[부록2] 문항별 문항카드

문항카드 1

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학) 1차 / 문제 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 수학 II, 미적분, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	지수, 로그, 등차수열, 등비수열, 등비급수, 삼각함수, 속도와 거리, 중복조합
예상 소요 시간	34분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 물음에 답하시오.

[1.1] 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$에 대하여 $b_1 = 1$이고 $a_n^{b_n} = e$ (e는 자연상수)이다. 수열 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$이 공차가 $\ln\dfrac{2}{3}$인 등차수열일 때, 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 합을 구하시오.

[1.2] 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치는
$x = f(t) = 2\cos(at+b)+2$ ($a>0,\ 0 \le b \le 2\pi$인 상수)
이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v = f'(t)$는 최댓값이 3이고, 음이 아닌 모든 실수 t에 대하여 $c(x-2)^2 + 2v^2 = d$ (c, d는 상수)가 성립할 때, $a+b+c+d$의 값을 구하시오.

[1.3] 자연수 a, b, c, d에 대하여 $a(b+c+d) = 14$를 만족하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오.

3. 출제 의도

학생들에게 기본적으로 필요한 수학 지식을 묻는 문항들로 구성하였다. 고등학교에서 배우는 수학의 범위 내에서 지수, 로그, 삼각함수, 수열, 중복조합 등을 활용하여 문제에서 요구하는 결과를 얻을 수 있어야 한다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 지수를 이용하여 표현된 두 수열의 관계식에서 로그의 성질을 이용하여 주어진 수열이 등비

수열임을 밝힐 수 있는지 평가한다. 또한 등비급수의 합을 구할 수 있는지도 평가한다.

[1.2] 물체의 위치 및 속도가 사인함수, 코사인함수로 각각 주어질 때, 주어진 조건에서 미지수들을 찾아 올바르게 답할 수 있는지 평가한다.

[1.3] 주어진 조건을 만족하는 자연수들의 순서쌍의 개수를 바르게 셀 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8]
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
1.1	[수학 I] - (1) 지수함수와 로그함수 - 1 지수와 로그 [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [수학 I] - (3) 등차수열과 등비수열 - 1 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-01] 수열의 뜻을 안다. [미적분] - (1) 수열의 극한 - 2 급수 [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.
1.2	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-11] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 3 도함수의 활용 [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.
1.3	[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - 1 순열과 조합 [12확통01-01] 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다. [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	고성은 외	좋은책신사고	2021	26~31 115~121 123~127
	수학 I	황선욱 외	비상교육	2021	10~34 37~55
	수학 I	권오남 외	㈜교학사	2021	55~55
	수학 I	홍성복 외	지학사	2021	50~63
	수학 Ⅱ	고성은 외	좋은책신사고	2021	97~99
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2021	32~36 112~114
	확률과 통계	배종숙 외	㈜금성출판사	2020	25~29
	확률과 통계	김원경 외	비상교육	2020	11~20

5. 문항 해설

[1.1] 로그의 성질과 수열 $\{b_n\}$이 등차수열임을 이용하고, 등비급수의 공식을 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.

[1.2] 위치가 사인함수로 주어졌을 때, 속도는 코사인함수가 됨을 이용하여 위치 및 속도 함수를 구할 수 있다. 또한 속도가 0과 최대가 되는 조건을 주어진 식에 대입하여 미지수를 찾을 수 있다면 쉽게 해결할 수 있다.

[1.3] 주어진 개수의 문자에서 중복을 허락하여 주어진 개수만큼 선택하는 중복조합의 문제를 이해하고 공식을 통해 계산하는 문제로 이때 자연수에 한정된 조건만 고려하면 쉽게 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1.1	$b_1=1$이므로 $a_1=e$이다. $a_n^{b_n}=e$의 양변에 자연로그를 취하면 $b_n\ln a_n=1$이다. $\ln a_n=\dfrac{1}{b_n}$이고 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$이 공차가 $\ln\dfrac{2}{3}$인 등차수열이므로 $$\ln a_{n+1}=\ln a_n+\ln\frac{2}{3},\ a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$$ 이다. $\{a_n\}$은 첫째항이 e이고 공비가 $\dfrac{2}{3}$인 등비수열이다.	8
	$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{e}{1-\frac{2}{3}}=3e$$	4
1.2	$t=0$일 때 $x=0$이므로, $f(0)=2\cos b+2=0$이고 $b=\pi$이다. $v=f'(t)=2a\sin at$의 최댓값은 $2a$이므로 $a=\dfrac{3}{2}$이다. 즉 다음을 얻을 수 있다. $$x=2\cos\left(\frac{3}{2}t+\pi\right)+2=-2\cos\left(\frac{3}{2}t\right)+2,\ v=3\sin\left(\frac{3}{2}t\right)$$	6
	이를 $c(x-2)^2+2v^2=d$에 대입하면, $$4c\cos^2\left(\frac{3}{2}t\right)+18\sin^2\left(\frac{3}{2}t\right)=d$$ 이다. $t=\dfrac{\pi}{3}$이면 $d=18$, $t=0$이면 $4c=d$ 즉 $c=\dfrac{9}{2}$이다. 따라서 $$a+b+c+d=\frac{3}{2}+\pi+\frac{9}{2}+18=\pi+24$$ 이다.	6
1.3	14의 약수는 $1,2,7,14$로 모두 4개이며, $b+c+d\geq 3$이므로 a는 1 또는 2이다. $a=1$일 때, $b+c+d=14$를 만족하는 자연수 b,c,d의 순서쌍의 개수는 $${}_{3}\mathrm{H}_{14-3}={}_{13}\mathrm{C}_{11}=78$$ 이다.	4

	마찬가지로 $a=2$일 때, $b+c+d=7$을 만족하는 자연수 b,c,d의 순서쌍의 개수는 $${}_3\mathrm{H}_{7-3}={}_6\mathrm{C}_4=15$$ 이다.	3
	따라서 위 조건을 만족하는 순서쌍 (a,b,c,d)는 총 93개이다.	3

7. 예시 답안

[1.1] $b_1=1$이므로 $a_1=e$이다. $a_n^{b_n}=e$의 양변에 자연로그를 취하면 $b_n\ln a_n=1$이다. $\ln a_n=\dfrac{1}{b_n}$이고 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$이 공차가 $\ln\dfrac{2}{3}$인 등차수열이므로

$$\ln a_{n+1}=\ln a_n+\ln\frac{2}{3},\ a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$$

이다. $\{a_n\}$은 첫째항이 e이고 공비가 $\dfrac{2}{3}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{e}{1-\dfrac{2}{3}}=3e$$

이다.

[1.2] $t=0$일 때 $x=0$이므로, $f(0)=2\cos b+2=0$ 이고 $b=\pi$이다. $v=f'(t)=2a\sin at$의 최댓값은 $2a$이므로 $a=\dfrac{3}{2}$이다. 즉

$$x=2\cos\left(\frac{3}{2}t+\pi\right)+2=-2\cos\left(\frac{3}{2}t\right)+2,\ v=3\sin\left(\frac{3}{2}t\right)$$

이다. 이를 $c(x-2)^2+2v^2=d$ 에 대입하면,

$$4c\cos^2\left(\frac{3}{2}t\right)+18\sin^2\left(\frac{3}{2}t\right)=d$$

이다. $t=\dfrac{\pi}{3}$이면 $d=18$, $t=0$이면 $4c=d$ 즉 $c=\dfrac{9}{2}$이다. 따라서

$$a+b+c+d=\frac{3}{2}+\pi+\frac{9}{2}+18=\pi+24$$

이다.

[1.3] 14의 약수는 $1,2,7,14$로 모두 4개이며, $b+c+d\geq 3$이므로 a는 1 또는 2이다. $a=1$일 때, $b+c+d=14$를 만족하는 자연수 b,c,d의 순서쌍의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_{14-3}={}_{13}\mathrm{C}_{11}=78$$

이다. 마찬가지로 $a=2$일 때, $b+c+d=7$을 만족하는 자연수 b,c,d의 순서쌍의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_{7-3}={}_6\mathrm{C}_4=15$$

이다. 따라서 위 조건을 만족하는 순서쌍 (a,b,c,d)는 총 93개이다.

문항카드 2

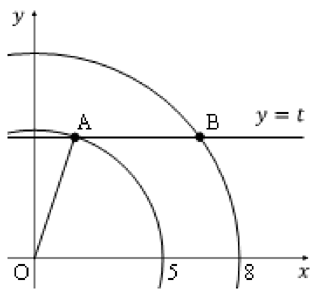
1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학) 1차 / 문제 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I, 미적분
	핵심개념 및 용어	원의 방정식, 직선의 방정식, 사인법칙, 코사인법칙
예상 소요 시간	33분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

실수 $t(0<t<5)$에 대하여 직선 $y=t$가 원 $x^2+y^2=25$, 원 $x^2+y^2=64$와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 A, B라고 하자.



[2.1] $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$일 때, t의 값을 구하시오.

[2.2] 문항 [2.1]에서 구한 t에 대하여 $\theta_1=\angle\mathrm{OAB}$, $\theta_2=\angle\mathrm{ABO}$라고 할 때, $\cos(\theta_1-\theta_2)$의 값을 구하시오.

[2.3] 문항 [2.1]에서 구한 t에 대하여 삼각형 AOB의 외접원의 반지름의 길이를 구하시오.

3. 출제 의도

삼각형은 다각형의 기본이 되는 도형이다. 고교과정에서 삼각함수의 여러 성질을 배운 학생이라면 삼각형의 변의 길이와 각의 크기 사이의 관계식을 찾을 수 있어야 한다. 문제를 해결하기 위해서는 좌표평면 위에 놓인 도형을 수식으로 바꾸어 방정식을 풀 수 있어야 하고, 삼각함수의 법칙들을 활용할 수 있어야 한다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 조건을 만족하는 직선의 방정식을 구하기 위하여 두 점 사이의 거리공식을 이용한 방정식을 세우고 이 방정식의 해를 구할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 주어진 삼각형의 각에 대하여 사인값, 코사인값을 구할 수 있는지와 삼각함수의 덧셈정리를 활용할 수 있는지 평가한다.
[2.3] 사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8]
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	[수학] - (3) 도형의 방정식 - 3 원의 방정식 [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.
2.1	[수학] - (3) 도형의 방정식 - 1 평면좌표 [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
2.2	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
2.3	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외	㈜교학사	2021	102~103 134~139
	수학	고성은 외	좋은책신사고	2021	105~107 137~141
	수학 I	권오남 외	㈜교학사	2020	97~102
	수학 I	홍성복 외	지학사	2021	95~100
	미적분	황선욱 외	미래엔	2020	65~69
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2021	68~72

5. 문항 해설

[2.1] 좌표평면상의 두 점의 거리를 구하는 식을 이용하여 원하는 직선의 방정식을 구하는 문제로 간단한 사차방정식을 풀 수 있다면 쉽게 해결할 수 있다.
[2.2] 삼각형의 두 각에 대한 정보를 묻는 문제로 코사인법칙과 삼각함수의 덧셈정리를 적용할 수 있으면 쉽게 해결할 수 있다.

