

## 5. 문항카드 5 – 자연계열 1차 1번

### 5.1 일반정보

유형	논술고사		
전형명	논술(일반)전형		
계열(과목)/문항번호	자연계열 1차(수학전공, 전자공학전공, 컴퓨터공학전공) / 1번		
출제범위	교육과정 과목명	미적분, 확률과 통계	
	핵심개념 및 용어	· 조건부확률 · 확률의 곱셈정리 · 기댓값 · 분산 · 이항분포	
예상소요 시간	40분		/ 100 분

### 5.2 문제 및 제시문(문항)

#### [제시문]

[가] 어떤 시행에서 표본공간  $S$ 의 각 원소에 단 하나의 실수가 대응되는 함수를 확률변수라 하고, 확률변수  $X$ 가 어떤 값  $x$ 를 가질 확률을 기호로  $P(X=x)$ 와 같이 나타낸다.

[나] 이산확률변수  $X$ 의 확률질량함수가  $P(X=x_i)=p_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )일 때 확률변수  $X$ 의 기댓값은 다음과 같다.

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^n x_ip_i$$

[다] 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이면 다음 등식이 성립한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x) dx \quad \left( \text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k \Delta x \right)$$

#### [문제]

[1-1] 어느 봉사 동아리에서 신입 회원을 모집했는데, 20명의 학생이 지원 서류를 제출하였다. 그중에서 4명의 남학생과 3명의 여학생은 자신의 성별을 밝혔으나, 나머지 13명은 성별을 밝히지 않았다. 그리고 성별을 밝히지 않은 학생이 남학생 또는 여학생일 확률은 각각  $\frac{1}{2}$ 로 같다. 20명의 신입회원 신청자들 중에서 여학생의 수를 확률변수  $X$ 라고 할 때,  $X$ 의 확률질량함수와 분산을 구하시오.

【1-2】 이산확률변수  $X$ 가 자연수들로 이루어진 집합  $\{2n+1, 2n+2, 2n+3, \dots, 4n\}$ 에서 임의로 선택된 숫자일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2nE\left(\frac{1}{X}\right)$ 을 구하시오.

【1-3】 한 개의 주사위를 던져 1, 2, 3이 나오면 동전 한 개를 던진다. 이때 앞면이 나오면 주사위에서 얻은 결과에 1을 더하고 뒷면이 나오면 2를 더한다. 한편, 4, 5, 6이 나오면 금화 6개와 은화 4개가 들어있는 주머니에서 임의로 두 개를 동시에 꺼내어 금화 두 개가 나오면 주사위에서 얻은 결과에서 1을 빼고 아니면 2를 뺀다. 이렇게 해서 얻어진 결과가 4 이상일 때, 처음 던진 주사위의 눈이 짝수일 확률을 구하시오.

【1-4】 정상적인 동전의 한 면은 빨간색, 다른 면은 초록색이고 각 면이 나올 확률은 같다. 반면, 비정상적인 동전의 한 면은 빨간색, 다른 면은 파란색이고 빨간색 면이 나올 확률은  $p$ 이다. 두 개의 주머니  $A$ 와  $B$ 가 있다. 주머니  $A$ 에는 정상적인 동전과 비정상적인 동전이 한 개씩 들어있고, 주머니  $B$ 에는 정상적인 동전 한 개와 비정상적인 동전 두 개가 들어있다. 주머니  $B$ 에서 동전 한 개를 임의로 꺼내어 주머니  $A$ 에 넣은 후 주머니  $A$ 에서 두 개의 동전을 동시에 꺼내어 던졌다. 이때 같은 색의 면이 나올 확률이  $\frac{4}{9}$ 가 되게 하는  $p$ 의 값을 구하시오.

---

### 5.3 출제 의도

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루고 있는 확률과 통계의 기본적인 내용과 미적분학에서 배우는 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여, 이항분포, 분산의 성질, 이산확률변수의 기댓값, 조건부확률, 확률의 덧셈정리 및 곱셈정리 등을 제대로 이해하고 이를 활용할 수 있는지 평가한다. 구체적인 평가요소는 다음과 같다.

