) (3-2)의 결과에 의해 $b^a=g(t)^{f(t)}=e^{h(t)}$의 범위는 (e^e,∞)이다. 제시문 (가), (다)에 의하면

$$\ln e^e=e=2.718\cdots,\quad \ln 15=2.708\cdots,\quad \ln 16=2.772\cdots$$

이므로 $15<e^e<16$이다. 따라서 a^b가 될 수 있는 최소의 자연수는 16이다.

8. 대입전형 선행학습 자체영향평가위원회 의견

항목	의견 요약
고교 교육과정 수준 준수여부	· 각각의 논제가 수능 유형과 유사하여 문제될 것은 없고, 현 고등학교 수학과 교육과정을 더욱더 충실히 반영하였다고 판단됨
문항 유형의 적절성	· 논제 결과 및 제시문(다)를 활용해 단계적인 과정을 거쳐야만 해결할 수 있는 내용이어서 종합적 사고력을 평가하는데 매우 최적화된 문항이라고 판단됨 · 제시문과 논제의 용어 및 내용이 현 고등학교 교과서 범위 내에서 주어져 수험생들은 출제 문제의 의도 파악뿐만 아니라 답안 작성 방법을 충분히 이해했을 것으로 사료됨
문항 난이도의 적절성	· 제시문이 자연대수 e와 합성함수의 미분법에 관련된 익숙한 내용이고 논제 또한 함수의 구성과 도함수의 활용에 관한 내용으로 수험생들에게는 평소 학교 수업의 미적분 관련 문제에서 주로 다루어 본 생소하지 않은 유형이었을 것으로 예상됨. · 현 고등학교 수학 교육과정에 따른 미적분 과목의 내용 중에서 가장 핵심이 되는 내용을 유기적으로 통합한 독창성 있는 문항임