

VI-5. 문항카드: 논술우수자전형(자연계열)

[성신여자대학교 문항정보]

1. 일반정보

유형	논술고사	
전형명	2022학년도 논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 (수학) / <문제 1>	
출제범위	교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	함수의 극한, 함수의 연속, 도함수의 활용
예상소요시간	25분	

2. 문항 및 제시문

<문제 1> 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(x)}{x^2} - x \right\} = -1 \\ \text{(나)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

다음 질문에 답하시오. [총 25점]

(1) $f(x)$ 를 x 에 대한 식으로 나타내시오. [7점]

(2) 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 그리고, 그래프 위에 극대 및 극소를 나타내는 점의 좌표와 변곡점의 좌표를 표시하시오. 또한, 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점을 $P(a, f(a))$ 라 할 때 $f(a-x) = 2f(a) - f(a+x)$ 가 성립함을 설명하시오. [8점]

(3) $g(x) = \frac{1}{2} \left\{ f\left(\frac{1}{3}-x\right) + f\left(\frac{1}{3}+x\right) \right\}$ 라 하고, 모든 실수 k 에 대해 함수 $p(k)$ 를 집합

$$\{x \mid |f(x) - g(x)| = k, x \text{는 실수}\}$$

의 원소의 개수라고 정의하자. 함수 $p(k)$ 를 구하고, 이 함수가 불연속인 k 의 값을 모두 찾으시오. [10점]

3. 제시문 요약

극한에 대한 조건을 통하여 삼차함수 $f(x)$ 를 구하고, 이 삼차함수 $f(x)$ 의 극댓값, 극솟값, 변곡점 등을 찾아 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 개형을 그린다. 또한, $f(x)$ 의 성질을 이용하여 $g(x)$ 가 상수함수가 됨을 확인하고, $y=|f(x)-g(x)|$ 의 그래프와 $y=k$ 가 만나는 점의 개수를 구한다. 이를 통해, k 에 대한 함수 $p(k)$ 를 구하고 이 함수가 불연속이 되게 하는 k 의 값을 모두 찾는다.

4. 출제의도

다항함수에 관한 극한이 주어져 있을 때 다항함수의 식을 찾을 수 있는지를 확인한다. 그리고 도함수를 활용하여 삼차함수의 극댓값, 극솟값, 변곡점을 찾고 그래프의 개형을 그릴 수 있는지를 알아본다. 마지막으로 절댓값을 취한 함수의 그래프를 그릴 수 있는지를 알아보고, 함수가 불연속이 되게 하는 값을 모두 찾을 수 있는지를 확인한다.

5. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	[수학 III] - (1) 함수의 극한과 연속 - ① 함수의 극한 - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속 - (2) 미분 - ② 도함수의 활용 [미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용
성취기준 / 영역별 내용	[12수학II 01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [12수학II 01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
수학 II	박교식 외 19인	동아출판	2018	46-48	교과서	재구성
미적분	황선옥 외 8인	미래엔	2019	110-117	교과서	재구성

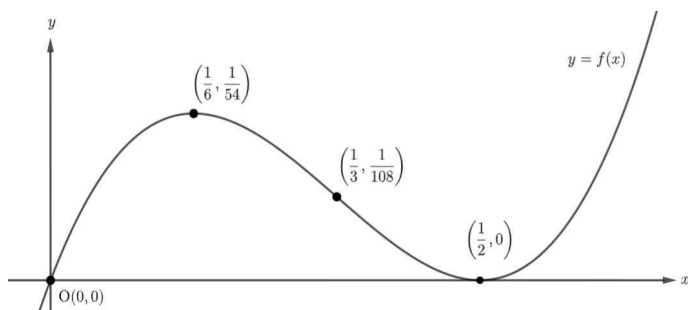
※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

6. 문항 해설

- (1) 조건 (가)를 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = -1$ 으로 변형할 수 있다. 이로부터 $f(x)$ 는 최고차항이 x^3 인 다항함수가 되어, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 로 놓을 수 있다. 조건 (가)의 극한값이 -1 이므로, $f(x)$ 의 이차항의 계수가 -1 이 되어 $a = -1$ 이다. 조건 (나)를 통하여 $f(0) = 0$ 이므로 $c = 0$ 이고, $f'(0) = \frac{1}{4}$ 이므로 $b = \frac{1}{4}$ 이 된다. 따라서, $f(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x$ 이다.

- (2) $f'(x) = 3x^2 - 2x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(12x^2 - 8x + 1) = \frac{1}{4}(2x - 1)(6x - 1)$ 이 된다. $f'(x)$ 의 그래프를 통해 $x = \frac{1}{6}$ 일 때 $f(x)$ 는 극댓값 $f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{54}$ 을 갖고, $x = \frac{1}{2}$ 일 때 극솟값 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ 을 갖는다.

또한, $f''(x) = 6x - 2$ 이므로, $f''(x)$ 의 그래프를 통해 $x = \frac{1}{3}$ 에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{108}\right)$ 이다. 따라서, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 다음과 같이 그릴 수 있고, 극대 및 극소를 나타내는 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{54}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 이다.



변곡점의 좌표가 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{108}\right)$ 이므로, 직접 계산을 통해 다음과 같이 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{1}{3} - x\right) + f\left(\frac{1}{3} + x\right) &= \left(\frac{1}{3} - x\right)\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + x\right)\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{1}{3} - x\right)\left(x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) + \left(\frac{1}{3} + x\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{1}{108} - x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{36}x\right) + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{108} + x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{36}x\right) \\
 &= \frac{1}{54} = 2 \cdot \frac{1}{108} = 2f\left(\frac{1}{3}\right)
 \end{aligned}$$

또는

$$\begin{aligned} f(a-x) + f(a+x) &= \left((a-x)^3 - (a-x)^2 + \frac{1}{4}(a-x) \right) + \left((a+x)^3 - (a+x)^2 + \frac{1}{4}(a+x) \right) \\ &= 2a^3 + 6ax^2 - 2(a^2 + x^2) + \frac{a}{2} = 2a^3 - 2a^2 + \frac{a}{2} + (6a-2)x^2 = 2f(a) + (6a-2)x^2 \end{aligned}$$

이므로 $a = \frac{1}{3}$ 을 대입하면 된다.

(3) 위로부터 $g(x) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{108}$ 임을 알 수 있다. 따라서, k 의 값이 주어졌을 때, $y = \left| f(x) - f\left(\frac{1}{3}\right) \right|$ 의 그래프와 $y = k$ 의 그래프가 만나는 점의 개수를 구하면 된다.

(i) $k < 0$: 이 경우에는 k 의 값이 음수이므로 두 그래프는 만나지 않는다. 따라서, $p(k) = 0$ 이다.

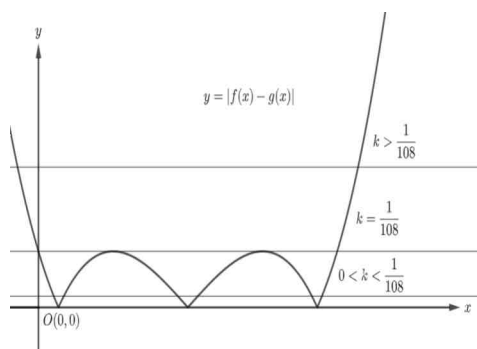
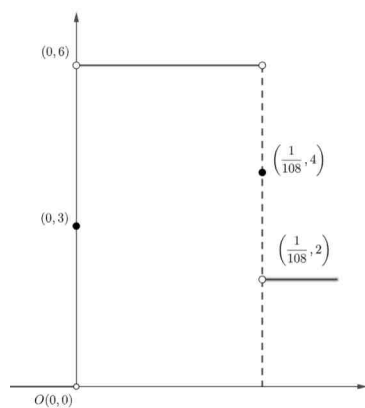
(ii) $k = 0$: 이 경우에는 세 점에서 만나는 것을 확인할 수 있다. 따라서, $p(0) = 3$ 이다.

(iii) $0 < k < \frac{1}{108}$: 이 경우에는 6개의 점에서 만나므로, $p(k) = 6$ 이다.

(iv) $k = \frac{1}{108}$: 이 경우에는 4개의 점에서 만나므로, $p\left(\frac{1}{108}\right) = 4$ 이다.

(v) $k > \frac{1}{108}$: 이 경우에는 두 점에서 만나므로, $p(k) = 2$ 이다.

이를 통해 함수 $p(k)$ 는 $k = 0, \frac{1}{108}$ 에서 불연속임을 알 수 있다.