- 확률변수와 확률분포를 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.
  - 이항분포의 뜻을 알고, 이를 활용하여 확률질량함수와 분산을 구할 수 있는지 평가한다.
  - 분산의 기본성질을 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.
  - 이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있는지 평가한다.
  - 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.
  - 확률의 곱셈정리, 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있는지 평가한다.
  - 조건부확률을 이해하고, 이를 구할 수 있는지 평가한다.
- 제시문은 2015년 개정 교육과정 ‘확률과 통계’ (3) 통계 ① 확률분포 및 ‘[미적분] (3) 적분법 ② 정적분의 활용’에 관련된 내용이다. 교과서에 나오는 확률변수와 확률분포의 뜻, 이산확률분포의 기댓값 계산, 정적분과 급수의 합 사이의 관계로 구성하여, 학생들이 문제를 푸는 데 도움을 받을 수 있도록 하였다.
- 문항 【1-1】은 이항분포를 따르는 확률변수에 상수를 더해 얻어진 확률변수의 확률질량함수와 분산을 구하는 문제로 이항분포와 분산의 성질을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가하는 문항이다. 이항분포는 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로, 대부분의 학생이 손쉽게 답을 구할 수 있을 것으로 판단된다.
- 문항 【1-2】는 제시문 [나]에 주어진 이산확률변수의 기댓값을 이용하여 기댓값을 찾은 후, 제시문 [다]에 주어진 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 기댓값을 적분으로 바꾸어서 계산할 수 있는지 평가하는 문항이다. 이산확률변수의 기댓값 계산과 정적분과 급수의 합 사이의 관계는 학생들에게 매우 익숙한 기본적인 내용이므로 학생들이 어려움 없이 해결할 것으로 판단된다.
- 문항 【1-3】에서는 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 계산할 수 있으며 조건부확률을 이해하고 이를 활용할 수 있는지 평가하고자 한다.
- 문항 【1-4】는 문제의 상황을 잘 이해하고 경우를 나눈 후 확률의 곱셈정리와 덧셈정리를 이용하여 확률을 계산할 수 있는지 평가하는 문항이다. 확률의 기본개념을 잘 이해하고 있다면 답을 어렵지 않게 구할 수 있을 것으로 판단된다.

## 5.4 출제 근거

### 5.4.1 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정	교육부 고시 제2015-74호
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 전체	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [확률과 통계] - (3) 통계 ① 확률분포 [12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (3) 적분법 ② 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.</li> </ul>
하위문항 【1-1】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포 [12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【1-2】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [확률과 통계] - (3) 통계 ① 확률분포 [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (3) 적분법 ② 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.</li> </ul>
하위문항 【1-3】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [확률과 통계] - (2) 확률 ② 조건부 확률 [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【1-4】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [확률과 통계] - (2) 확률 ① 확률의 뜻과 활용 [12확통02-02] 확률의 기본 성질을 이해한다.</li> </ul>

### 5.4.2 자료 출처

참고자료	교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	홍성복 외	지학사	2019	163
		김원경 외	비상교육	2019	146
		박교식 외	동아출판	2019	151
		고성은 외	좋은책 신사고	2019	150
	확률과 통계	홍성복 외	지학사	2019	45, 63, 83~84, 87, 92
		김원경 외	비상교육	2019	37, 53, 73, 75, 77, 83
		고성은 외	좋은책 신사고	2019	84

## 5.5 문항 해설

### 5.5.1 위원회 자체 평가 의견

제시문 [가], [나], [다] 모두 교과서(‘확률과 통계’, ‘미적분’)의 내용을 발췌하여 제시하였다. 교육과정을 이수한 학생이라면 제시문을 이해하는데 어려움이 없을 것으로 판단된다. 문항을 해결할 때 사용된 핵심 용어와 기호는 ‘조건부확률, 확률의 곱셈정리, 기댓값, 분산, 이항분포’이다. 이는 교육과정에 부합된다.