[2.3] 다루고 있는 삼각형에 외접하는 원에 대한 정보를 묻는 문제로 사인법칙을 알고 있으면 쉽게 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2.1	점 A의 좌표는 $(\sqrt{25-t^2}, t)$, 점 B의 좌표는 $(\sqrt{64-t^2}, t)$이고 $\overline{\mathrm{OA}}=5$이므로 $$\sqrt{64-t^2}-\sqrt{25-t^2}=5$$ 이고 방정식을 풀면 $t=\frac{24}{5}$이다.	7
2.2	코사인법칙에 의해 $$\overline{\mathrm{OB}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2-2\overline{\mathrm{OA}}\ \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta_1$$ $$64=25+25-2\times5\times5\cos\theta_1$$ $\cos\theta_1=-\frac{7}{25}$, $\sin\theta_1=\sqrt{1-\left(-\frac{7}{25}\right)^2}=\frac{24}{25}$ $\cos2\theta_2=\cos(\pi-\theta_1)=-\cos\theta_1=\frac{7}{25}$, $\cos(\theta_2+\theta_2)=2\cos\theta_2\cos\theta_2-1$이므로 $\cos^2\theta_2=\frac{16}{25}$이다. θ_2는 예각이므로 $\cos\theta_2=\frac{4}{5}$이고 $\sin\theta_2=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$ 이다.	12
	따라서 $$\cos(\theta_1-\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2=-\frac{7}{25}\times\frac{4}{5}+\frac{24}{25}\times\frac{3}{5}=\frac{44}{125}$$ 이다.	4
2.3	사인법칙에 의해 삼각형 AOB의 외접원의 반지름의 길이는 $$\frac{1}{2}\times\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\sin\theta_1}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{\frac{24}{25}}=\frac{25}{6}$$ 이다.	10

7. 예시 답안

[2.1] 점 A의 좌표는 $(\sqrt{25-t^2}, t)$, 점 B의 좌표는 $(\sqrt{64-t^2}, t)$이고 $\overline{\mathrm{OA}}=5$이므로

$$\sqrt{64-t^2}-\sqrt{25-t^2}=5$$

이고 방정식을 풀면 $t=\frac{24}{5}$이다.

[2.2] 코사인법칙에 의해

$$\overline{\mathrm{OB}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2 - 2\overline{\mathrm{OA}}\ \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta_1$$
$$64 = 25 + 25 - 2\times 5\times 5\cos\theta_1$$

이고 따라서 $\cos\theta_1 = -\dfrac{7}{25}$ 이다. 여기서 $\sin\theta_1 = \sqrt{1-\left(-\dfrac{7}{25}\right)^2} = \dfrac{24}{25}$ 이다.

$$\cos 2\theta_2 = \cos(\pi - \theta_1) = -\cos\theta_1 = \frac{7}{25},\ \cos(\theta_2 + \theta_2) = 2\cos\theta_2\cos\theta_2 - 1$$

이므로 $\cos^2\theta_2 = \dfrac{16}{25}$ 이다. θ_2는 예각이므로 $\cos\theta_2 = \dfrac{4}{5}$ 이다. 또 $\sin\theta_2 = \sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = \dfrac{3}{5}$ 이다. 따라서

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 = -\frac{7}{25}\times\frac{4}{5} + \frac{24}{25}\times\frac{3}{5} = \frac{44}{125}$$

이다.

[2.3] 사인법칙에 의해 삼각형 AOB의 외접원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\sin\theta_1} = \frac{1}{2}\times\frac{8}{\frac{24}{25}} = \frac{25}{6}$$

이다.

문항카드 3

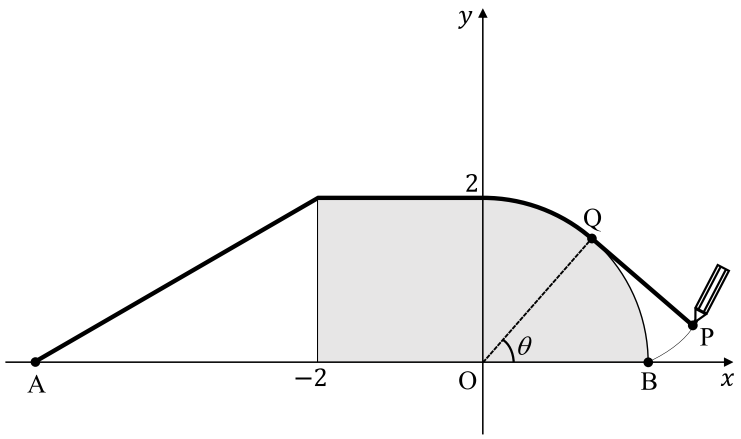
1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학) 1차 / 문제 3번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I, 미적분
	핵심개념 및 용어	원의 방정식, 직선의 방정식, 사인법칙, 코사인법칙, 곡선의 길이, 매개변수 방정식, 정적분
예상 소요 시간	33분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

아래 그림의 색칠한 부분과 같이 세 직선 $x=-2$, $y=0$, $y=2$와 곡선 $y=\sqrt{4-x^2}$ $(0 \le x \le 2)$으로 둘러싸인 도형이 있다.



(가) 길이가 $6+\pi$인 실의 한쪽 끝을 점 $\mathrm{A}(-2-2\sqrt{3}, 0)$에 고정하고, 다른 쪽 끝에는 연필 끝을 매달자. 도형의 둘레를 따라 실을 팽팽하게 당기면 연필 끝은 점 $\mathrm{B}(2, 0)$에 놓인다.

(나) 곡선 $y=\sqrt{4-x^2}$ $(0 \le x \le 2)$ 위의 한 점을 Q, $\theta = \angle \mathrm{QOB}$라고 하자.

(다) 실을 팽팽하게 당기면서 움직일 때 연필 끝의 위치인 점 P가 그리는 도형을 생각하자.

[3.1] 점 Q의 좌표를 θ에 대한 식으로 나타내시오.

[3.2] 연필이 매달린 실을 점 Q에서 곡선 $y=\sqrt{4-x^2}$의 접선 방향으로 팽팽하게 당겼을 때, 점 P의 좌표를 θ에 대한 식으로 나타내시오.

[3.3] 문항 [3.2]에서 점 Q가 점 B에서 점 $(0, 2)$까지 곡선 $y=\sqrt{4-x^2}$ 위를 움직일 때, 점 P가 그리는 도형의 길이를 구하시오.

[3.4] 점 P는 점 B에서 출발하여 반직선 OA와 만날 때까지 반시계방향으로 움직인다. 이때 점 P가 그리는 도형의 길이를 구하시오.

3. 출제 의도

제시문에 설명된 내용을 이해하고, 주어진 조건을 적절히 활용하여 필요한 결과를 수학적으로 도출할 수 있는 능력은 이공계 대학 교육을 받는 학생에게는 필수적이다. 이 문제를 풀기 위한 개념은 삼각함수, 삼각함수의 미분, 곡선의 길이 등 고등학생이 알아야 할 기본적인 내용이다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 원 위에 있는 점의 좌표를 삼각함수를 이용하여 매개방정식으로 표현할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 제시문에서 설명하는 곡선의 형태를 이해하고 매개방정식을 구할 수 있는지 평가한다.
[3.3] 문항 [3.2]에서 매개방정식으로 구한 곡선의 길이를 정적분을 이용하여 계산할 수 있는지 평가한다.
[3.4] 문항 [3.3]에서 구한 곡선의 길이를 포함하여 제시문에서 설명하는 곡선 전체의 길이를 계산할 수 있는지 평가한다. 조건에 따라 세 개의 곡선으로 나누어 길이를 구할 수 있어야 한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8]
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	[수학] - (3) 도형의 방정식 - 2 직선의 방정식 [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. [수학] - (3) 도형의 방정식 - 3 원의 방정식 [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다.
3.1	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프 [12수학Ⅰ02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.
3.2	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프 [12수학Ⅰ02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
3.3	[미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용 [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	고성은 외	좋은책신사고	2021	119~121 133~135
	수학 I	고성은 외	좋은책신사고	2021	65~69 70~74 75~85
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2021	70~71 160~164

5. 문항 해설

[3.1] 삼각함수의 정의를 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.
[3.2] 중심각의 크기와 호의 길이와의 관계를 이해하고 삼각함수의 정의를 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.
[3.3] 삼각함수의 도함수를 계산하고, 곡선의 길이를 정적분을 이용하여 표현할 수 있다면 쉽게 해결할 수 있다.
[3.4] 제시문에서 설명하는 상황을 잘 이해하고 부채꼴의 호의 길이를 계산할 수 있으면 쉽게 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3.1	점 Q의 좌표는 $(2\cos\theta, 2\sin\theta)$이다.	4
3.2	$\overline{\mathrm{PQ}}$는 호 QB의 길이와 같으므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\theta$이다.	2
	점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라고 하면, $\angle\mathrm{QPH}=\frac{\pi}{2}-\theta$이고 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$이므로 $$x=2\cos\theta+2\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2(\cos\theta+\theta\sin\theta)$$ $$y=2\sin\theta-2\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2(\sin\theta-\theta\cos\theta)$$ 이다. 따라서 점 P의 좌표는$(2(\cos\theta+\theta\sin\theta),\, 2(\sin\theta-\theta\cos\theta))$이다.	6
3.3	$\frac{dx}{d\theta}=2\theta\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=2\theta\sin\theta$이고 θ의 범위는 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$이다.	3
	따라서 점 P가 그리는 도형의 길이 l_1은 $$l_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\theta\,d\theta=\frac{\pi^2}{4}$$ 이다.	6

3.4	정사각형의 윗변에 있는 실이 움직이면 점 P는 반지름의 길이가 $2+\pi$인 원에서 중심각 $\frac{\pi}{6}$인 호를 따라 움직인 것이므로 이때의 거리 l_2는 $$l_2=(2+\pi)\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2}{6}$$ 이다.	4
	모든 실이 움직여서 점 P가 x축과 다시 만날 때까지 반시계방향으로 움직이면 점 P는 반지름의 길이가 $6+\pi$인 원에서 중심각 $\frac{5}{6}\pi$인 호를 따라 움직인 것이므로 이때의 거리 l_3는 $$l_3=(6+\pi)\times\frac{5}{6}\pi=5\pi+\frac{5}{6}\pi^2$$ 이다.	4
	따라서 점 P가 그리는 도형의 길이는 $$l_1+l_2+l_3=\frac{16}{3}\pi+\frac{5}{4}\pi^2$$ 이다.	4

7. 예시 답안

[3.1] 점 Q의 좌표는 $(2\cos\theta, 2\sin\theta)$이다.

[3.2] $\overline{\mathrm{PQ}}$는 호 QB의 길이와 같으므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\theta$이다. 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라고 하면, $\angle\mathrm{QPH}=\frac{\pi}{2}-\theta$이고 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$이므로

$$x=2\cos\theta+2\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2(\cos\theta+\theta\sin\theta)$$
$$y=2\sin\theta-2\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2(\sin\theta-\theta\cos\theta)$$

이다. 따라서 점 P의 좌표는 $(2(\cos\theta+\theta\sin\theta),\ 2(\sin\theta-\theta\cos\theta))$이다.

[3.3] $\frac{dx}{d\theta}=2\theta\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=2\theta\sin\theta$이고 θ의 범위는 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$이다.
따라서 점 P가 그리는 도형의 길이 l_1은

$$l_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\theta\,d\theta=\frac{\pi^2}{4}$$

이다.

[3.4] 정사각형의 윗변에 있는 실이 움직이면 점 P는 반지름의 길이가 $2+\pi$인 원에서 중심각 $\frac{\pi}{6}$인 호를 따라 움직인 것이므로 이때의 거리 l_2는

$$l_2=(2+\pi)\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2}{6}$$

이다. 모든 실이 움직여서 점 P가 x축과 다시 만날 때까지 반시계방향으로 움직이면 점 P는 반지름의 길이가 $6+\pi$인 원에서 중심각 $\frac{5}{6}\pi$인 호를 따라 움직인 것이므로 이때의 거리 l_3는

$$l_3=(6+\pi)\times\frac{5}{6}\pi=5\pi+\frac{5}{6}\pi^2$$

이다. 따라서 점 P가 그리는 도형의 길이는

$$l_1+l_2+l_3=\frac{16}{3}\pi+\frac{5}{4}\pi^2$$

이다.

문항카드 4

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학)-2차 / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I, 수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	함수의 미분, 접선의 방정식, 수열의 합, 정적분, 무리함수
예상 소요 시간	34분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 물음에 답하시오.

[1.1] 0이 아닌 실수 a에 대하여 직선 $y=ax-3$과 곡선 $y=a\sqrt{x}$가 접할 때, 접점의 좌표와 a의 값을 구하시오.