7. 채점 기준

채점 기준	배점
<p><문제 1> (1)</p> <p>① $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = -1$ 으로 변형할 수 있다. 이로부터 $f(x)$는 최고차항이 x^3인 다항함수가 되어, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$로 놓을 수 있다. (단, a, b, c는 상수)</p>	7점

- ② 조건 (가)의 극한값이 -1 이므로, $f(x)$ 의 이차항의 계수가 -1 이 되어 $a = -1$ 이다.
- ③ 조건 (나)를 통하여 $f(0) = 0$ 이므로 $c = 0$ 이고,
- ④ $f'(0) = \frac{1}{4}$ 이므로 $b = \frac{1}{4}$ 이 된다.

따라서, $f(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x$ 이다.

[채점 기준]

1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급 : ④단계까지 모두 서술했으나 계수가 1개 틀린 경우

3등급 : 삼차함수임을 알고, 계수가 2개 틀린 경우

4등급 : ③단계와 ④단계만 맞은 경우 (상수항과 일차항의 계수만 찾은 경우)

5등급 : ③단계만 맞은 경우 (상수항만 찾은 경우)

6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우

7등급 : 백지 답안

<문제 1> (2)

① $f(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x = x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ 이고,

$f'(x) = 3x^2 - 2x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(12x^2 - 8x + 1) = \frac{1}{4}(2x - 1)(6x - 1)$ 이 된다. $f'(x)$ 의

그래프를 통해 $x = \frac{1}{6}$ 일 때 $f(x)$ 는 극댓값 $f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{54}$ 을 갖고, $x = \frac{1}{2}$ 일 때 극솟값

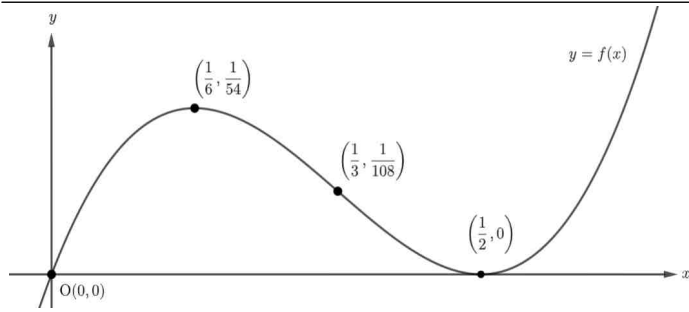
$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ 을 갖는다. 따라서, 극대 및 극소를 나타내는 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{54}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 이다.

② 또한, $f''(x) = 6x - 2$ 이므로, $f''(x)$ 의 그래프를 통해 $x = \frac{1}{3}$ 에서 $f''(x)$ 의 부호가

바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{108}\right)$ 이다.

③ 따라서, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 다음과 같이 그릴 수 있다.

8점



④ 변곡점의 좌표가 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{108}\right)$ 이므로, 직접 계산을 통해 다음과 같이 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}-x\right)+f\left(\frac{1}{3}+x\right) &= \left(\frac{1}{3}-x\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{3}+x\right)\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{3}-x\right)\left(x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}\right)+\left(\frac{1}{3}+x\right)\left(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{1}{108}-x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{36}x\right)+\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x+\frac{1}{108}+x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{36}x\right) \\ &= \frac{1}{54}=2 \cdot \frac{1}{108}=2f\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

또는

$$\begin{aligned} f(a-x)+f(a+x) &= \left((a-x)^3-(a-x)^2+\frac{1}{4}(a-x)\right)+\left((a+x)^3-(a+x)^2+\frac{1}{4}(a+x)\right) \\ &= 2a^3+6ax^2-2(a^2+x^2)+\frac{a}{2} \\ &= 2a^3-2a^2+\frac{a}{2}+(6a-2)x^2=2f(a)+(6a-2)x^2 \end{aligned}$$

이므로 $a = \frac{1}{3}$ 을 대입하면 된다.

[채점 기준]

1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급 : ④단계까지 서술했으나 계산 실수가 있는 경우

3등급 : ③단계까지 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우

4등급 : ②단계까지 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우

5등급 : ①단계만 서술했고 그 이후 과정이 없는 경우

6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우

7등급 : 백지 답안

<문제 1> (3)

① <문제 1> (2)로부터 $g(x) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{108}$ 임을 알 수 있다. 따라서, k 의 값이 주어졌을 때,

$y = \left| f(x) - f\left(\frac{1}{3}\right) \right|$ 의 그래프와 $y = k$ 의 그래프가 만나는 점의 개수를 구하면 된다.

② (i) $k < 0$: 이 경우에는 k 의 값이 음수이므로 두 그래프는 만나지 않는다. 따라서, $p(k) = 0$ 이다.

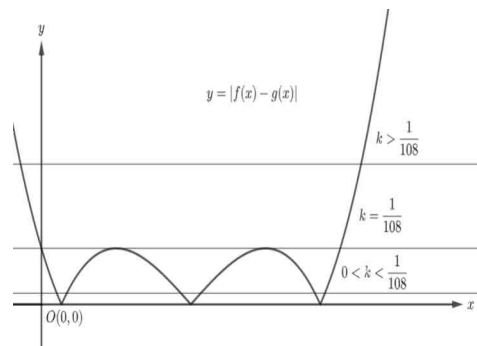
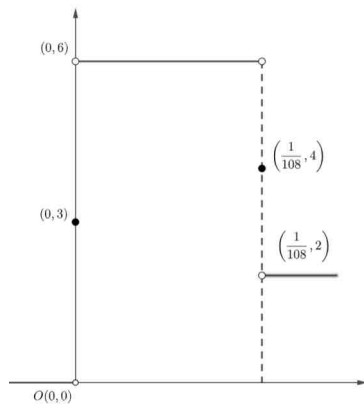
(ii) $k = 0$: 이 경우에는 세 점에서 만나는 것을 확인할 수 있다. 따라서, $p(0) = 3$ 이다.

③ (iii) $0 < k < \frac{1}{108}$: 이 경우에는 6개의 점에서 만나므로, $p(k) = 6$ 이다.

④ (iv) $k = \frac{1}{108}$: 이 경우에는 4개의 점에서 만나므로 $p\left(\frac{1}{108}\right) = 4$ 이다.

(v) $k > \frac{1}{108}$: 이 경우에는 두 점에서 만나므로 $p(k) = 2$ 이다.

이를 통해 함수 $p(k)$ 는 $k = 0, \frac{1}{108}$ 에서 불연속임을 알 수 있다.



10점

[채점 기준]

1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급 : ④단계까지 서술했으나 함수 $p(k)$ 에서 오류가 1개만 있는 경우

3등급 : ②단계를 고려하지 않고, ①단계, ③단계, ④단계를 서술한 경우

4등급 : ②단계만을 서술한 경우

5등급 : ①단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우

6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우

7등급 : 백지 답안

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

8. 예시답안

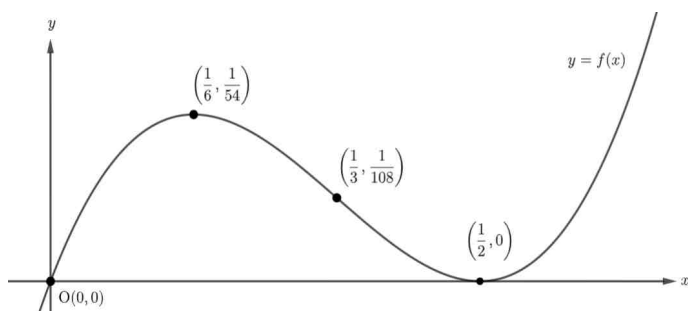
- (1) 조건 (가)를 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = -1$ 으로 변형할 수 있다. 이로부터 $f(x)$ 는 최고차항이 x^3 인 다항함수가 되어, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 로 놓을 수 있다. 조건 (가)의 극한값이 -1 이므로, $f(x)$ 의 이차항의 계수가 -1 이 되어 $a = -1$ 이다. 조건 (나)를 통하여 $f(0) = 0$ 이므로 $b = 0$ 이고, $f'(0) = \frac{1}{4}$ 이므로 $c = \frac{1}{4}$ 이 된다. 따라서, $f(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x$ 이다.

- (2) $f(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x = x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ 이고,

$f'(x) = 3x^2 - 2x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(12x^2 - 8x + 1) = \frac{1}{4}(2x - 1)(6x - 1)$ 이 된다. $f'(x)$ 의 그래프를 통해

$x = \frac{1}{6}$ 일 때 $f(x)$ 는 극댓값 $f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{54}$ 을 갖고, $x = \frac{1}{2}$ 일 때 극솟값 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ 을 갖는다. 따라서, 극대 및 극소를 나타내는 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{54}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 이다.