문항 【1-1】은 이산확률변수와 이항분포의 개념을 이해하고 적용할 수 있는지를 평가하고 있다. 교과서에서 다른 내용과 유사하여 문제 해결에 큰 어려움이 없을 것으로 판단된다.

문항 【1-2】는 이산확률변수의 기댓값과 정적분과 급수의 관계가 접목된 문항이다. 제시문이 문제 해결 방향을 안내하는 길잡이 역할을 하고 있어 접근하는데 수월했을 것으로 판단된다.

문항 【1-3】은 독립시행에서 대표적으로 다루는 주사위 관련 내용으로 구성되어 있다. 문항에서 제시하고 있는 특수한 상황의 각 경우의 수를 빠뜨리지 않고 분류하는 것이 중요하다. 꼼꼼한 계산력을 요구하고 있어 주의가 요구되지만 교육과정에는 부합된다.

문항 【1-4】는 동전의 앞면과 뒷면이 나올 확률이 다른 상황이 제시되어 있다. 모든 시행을 고려하여 문제를 해결해야 하므로 수학적 역량을 평가할 수 있는 우수한 문항이라고 판단된다. 동전의 앞면과 뒷면이 나올 확률이 다르지만 독립시행의 기본 개념을 이해하고, 다양한 상황에 적용하는 연습을 한 학생이라면 충분히 해결할 수 있을 것으로 판단된다.

제시문과 문항 모두 교육과정에 부합된다.

### 5.5.2 출제 검토 교사 의견

주어진 제시문은 ‘확률과 통계’ 과목과 ‘미적분’ 과목의 성취기준을 근거로 출제되었다. 확률의 뜻과 활용, 조건부 확률 등으로부터 확률분포에 이르기까지 과목의 전반적인 영역을 골고루 평가할 수 있으며, ‘미적분’ 과목의 정적분과 급수의 내용이 확률과 통계 과목의 기댓값과 연계되었다. 제시문의 내용은 교과서에서 발췌하여 교육과정을 준수하였다. 내용도 문제 해결의 방향을 안내하는 길잡이 역할을 할 수 있도록 구성되었다.

문항 【1-1】은 이항분포의 확률질량함수와 분산을 이용하여 성취기준 ‘이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.’에 부합된다.

문항 【1-2】는 ‘확률과 통계’ 과목의 이산확률변수의 기댓값을 기반으로 ‘미적분’ 과목의 정적분과 급수의 관계를 계산과정에 접목하였다. 두 개념이 연계된 우수한 문항으로 교육과정에 부합된다.

문항 【1-3】은 각 시행에 따른 경우를 잘 분류하고 정리하여 조건부확률을 구할 수 있는지를 평가하고 있다. 교과서에서 다른 형태와 비슷하여 무리 없이 해결할 수 있을 것으로 판단된다.

문항 【1-4】는 동전을 던졌을 때 앞면과 뒷면이 나올 확률이 다른 비정상적인 동전을 제시하고 있다. 특수한 상황을 논리적으로 대처하는 역량을 평가하기에 적합한 문항이라고 판단된다. 앞면과 뒷면이 나올 확률이 다른 동전으로 이해하면, 이후 과정은 교과서 예제에서 다른 내용과 유사하므로 무리 없이 해결할 수 있을 것으로 판단된다.

### 5.5.3 자문위원 평가 의견

제시문 [가]는 ‘확률과 통계’ 과목의 핵심성취기준인 ‘[12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.’에 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나왔고, 제시문 수준은 평균 4.7로 적당하다고 판단하고 있다.

제시문 [나]는 ‘확률과 통계’ 과목의 핵심성취기준인 ‘[12확통-03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.’에 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나왔고, 제시문 수준은 평균 4.9로 적당하다고 판단하고 있다.