[1.2] 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_1b_1=1$이고 $a_2b_1+b_2a_1=0$이다. 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 b_1과 같고 공비가 수열 $\{a_n\}$의 공비와 같은 등비수열이고, 수열 $\{d_n\}$은 첫째항이 a_1과 같고 공비가 수열 $\{b_n\}$의 공비와 같은 등비수열이다. 급수의 합이

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1,\ \sum_{n=1}^{\infty} d_n = 2$$

일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)$의 합을 구하시오.

[1.3] 곡선 $y=x^3-6x^2+7$과 곡선 위의 점 $(0,\,7)$에서의 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

3. 출제 의도

수학을 배우는 목적 중 하나는 수학 지식과 이해력을 활용하여 다양한 문제의 해결 능력을 배양하는 데 있다. 접선의 방정식, 수열의 합, 정적분과 넓이와의 관계, 함수의 미분 등 고교 수학의 핵심적인 개념을 문제 해결에 적용할 수 있는지 평가하는 문제이다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 무리함수로 표현된 곡선의 한 점에 접하는 접선의 방정식을 구할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 등비수열의 첫째항과 공비를 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있는지 평가한다.
[1.3] 미분을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는지와 함께 적분을 활용하여 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
1.1	[수학] - (4) 함수 - ② 유리함수와 무리함수 [10수학04-05] 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다. [미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
1.2	[수학 I] - (3) 수열 - ① 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [미적분] - (1) 수열의 극한 - ② 급수 [12미적01-06] 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
1.3	[수학II] - (2) 미분 - ② 도함수 [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [수학II] - (3) 적분 - ② 정적분 [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	홍성복 외	지학사	2021	243~249
	수학 I	홍성복 외	지학사	2020	125~131
	수학 II	고성은 외	좋은책신사고	2020	72~74
	수학 II	권오남 외	(주)교학사	2020	146~148
	미적분	홍성복 외	지학사	2021	88~97 111~113
	미적분	김원경 외	비상교육	2020	28~34

5. 문항 해설

[1.1] 무리함수를 미분할 수 있고 미분을 활용해서 접선의 방정식을 구할 수 있으면 쉽게 해결할 수 있다.

[1.2] 등비급수의 합을 등비수열의 첫째항과 공비를 이용해서 구할 수 있으면 쉽게 해결할 수 있다.

[1.3] 접선의 방정식을 구할 수 있고, 정적분을 활용해서 두 곡선 사이의 넓이를 구할 수 있으면 쉽게 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

<table>
<tr><th>하위 문항</th><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1.1</td><td>$f(x)=ax-3$, $g(x)=a\sqrt{x}$ 라고 하자. 접점에서의 접선이 $y=f(x)$ 이므로
$a=g'(x)=\frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}}$, $x=\frac{1}{4}$ 이다.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$f(x)$와 $g(x)$에 $x=\frac{1}{4}$을 대입하면 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{a}{4}-3=a\sqrt{\frac{1}{4}}=g\left(\frac{1}{4}\right)$ 이므로 $a=-12$ 이다. 앞서 구한 $x=\frac{1}{4}$과 $a=-12$를 직선의 방정식에 대입하면 $y=-6$ 이다. 따라서 접점의 좌표와 상수 a는 각각 $\left(\frac{1}{4},\ -6\right)$과 -12이다.</td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1.2</td><td>수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라고 하면 수열 $\{b_n\}$의 첫째항은 $\frac{1}{a_1}$이고 공비는 $-r$이다. 따라서
$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\frac{\frac{1}{a_1}}{1-r}=1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}d_n=\frac{a_1}{1+r}=2\ (-1<r<1)$$
이다. 첫 번째 식으로부터 구한 $a_1=\frac{1}{1-r}$을 두 번째 식에 대입하면
$$(1-r)(1+r)=\frac{1}{2}$$
이므로, $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $r=-\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>$r=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $a_1=2+\sqrt{2}$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{a_1}{1-r}+2\frac{\frac{1}{a_1}}{1+r}=12$
이다. 마찬가지로 $r=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $a_1=2-\sqrt{2}$ 이고
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{a_1}{1-r}+2\frac{\frac{1}{a_1}}{1+r}=12$이다. 따라서 구하는 값은 12이다.</td><td>9</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1.3</td><td>곡선 $y=f(x)=x^3-6x^2+7$의 함수를 미분하면 $f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$
이다. 따라서 점 $(0,7)$에서 곡선에 접하는 접선의 기울기는 0이고 접선의 방정식은 $y=7$이다.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>접선 $y=7$과 곡선 $y=f(x)$의 교점의 x좌표는 $x^3-6x^2=x^2(x-6)=0$으로부터 $x=0$, $x=6$이다. 또한 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면
<table><tr><td>x</td><td>$\cdots$</td><td>0</td><td>$\cdots$</td><td>4</td><td>$\cdots$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↗</td><td>7
(극대)</td><td>↘</td><td>-25
(극소)</td><td>↗</td></tr></table>
이므로, $y=f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, 구간 $0\le x\le 6$에서 $y=7$보다 아래에 위치한다. 따라서 구하는 도형의 넓이는
$$\int_0^6\{7-(x^3-6x^2+7)\}dx=\int_0^6(6x^2-x^3)dx=\left[2x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^6=108$$
이다.</td><td>7</td></tr>
</table>

7. 예시 답안

[1.1] $f(x)= ax-3$, $g(x)=a\sqrt{x}$ 라고 하자. 접점에서의 접선이 $y=f(x)$이므로

$$a=g'(x)=\frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}},\ x=\frac{1}{4}$$

이다. $f(x)$와 $g(x)$에 $x=\frac{1}{4}$을 대입하면

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{a}{4}-3=a\sqrt{\frac{1}{4}}=g\left(\frac{1}{4}\right)$$

이므로 $a=-12$이다. 앞서 구한 $x=\frac{1}{4}$과 $a=-12$를 직선의 방정식에 대입하면

$$y=-12\times\frac{1}{4}-3=-6$$

이다. 따라서 접점의 좌표와 상수 a는 각각 $\left(\frac{1}{4},\ -6\right)$과 -12이다.

[1.2] 수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라고 하면 수열 $\{b_n\}$의 첫째항은 $\frac{1}{a_1}$이고 공비는 $-r$이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\frac{\frac{1}{a_1}}{1-r}=1,\ \sum_{n=1}^{\infty}d_n=\frac{a_1}{1+r}=2\ (-1<r<1)$$

이다. 첫 번째 식으로부터 구한 $a_1=\frac{1}{1-r}$을 두 번째 식에 대입하면

$$(1-r)(1+r)=\frac{1}{2}$$

이므로, $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $r=-\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

$r=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $a_1=2+\sqrt{2}$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{a_1}{1-r}+2\frac{\frac{1}{a_1}}{1+r}=(6+4\sqrt{2})+2(3-2\sqrt{2})=12$$

이다. 마찬가지로 $r=-\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $a_1=2-\sqrt{2}$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{a_1}{1-r}+2\frac{\frac{1}{a_1}}{1+r}=(6-4\sqrt{2})+2(3+2\sqrt{2})=12$$

이다. 따라서 구하는 값은 12이다.

[1.3] 곡선 $y=f(x)=x^3-6x^2+7$의 함수를 미분하면

$$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$$

이다. 따라서 점 $(0,7)$에서 곡선에 접하는 접선의 기울기는 0이고 접선의 방정식은 $y=7$이다. 접선 $y=7$과 곡선 $y=f(x)$의 교점의 x좌표는

$$x^3-6x^2=x^2(x-6)=0$$

이므로 $x=0$, $x=6$이다. 또한 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	7 (극대)	$\searrow$	-25 (극소)	$\nearrow$

이므로, $y=f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, 구간 $0\le x\le 6$에서 $y=7$보다 아래에 위치한다.
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^6\{7-(x^3-6x^2+7)\}dx=\int_0^6(6x^2-x^3)dx=\left[2x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^6=108$$

이다.

문항카드 5

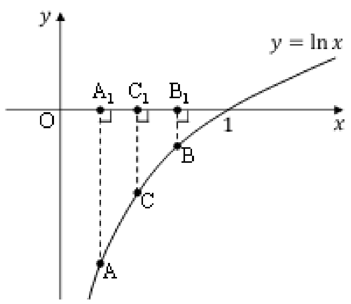
1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학)-2차 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	로그함수, 도함수, 넓이와 적분, 최댓값과 최솟값
예상 소요 시간	33분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

아래 그림과 같이 곡선 $y=\ln x$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(a, \ln a)$와 $\mathrm{B}(b, \ln b)$ $(0<a<b<1)$가 있다.



(가) 곡선 위의 점 C에서의 접선이 직선 AB와 평행하다.

(나) 점 A, B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A_1, B_1, C_1이라고 하자.

[2.1] 점 C의 x좌표를 a와 b에 대한 식으로 나타내시오.

[2.2] 곡선 $y=\ln x$와 두 선분 AC_1, BC_1으로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 a와 b에 대한 식으로 나타내시오.

[2.3] $b=2a$일 때, 문항 [2.2]의 넓이 S의 최댓값을 구하시오.

3. 출제 의도

정적분, 부분적분법, 도함수, 최댓값 등에 관한 내용을 알고 있는지 평가하는 문제이다. 이를 위하여 자연로그 함수 그래프 위에 있는 임의의 두 점에 대하여 제시문에 설명된 도형을 이해하고, 그 도형의 넓이를 구할 수 있는지 확인하고자 하였다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 접선의 기울기를 알고 있는 어떤 점의 좌표를 구할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 로그함수의 그래프와 두 직선으로 이루어진 도형의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있는지 평가한다. 로그함수의 부분적분을 계산할 수 있어야 하고, 로그의 성질을 적절히 이용하여 정적분 결과를 간단히 정리할 수 있어야 한다.
[2.3] 문항 [2.2]에서 구한 도형의 넓이를 나타내는 함수의 최댓값을 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	[수학Ⅰ] - (1) 함수 - 2 지수함수와 로그함수 [12수학Ⅰ01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.
2.1	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 1 미분계수 [12수학Ⅱ02-02] 미분계수의 기하적 의미를 이해한다. [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
2.2	[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법 [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 -2 정적분의 활용 [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
2.3	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 3 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	고성은 외	좋은책신사고	2021	43~45
	수학 Ⅱ	고성은 외	좋은책신사고	2021	53~58
	수학 Ⅱ	고성은 외	좋은책신사고	2021	83~90
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2021	55~57 102~108 140~144 155~156

5. 문항 해설

[2.1] 주어진 조건을 만족하는 점의 좌표를 표현하는 문제로 로그함수를 미분할 수 있으면 쉽게 해결할 수 있다.
[2.2] 곡선 및 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 문제로 적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있고, 로그함수를 부분적분법을 이용하여 적분할 수 있으면 쉽게 해결할 수 있다.

[2.3] 문제에서 요구하는 범위에서 함수의 최댓값을 구하는 문제로 로그함수와 다항함수의 합으로 표현된 함수를 미분할 수 있으면 쉽게 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2.1	$y' = \frac{1}{x}$ 이고 직선 AB의 기울기는 $\frac{\ln b - \ln a}{b-a}$ 이므로	4
	$\frac{1}{x} = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$ 로부터 $x = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$ 이다.	4
2.2	넓이 S는 x축과 곡선 $y=\ln x$ 사이의 넓이에서 삼각형 $\mathrm{A_1AC_1}$과 삼각형 $\mathrm{C_1BB_1}$의 넓이를 빼면 구할 수 있다. 따라서 $$S = -\int_a^b \ln x\,dx - \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{\ln b - \ln a} - a\right)\times(-\ln a) - \frac{1}{2}\left(b - \frac{b-a}{\ln b - \ln a}\right)\times(-\ln b)$$ $$= -\int_a^b \ln x\,dx + \frac{1}{2}(b\ln b - a\ln a - b + a)$$ 이고,	6
	부분적분하면 $$S = -\left[x\ln x - x\right]_a^b + \frac{1}{2}(b\ln b - a\ln a - b + a)$$ $$= -\frac{1}{2}(b\ln b - a\ln a) + \frac{1}{2}(b-a)$$ 이다.	6
2.3	$b=2a$ 이므로 넓이 S는 a에 대한 함수 $$S(a) = -\frac{1}{2}\{2a\ln(2a) - a\ln a\} + \frac{1}{2}a = -a\ln 2 - \frac{1}{2}a\ln a + \frac{1}{2}a$$ 이고 $$S'(a) = -\ln 2 - \frac{1}{2}\ln a$$ 이다. 따라서 $a = \frac{1}{4}$ 일 때, $S'(a) = 0$ 이다.	7
	이때 $S'(a)$의 부호는 양에서 음으로 바뀌므로 최댓값은 $$S\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$ 이다.	6

7. 예시 답안

[2.1] $y' = \dfrac{1}{x}$이고 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{\ln b - \ln a}{b-a}$이므로

$$\frac{1}{x} = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$$

이고, $x = \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a}$이다.