또한, $f''(x) = 6x - 2$ 이므로, $f''(x)$ 의 그래프를 통해 $x = \frac{1}{3}$ 에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{108}\right)$ 이다. 따라서, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 다음과 같이 그릴 수 있다.



변곡점의 좌표가 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{108}\right)$ 이므로, 직접 계산을 통해 다음과 같이 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{1}{3} - x\right) + f\left(\frac{1}{3} + x\right) &= \left(\frac{1}{3} - x\right)\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + x\right)\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{1}{3} - x\right)\left(x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) + \left(\frac{1}{3} + x\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{1}{108} - x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{36}x\right) + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{108} + x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{36}x\right) \\
 &= \frac{1}{54} = 2 \cdot \frac{1}{108} = 2f\left(\frac{1}{3}\right)
 \end{aligned}$$

또는

$$\begin{aligned} f(a-x) + f(a+x) &= \left((a-x)^3 - (a-x)^2 + \frac{1}{4}(a-x) \right) + \left((a+x)^3 - (a+x)^2 + \frac{1}{4}(a+x) \right) \\ &= 2a^3 + 6ax^2 - 2(a^2 + x^2) + \frac{a}{2} = 2a^3 - 2a^2 + \frac{a}{2} + (6a-2)x^2 = 2f(a) + (6a-2)x^2 \end{aligned}$$

이므로 $a = \frac{1}{3}$ 을 대입하면 된다.

(3) 위로부터 $g(x) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{108}$ 임을 알 수 있다. 따라서, k 의 값이 주어졌을 때, $y = \left| f(x) - f\left(\frac{1}{3}\right) \right|$ 의 그래프와 $y = k$ 의 그래프가 만나는 점의 개수를 구하면 된다.

(i) $k < 0$: 이 경우에는 k 의 값이 음수이므로 두 그래프는 만나지 않는다. 따라서, $p(k) = 0$ 이다.

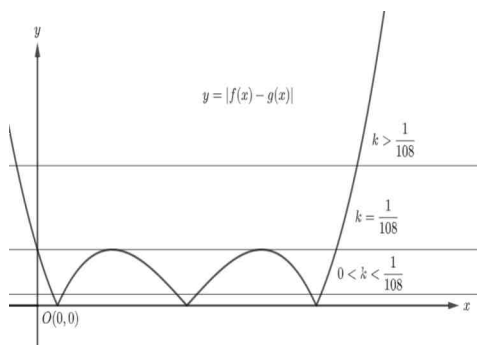
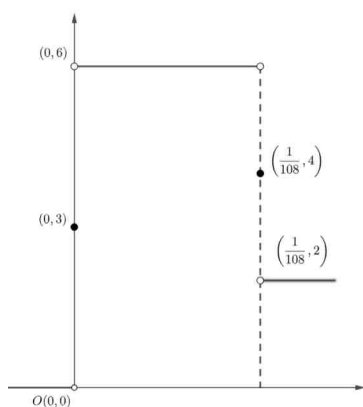
(ii) $k = 0$: 이 경우에는 세 점에서 만나는 것을 확인할 수 있다. 따라서, $p(0) = 3$ 이다.

(iii) $0 < k < \frac{1}{108}$: 이 경우에는 6개의 점에서 만나므로 $p(k) = 6$ 이다.

(iv) $k = \frac{1}{108}$: 이 경우에는 4개의 점에서 만나므로 $p\left(\frac{1}{108}\right) = 4$ 이다.

(v) $k > \frac{1}{108}$: 이 경우에는 두 점에서 만나므로 $p(k) = 2$ 이다.

이를 통해 함수 $p(k)$ 는 $k = 0, \frac{1}{108}$ 에서 불연속임을 알 수 있다.



[성신여자대학교 문항정보]

1. 일반정보

유형	논술고사	
전형명	2022학년도 논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 (수학) / <문제 2>	
출제범위	교육과정 과목명	수학 I, 수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 정적분의 뜻, 여러 가지 적분법, 급수
예상소요시간	25분	

2. 문항 및 제시문

<문제 2> 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 실수 전체집합에서 미분가능하고 도함수 $f'(x)$ 와 $g'(x)$ 가 실수 전체집합에서 연속이다. 모든 자연수 n 에 대하여 함수 $H(n)$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$H(n) = \int_0^n f'(x)g(2n-x)dx - \int_n^{2n} g'(x)f(2n-x)dx$$

다음 질문에 답하시오. [총 25점]

(1) $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $g(1) = 5$, $g(2) = -1$ 일 때, $H(1)$ 의 값을 구하시오. [5점]

(2) $f(x) = a^x$ 이고 $g(x) = \sin \frac{\pi}{4}x$ 일 때, $H(n)$ 을 n 에 대한 식으로 나타내시오. (단, $a > 0$, $a \neq 1$ 이다.) [10점]

(3) 위의 $H(n)$ 에 대하여 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \{H(4n-3) + H(4n-1)\}$ 의 합을 구하시오.

[10점]

3. 제시문 요약

실수 전체집합에서 미분가능하고 도함수가 실수 전체집합에서 연속인 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 새로운 함수 $H(n)$ 을 문제와 같이 주었을 때, $H(1)$ 의 값을 $f(0), f(1), g(1), g(2)$ 를 이용하여 나타내 본다. 또한, 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 주어졌을 때, 함수 $H(n)$ 을 n 에 대한 식으로 표현해본다. 마지막으로, 삼각함수의 성질을 이용하여 급수의 합을 구해본다.

4. 출제의도

치환적분과 정적분의 성질을 이용하여 정적분 계산이 쉬운 형태로 식을 변형할 수 있는지를 확인한다. 그리고 부분적분법 및 정적분의 정의를 이용하여 주어진 적분을 간단한 형태로 변형할 수 있는지를 알아본다. 마지막으로 삼각함수의 성질을 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있는지를 확인한다.

5. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	[수학 I] - (2) 삼각함수 - ② 삼각함수 [수학 II] - (3) 적분 - ② 정적분 [미적분] - (1) 수열의 극한 - ② 급수 - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법
성취기준 / 영역별 내용	[12수학02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
수학 I	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	84-86	교과서	재구성
수학 II	박교식 외 19인	동아출판	2018	122-131	교과서	재구성
미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2019	30-31, 143-149, 151-153	교과서	재구성

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

6. 문항 해설

- (1) $2-x=u$ 로 치환을 하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int_1^2 g'(x)f(2-x)dx = \int_1^0 g'(2-u)f(u)(-du) = \int_0^1 g'(2-u)f(u)du$$

따라서, $H(1)$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} H(1) &= \int_0^1 f'(x)g(2-x)dx - \int_1^2 g'(x)f(2-x)dx = \int_0^1 f'(x)g(2-x)dx - \int_0^1 g'(2-u)f(u)du \\ &= \int_0^1 \{f'(x)g(2-x) - f(x)g'(2-x)\}dx \end{aligned}$$

부분적분법을 이용하여 다음의 정적분을 계산하면

$$H(1) = \int_0^1 \{f'(x)g(2-x) - f(x)g'(2-x)\}dx = [f(x)g(2-x)]_0^1 = f(1)g(1) - f(0)g(2) \text{ 이 되고,}$$

$f(1), g(1), f(0), g(2)$ 의 값을 이용하면 $H(1) = 2 \cdot 5 - 1 \cdot (-1) = 11$ 이 된다.

- (2) $2n-x=u$ 로 치환을 하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int_n^{2n} g'(x)f(2n-x)dx = \int_n^0 g'(2n-u)f(u)(-du) = \int_0^n g'(2n-u)f(u)du$$

따라서, $H(n)$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} H(n) &= \int_0^n f'(x)g(2n-x)dx - \int_n^{2n} g'(x)f(2n-x)dx = \int_0^n f'(x)g(2n-x)dx - \int_0^n g'(2n-u)f(u)du \\ &= \int_0^n \{f'(x)g(2n-x) - f(x)g'(2n-x)\}dx \end{aligned}$$

부분적분법을 이용하여 다음의 정적분을 계산하면

$$H(n) = \int_0^n \{f'(x)g(2n-x) - f(x)g'(2n-x)\}dx = [f(x)g(2n-x)]_0^n = f(n)g(n) - f(0)g(2n)$$

$f(x) = a^x$ 이고, $g(x) = \sin \frac{\pi}{4}x$ 이므로 $H(n) = a^n \sin \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{n\pi}{2}$ 가 된다.