제시문 [다]는 ‘미적분’ 과목의 핵심성취기준인 ‘[12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.’에 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나왔고, 제시문 수준은 평균 4.7로 적당하다고 판단하고 있다.

문항 【1-1】은 이산확률변수의 확률분포에 대한 실생활 상황을 제시한 후, 확률변수  $X$ 에 대한 확률분포를 나타내고, 평균 및 분산을 묻는 문항이다. 확률질량함수와 분산 또한 교육과정상 주요하게 다루어지는 개념과 계산인 만큼 해당 과목의 교육과정을 잘 이수하였는지의 지식적인 여부와 주어진 맥락을 이해하고 수학적으로 문제를 해결하는 능력을 측정하는 데 적합하다고 할 수 있다. 교육과정에 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나왔고, 문항 수준은 평균 4.8로 쉬운 편이라는 의견이다.

문항 【1-2】는 기댓값의 정의에 따라 식을 세운 후, 급수로 표현된 식을 정적분으로 변환하여 값을 구하는 문항이다. 문제 해결의 과정에서 주요한 두 과정 모두 제시문 [나], [다]에서 개념을 소개하였으며 고등학교 교육과정에서 중요하게 다루어진 내용인 만큼 해당 개념을 충실하게 이해하고 공부한 학생이라면 어려움 없이 답을 구할 수 있을 것으로 보여진다. 교육과정에 부합한다는 의견이 평균 4.6으로 높게 나왔고, 문항 수준은 평균 4.5로 쉬운 편이라는 의견이다.

문항 【1-3】은 간단하게 주어진 실생활 상황에서 조건부확률을 구하는 문항이다. 조건부확률 개념은 ‘확률과 통계’ 과목의 <(2)확률> 단원에서 중요하게 다루어지는 개념이며 수능형 문제에서도 자주 다루어지는 유형인 만큼 학생들에게 친숙한 유형이라 할 수 있다는 의견이다. 교육과정에 부합한다는 의견이 평균 4.7로 높게 나왔고, 문항 수준은 평균 4.6으로 쉬운 편이라는 의견이다.

문항 【1-4】는 간단하게 주어진 실생활 상황에서 서로 종속인 두 사건에 대한 확률이 어떤 조건을 만족시키도록 미지수  $p$ 의 값을 정하는 문제이다. 서로 종속인 사건들에 대한 확률의 계산 문제는 ‘확률과 통계’ 과목의 <(2)확률> 단원에서 중요하게 다루어지는 개념이며 수능형 문제에서도 자주 다루어지는 유형인 만큼 학생들에게 친숙한 유형이라 할 수 있을 것이다. 또한, 확률을 구하는 일반적인 수능형 문제와 달리 확률이 어떤 조건을 만족하도록 미지수를 정하는 문제인 만큼 단순 계산이 아닌 문자를 이용하여 식으로 나타내고 정리와 계산을 진행하는 역량을 알아볼 수 있는 논술 문제에 적합한 형식을 갖추었다고 생각된다. 교육과정에 부합한다는 의견이 평균 4.7로 높게 나왔고, 문항 수준은 평균 4.5로 쉬운 편이라는 의견이다. 전반적으로 제시문과 문항 【1-1】, 【1-2】는 쉬운 편이라는 의견이고 문항 【1-3】, 【1-4】는 다소 계산이 복잡하여 어려울 수 있다는 의견이다. 하지만 교육과정에 충실한 학생이라면 충분히 해결 가능한 문항이라는 의견이다.

## 5.6 채점 기준

### 【1-1】

- 확률변수  $X$ 에서 3을 빼면 이항분포를 갖는 확률변수가 되는 것을 파악하고, 이항분포를 갖는 확률변수의 확률질량함수와 분산을 구할 수 있다.
- 두 확률변수의 관계와 분산의 성질을 이용하여 주어진 확률변수의 확률질량함수와 분산을 구할 수 있다.