[2.2] 넓이 S는 x축과 곡선 $y = \ln x$ 사이의 넓이에서 삼각형 $\mathrm{A_1AC_1}$과 삼각형 $\mathrm{C_1BB_1}$의 넓이를 빼면 구할 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned} S &= -\int_a^b \ln x\,dx - \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{\ln b - \ln a} - a\right) \times (-\ln a) - \frac{1}{2}\left(b - \frac{b-a}{\ln b - \ln a}\right) \times (-\ln b) \\ &= -\int_a^b \ln x\,dx + \frac{1}{2}(b\ln b - a\ln a - b + a) \end{aligned}$$

이고, 부분적분하면

$$\begin{aligned} S &= -\left[x\ln x - x\right]_a^b + \frac{1}{2}(b\ln b - a\ln a - b + a) \\ &= -\frac{1}{2}(b\ln b - a\ln a) + \frac{1}{2}(b-a) \end{aligned}$$

이다.

[2.3] $b = 2a$이므로 넓이 S는 a에 대한 함수

$$S(a) = -\frac{1}{2}\{2a\ln(2a) - a\ln a\} + \frac{1}{2}a = -a\ln 2 - \frac{1}{2}a\ln a + \frac{1}{2}a$$

이고

$$S'(a) = -\ln 2 - \frac{1}{2}\ln a$$

이다. 따라서 $a = \dfrac{1}{4}$일 때, $S'(a) = 0$이다. 이때 $S'(a)$의 부호는 양에서 음으로 바뀌므로 최댓값은

$$S\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

이다.

문항카드 6

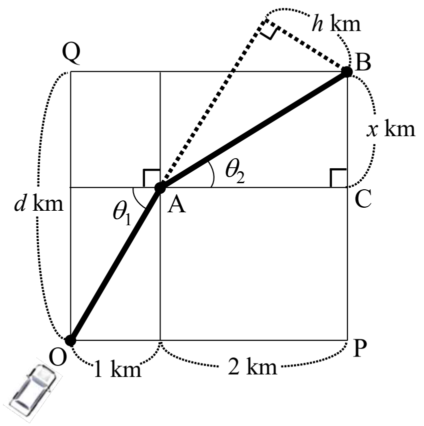
1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학)-2차 / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I, 수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	속도와 거리, 삼각함수, 최댓값과 최솟값
예상 소요 시간	33분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

아래 그림은 자동차가 점 O에서 출발하여 직선도로 OA와 AB를 거쳐 B에 이르는 경로를 보여준다.



(가) 직사각형 OPBQ에서 $\overline{\mathrm{OP}}=3\,\mathrm{km}$, $\overline{\mathrm{OQ}}=d\,\mathrm{km}$ (d는 상수)이다.

(나) 도로 OA와 AB에서 $1\,\mathrm{km}$를 주행하는 데 필요한 연료의 양은 각각 1과 k이다.

(다) 직선 AC가 도로 OA, AB와 이루는 예각의 크기는 각각 θ_1과 θ_2이다.

(라) 점 B와 직선 AC, 직선 OA 사이의 거리는 각각 $x\,\mathrm{km}$와 $h\,\mathrm{km}$이다.

[3.1] 점 O에서 출발하여 직선도로 OA와 AB를 거쳐 B에 이르기까지 필요한 연료의 총량 $f(x)$를 구하시오.

[3.2] $k=\dfrac{3}{2}$일 경우, 문항 [3.1]의 $f(x)$는 $x=\sqrt{2}$일 때 최솟값을 갖는다. 이때 θ_1의 값을 구하시오.

[3.3] $k=\dfrac{3}{2}$일 경우, 문항 [3.1]의 $f(x)$는 $x=\sqrt{2}$일 때 최솟값을 갖는다. 이때 h의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

자연현상 및 공학 문제를 모사한 수학적 모델을 이해하고, 수학 개념을 이용하여 원하는 물리량(거리, 면적, 부피, 속도, 각도 등)을 계산할 수 있는 능력이 필요하다. 따라서 이차원 평면에 모델링된 문제를 명확하게 이해하고, 꼭 필요한 수학 개념인 미분과 삼각함수를 이용하여 각도와 거리를 계산할 수 있는지 평가한다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 서술된 문제를 이해하여 함수를 설계할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 주어진 조건과 무리함수에 대한 미분을 이용하여 거리를 구하고, 삼각함수를 이용하여 각도를 구할 수 있는지 평가한다.
[3.3] 주어진 조건과 삼각함수 덧셈공식, 사인과 코사인의 관계식을 이용하여 직각삼각형의 한 변의 길이를 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	[미적분] - (2) 미분법 - 3 도함수의 활용 [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.
3.1	[수학] - (2) 기하 - 1 평면좌표 [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
3.2	[수학I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프 [12수학I02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트 함수의 그래프를 그릴 수 있다. [수학II] - (2) 미분법 - 3 도함수의 활용 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.
3.3	[수학] - (2) 기하 - 1 평면좌표 [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	홍성복 외	지학사	2021	111~114
	수학	황선욱 외	미래엔	2021	125~127 132~134

	수학 Ⅰ	홍성복 외	지학사	2021	75~79
	수학 Ⅱ	고성은 외	좋은책신사고	2021	83~90
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2020	58~65 80~84 97~99

5. 문항 해설

[3.1] 문제의 조건을 만족하는 연료의 양을 함수로 나타내는 식으로 단위 거리에 필요한 연료의 개념을 이해하고 있다면 쉽게 해결할 수 있다.

[3.2] [3.1]에서 구한 무리함수의 도함수가 해를 가질 때 극솟값을 가짐을 이해하는지 묻는 문항으로 무리함수를 미분할 수 있고 삼각함수의 특수각에서의 함숫값을 알고 있다면 쉽게 해결할 수 있다.

[3.3] [3.1]에서 구한 무리함수가 극솟값을 가질 때 문제에서 설정된 각도를 이용하여 필요한 거리를 구하는 문제로 무리함수의 도함수와 삼각함수의 합의 공식을 알고 있으면 쉽게 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3.1	$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{(d-x)^2+1}$, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{x^2+4}$ 이므로	6
	필요한 총 연료의 양은 다음과 같다. $f(x)=\sqrt{(d-x)^2+1}+k\sqrt{x^2+4}$	3
3.2	$f'(x)=\dfrac{x-d}{\sqrt{(d-x)^2+1}}+\dfrac{kx}{\sqrt{x^2+4}}=0$	6
	주어진 값 $k=\dfrac{3}{2}$과 $x=\sqrt{2}$를 위 방정식에 대입하면 $\dfrac{\sqrt{2}-d}{\sqrt{(d-\sqrt{2})^2+1}}+\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+4}}=0$ 이고 $d=\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$ 이다. $d>0$이므로 $d=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 이고,	4
	θ_1이 예각인 직각삼각형에서 $\tan\theta_1=\dfrac{d-x}{1}=\sqrt{3}$ 이므로 $\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$이다.	4
3.3	$h=\overline{\mathrm{AB}}\sin(\theta_1-\theta_2)=\overline{\mathrm{AB}}(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)$ 이다.	5
	주어진 값 $k=\dfrac{3}{2}$, $x=\sqrt{2}$와 문항 [3.2]에서 구한 $\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$를 이용하면 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{6}$, $\sin\theta_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta_1=\dfrac{1}{2}$ 이고	5

	$$\sin\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\theta_2 = \sqrt{1-\sin^2\theta_2} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$ 이다. 따라서 $$h = \sqrt{6}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$ 이다.

7. 예시 답안

[3.1] 각 도로의 길이는

$$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{(d-x)^2+1}\,,\quad \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{x^2+4}$$

이므로 필요한 총 연료의 양은

$$f(x) = \sqrt{(d-x)^2+1} + k\sqrt{x^2+4}$$

이다.

[3.2] $f'(x)=0$일 때, $f(x)$가 최소이므로

$$f'(x) = \frac{x-d}{\sqrt{(d-x)^2+1}} + \frac{kx}{\sqrt{x^2+4}} = 0$$

이다. 주어진 값 $k=\frac{3}{2}$과 $x=\sqrt{2}$를 위 방정식에 대입하면

$$\frac{\sqrt{2}-d}{\sqrt{(d-\sqrt{2})^2+1}} + \frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+4}} = 0$$

이고 $d=\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$이다. $d>0$이므로 $d=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 이고, θ_1이 예각인 직각삼각형에서

$$\tan\theta_1 = \frac{d-x}{1} = \sqrt{3}$$

이므로 $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$이다.

[3.3] h가 한 변인 직각삼각형에서

$$h = \overline{\mathrm{AB}}\sin(\theta_1-\theta_2) = \overline{\mathrm{AB}}(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)$$

이다. 주어진 값 $k=\frac{3}{2}$, $x=\sqrt{2}$와 문항 [3.2]에서 구한 $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$를 이용하면

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{6},\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\theta_1 = \frac{1}{2}$$

이고

$$\sin\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\theta_2 = \sqrt{1-\sin^2\theta_2} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

이다. 따라서

$$h = \sqrt{6}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

이다.

[3.3] 문항 [3.2]에서 구한 $d=\sqrt{2}+\sqrt{3}$이고 $x=\sqrt{2}$이므로, 점 A가 원점인 좌표계에서 점 O와 B의 좌표는 각각 $(-1,\ -\sqrt{3})$과 $(2,\ \sqrt{2})$이다. 따라서 직선 OA의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$이고, 직선 OA에서 점 B까지의 거리는

$$h=\frac{|2\sqrt{3}-\sqrt{2}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

이다.

문항카드 7

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열-3차 / 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I, 미적분
	핵심개념 및 용어	음함수의 미분법, 지수함수, 로그함수, 삼각함수, 등차수열, 급수의 합
예상 소요 시간	34분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 물음에 답하시오.

[1.1] 곡선 $\cos(x-y)+x^2+y^2=9$가 직선 $y=x$와 만나는 점을 모두 구하고, 각 점에서의 접선의 방정식을 구하시오.

[1.2] 함수 $y=\frac{1}{1024}4^{-x}+\frac{3}{2}$의 그래프는 함수 $f(x)=a^x(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. 1이 아닌 양수 b에 대하여 $3\log_b a=\frac{4}{4a-3}$가 성립한다. 함수 $g(x)=mn\log_b x$에 대하여 $(g\circ f)(5)$의 값을 구하시오.

[1.3] 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\sin x$가 직선 $y=\frac{x}{(2n-1)\pi}$와 만나는 점의 개수를 a_n이라고 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$의 합을 구하시오.

3. 출제 의도

고등학교 과정에서 다루는 기본적인 내용을 이해하고 있는지 평가하고자 하였다. 이를 위해 음함수 미분법, 접선의 방정식, 지수함수와 로그함수, 그래프의 평행이동, 삼각함수, 수열, 여러 가지 수열의 합 등 다양한 개념에 대한 지식을 갖추고 있는지 평가하는 항목으로 문제를 구성하였다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 음함수의 미분법을 이해하여 접선의 방정식을 구하는 데 적용할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 지수함수와 로그함수의 성질과 그래프의 평행이동을 이해하여 질문에 답할 수 있는지 평가한다.