- (3) <문제 2> (2)에서 $H(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sin \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{n\pi}{2}$ 임을 알 수 있고, $a_n = H(4n-3) + H(4n-1)$ 이라 하자.

$$\begin{aligned} a_n &= H(4n-3) + H(4n-1) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-3} \sin \frac{(4n-3)\pi}{4} - \sin \frac{(4n-3)\pi}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-1} \sin \frac{(4n-1)\pi}{4} - \sin \frac{(4n-1)\pi}{2} \end{aligned}$$

가 되는데, 삼각함수의 대칭성과 주기성에 의해 모든 자연수 n 에 대해

$\sin \frac{(4n-3)\pi}{2} + \sin \frac{(4n-1)\pi}{2} = 0$ 이 성립하므로

$$a_n = H(4n-3) + H(4n-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-3} \sin \frac{(4n-3)\pi}{4} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-1} \sin \frac{(4n-1)\pi}{4} \text{ 이다.}$$

이 때, a_{n+1} 을 계산해보면,

$$a_{n+1} = H(4n+1) + H(4n+3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1} \sin \frac{(4n+1)\pi}{4} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+3} \sin \frac{(4n+3)\pi}{4} \text{ 이다.}$$

한편, $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$ 이므로

$$\sin \frac{(4n+1)\pi}{4} = -\sin \frac{(4n-3)\pi}{4} \text{ 이고, } \sin \frac{(4n+3)\pi}{4} = -\sin \frac{(4n-1)\pi}{4} \text{ 이 성립한다.}$$

따라서, $a_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n$ 임을 알 수 있다.

첫째항은 $a_1 = H(1) + H(3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{4} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 이고 공비가 $-\frac{1}{4}$ 이므로 주어진

급수의 합은 $\frac{\frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$ 이다.

7. 채점 기준

채점 기준	배점
<p><문제 2> (1)</p> <p>① $2-x=u$로 치환을 하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.</p> $\int_1^2 g'(x)f(2-x)dx = \int_1^0 g'(2-u)f(u)(-du) = \int_0^1 g'(2-u)f(u)du$ <p>② 따라서, $H(1)$을 다음과 같이 나타낼 수 있다.</p> $\begin{aligned} H(1) &= \int_0^1 f'(x)g(2-x)dx - \int_1^2 g'(x)f(2-x)dx \\ &= \int_0^1 f'(x)g(2-x)dx - \int_0^1 g'(2-u)f(u)du = \int_0^1 \{f'(x)g(2-x) - f(x)g'(2-x)\}dx \end{aligned}$ <p>③ 부분적분법을 이용하여 다음의 정적분을 계산하면</p> $\begin{aligned} H(1) &= \int_0^1 \{f'(x)g(2-x) - f(x)g'(2-x)\}dx = [f(x)g(2-x)]_0^1 \\ &= f(1)g(1) - f(0)g(2) \end{aligned}$	5점

④ $f(1), g(1), f(0), g(2)$ 의 값을 이용하면 $H(1) = 2 \cdot 5 - 1 \cdot (-1) = 11$ 이 된다.

[채점 기준]

1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급 : ④단계까지 서술했으나, ④단계에서 계산 실수가 있는 경우

3등급 : ③단계를 시도하여 $H(1)$ 을 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 합숫값들로 나타내었으나,
 $f(1)g(1) - f(0)g(2)$ 가 나오지 않은 경우

4등급 : ②단계에서 $H(1)$ 을 구간 $[0, 1]$ 에서의 적분 형태로 바꾸었으나 그 이후 과정이 없는 경우

5등급 : ①단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우

6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우

7등급 : 백지 답안

<문제 2> (2)

① $2n - x = u$ 로 치환을 하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int_n^{2n} g'(x)f(2n-x)dx = \int_n^0 g'(2n-u)f(u)(-du) = \int_0^n g'(2n-u)f(u)du$$

② 따라서, $H(n)$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} H(n) &= \int_0^n f'(x)g(2n-x)dx - \int_n^{2n} g'(x)f(2n-x)dx \\ &= \int_0^n f'(x)g(2n-x)dx - \int_0^n g'(2n-u)f(u)du \\ &= \int_0^n \{f'(x)g(2n-x) - f(x)g'(2n-x)\}dx \end{aligned}$$

③ 부분적분법을 이용하여 다음의 정적분을 계산하면

$$\begin{aligned} H(n) &= \int_0^n \{f'(x)g(2n-x) - f(x)g'(2n-x)\}dx = [f(x)g(2n-x)]_0^n \\ &= f(n)g(n) - f(0)g(2n) \end{aligned}$$

④ $f(x) = a^x$ 이고, $g(x) = \sin \frac{\pi}{4}x$ 이므로 $H(n) = a^n \sin \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{n\pi}{2}$ 가 된다.

[채점 기준]

1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급 : ④단계까지 서술했으나, 계산 실수가 1-2개 있는 경우

3등급 : ③단계를 시도하여 $H(n)$ 을 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 합숫값들로 나타내었으나,
 $f(n)g(n) - f(0)g(2n)$ 가 나오지 않은 경우

4등급 : ②단계에서 $H(n)$ 을 구간 $[0, n]$ 에서의 적분 형태로 바꾸었으나 그 이후 과정이 없는

10점

<p>경우</p> <p>5등급 : ①단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우</p> <p>6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우</p> <p>7등급 : 백지 답안</p>	
<p>〈문제 2〉 (3)</p> <p>〈문제 2〉 (2)에서 $H(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sin \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{n\pi}{2}$ 임을 알 수 있고,</p> <p>$a_n = H(4n-3) + H(4n-1)$이라 하자.</p> <p>① $a_n = H(4n-3) + H(4n-1)$</p> $= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-3} \sin \frac{(4n-3)\pi}{4} - \sin \frac{(4n-3)\pi}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-1} \sin \frac{(4n-1)\pi}{4} - \sin \frac{(4n-1)\pi}{2}$ <p>가 되는데, 삼각함수의 대칭성과 주기성에 의해 모든 자연수 n에 대해</p> $\sin \frac{(4n-3)\pi}{2} + \sin \frac{(4n-1)\pi}{2} = 0 \text{ 이 성립하므로}$ <p>②</p> $a_n = H(4n-3) + H(4n-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-3} \sin \frac{(4n-3)\pi}{4} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-1} \sin \frac{(4n-1)\pi}{4}$ <p>이다.</p> <p>③ 이 때, a_{n+1}을 계산해보면,</p> $a_{n+1} = H(4n+1) + H(4n+3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1} \sin \frac{(4n+1)\pi}{4} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+3} \sin \frac{(4n+3)\pi}{4}$ <p>이다. 한편, $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$이므로</p> $\sin \frac{(4n+1)\pi}{4} = -\sin \frac{(4n-3)\pi}{4} \text{ 이고, } \sin \frac{(4n+3)\pi}{4} = -\sin \frac{(4n-1)\pi}{4} \text{ 이 성립한다.}$ <p>따라서, $a_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n$임을 알 수 있다.</p> <p>혹은 $a_1 = H(1) + H(3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{4} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$,</p> $a_2 = H(5) + H(7) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 \sin \frac{5\pi}{4} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^7 \sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{3}{16}$ <p>등 항을 직접 계산하여 수열 a_n이 공비가 $-\frac{1}{4}$인 등비수열임을 알 수 있다.</p> <p>④ 따라서, 첫째항은 $\frac{3}{4}$이고 공비가 $-\frac{1}{4}$이므로 주어진 급수의 합은 $\frac{\frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$이다.</p>	<p>10점</p>

[채점 기준]

- 1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
 2등급 : ④단계까지 서술하였으나, ④단계에서 계산 실수가 있는 경우
 3등급 : ③단계에서 a_n 의 관계식을 직접 찾거나 혹은 규칙을 찾으려고 시도한 경우
 4등급 : ②단계까지 계산한 경우
 5등급 : ①단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우
 6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우
 7등급 : 백지 답안

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

8. 예시답안

- (1) $2-x=u$ 로 치환을 하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int_1^2 g'(x)f(2-x)dx = \int_1^0 g'(2-u)f(u)(-du) = \int_0^1 g'(2-u)f(u)du$$

따라서, $H(1)$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} H(1) &= \int_0^1 f'(x)g(2-x)dx - \int_1^2 g'(x)f(2-x)dx = \int_0^1 f'(x)g(2-x)dx - \int_0^1 g'(2-u)f(u)du \\ &= \int_0^1 \{f'(x)g(2-x) - f(x)g'(2-x)\}dx \end{aligned}$$

부분적분법을 이용하여 다음의 정적분을 계산하면

$$H(1) = \int_0^1 \{f'(x)g(2-x) - f(x)g'(2-x)\}dx = [f(x)g(2-x)]_0^1 = f(1)g(1) - f(0)g(2) \text{ 이 되고,}$$

$f(1), g(1), f(0), g(2)$ 의 값을 이용하면 $H(1) = 2 \cdot 5 - 1 \cdot (-1) = 11$ 이 된다.