### 【1-2】

- 이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있다.
- 제시문 [다]에 주어진 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하기 위하여 식을 변형한 후 정적분으로 고쳐서 계산할 수 있다.

### 【1-3】

- 확률의 곱셈정리를 이용하여 각 사건이 일어날 확률을 계산할 수 있다.
- 조건부확률을 이해하고 주어진 사건이 일어날 확률을 계산할 수 있다.

### 【1-4】

- 추가된 동전이 정상적인 동전일 확률과 그렇지 않을 확률을 계산할 수 있다.
- 문제의 상황을 잘 이해하고 경우를 나눈 후, 확률의 곱셈정리와 덧셈정리를 이용하여 각 사건이 일어날 확률을 계산할 수 있다.
- 위에서 구한 확률을 이용하여 방정식을 만든 후 방정식을 풀어서 확률이 될 수 있는 값을 찾아낼 수 있다.

## 5.7 답안 사례

【1-1】성별을 밝히지 않은 13명의 신청자 중에서 여학생의 수를 확률변수  $Y$ 라고 하면,  $Y$ 는 이항분포  $B\left(13, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다. 따라서,  $Y$ 의 확률질량함수

$$P(Y=y) = {}_{13}C_y \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{13-y} = {}_{13}C_y \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \quad (y=0, 1, 2, \dots, 13)$$

이고  $Y$ 의 분산

$$V(Y) = 13 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{4}$$

이다.  $X = Y + 3$  이므로  $X$ 의 확률질량함수

$$P(X=x) = P(Y=x-3) = {}_{13}C_{x-3} \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \quad (x=3, 4, 5, \dots, 16)$$

이고  $X$ 의 분산

$$V(X) = V(Y+3) = V(Y) = \frac{13}{4}$$

이다.

【1-2】제시문 [나]에 의하여  $E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n} \frac{1}{2n+k}$  이므로

$$\begin{aligned} 2nE\left(\frac{1}{X}\right) &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{4n} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{3n+k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2+\frac{k}{n}} \times \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{3+\frac{k}{n}} \times \frac{1}{n} \end{aligned}$$

이다. 따라서, 제시문 [다]에 의하여

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} 2nE\left(\frac{1}{X}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2+\frac{k}{n}} \times \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3+\frac{k}{n}} \times \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{2+x} dx + \int_0^1 \frac{1}{3+x} dx \\ &= \ln(2+x) \Big|_0^1 + \ln(3+x) \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 = \ln \frac{4}{2} = \ln 2 \end{aligned}$$

이다.

【1-3】주사위 던지기과 그 이후 실행은 서로 독립이므로 확률의 곱셈정리를 이용하여 각각의 사건이 일어날 확률을 계산하면 다음과 같다.

주사위의 눈	1		2		3	
최종 결과	2	3	3	4	4	5
확률	$\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

주사위의 눈	4		5		6	
최종 결과	3	2	4	3	5	4
확률	$\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$	$\frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$



최종 결과가 4 이상인 사건을  $A$ 라고 하면,

$$P(A) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} = \frac{17}{36}$$

이다. 처음 던진 주사위의 눈이 짝수인 사건을  $B$ 라고 하면, 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9}}{\frac{17}{36}} = \frac{9}{17}$$

이다.

【1-4】 주머니  $A$ 에 추가된 동전이 정상적인 동전일 확률은  $\frac{1}{3}$ , 비정상적인 동전일 확률은  $\frac{2}{3}$ 이다.

(i) 추가된 동전이 정상적인 동전인 경우:

주머니  $A$ 에는 정상적인 동전 2개, 비정상적인 동전 1개가 들어있다. 같은 색의 면이 나오려면, ①정상적인 동전과 비정상적인 동전을 하나씩 꺼내서 던진 후 둘 다 빨간색 면이 나오거나 ②정상적인 동전 2개를 꺼내서 던진 후 둘 다 빨간색 면이 나오거나 둘 다 초록색 면이 나와야 한다. 따라서, 이 경우에 같은 색의 면이 나올 확률은

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times p + \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}p + \frac{1}{6}$$

이다.