[1.3] 삼각함수의 그래프를 이해하여 등차수열을 찾을 수 있는지와 수렴하는 급수의 합을 계산할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
1.1	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
1.2	[수학] - (3) 도형의 방정식 - $\boxed{4}$ 도형의 이동 [10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다. [수학Ⅰ] - (1) 지수함수와 로그함수 - $\boxed{1}$ 지수와 로그 [12수학Ⅰ01-03] 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다. [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [수학Ⅰ] - (1) 지수함수와 로그함수 - $\boxed{2}$ 지수함수와 로그함수 [12수학Ⅰ01-06] 지수함수와 로그함수의 뜻을 안다. [12수학Ⅰ01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.
1.3	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수의 뜻과 그래프 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [수학Ⅰ] - (3) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [수학Ⅰ] - (3) 수열 - $\boxed{2}$ 수열의 합 [12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외	㈜교학사	2020	219~222
	수학 Ⅰ	홍성복 외	지학사	2020	50~57 81~88
	수학 Ⅰ	김원경 외	비상교육	2021	10~31 37~52
	수학 Ⅰ	권오남 외	㈜교학사	2020	118~120
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2021	30~33
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2021	70~71 87~88
	미적분	홍성복 외	지학사	2021	111~113

5. 문항 해설

[1.1] 주어진 식을 만족하는 도형의 접선의 방정식을 구하는 문제로 식으로 주어진 두 그래프의 교점을 이차방정식으로 구하고 음함수의 미분법으로 접선의 방정식을 구할 수 있다면 쉽게

해결할 수 있다.

[1.2] 두 지수함수의 그래프가 서로 평행이동인 관계에 있을 때 이동한 방법을 묻는 문제로 도형의 평행이동, 지수함수, 로그함수를 알고 있다면 쉽게 해결할 수 있다.

[1.3] 주어진 식을 만족하는 등차수열의 식을 세우고 수렴하는 급수의 합을 묻는 문제로 원점을 지나는 직선과 삼각함수의 그래프의 교점을 구하고 부분분수를 변형하는 방법을 알고 있다면 쉽게 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1.1	$y=x$를 $\cos(x-y)+x^2+y^2=9$에 대입하면 $\cos(x-x)+x^2+x^2=9$ 이므로 $x=\pm 2$ 이다. 따라서 곡선과 직선이 만나는 점은 $(2,2)$ 와 $(-2,-2)$ 이다.	4
	만나는 점에서의 접선의 기울기 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하기 위해 곡선의 방정식 양변을 x에 대해 미분하여 정리하면 다음과 같다. $$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin(x-y)-2x}{\sin(x-y)+2y}$$	4
	만나는 점 $(2,2)$ 와 $(-2,-2)$ 에서 접선의 기울기는 각각 $$\frac{\sin(2-2)-4}{\sin(2-2)+4}=-1,\ \frac{\sin(-2+2)+4}{\sin(-2+2)-4}=-1$$ 이다. 따라서 접선의 방정식은 각각 다음과 같다. $$y=-x+4,\ y=-x-4$$	4
1.2	$y=\frac{1}{1024}4^{-x}+\frac{3}{2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+5}+\frac{3}{2}$ 이므로, $a=\frac{1}{4},\ m=-5,\ n=\frac{3}{2}$ 이다. $a=\frac{1}{4}$ 을 $3\log_b a=\frac{4}{4a-3}$ 에 대입하면 $-3\log_b 4=-2$ 이므로 $b=8$ 이다.	8
	따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x,\ g(x)=-\frac{15}{2}\log_8 x$ 이므로 다음을 얻는다. $$(g\circ f)(5)=-\frac{15}{2}\log_8 4^{-5}=-\frac{15}{2}\times(-5)\times\frac{2}{3}=25$$	3
1.3	$n=1$일 때 $y=\frac{x}{\pi}$의 그래프와 $y=\sin x$는 원점을 포함하여 $x\geq 0$에서 두 개의 교점을 갖는다. $y=\frac{x}{\pi},\ y=\sin x$ 모두 원점대칭이므로 $-\pi<x\leq 0$에서 원점을 포함하여 두 개의 교점을 갖게 되므로 $a_1=2+2-1=3$이다. $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=\frac{1}{(2n-1)\pi}x$는 $0\leq x<(2n-2)\pi$에서 주기 2π마다 2개씩의 교점이 있으므로 원점을 포함하여 $2n-2$개의 교점을 갖는다. 또 $(2n-2)\pi<x<(2n-1)\pi$에서 2개의 교점을 갖고 $x\geq(2n-1)\pi$에서는 교점이 없다. 따라서 $x\geq 0$에서 $2n$개의 교점을 갖는다. 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=\frac{1}{(2n-1)\pi}x$가 모두 원점대칭임을 생각하면 $x\leq 0$에서 원점을 포함하여 $2n$개의 교점이 있으므로	5

	$a_n = 2n+2n-1 = 4n-1$이다.

7. 예시 답안

[1.1] $y=x$를 $\cos(x-y)+x^2+y^2=9$에 대입하면

$$\cos(x-x)+x^2+x^2=9$$

이므로 $x=\pm 2$이다. 따라서 곡선과 직선이 만나는 점은 $(2,2)$와 $(-2,-2)$이다.

만나는 점에서의 접선의 기울기 $\frac{dy}{dx}$를 구하기 위해 곡선의 방정식 양변을 x에 대해 미분하면

$$-\left(1-\frac{dy}{dx}\right)\sin(x-y)+2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

이고, 이를 정리하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin(x-y)-2x}{\sin(x-y)+2y}$$

이다. 만나는 점 $(2,2)$와 $(-2,-2)$에서 접선의 기울기는 각각

$$\frac{\sin(2-2)-4}{\sin(2-2)+4}=-1,\ \frac{\sin(-2+2)+4}{\sin(-2+2)-4}=-1$$

이다. 따라서 접선의 방정식은 각각

$$y=-x+4,\ y=-x-4$$

이다.

[1.2] $y=\frac{1}{1024}4^{-x}+\frac{3}{2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+5}+\frac{3}{2}$이므로, $a=\frac{1}{4}$, $m=-5$, $n=\frac{3}{2}$이다.

$a=\frac{1}{4}$을 $3\log_b a=\frac{4}{4a-3}$에 대입하면 $-3\log_b 4=-2$이므로 $b=8$이다.

따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $g(x)=-\frac{15}{2}\log_8 x$이므로

$$(g\circ f)(5)=-\frac{15}{2}\log_8 4^{-5}=-\frac{15}{2}\times(-5)\times\frac{2}{3}=25$$

이다.

[1.3] $n=1$일 때 $y=\frac{x}{\pi}$의 그래프와 $y=\sin x$는 원점을 포함하여 $x\ge 0$에서 두 개의 교점을 갖는다.

$y=\frac{x}{\pi}$, $y=\sin x$ 모두 원점대칭이므로 $-\pi<x\le 0$에서 원점을 포함하여 두 개의 교점을 갖게 되므로 $a_1=2+2-1=3$이다.

$n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=\frac{1}{(2n-1)\pi}x$는 $0\le x<(2n-2)\pi$에서 주기 2π마다 2개씩의 교점이 있으므로 원점을 포함하여 $2n-2$개의 교점을 갖는다.
또 $(2n-2)\pi<x<(2n-1)\pi$에서 2개의 교점을 갖고 $x\ge(2n-1)\pi$에서는 교점이 없다. 따라서 $x\ge 0$에서 $2n$개의 교점을 갖는다. 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=\frac{1}{(2n-1)\pi}x$가 모두 원점대칭임을

생각하면 $x \le 0$에서 원점을 포함하여 $2n$개의 교점이 있으므로 $a_n = 2n + 2n - 1 = 4n - 1$이다.

따라서 주어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-1)(4k+3)} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{15} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{1}{12} - \frac{1}{16n+12} \end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16n+12} \right) = \frac{1}{12}$$

즉 주어진 급수의 값은 $\frac{1}{12}$이다.

문항카드 8

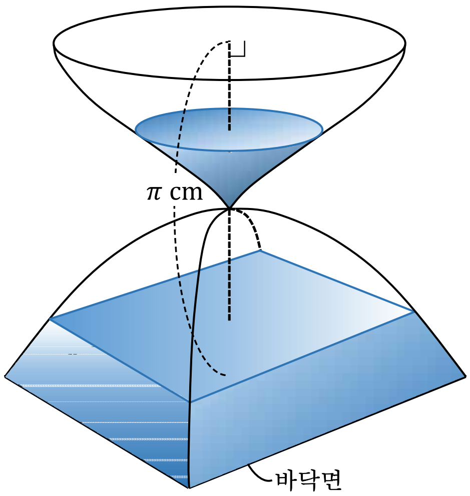
1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열-3차 / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I, 수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	정적분, 치환적분, 부분적분, 삼각함수의 적분
예상 소요 시간	33분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

아래 그림과 같이 위쪽과 아래쪽 입체도형의 높이가 각각 $\frac{\pi}{2}$ cm인 물시계의 내부에 물이 일부 채워져 있다.



(가) 아래쪽 입체도형에 채워진 물의 높이가 바닥면으로부터 x cm일 때, 수면은 한 변의 길이가 $\sqrt{\pi^2 - 2\pi x}$ cm인 정사각형이다.

(나) 위쪽 입체도형에 채워진 물의 수면으로부터 바닥면까지의 수직거리가 x cm일 때, 수면은 반지름의 길이가 $\sqrt{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(1+\cos 2x)}$ cm인 원이다.

(다) 크기를 무시할 수 있는 작은 구멍을 통해 물이 $\frac{\pi^3}{25}$ $\text{cm}^3/분$의 속도로 위쪽 입체도형에서 아래쪽 입체도형으로 떨어진다.

[2.1] 아래쪽 입체도형의 부피를 구하시오.

[2.2] 위쪽 입체도형의 부피를 구하시오.

[2.3] 처음에 위쪽 입체도형에만 물이 가득 차 있었을 때, 4분 후 아래쪽 입체도형에 채워진 물의 높이를 구하시오.

3. 출제 의도

문제에서 주어진 상황을 이해하고 이를 수학적으로 기술하는 능력이 반드시 필요하다. 예를 들어 주어진 입체도형의 부피는 단면적의 넓이를 수식으로 나타내고 이를 적분함으로써 구할 수 있다. 이 문제를 풀기 위한 수학적 개념은 원의 방정식, 삼각함수의 그래프, 치환적분법, 부분적분법, 정적분 등 이공계 대학생이 갖춰야 할 기초지식으로 고등학생이 알아야 할 기본적인 내용이다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 단면적의 넓이를 정적분하여 입체도형의 부피를 계산할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 치환적분법, 부분적분법을 활용하여 삼각함수가 포함된 합성함수의 정적분을 계산할 수 있는지 평가한다.
[2.3] 주어진 상황을 이해하고 정적분을 통해 질문에 답할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
2.1	[수학 II] - (3) 적분 - 2 정적분 [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용 [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
2.2	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용 [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
2.3	[수학] - (1) 다항식 - 3 인수분해 [10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다. [수학 II] - (3) 적분 - 2 정적분 [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	류희찬 외	좋은책신사고	2021	28~31
	수학 Ⅰ	류희찬 외	천재교과서	2021	84~96
	수학 Ⅰ	권오남 외	㈜교학사	2021	85~87
	미적분	김원경 외	비상교육	2020	121~133
	미적분	권오남 외	㈜교학사	2021	74~76 140~148 158~161 176~178

5. 문항 해설

[2.1] 입체도형의 단면의 넓이를 적분하여 부피를 구하는 문제로 주어진 정사각형의 한 변의 길이를 통해 단면적의 함수를 구하고 이를 정적분하면 쉽게 해결할 수 있다.