- (2) $2n-x=u$ 로 치환을 하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int_n^{2n} g'(x)f(2n-x)dx = \int_n^0 g'(2n-u)f(u)(-du) = \int_0^n g'(2n-u)f(u)du$$

따라서, $H(n)$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} H(n) &= \int_0^n f'(x)g(2n-x)dx - \int_n^{2n} g'(x)f(2n-x)dx = \int_0^n f'(x)g(2n-x)dx - \int_0^n g'(2n-u)f(u)du \\ &= \int_0^n \{f'(x)g(2n-x) - f(x)g'(2n-x)\}dx \end{aligned}$$

부분적분법을 이용하여 다음의 정적분을 계산하면

$$H(n) = \int_0^n \{f'(x)g(2n-x) - f(x)g'(2n-x)\}dx = [f(x)g(2n-x)]_0^n = f(n)g(n) - f(0)g(2n)$$

$f(x) = a^x$ 이고, $g(x) = \sin \frac{\pi}{4}x$ 이므로 $H(n) = a^n \sin \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{n\pi}{2}$ 가 된다.

(3) <문제 2> (2)에서 $H(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sin \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{n\pi}{2}$ 임을 알 수 있고, $a_n = H(4n-3) + H(4n-1)$ 이라 하자.

$$\begin{aligned} a_n &= H(4n-3) + H(4n-1) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-3} \sin \frac{(4n-3)\pi}{4} - \sin \frac{(4n-3)\pi}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-1} \sin \frac{(4n-1)\pi}{4} - \sin \frac{(4n-1)\pi}{2} \end{aligned}$$

인데, 삼각함수의 대칭성과 주기성에 의해 모든 자연수 n 에 대해

$$\sin \frac{(4n-3)\pi}{2} + \sin \frac{(4n-1)\pi}{2} = 0 \text{ 이 성립하므로}$$

$$a_n = H(4n-3) + H(4n-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-3} \sin \frac{(4n-3)\pi}{4} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n-1} \sin \frac{(4n-1)\pi}{4} \text{ 이다.}$$

이 때, a_{n+1} 을 계산해보면,

$$a_{n+1} = H(4n+1) + H(4n+3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1} \sin \frac{(4n+1)\pi}{4} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+3} \sin \frac{(4n+3)\pi}{4} \text{ 이다.}$$

한편, $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$ 이므로

$$\sin \frac{(4n+1)\pi}{4} = -\sin \frac{(4n-3)\pi}{4} \text{ 이고, } \sin \frac{(4n+3)\pi}{4} = -\sin \frac{(4n-1)\pi}{4} \text{ 이 성립한다.}$$

따라서, $a_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n$ 임을 알 수 있다.

첫째항은 $a_1 = H(1) + H(3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{4} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 이고 공비가 $-\frac{1}{4}$ 이므로 주어진

급수의 합은 $\frac{\frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$ 이다.

[성신여자대학교 문항정보]

1. 일반정보

유형	논술고사	
전형명	2022학년도 논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 (수학) / <문제 3>	
출제범위	교육과정 과목명	수학, 수학 I, 수학 II
	핵심개념 및 용어	원의 방정식, 삼각함수, 정적분의 활용
예상소요시간	25분	

2. 문항 및 제시문

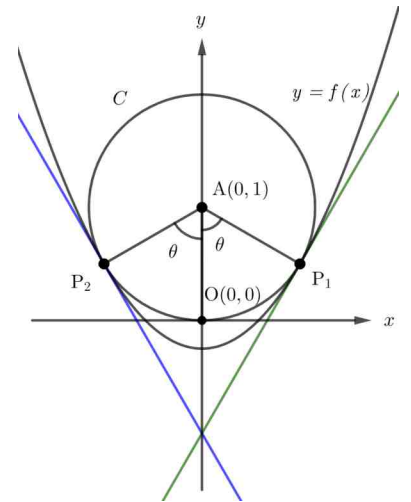
<문제 3> 중심이 $A(0, 1)$ 이고 원점 $O(0, 0)$ 을 지나는 원 C 위에 $\angle OAP_1 = \angle OAP_2 = \theta$ 인 두 점 P_1, P_2 가 그림과 같이 놓여 있다. 다음 질문에 답하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.) [총 25점]

(1) 원 C 와 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 두 점 P_1, P_2 에서 만나고, 점 P_1, P_2 에서 원 C 의 접선과 곡선 $y = f(x)$ 의 접선이 일치한다. $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때, 점 P_1 에서 원 C 의 접선의 방정식과 함수 $f(x)$ 를 구하시오. [8점]

(2) $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때, 원 C 와 곡선 $y = f(x)$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오. [10점]

(3) 원 C 와 y 축 위의 한 점에서 만나고, 원 C 위의 점 P_1 과 P_2 에서의

두 접선에 모두 접하는 원 중 작은 원의 반지름을 r_1 , 큰 원의 반지름을 r_2 라 하자. $\frac{r_2}{r_1} = 4$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값을 구하시오. [7점]



3. 제시문 요약

중심이 $A(0, 1)$ 이고 원점 $O(0, 0)$ 를 지나는 반지름이 1인 원 C 위의 두 점 P_1, P_2 는 그림과 같이 $\angle OAP_1 = \angle OAP_2 = \theta$ 인 점일 때, 이 두 점에서 원 C 의 접선을 구하고, 이 두 점을 지나면서 원 C 의 접선과 같은 접선을 갖는 이차함수를 구한 후, 원 C 와 이차함수의 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하는 문제이다. 그리고 원 C 와 y 축 위의 한 점에서 만나고, 원 C 위의 두 점에서의 접선에 모두 접하는 두 원의 반지름의 비가 주어졌을 때의 $\cos\theta$ 의 값을 구한다.

4. 출제의도

원의 접선이 갖는 성질과 직각삼각형의 삼각비, 접선의 의미, 이차함수의 성질 등을 이해하고 있는지를 확인하고자 한다. 그리고 호도법을 이용한 부채꼴의 넓이와 적분의 활용을 통한 두 곡선 사이의 넓이를 구함으로써 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는지 알아본다. 마지막으로 삼각비의 활용을 통해 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 확인한다.

5. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	[수학] - (2) 기하 - ③ 원의 방정식 [수학 I] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 (3) 적분 - ③ 정적분의 활용
성취기준 / 영역별 내용	[10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학 II 02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학 II 03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
수학	박교식 외 19인	동아출판	2018	136	교과서	재구성
수학 I	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	70-82	교과서	재구성
수학 II	박교식 외 19인	동아출판	2018	73-75, 137-142	교과서	재구성

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

6. 문항 해설

- (1) 점 P_1 의 좌표는 $\left(\sin \frac{\pi}{3}, 1 - \cos \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이고, 이 점에서 원 C 의 접선의 기울기는 $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 이므로 접선의 방정식은 $y = \sqrt{3}x - 1$ 이다. 같은 방법으로 점 P_2 에서의 접선의 방정식은 $y = -\sqrt{3}x - 1$ 이다. 이제 곡선 $y = f(x)$ 의 방정식을 구하자. 이 곡선은 y 축에 대칭인 두 점 P_1, P_2 를 지나므로 $b = 0$ 이다. 그리고 점 P_1 에서의 기울기는 $2a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$ 이므로 $a = 1$ 이다. 마지막으로 이 곡선은 점 P_1 을 지나므로 $\frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + c$ 로부터 $c = -\frac{1}{4}$ 이다. 따라서 $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}$ 이다.

- (2) 두 접선의 교점을 Q 라 두면 구하는 영역의 넓이는 사각형 AP_2QP_1 의 넓이에서 부채꼴 AP_2P_1 의 넓이와 곡선 $y = f(x)$ 와 두 접선 사이의 넓이를 빼주면 된다. 사각형 AP_2QP_1 의 넓이는 $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 이고 부채꼴의 넓이는 $\frac{\pi}{3}$, 그리고 곡선과 두 접선 사이의 넓이는 $2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{x^2 - \frac{1}{4} - (\sqrt{3}x - 1)\right\} dx = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이므로 구하는 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$ 이다.

(다른 방법: 직선 $y = 1 - \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ 와 $y = f(x)$ 사이의 넓이

$$2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{\frac{1}{2} - \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\right\} dx = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{에서 부채꼴 } AP_2P_1 \text{의 넓이를 빼고 삼각형 } AP_2P_1 \text{의}$$

넓이를 더해주면 된다. 부채꼴 AP_2P_1 의 넓이는 $\frac{\pi}{3}$ 이고 삼각형의 넓이는 $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이므로 구하는

넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$ 이다.)

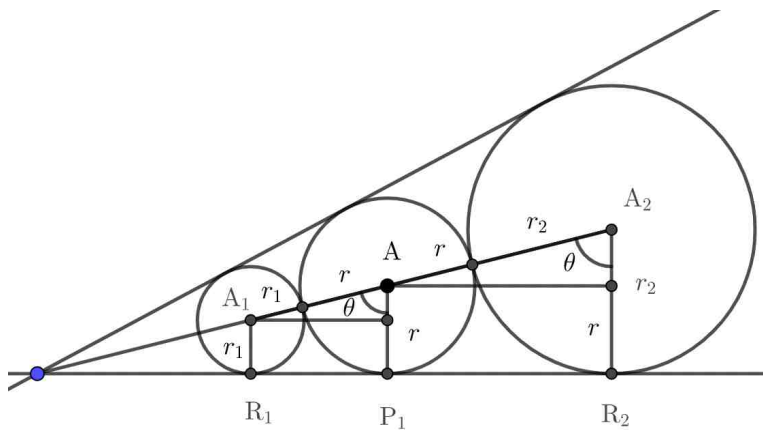
(3) 닳은 직각삼각형에 비례식을 적용하면 작은 원의 반지름은 $1 : \sec\theta = r_1 : (\sec\theta - 1 - r_1)$ 으로부터

$$r_1 = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \text{ 이다.}$$

큰 원의 반지름은 $1 : \sec\theta = r_2 : (\sec\theta + 1 + r_2)$ 으로부터 $r_2 = \frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}$ 이다.

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{(1 + \cos\theta)^2}{(1 - \cos\theta)^2} = 4 \text{로부터 } 3\cos^2\theta - 10\cos\theta + 3 = (3\cos\theta - 1)(\cos\theta - 3) = 0 \text{ 이 성립하고 이로부터}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$



(다른 방법: $\cos\theta = \frac{r - r_1}{r + r_1} = \frac{r_2 - r}{r_2 + r}$ 이 성립하고 $\frac{r_2}{r_1} = 4$ 이므로 이 식에 $r = 1$ 과 $r_2 = 4r_1$ 을 대입하고

정리하면 $(1 - r_1)(4r_1 + 1) = (r_1 + 1)(4r_1 - 1)$ 으로부터 $8r_1^2 = 2$ 가 되고 이로부터 $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 2$ 가 된다.

따라서 $\cos\theta = \frac{1}{3}$ 이다.)

7. 채점 기준

채점 기준	배점
<p><문제 3> (1)</p> <p>① 점 P_1 의 좌표는 $\left(\sin\frac{\pi}{3}, 1 - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이 점에서 원의 접선의 기울기는</p> <p>$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 이므로 접선의 방정식은 $y = \sqrt{3}x - 1$ 이다.</p>	8점

<p>② 주어진 곡선은 y축에 대칭인 두 점 P_1, P_2를 지나므로 $b = 0$이다.</p> <p>③ 점 P_1에서의 기울기는 $2a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$ 이므로 $a = 1$이다.</p> <p>④ 곡선은 점 P_1을 지나므로 $\frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + c$로부터 $c = -\frac{1}{4}$이다.</p> <p>따라서 $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}$이다.</p> <p>[채점 기준]</p> <p>1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음</p> <p>2등급: ④단계까지 서술하였으나 ②~④ 단계 또는 ①단계 계산에서 1개가 틀린 경우</p> <p>3등급: 접선의 방정식을 제대로 구하고 곡선의 방정식에서 실수가 2개인 경우, 또는 곡선의 방정식을 제대로 구하고 접선을 구하지 못한 경우</p> <p>4등급: ①을 옳게 계산하고 ②~④ 단계를 잘못된 방법으로 시도한 경우</p> <p>5등급: ①을 옳게 계산한 경우 또는 ①을 시도하지 않고 ②~④ 단계에서 1개 맞은 경우</p> <p>6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우</p> <p>7등급: 백지 답안</p>	
<p>〈문제 3〉 (2)</p> <p>① 두 접선의 교점을 Q라 두면 구하는 영역의 넓이는 사각형 AP_2QP_1의 넓이에서 부채꼴 AP_2P_1의 넓이와 $y = f(x)$와 두 접선 사이의 넓이를 빼주면 된다.</p> <p>② 사각형 AP_2QP_1의 넓이는 $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 이고</p> <p>③ 부채꼴의 넓이는 $\frac{\pi}{3}$,</p> <p>④ 곡선과 두 접선 사이의 넓이는 $2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ x^2 - \frac{1}{4} - (\sqrt{3}x - 1) \right\} dx = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이므로</p> <p>⑤ 구하는 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$이다.</p> <p>다른 방법:</p> <p>① 직선 $y = 1 - \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$와 $y = f(x)$사이의 넓이에서 부채꼴 AP_2P_1의 넓이를 빼고 삼각형 AP_2P_1의 넓이를 더해주면 된다.</p> <p>② 직선 $y = 1 - \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$와 $y = f(x)$사이의 넓이는</p>	<p>10점</p>

$$2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ \frac{1}{2} - \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) \right\} dx = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

③ 부채꼴의 넓이는 $\frac{\pi}{3}$,

④ 삼각형의 넓이는 $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

⑤ 구하는 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$ 이다.

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급: ①~⑤단계까지 서술하였으나 ②~⑤에서 계산 실수가 1개 있는 경우

3등급: ①을 옳게 서술하고 ②~④단계에서 2개의 계산이 맞은 경우

4등급: ①을 옳게 서술하고 ②~④단계에서 1개의 계산이 맞은 경우

5등급: ②~④단계에서 1개의 계산이 맞은 경우 또는 ①을 옳게 서술한 경우

6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우

7등급: 백지 답안

〈문제 3〉 (3)

① 작은 원의 반지름은 $1 : \sec \theta = r_1 : (\sec \theta - 1 - r_1)$ 으로부터 $r_1 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$

② 큰 원의 반지름은 $1 : \sec \theta = r_2 : (\sec \theta + 1 + r_2)$ 으로부터 $r_2 = \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}$

③ $\frac{r_2}{r_1} = \frac{(1 + \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^2} = 4$ 로부터 $3\cos^2 \theta - 10\cos \theta + 3 = (3\cos \theta - 1)(\cos \theta - 3) = 0$ 이 성립

④ $\cos \theta - 3 \neq 0$ 이므로 $\cos \theta = \frac{1}{3}$ 이다.

(참고: $\cos \theta$ 에 대한 식이 아닌 $\sec \theta$ 에 대한 식으로 서술해도 됨. 그리고 ③ 단계에서 삼각함수의 성질을 이용하여 양의 제곱근을 구한 후 정리해도 됨)

다른 방법:

① 삼각비로부터 $\cos \theta = \frac{r - r_1}{r + r_1} = \frac{r_2 - r}{r_2 + r}$ 이 성립

② $\frac{r_2}{r_1} = 4$ 이므로 이 식에 $r = 1$ 과 $r_2 = 4r_1$ 을 대입하고 정리

③ $(1 - r_1)(4r_1 + 1) = (r_1 + 1)(4r_1 - 1)$ 로부터 $8r_1^2 = 2$ 가 되고 이로부터 $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 2$

7점

④ $\cos\theta = \frac{1}{3}$ 이다.

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급: ④단계까지 서술하였으나 계산 실수가 1개 있는 경우

3등급: ①~③단계까지 옳게 서술한 경우

4등급: ①~②단계까지 옳게 서술한 경우

5등급: 비례식을 이용하여 원의 반지름 계산을 시도한 경우 또는 해당하는 원을 의미 있게 스케치한 경우

6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우

7등급: 백지 답안

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

8. 예시답안

(1) 점 P_1 의 좌표는 $\left(\sin\frac{\pi}{3}, 1 - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이고, 이 점에서 원의 접선의 기울기는 $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 이므로 접선의 방정식은 $y = \sqrt{3}x - 1$ 이다. 같은 방법으로 점 P_2 에서의 접선의 방정식은 $y = -\sqrt{3}x - 1$ 이다. 이제 곡선의 방정식을 구하자. 이 곡선은 y 축에 대칭인 두 점 P_1, P_2 를 지나므로 $b = 0$ 이다. 그리고 점 P_1 에서의 기울기는 $2a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$ 이므로 $a = 1$ 이다. 마지막으로 이 곡선은 점 P_1 을 지나므로 $\frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + c$ 로부터 $c = -\frac{1}{4}$ 이다. 따라서 $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}$ 이다.