[2.2] 주어진 입체도형의 단면은 원이므로 주어진 반지름을 통해 단면적의 함수를 구하고 이를 정적분하면 부피를 구할 수 있다. 정적분 과정에서 치환적분법과 부분적분법, 그리고 사인함수와 코사인함수의 적분을 활용하면 쉽게 해결할 수 있다.

[2.3] 일정한 속도로 증가하는 부피에 대해 주어진 시각에서의 부피를 구하고 이를 정적분을 통해 계산한 부피의 식과 같음을 통해 이차방정식을 얻을 수 있고, 인수분해를 통해 쉽게 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2.1	단면의 넓이가 $\pi^2-2\pi x$이므로 다음의 적분식으로 쓸 수 있다. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi^2-2\pi x)dx$$	5
	따라서 적분을 계산하면 아래쪽 입체도형의 부피는 $\frac{\pi^3}{4}\ \mathrm{cm}^3$이다.	5
2.2	단면의 넓이가 $\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(1+\cos 2x)$이므로 적분식으로 쓰면 다음과 같다. $$V=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(1+\cos 2x)\,dx$$	5
	$x-\frac{\pi}{2}$를 t로 치환하면 $$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi t\{1+\cos(2t+\pi)\}\,dt=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t-t\cos 2t)dt$$ 이다. 부분적분하면	8

	$\int t\cos 2t\,dt = \frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t + C$ (C는 적분상수) 이므로 $V = \pi\left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t\sin 2t - \frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi}{2}$ 이다. 따라서 위쪽 입체도형의 부피는 $\left(\frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{cm}^3$이다.	
2.3	4분 후 아래쪽 입체도형에 채워진 물의 부피는 $\frac{4\pi^3}{25}$이며, 물의 높이를 h라 하면 $\int_0^h (\pi^2 - 2\pi x)dx = \pi^2 h - \pi h^2 = \frac{4\pi^3}{25}$ 이다.	5
	이를 정리하여 인수분해하면 $h^2 - \pi h + \frac{4\pi^2}{25} = \left(h - \frac{\pi}{5}\right)\left(h - \frac{4\pi}{5}\right) = 0$ 이다. $0 \le h \le \frac{\pi}{2}$이므로 물의 높이는 $\frac{\pi}{5}$ cm이다.	5

7. 예시 답안

[2.1] 단면의 넓이가 $\pi^2 - 2\pi x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi^2 - 2\pi x)dx = \left[\pi^2 x - \pi x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{4}$$

이다. 따라서 아래쪽 입체도형의 부피는 $\frac{\pi^3}{4}\ \mathrm{cm}^3$이다.

[2.2] 단면의 넓이가 $\pi\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(1 + \cos 2x)$이므로

$$V = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \pi\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(1 + \cos 2x)\,dx$$

이다. $x - \frac{\pi}{2}$를 t로 치환하면

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi t\{1 + \cos(2t + \pi)\}\,dt = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t - t\cos 2t)dt$$

이다. 부분적분하면

$$\int t\cos 2t\,dt = \frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t + C \quad (C\text{는 적분상수})$$

이므로

$$V = \pi\left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t\sin 2t - \frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi}{2}$$

이다. 따라서 위쪽 입체도형의 부피는 $\left(\frac{\pi^3}{8}+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{cm}^3$이다.

[2.3] 4분 후 아래쪽 입체도형에 채워진 물의 부피는 $\frac{4\pi^3}{25}$이며, 물의 높이를 h라 하면

$$\int_0^h (\pi^2 - 2\pi x)dx = \pi^2 h - \pi h^2 = \frac{4\pi^3}{25}$$

이다. 이를 정리하여 인수분해하면

$$h^2 - \pi h + \frac{4\pi^2}{25} = \left(h - \frac{\pi}{5}\right)\left(h - \frac{4\pi}{5}\right) = 0$$

이다. $0 \le h \le \frac{\pi}{2}$이므로 물의 높이는 $\frac{\pi}{5}\,\mathrm{cm}$이다.

문항카드 9

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열-3차 / 문제3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I, 수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	극대와 극소, 근과 계수와의 관계, 삼각함수, 미분법
예상 소요 시간	33분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)=x^3+tx^2+9x+15$ (t는 실수)가 다음 조건을 만족한다.

(1) $x=\alpha$에서 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

(2) $x=\beta$에서 함수 $f(x)$는 극솟값을 갖는다.

(3) $\alpha<0$이고 $\beta<0$이다.

(나) 제시문 (가)를 만족하는 실수 t에 대하여 점 $\mathrm{P}(\alpha, \mathrm{f}(\alpha))$, $\mathrm{Q}(\beta, f(\beta))$가 있다. 원점 O와 점 P, Q에 대하여 동경 OP, OQ가 나타내는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라고 하자.

[3.1] 제시문 (가)를 만족하는 실수 t의 값의 범위를 구하시오.

[3.2] 제시문 (가)를 만족하는 실수 t에 대하여 $\alpha^2-\beta^2$을 t에 대한 식으로 나타내시오.

[3.3] 제시문 (나)의 θ_1과 θ_2에 대하여 $\tan\theta_1-\tan\theta_2$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내시오.

[3.4] 문항 [3.3]의 함수 $g(t)$의 최댓값을 구하시오.

3. 출제 의도

주어진 상황을 함수로 표현하여 함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하는 문제로써 이해하는 것은 수학의 개념 및 응용에서 빈번하게 등장한다. 본 문항에서는 주어진 상황을 함수를 이용하여 표현할 수 있는지, 함수의 최댓값을 미분을 활용하여 찾을 수 있는지, 함수의 표현 및 미분 과정에서 다항함수, 무리함수, 삼각함수를 활용할 수 있는지를 종합적으로 평가하고자 하였다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 극대-극소 판별을 위해 이차함수의 그래프를 활용할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이해하고 있는지 평가한다.
[3.3] 삼각함수의 의미를 알고 수식으로 표현할 수 있는지 평가한다.
[3.4] 미분을 활용하여 최댓값을 찾을 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
3.1	[수학 II] - (2) 미분 - 2 도함수 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프 [12수학Ⅰ02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
3.2	[수학] - (2) 방정식과 부등식 - 2 이차방정식과 이차함수 [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.
3.3	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프 [12수학Ⅰ02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [수학] - (2) 방정식과 부등식 - 2 이차방정식과 이차함수 [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.
3.4	[미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [수학 II] - (2) 미분 - 2 도함수 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	박교식 외	동아출판	2020	52~54
	수학 I	홍성복 외	지학사	2021	69~79
	수학 II	홍성복 외	지학사	2021	83~89
	수학 II	고성은 외	좋은책신사고	2021	61~66
	미적분	황선욱 외	미래엔	2020	86~89

5. 문항 해설

[3.1] 극대와 극소의 의미를 알고 이차방정식의 판별식 및 근과 계수와의 관계를 알면 쉽게 해결할 수 있다.

[3.2] 극값에서 도함수의 값이 0이 된다는 사실을 알고 있다면 이차방정식의 근과 계수와의 관계로부터 쉽게 해결할 수 있다.

[3.3] 일반각과 삼각함수의 개념을 알고 있다면 이차방정식의 근과 계수와의 관계로부터 쉽게 해결할 수 있다.

[3.4] 합성함수의 미분법을 알고 도함수의 부호로부터 함수의 극대와 극소를 판별할 수 있으면 쉽게 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

<table>
<tr><th>하위 문항</th><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td rowspan="2">3.1</td><td>$f'(x)=3x^2+2tx+9$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 갖기 위해서는 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 따라서 판별식이 양수이므로 $t^2-27>0$이다. 제시문 (가)로부터 α와 β가 모두 음수이므로 $\alpha\beta=3>0$과 $\alpha+\beta=-\frac{2}{3}t<0$이어야 한다. 따라서 $t>3\sqrt{3}$ 이다.</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>α와 β는 방정식 $f'(x)=3x^2+2tx+9=0$의 두 근이다. $f'(x)=0$의 두 근은
$x=\frac{-t\pm\sqrt{t^2-27}}{3}$ 이고 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha+\beta=-\frac{2t}{3}$, $\alpha\beta=3$, $\alpha-\beta=-\frac{2}{3}\sqrt{t^2-27}$ 이다.
그러므로
$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\frac{4t}{9}\sqrt{t^2-27}$$
이다.</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3.3</td><td>$\tan\theta_1=\frac{f(\alpha)}{\alpha}$, $\tan\theta_2=\frac{f(\beta)}{\beta}$ 이므로 $g(t)=\frac{f(\alpha)}{\alpha}-\frac{f(\beta)}{\beta}$ 이다.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>$$g(t)=\frac{f(\alpha)}{\alpha}-\frac{f(\beta)}{\beta}=\frac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\alpha\beta}=\frac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{3}$$
이다. 이때
$$\begin{aligned}\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)&=\beta(\alpha^3+t\alpha^2+9\alpha+15)-\alpha(\beta^3+t\beta^2+9\beta+15)\\&=(\alpha-\beta)\{\alpha\beta(\alpha+\beta)+3t-15\}=-\frac{2}{3}(t-15)\sqrt{t^2-27}\end{aligned}$$
이다. 따라서 다음의 식을 얻는다.
$$g(t)=\frac{f(\alpha)}{\alpha}-\frac{f(\beta)}{\beta}=-\frac{2}{9}(t-15)\sqrt{t^2-27}$$</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3.4</td><td>먼저 $g(t)$를 미분하면
$$g'(t)=-\frac{2(t-9)(2t+3)}{9\sqrt{t^2-27}}$$
이다. $t>3\sqrt{3}$ 이므로 $\sqrt{t^2-27}$ 과 $2t+3$은 양수이고, 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.
<table><tr><td>t</td><td>$\cdots$</td><td>9</td><td>$\cdots$</td></tr><tr><td>$g'(t)$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr><tr><td>$g(t)$</td><td>↗</td><td>$4\sqrt{6}$
(극대)</td><td>↘</td></tr></table></td><td>6</td></tr>
<tr><td>함수 $g(t)$는 $t=9$에서 극댓값이자 최댓값인 $4\sqrt{6}$ 을 갖는다.</td><td>3</td></tr>
</table>

7. 예시 답안

[3.1] 함수 $f(x)$를 미분하면 $f'(x)=3x^2+2tx+9$이다. 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 갖기 위해서는 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 따라서 판별식이 양수이므로 $t^2-27>0$이다. 제시문 (가)로부터 α와 β가 모두 음수이므로 $\alpha\beta=3>0$이고 $\alpha+\beta=-\frac{2}{3}t<0$이 성립해야 한다. 따라서 $t>3\sqrt{3}$이다.

[3.2] α와 β는 방정식 $f'(x)=3x^2+2tx+9=0$의 두 근이다. $f'(x)=0$의 두 근은

$$x=\frac{-t\pm\sqrt{t^2-27}}{3}$$

이고 $\alpha<\beta$이므로

$$\alpha+\beta=-\frac{2t}{3},\ \alpha\beta=3,\ \alpha-\beta=-\frac{2}{3}\sqrt{t^2-27}$$

이다. 그러므로

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\frac{4t}{9}\sqrt{t^2-27}$$

이다.

[3.3] $\tan\theta_1=\frac{f(\alpha)}{\alpha}$, $\tan\theta_2=\frac{f(\beta)}{\beta}$이므로

$$g(t)=\frac{f(\alpha)}{\alpha}-\frac{f(\beta)}{\beta}=\frac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\alpha\beta}=\frac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{3}$$

이다. 이때

$$\begin{aligned}\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)&=\beta(\alpha^3+t\alpha^2+9\alpha+15)-\alpha(\beta^3+t\beta^2+9\beta+15)\\&=(\alpha-\beta)\{\alpha\beta(\alpha+\beta)+3t-15\}\\&=-\frac{2}{3}(t-15)\sqrt{t^2-27}\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$g(t)=\frac{f(\alpha)}{\alpha}-\frac{f(\beta)}{\beta}=-\frac{2}{9}(t-15)\sqrt{t^2-27}$$

이다.