(2) 두 접선의 교점을 Q 라 두면 구하는 영역의 넓이는 사각형 AP_2QP_1 의 넓이에서 부채꼴 AP_2P_1 의 넓이와 (1)에서 구한 곡선과 두 접선 사이의 넓이를 빼주면 된다. 사각형 AP_2QP_1 의 넓이는 $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 이고 부채꼴의 넓이는 $\frac{\pi}{3}$, 그리고 곡선과 두 접선 사이의 넓이는 $2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{x^2 - \frac{1}{4} - (\sqrt{3}x - 1)\right\}dx = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이므로 구하는 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$ 이다.

(다른 방법: 직선 $y = 1 - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ 와 $y = f(x)$ 사이의 넓이

$2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{\frac{1}{2} - \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\right\}dx = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 에서 부채꼴 AP_2P_1 의 넓이를 빼고 삼각형 AP_2P_1 의

넓이를 더해주면 된다. 부채꼴 AP_2P_1 의 넓이는 $\frac{\pi}{3}$ 이고 삼각형의 넓이는 $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이므로 구하는 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$ 이다.)

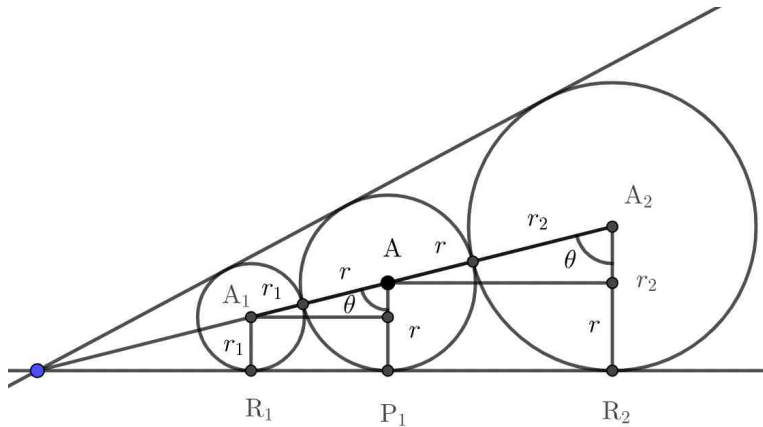
(3) 닮은 직각삼각형에 비례식을 적용하면 작은 원의 반지름은 $1 : \sec \theta = r_1 : (\sec \theta - 1 - r_1)$ 으로부터

$$r_1 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \text{ 이다.}$$

큰 원의 반지름은 $r_1 \sec \theta = r \sec \theta - r - r_1$ 으로부터 $r_2 = \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}$ 이다.

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{(1 + \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^2} = 4 \text{로부터 } 3\cos^2 \theta - 10\cos \theta + 3 = (3\cos \theta - 1)(\cos \theta - 3) = 0 \text{ 이 성립하고 이로부터}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$



(다른 방법: $\cos \theta = \frac{r - r_1}{r + r_1} = \frac{r_2 - r}{r_2 + r}$ 이 성립하고 $\frac{r_2}{r_1} = 4$ 이므로 이 식에 $r = 1$ 과 $r_2 = 4r_1$ 을 대입하고

정리하면 $(1 - r_1)(4r_1 + 1) = (r_1 + 1)(4r_1 - 1)$ 으로부터 $8r_1^2 = 2$ 가 되고 이로부터 $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 2$ 가 된다.

따라서 $\cos \theta = \frac{1}{3}$ 이다.)

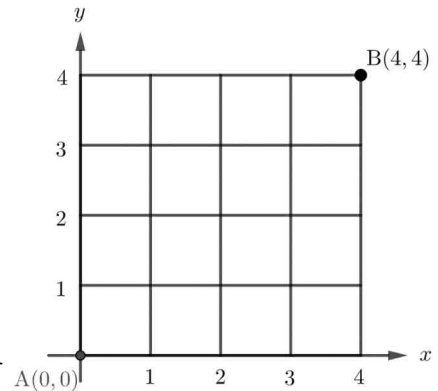
[성신여자대학교 문항정보]

1. 일반정보

유형	논술고사	
전형명	2022학년도 논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 (수학) / <문제 4>	
출제범위	교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	확률, 이산확률변수의 기댓값과 표준편차
예상소요시간	25분	

2. 문항 및 제시문

<문제 4> 다음 그림과 같이 $A(0,0)$, $B(4,4)$ 를 연결하는 도로망이 주어졌다. 성신이는 지점 A에서 출발하여 지점 B로 도로망을 따라 최단 경로로 이동하고, 수정이는 지점 B에서 출발하여 지점 A로 도로망을 따라 최단 경로로 이동한다. 도로망에서 두 지점 사이의 거리는 도로망을 따라 이동할 수 있는 최단 경로의 길이로 정의한다. 예를 들면 두 지점 $(1,2)$ 와 $(3,3)$ 사이의 거리는 $|3-1|+|3-2|=3$ 이다. 다음 질문에 답하시오. (단, 두 사람은 동시에 출발하여 같은 속력으로 이동하고, 갈림길에서 가능한 다음 경로는 모두 같은 확률로 선택된다.) [총 25점]



(1) 성신이와 수정이가 거리 4 만큼 이동한 후 멈추었을 때, 서로 만날 확률을 구하시오. [7점]

(2) 성신이가 거리 3 만큼 이동한 후 멈춘 지점을 P라 하고, 수정이가 거리 3 만큼 이동한 후 멈춘 지점을 Q라 하자. 성신이(지점 P)와 수정이(지점 Q) 사이의 거리를 확률변수 X 라 할 때, X 의 확률분포표를 구하시오. [10점]

(3) 위에서 구한 확률변수 X 의 확률분포표로부터 X 의 기댓값(평균)과 표준편차를 구하시오. [8점]

3. 제시문 요약

동시에 출발한 두 사람이 같은 속력으로 이동한다고 할 때, 지점 A에서 지점 B로 최단 경로를 따라 이동하는 성신이와 지점 B에서 지점 A로 최단 경로를 따라 이동하는 수정이가 거리 4 만큼 이동했을 때 만날 확률을 구하고, 이 두 사람이 거리 3 만큼 이동한 후 멈추었을 때 두 사람 간 거리를 확률변수로 갖는 확률분포표를 완성한 후 이로부터 기댓값(평균)과 표준편차를 계산한다.

4. 출제의도

확률의 의미를 알고 조건을 만족하는 경우의 수와 확률을 계산하는 능력이 있는지를 평가한다. 그리고 두 지점 사이의 최단 경로의 길이로 주어지는 거리를 이해하고 주어진 상황을 분석하여 확률분포표를 완성할 수 있는지를 확인한다. 마지막으로 확률분포표로부터 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있는지를 알아본다.

5. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ㉠ 순열과 조합 (3) 통계 - ㉠ 확률분포
성취기준 / 영역별 내용	[12확통01-01] 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다. [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
확률과 통계	김원경 외 14인	비상교육	2019	11-19, 77-82	교과서	재구성

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

6. 문항 해설

(1) 성신이가 거리 4 만큼 이동하는 경우의 수는 2^4 가지이고 수정이가 거리 4 만큼 이동하는 경우의 수도 2^4 가지이다. 이 두 사건은 독립이므로 전체 경우의 수는 2^8 가지이다. 성신이와 수정이가 각각 거리 4 만큼 이동한 후 만나려면 만나는 점은 $(0,4)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$, $(4,0)$ 중 하나이다. $(0,4)$ 또는 $(4,0)$ 에서 만나는 경우의 수는 각각 1가지, $(1,3)$ 또는 $(3,1)$ 에서 만나는 경우의 수는 각각 ${}_4C_1 \times {}_4C_3 = 16$ 가지, $(2,2)$ 에서 만나는 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_4C_2 = 36$ 가지로 총 70가지이다. 따라서 만날 확률은 $\frac{70}{2^8} = \frac{35}{128}$ 이다. (참고: ${}_nC_r$ 을 $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ 로 표현해도 된다.)

(2) 성신이와 수정이가 각각 거리 3 만큼 이동한 후 멈추었으므로 전체 경우의 수는 $2^3 \times 2^3 = 64$ 가지이다. 이때 두 점 P, Q사이의 거리는 2, 4, 6 중 하나이다. 거리가 4인 경우는 성신이의 좌표와 수정이의 좌표 순서로 $(0,3)-(3,2)$, $(1,2)-(4,3)$, $(2,1)-(1,4)$, $(3,0)-(2,3)$ 등 총 4가지이고 각각의 경우의 수는 3, 3, 3, 3가지로 총 12가지이다. 거리가 6인 경우는 성신이의 좌표와 수정이의 좌표 순서로 $(0,3)-(4,1)$, $(3,0)-(1,4)$ 등 총 2가지이고 각각의 경우의 수는 1, 1로 총 2가지이다. 거리가 2인 경우는 성신이의 좌표와 수정이의 좌표 순서로 $(0,3)-(1,4)$, $(0,3)-(2,3)$, $(1,2)-(1,4)$, $(1,2)-(2,3)$, $(1,2)-(3,2)$, $(2,1)-(2,3)$, $(2,1)-(3,2)$, $(2,1)-(4,1)$, $(3,0)-(3,2)$, $(3,0)-(4,1)$ 등 총 10가지이고 각각의 경우의 수는 1, 3, 3, 9, 9, 9, 9, 3, 3, 1가지로 총 50가지이다. 거리가 2인 경우의 수는 여사건을 이용하여 $64 - (2 + 12) = 50$ 로 계산해도 된다.

따라서 확률변수 X 의 확률분포표는 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{50}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{2}{64}$	1

(3) 기댓값(평균): $E(X) = 2 \times \frac{50}{64} + 4 \times \frac{12}{64} + 6 \times \frac{2}{64} = \frac{160}{64} = \frac{5}{2}$

분산: $V(X) = \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{50}{64} + \left(4 - \frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{12}{64} + \left(6 - \frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{2}{64} = \frac{1 \times 50 + 9 \times 12 + 49 \times 2}{256} = 1$

(다른방법: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{4 \times 50 + 16 \times 12 + 36 \times 2}{64} - \frac{25}{4} = 1$)

표준편차: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1$

7. 채점 기준

채점 기준	배점
<p>〈문제 4〉 (1)</p> <p>① 성신이가 거리 4 만큼 이동하는 경우의 수는 2^4가지이고 수정이가 거리 4 만큼 이동하는 경우의 수도 2^4가지이다. 이 두 사건은 독립이므로 전체 경우의 수는 2^8가지이다.</p> <p>② 성신이와 수정이가 거리 4 만큼 진행해서 만나는 점은 (0,4), (1,3), (2,2), (3,1), (4,0) 중 하나이다.</p> <p>③ (0,4) 또는 (4,0)에서 만나는 경우의 수는 각각 1가지, (1,3) 또는 (3,1)에서 만나는 경우의 수는 각각 ${}_4C_1 \times {}_4C_3 = 16$가지, (2,2)에서 만나는 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_4C_2 = 36$가지로 총 70가지이다.</p> <p>④ 만날 확률은 $\frac{70}{2^8} = \frac{35}{128}$이다.</p> <p>(참고: ${}_nC_r$ 을 $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ 로 표현해도 된다.)</p> <p>[채점 기준]</p> <p>1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음</p> <p>2등급: ④단계까지 서술하였으나 ①~③단계를 맞고 답이 틀린 경우</p> <p>3등급: ①~② 단계를 옳게 서술하고 ③단계 계산에서 1~2개 맞은 경우</p> <p>4등급: ①~② 단계를 옳게 서술하고 ③단계 계산을 접근하지 못한 경우</p> <p>5등급: ①을 옳게 계산한 경우 또는 ②를 옳게 서술한 경우</p> <p>6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우</p> <p>7등급: 백지 답안</p>	7점
<p>〈문제 4〉 (2)</p> <p>① 성신이가 거리 3 만큼 이동한 후 멈춘 지점 P는 (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0) 중 하나이고 수정이가 거리 3 만큼 이동한 후 멈춘 지점 Q는 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) 중 하나이다.</p> <p>② 가능한 P와 Q의 쌍은 16가지이고 P와 Q 사이의 거리는 2, 4, 6 중 하나이다.</p> <p>③ $X=6$인 경우는 (0, 3)–(4, 1), (3, 0)–(1, 4) 등 2가지이고 이 경우의 확률은 ${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{2}{64}$이다.</p> <p>$X=4$인 경우는 (0,3)–(3,2), (1,2)–(4,3), (2,1)–(1,4), (3,0)–(2,3) 등</p>	10점

4가지이고 이 경우의 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{12}{64} \text{이다.}$$

나머지 10가지 경우는 모두 거리가 2이고, 이때의 확률은 전체 확률의 합이 1이므로

$$1 - \left(\frac{2}{64} + \frac{12}{64}\right) = \frac{50}{64} \text{이다.}$$

(거리가 6인 경우의 수 2가지, 거리가 4인 경우의 수 12가지, 거리가 2인 경우의 수 50가지를 계산해도 된다.)

④ 따라서 확률변수 X 의 확률분포표는 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{50}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{2}{64}$	1

[채점 기준]

1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급: ④단계까지 서술하였으나 계산 실수가 1개 있는 경우

3등급: ①~②단계를 옳게 서술하고 ③단계의 계산을 1개 맞은 경우

4등급: ①~②단계를 옳게 서술한 경우

5등급: ① 또는 ② 중 하나를 옳게 서술한 경우

6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우

7등급: 백지 답안

<문제 4> (3)

① 기댓값(평균): $E(X) = 2 \times \frac{50}{64} + 4 \times \frac{12}{64} + 6 \times \frac{2}{64}$

② $= \frac{160}{64} = \frac{5}{2}$

③ 분산: $V(X) = \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{50}{64} + \left(4 - \frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{12}{64} + \left(6 - \frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{2}{64}$
 $= \frac{1 \times 50 + 9 \times 12 + 49 \times 2}{256} = 1$

(다른방법: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{4 \times 50 + 16 \times 12 + 36 \times 2}{64} - \frac{25}{4} = 1$)

④ 표준편차: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1$

8점

[채점 기준]

- 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
 2등급: ③단계까지 맞은 경우 또는 ④단계까지 서술하였으나 답이 틀린 경우(표준편차를 직접 계산하고 제곱근 안에 분산에 대한 식이 있으면 ③-④단계식의 서술로 인정)
 3등급: 기댓값을 옳게 계산하고 ③단계 분산의 식을 옳게 서술하였으나 계산 실수한 경우
 4등급: ②단계까지 옳게 계산한 경우
 5등급: ①의 기댓값 계산 방법을 제대로 서술한 경우
 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
 7등급: 백지 답안

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

8. 예시답안

- (1) 동시에 출발하여 같은 속력으로 이동하는 성신이와 수정이가 거리 4 만큼 이동한 후 만난다면 만나는 점은 (4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4) 중 하나이다. 성신이와 수정이가 거리 4 만큼 이동하는 경우의 수는 각각 2^4 이므로 총 2^8 가지이고 이 중 두 사람이 만날 경우의 수는

$${}_4C_4 \cdot {}_4C_0 + {}_4C_3 \cdot {}_4C_1 + {}_4C_2 \cdot {}_4C_2 + {}_4C_1 \cdot {}_4C_3 + {}_4C_0 \cdot {}_4C_4 = 1 + 16 + 36 + 16 + 1 = 70 \text{ 이므로}$$

확률은 $\frac{35}{128}$ 이다.

- (2) 성신이가 거리 3 만큼 이동한 후 멈춘 지점 P는 (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0) 중 하나이고 수정이가 거리 3 만큼 이동한 후 멈춘 지점 Q는 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) 중 하나이다. 가능한 P와 Q의 쌍은 16가지이고 P와 Q 사이의 거리는 2, 4, 6 중 하나이다. $X=6$ 인 경우는 (0, 3)-(4, 1), (3, 0)-(1, 4)

등 2가지이고 이 경우의 확률은 ${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{2}{64}$ 이다. $X=4$ 인 경우는

(0, 3)-(3, 2), (1, 2)-(4, 3), (2, 1)-(1, 4), (3, 0)-(2, 3) 등 4가지이고 이 경우의 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{12}{64} \text{ 이다.}$$

나머지 10가지 경우는 모두 거리가 2이고, 이때의 확률은 전체 확률의 합이 1이므로 $1 - \left(\frac{2}{64} + \frac{12}{64}\right) = \frac{50}{64}$ 이다.

따라서 확률변수 X 의 확률분포표는 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{50}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{2}{64}$	1

(3) 기댓값(평균): $E(X) = 2 \times \frac{50}{64} + 4 \times \frac{12}{64} + 6 \times \frac{2}{64} = \frac{160}{64} = \frac{5}{2}$

분산: $V(X) = \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{50}{64} + \left(4 - \frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{12}{64} + \left(6 - \frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{2}{64} = \frac{1 \times 50 + 9 \times 12 + 49 \times 2}{256} = 1$

(또는 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{4 \times 50 + 16 \times 12 + 36 \times 2}{64} - \frac{25}{4} = 1$)

표준편차: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1$