[3.4] 먼저 $g(t)$를 미분하면

$$g'(t)=-\frac{2(t-9)(2t+3)}{9\sqrt{t^2-27}}$$

이다. $t>3\sqrt{3}$이므로 $\sqrt{t^2-27}$과 $2t+3$은 양수이고, 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	9	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\nearrow$	$4\sqrt{6}$ (극대)	$\searrow$

따라서 함수 $g(t)$는 $t=9$에서 극댓값이자 최댓값인 $4\sqrt{6}$을 갖는다.

문항카드 10

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열-4차 / 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I, 수학 II, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	방정식, 다항함수의 미분, 접선의 방정식, 수열, 수열의 합, 이항분포
예상 소요 시간	34분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 물음에 답하시오.

[1.1] 두 함수 $f(x)=|x^3-2x|$, $g(x)=x^2$에 대하여 그래프 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 제1사분면에 있는 교점을 모두 구하고, 각 교점을 접점으로 하는 $y=f(x)$의 접선의 방정식을 구하시오.

[1.2] 첫째항이 0이 아닌 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+2)a_{k+1}}{(k+1)a_k}=n^2+5n$$

일 때, $\dfrac{a_{10}}{a_8}$의 값을 구하시오.

[1.3] 클레이 사격선수 A와 B가 표적을 명중시킬 확률은 각각 $\dfrac{1}{2}$과 p이다. A가 4회의 사격 중 1회 이상 명중시킬 확률과 B가 2회의 사격 중 1회 이상 명중시킬 확률이 같기 위한 p를 구하시오.

3. 출제 의도

고등학교 수학 과정에서 배우는 수학의 내용들은 대학에서 배우는 전공에서 필수 지식을 습득하는 바탕이 된다. 이 문제를 풀기 위한 수학적 개념은 여러 가지 방정식과 함수, 함수에 대한 미분, 수열, 확률 등 고등학생이 알아야 할 기본적인 내용이며 이공계 대학생이 갖춰야 할 기초 지식이기도 하다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 절댓값이 포함된 방정식의 해를 구하고 원하는 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 수열의 합으로 원하는 수열의 성질을 구할 수 있는지 평가한다.
[1.3] 이항분포를 이해하고 원하는 확률을 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
1.1	[수학] - (2) 방정식과 부등식 - ③ 여러 가지 방정식과 부등식 [10수학01-12] 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다. [수학 II] - (1) 미분 - ② 도함수 [12수학Ⅱ02-04] 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
1.2	[수학 I] - (3) 수열 - ② 수열의 합 [12수학Ⅰ03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
1.3	[확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포 [12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	홍성복 외	지학사	2021	81~83
	수학	이준열 외	천재교육	2021	76~77
	수학 I	박교식 외	동아출판	2018	127~137
	수학 I	황선욱 외	미래엔	2021	143~154
	수학 II	권오남 외	㈜교학사	2021	80~82
	수학 II	고성은 외	좋은책신사고	2020	72~74
	확률과 통계	이준열 외	천재교육	2019	98~99
	확률과 통계	홍성복 외	지학사	2020	92~94

5. 문항 해설

[1.1] 절댓값이 포함된 삼차방정식의 해를 구하여 삼차함수의 그래프의 접선을 구하는 문제로 절댓값의 의미와 접선을 구하는 방법을 알고 있다면 쉽게 해결할 수 있다.

[1.2] 주어진 수열의 합에 대한 식을 통해 일반항을 구하는 문제로 n항까지의 합과 $(n-1)$번 항까지의 합의 차이가 n번째 일반항과 같음을 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.

[1.3] 확률로 이해할 수 있는 상황을 이항분포를 이용한 식으로 세워 이차방정식을 풀 수 있으면 쉽게 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1.1	$x>0$에서 방정식 $\lvert x^3-2x\rvert=x^2$의 해는 $x=1,2$이므로 교점은 $(1,1)$, $(2,4)$이다.	4
	$f'(x)=\begin{cases}-3x^2+2 & (0<x<\sqrt{2})\\ 3x^2-2 & (x>\sqrt{2})\end{cases}$	4
	$(1,1)$에서 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$이고 $(2,4)$에서 접선의 기울기는 $f'(2)=10$이다. 따라서 접선의 방정식은 $y=-x+2$와 $y=10x-16$이다.	4
1.2	$\dfrac{11a_{10}}{10a_9}=\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\dfrac{(k+2)a_{k+1}}{(k+1)a_k}-\sum_{k=1}^{8}\dfrac{(k+2)a_{k+1}}{(k+1)a_k}=(9^2+5\times 9)-(8^2+5\times 8)=22$	4
	$\dfrac{10a_9}{9a_8}=\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\dfrac{(k+2)a_{k+1}}{(k+1)a_k}-\sum_{k=1}^{7}\dfrac{(k+2)a_{k+1}}{(k+1)a_k}=(8^2+5\times 8)-(7^2+5\times 7)=20$	4
	$\dfrac{a_{10}}{a_8}=360$	4
1.3	A가 4회의 사격 중 1회 이상 명중시킬 확률은 ${}_4\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{15}{16}$ 또는 $1-{}_4\mathrm{C}_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{15}{16}$	4
	B가 2회의 사격 중 1회 이상 명중시킬 확률은 ${}_2\mathrm{C}_1p(1-p)+{}_2\mathrm{C}_2p^2=p(2-p)$ 또는 $1-{}_2\mathrm{C}_0(1-p)^2=p(2-p)$	4
	$p(2-p)=\dfrac{15}{16}$를 풀면 $p=\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4}$이고 $p\le 1$이므로 $p=\dfrac{3}{4}$이다.	2

7. 예시 답안

[1.1] $x>0$에서 방정식 $|x^3-2x|=x^2$의 해는 $x=1,2$이므로 교점은 $(1,1)$, $(2,4)$이다.

$$f(x)=\begin{cases}-x^3+2x & (0<x\le\sqrt{2})\\ x^3-2x & (x>\sqrt{2})\end{cases}$$

이다. 미분하면

$$f'(x)=\begin{cases}-3x^2+2 & (0<x<\sqrt{2})\\ 3x^2-2 & (x>\sqrt{2})\end{cases}$$

이므로, $(1,1)$에서 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$이고 $(2,4)$에서 접선의 기울기는 $f'(2)=10$이다. 따라서 접선의 방정식은 $y=-x+2$와 $y=10x-16$이다.

[1.2] 주어진 식에서

$$\frac{11a_{10}}{10a_9}=\sum_{k=1}^{9}\frac{(k+2)a_{k+1}}{(k+1)a_k}-\sum_{k=1}^{8}\frac{(k+2)a_{k+1}}{(k+1)a_k}=(9^2+5\times 9)-(8^2+5\times 8)=22$$

이고

$$\frac{10\,a_9}{9\,a_8} = \sum_{k=1}^{8} \frac{(k+2)a_{k+1}}{(k+1)a_k} - \sum_{k=1}^{7} \frac{(k+2)a_{k+1}}{(k+1)a_k} = (8^2+5\times 8) - (7^2+5\times 7) = 20$$

이므로

$$a_{10} = 20a_9, \quad a_9 = 18a_8$$

이다. 따라서 $\dfrac{a_{10}}{a_8} = 360$ 이다.

[1.3] A가 4회의 사격 중 1회 이상 명중시킬 확률은

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{16} \quad \text{또는} \quad 1 - {}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{16}$$

이고, B가 2회의 사격 중 1회 이상 명중시킬 확률은

$${}_2\mathrm{C}_1 p(1-p) + {}_2\mathrm{C}_2 p^2 = p(2-p) \quad \text{또는} \quad 1 - {}_2\mathrm{C}_0(1-p)^2 = p(2-p)$$

이다. $p(2-p) = \dfrac{15}{16}$ 를 풀면 $p = \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{4}$ 이고 $p \le 1$ 이므로 $p = \dfrac{3}{4}$ 이다.

문항카드 11

1. 일반 정보

유형		■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사
전형명		논술전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		자연계열-4차 / 문제2
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	지수함수, 수열의 극한, 최댓값과 최솟값
예상 소요 시간		33분 / 전체 100분

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 곡선 $y=e^x$ (e는 자연상수) 위의 점 $(0,1)$에서의 접선의 방정식을 $y=f(x)$라고 하자.
(나) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$이고, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

[2.1] 제시문 (가)의 $f(x)$에 대하여 $e^x - f(x)$의 최솟값을 구하시오.

[2.2] $0 \le x \le 1$에서 $2x^2 + x + 1 - e^x$의 최솟값을 구하시오.

[2.3] 문항 [2.2]를 이용하여 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\sqrt[n]{e} \le 1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}$$

[2.4] 문항 [2.1], [2.3]과 제시문 (나)를 이용하여 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right)$$

3. 출제 의도

복잡하고 다루기 어려운 함수를 비교적 간단한 함수를 이용하여 이해하는 것은 학생이 갖춰야 할 기본 소양 중 하나이다. 예를 들어 최근 각광 받는 인공지능 분야에서는 자연에서 등장하는 복잡한 함수를 상대적으로 간단한 인공신경망 함수로 표현한다. 본 문항에서는 다루기 어려운 지수함수의 크기를 비교적 간단한 다항함수와 미분을 이용해서 파악할 수 있는지와 수열의 극한을 이해하고 있는지 평가하고자 하였다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 미분을 이용하여 접선의 방정식 및 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 미분을 이용하여 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다.
[2.3] 함수를 이용하여 부등식을 증명할 수 있는지 평가한다.
[2.4] 주어진 상황을 이해하고 이를 활용하여 수열의 극한을 계산할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	[미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [미적분] - (1) 수열의 극한 - 1 수열의 극한 [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
2.1	[미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
2.2	[미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
2.3	[미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
2.4	[미적분] - (1) 수열의 극한 - 1 수열의 극한 [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	권오남 외	㈜교학사	2021	17~22 60~63
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2021	15~18 55~57

5. 문항 해설

[2.1] 지수함수를 미분할 수 있고 미분을 이용하여 접선의 방정식과 최대-최소를 구할 수 있으면 쉽게 해결할 수 있다.

[2.2] 지수함수를 미분할 수 있고 미분을 이용하여 함수의 증감과 최대-최소를 판별할 수 있으면 쉽게 해결할 수 있다.
[2.3] 함수의 최솟값과 부등식 사이의 관계를 알고 있으면 쉽게 해결할 수 있다.
[2.4] 수열의 극한에 대한 성질을 알고 앞서 제시된 문제들 사이의 연관성을 이해하고 있으면 쉽게 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

<table>
<tr><th>하위 문항</th><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td rowspan="2">2.1</td><td>$y=e^x$를 미분하면 $y'=e^x$이므로 점 $(0,1)$에서 접선의 기울기는 1이다. 따라서
$f(x)=x+1$
이다.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$g(x)=e^x-x-1$이라고 하자. $g(x)$를 미분하면
$$g'(x)=e^x-1$$
이므로 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.
<table><tr><td>x</td><td>$\cdots$</td><td>0</td><td>$\cdots$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>↘</td><td>0
(극소)</td><td>↗</td></tr></table>
따라서 $g(0)=0$은 극솟값이자 최솟값이다.</td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.2</td><td>$h(x)=2x^2+x+1-e^x$이라고 하면
$$h'(x)=4x+1-e^x,\ h''(x)=4-e^x$$
이다. 열린구간 $(0,1)$에서 $h''(x)>0$이므로 $h'(x)$는 구간 $(0,1)$에서 증가한다. 한편 $h'(0)=0$이므로 $0<x<1$에서 $h'(x)>0$이다.
따라서 $h(x)$는 열린구간 $(0,1)$에서 극값을 가지지 않는다.</td><td>6</td></tr>
<tr><td>$$h(0)=0,\ h(1)>0$$
이므로 함수 $h(x)$의 최솟값은 0이다.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>문항 [2.2]에 의해서 $0\le x\le 1$에서 $2x^2+x+1-e^x\ge 0$이므로 부등식
$$e^x\le 1+x+2x^2$$
이 성립한다. 모든 자연수 n에 대하여 $0<\frac{1}{n}\le 1$이므로 $x=\frac{1}{n}$을 위 부등식에 대입하면
$$\sqrt[n]{e}\le 1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}$$
가 성립한다.</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2.4</td><td>문항 [2.1]에 의해서 $e^x\ge 1+x$가 성립한다. 여기서 $x=\frac{1}{n}$을 대입하면, 모든 자연수 n에 대하여
$$\frac{1}{n}\le \sqrt[n]{e}-1$$
이 성립함을 알 수 있다. 또 문항 [2.3]에 의하여</td><td>6</td></tr>
</table>

	$\sqrt[n]{e}-1 \le \frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}$ 가 모든 자연수 n에 대하여 성립한다. $c_n = n(\sqrt[n]{e}-1)$이라고 하면 모든 자연수 n에 대하여 $1 \le c_n \le 1+\frac{2}{n}$ 가 성립한다.	
	$a_n = 1,\ b_n = 1+\frac{2}{n}$라고 하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$ 이므로 제시문 (나)에 의하여 $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e}-1) = 1$ 이다.	3

7. 예시 답안

[2.1] $y = e^x$를 미분하면 $y' = e^x$이므로 점 $(0, 1)$에서 접선의 기울기는 1이다.
따라서 $f(x) = x+1$이다. $g(x) = e^x - x - 1$이라고 하자. $g(x)$를 미분하면

$$g'(x) = e^x - 1$$

이므로 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0 (극소)	$\nearrow$

따라서 $g(0) = 0$은 극솟값이자 최솟값이다.

[2.2] $h(x) = 2x^2 + x + 1 - e^x$이라고 하면

$$h'(x) = 4x + 1 - e^x,\ h''(x) = 4 - e^x$$

이다. 열린구간 $(0, 1)$에서 $h''(x) > 0$이므로 $h'(x)$는 구간 $(0, 1)$에서 증가한다.
한편 $h'(0) = 0$이므로 $0 < x < 1$에서 $h'(x) > 0$이다.
따라서 $h(x)$는 열린구간 $(0, 1)$에서 극값을 가지지 않는다.
여기서 $h(0) = 0,\ h(1) > 0$이므로 함수 $h(x)$의 최솟값은 0이다.

[2.3] 문항 [2.2]에 의해서 $0 \le x \le 1$에서 $2x^2 + x + 1 - e^x \ge 0$이므로 부등식

$$e^x \le 1 + x + 2x^2$$

이 성립한다. 모든 자연수 n에 대하여 $0 < \frac{1}{n} \le 1$이므로 $x = \frac{1}{n}$을 위 부등식에 대입하면

$$\sqrt[n]{e} \le 1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}$$

가 성립한다.

[2.4] 문항 [2.1]에 의해서 $e^x \geq 1+x$가 성립한다. 여기서 $x=\frac{1}{n}$을 대입하면, 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{n} \leq \sqrt[n]{e}-1$$

이 성립함을 알 수 있다. 또 문항 [2.3]에 의하여

$$\sqrt[n]{e}-1 \leq \frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}$$

가 모든 자연수 n에 대하여 성립한다. $c_n = n(\sqrt[n]{e}-1)$이라고 하면 모든 자연수 n에 대하여

$$1 \leq c_n \leq 1+\frac{2}{n}$$

가 성립한다. $a_n = 1$, $b_n = 1+\frac{2}{n}$라고 하면

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 1$$

이므로 제시문 (나)에 의하여

$$\lim_{n \to \infty} n(\sqrt[n]{e}-1) = 1$$

이다.

문항카드 12

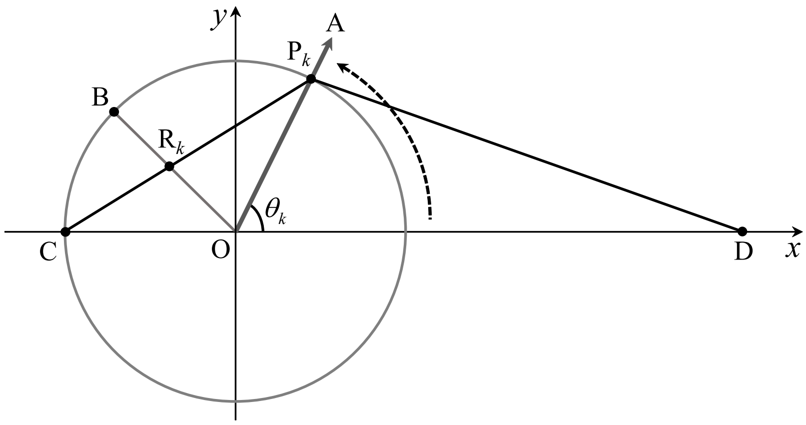
1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열-4차 / 문제3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I, 미적분
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 삼각함수의 그래프, 수열의 합, 정적분
예상 소요 시간	33분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

아래 그림은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원, 그리고 x축의 양의 방향을 시초선으로 하여 반시계방향으로 회전하는 동경 OA를 나타낸다.



(가) 점 $\mathrm{B, C, D}$의 좌표는 각각 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(-1, 0)$, $(3, 0)$이다.

(나) 시초선을 출발한 동경 OA는 매 초마다 같은 크기의 각으로 회전하여 n초 후에 선분 OB와 겹친다. $1 \le k \le n$인 k에 대하여 k초 후에 동경 OA가 시초선과 이루는 각은 θ_k $\left(0 \le \theta_k \le \frac{3\pi}{4}\right)$이고 원과 만나는 교점은 P_k이다. (단, k와 n은 자연수)

(다) $1 \le k \le n$인 k에 대하여 선분 CP_k와 선분 OB의 교점은 R_k이고 선분 OR_k의 길이를 L_k, 선분 CR_k의 길이를 M_k, 삼각형 CDP_k의 넓이를 S_k라고 하자.

[3.1] L_k를 θ_k에 대한 식으로 나타내시오.

[3.2] $n=3$일 때, $\sum_{k=1}^{3}\left(M_k^2 - L_k^2\right)$의 값을 구하시오.

[3.3] 자연수 n에 대하여 $T_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$일 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{T_n}{n}$의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

주어진 상황을 이해하고 이를 수학적으로 기술하는 능력이 반드시 필요하다. 예를 들어 원운동이나 주기운동의 경우 물체의 운동을 삼각함수 등을 이용하여 기술할 수 있다. 이 문제를 풀기 위한 수학적 개념인 직선의 방정식, 삼각함수의 정의 및 법칙, 정적분과 급수의 합 사이의 관계 등은 학생이 갖춰야 할 기초지식이다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 삼각함수, 호도법의 뜻을 알고 직선의 방정식을 활용하여 조건에 맞는 값을 구할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 코사인법칙과 수열의 합을 이용하여 질문에 답할 수 있는지 평가한다.
[3.3] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 바탕으로 질문에 답할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프 [12수학Ⅰ02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. [미적분] - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용 [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
3.1	[수학] - (3) 도형의 방정식 - 2 직선의 방정식 [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. [수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프 [12수학Ⅰ02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
3.2	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학 I] - (3) 수열 - 2 수열의 합 [12수학Ⅰ03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
3.3	[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	홍성복 외	지학사	2021	126-139
	수학 Ⅰ	황선욱 외	비상교육	2021	64~91 94~107
	미적분	황선욱 외	비상교육	2020	28~31 121~125 143~146
	미적분	홍성복 외	지학사	2021	161~165

5. 문항 해설

[3.1] 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구한 뒤 두 직선의 교점을 찾아 선분이 가지는 길이를 알 수 있다면 쉽게 해결할 수 있다.

[3.2] 코사인법칙을 이용하여 한 선분의 길이의 제곱을 구하고, 이와 앞서 구한 선분의 길이의 제곱과의 차이를 찾을 수 있다. 또한 합의 기호 Σ의 의미를 이해하고 식을 간단히 정리할 수 있다면 쉽게 해결할 수 있다.

[3.3] 삼각형에서의 넓이를 구하고 급수와 정적분의 관계를 이해하고 있다면 정적분의 계산을 통하여 쉽게 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3.1	교점 R_k의 좌표는 $\left(-\dfrac{\sin\theta_k}{\sin\theta_k+\cos\theta_k+1}, \dfrac{\sin\theta_k}{\sin\theta_k+\cos\theta_k+1}\right)$이다.	5
	$L_k=\dfrac{\sqrt{2}\sin\theta_k}{\sin\theta_k+\cos\theta_k+1}$	5
3.2	삼각형 $\mathrm{R}_k\mathrm{CO}$에서 코사인법칙을 이용하면 $M_k^2=L_k^2+1-2L_k\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=L_k^2+1-\sqrt{2}L_k$ 이다.	5
	$\theta_k=\dfrac{3\pi}{4n}k$이므로 $n=3$일 때 $\theta_k=\dfrac{\pi}{4}k$이다. 따라서 구하고자 하는 값은 $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\left(M_k^2-L_k^2\right)=\sum_{k=1}^{3}\left(1-\sqrt{2}L_k\right)=3-2\sum_{k=1}^{3}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)+1}$ $=3-2\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$ 이다.	5

3.3	$\theta_k = \frac{3\pi}{4n}k$이므로 $$S_k = \frac{1}{2}\times 4\times \sin\frac{3k\pi}{4n} = 2\sin\frac{3k\pi}{4n},\ T_n = \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{3k\pi}{4n}$$ 이다.	5
	따라서 정적분을 이용하여 극한값을 구하면 $$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{3k\pi}{4n}\frac{1}{n} = \int_0^1 2\sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right)dx$$ $$= -\frac{8}{3\pi}\left[\cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right)\right]_0^1 = \frac{8+4\sqrt{2}}{3\pi}$$ 이다.	8

7. 예시 답안

[3.1] 점 P_k의 좌표는 $(\cos\theta_k, \sin\theta_k)$이고 $\mathrm{C}(-1,0)$이므로 점 C와 점 P_k를 지나는 직선의 방정식은 $y = \frac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k + 1}(x+1)$이다. 점 O와 점 B를 지나는 직선의 방정식은 $y = -x$이고, 이 두 직선의 교점 R_k의 좌표는 $\left(-\frac{\sin\theta_k}{\sin\theta_k + \cos\theta_k + 1}, \frac{\sin\theta_k}{\sin\theta_k + \cos\theta_k + 1}\right)$이다.

따라서 $L_k = \frac{\sqrt{2}\sin\theta_k}{\sin\theta_k + \cos\theta_k + 1}$ 이다.

[3.2] 삼각형 $\mathrm{R}_k CO$에서 코사인법칙을 이용하면

$$M_k^2 = L_k^2 + 1 - 2L_k\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = L_k^2 + 1 - \sqrt{2}L_k$$

이다. $\theta_k = \frac{3\pi}{4n}k$이므로 $n=3$일 때 $\theta_k = \frac{\pi}{4}k$이다. 따라서 구하고자 하는 값은

$$\sum_{k=1}^{3}\left(M_k^2 - L_k^2\right) = \sum_{k=1}^{3}\left(1 - \sqrt{2}L_k\right) = 3 - 2\sum_{k=1}^{3}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) + 1} = 3 - 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

이다.

[3.3] $\theta_k = \frac{3\pi}{4n}k$이므로

$$S_k = \frac{1}{2}\times 4\times \sin\frac{3k\pi}{4n} = 2\sin\frac{3k\pi}{4n},\ T_n = \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{3k\pi}{4n}$$

이다. 따라서 정적분을 이용하여 극한값을 구하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{3k\pi}{4n}\frac{1}{n} = \int_0^1 2\sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right)dx = -\frac{8}{3\pi}\left[\cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right)\right]_0^1 = \frac{8+4\sqrt{2}}{3\pi}$$

이다.