(ii) 추가된 동전이 비정상적인 동전인 경우:

주머니  $A$ 에는 정상적인 동전 1개, 비정상적인 동전 2개가 들어있다. 같은 색의 면이 나오려면, ①정상적인 동전과 비정상적인 동전을 하나씩 꺼내서 던진 후 둘 다 빨간색 면이 나오거나 ②비정상적인 동전 2개를 꺼내서 던진 후 둘 다 빨간색 면이 나오거나 둘 다 파란색 면이 나와야 한다. 따라서, 이 경우에 같은 색의 면이 나올 확률은

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times p + \frac{1}{3} (p^2 + (1-p)^2) = \frac{2}{3}p^2 - \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}$$

이다.

그러므로 같은 색의 면이 나올 확률이  $\frac{4}{9}$ 가 되려면

$$\frac{1}{3} \left( \frac{1}{3}p + \frac{1}{6} \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{2}{3}p^2 - \frac{1}{3}p + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{9}$$

를 만족해야 한다. 이를 정리하면  $8p^2 - 2p - 3 = 0$ , 즉  $(4p-3)(2p+1) = 0$ 이다.

그러므로 구하는 확률  $p = \frac{3}{4}$ 이다.

## 6. 문항카드 6 – 자연계열 1차 2번

### 6.1 일반정보

유형	논술고사	
전형명	논술(일반)전형	
계열(과목)/문항번호	자연계열 1차(수학전공, 전자공학전공, 컴퓨터공학전공) / 2번	
출제범위	교육과정 과목명	수학 II, 미적분, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	· 이항정리 · 함수의 증가와 감소 · 수열의 극한 · 함수의 극한 · 함수의 그래프의 개형
예상소요 시간	60분	/ 100 분

### 6.2 문제 및 제시문(문항)

#### [제시문]

[가]  $n$ 이 자연수일 때, 다항식  $(a+b)^n$ 을 전개하면 다음과 같은 전개식을 얻을 수 있고, 이것을 이항정리라고 한다.

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b^1 + \cdots + {}_nC_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_n b^n$$

[나] 함수  $f(x)$ 가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든  $x$ 에 대하여

- ①  $f'(x) > 0$ 이면  $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.
- ②  $f'(x) < 0$ 이면  $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.

[다] ① 세 수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$ 과 모든 자연수  $n$ 에 대하여,  $a_n \leq c_n \leq b_n$ 이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L \text{이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L \text{ 이다.}$$

② 세 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$ 와  $a$ 에 가까운 모든 실수  $x$ 에 대하여,

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ 이고 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \text{ 이면 } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \text{ 이다. 또한, 이와}$$

같은 함수의 극한의 관계는  $x \rightarrow a+$ ,  $x \rightarrow a-$ ,  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$  일 때도 성립한다.

[라] 함수  $f(x)$ 의 그래프의 개형을 그릴 때에는 다음을 고려한다.

- ① 함수의 정의역과 치역
- ② 좌표축과의 교점
- ③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 곡선의 오목과 볼록, 변곡점
- ④ 점근선

**[문제]**

【2-1】 제시문 [가]를 이용하여, 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$(1+n)^{\frac{1}{n}} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad (\text{단, } n \text{은 } 1 \text{보다 큰 자연수})$$

【2-2】 제시문 [나]를 이용하여, 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} \quad (\text{단, } x \text{는 양의 실수})$$

집합  $\{x \mid x > 0\}$ 을 정의역으로 갖는 함수  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 에 대하여, 문항 【2-3】~【2-5】에 답하시오.

【2-3】 함수  $f(x)$ 가 열린구간  $(0, \infty)$ 에서 증가함을 보이시오.

【2-4】 함수  $g(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{n}\right) & (0 < x \leq 1, \text{ 단, } n \text{은 } \frac{1}{x} \text{의 정수 부분}) \\ 3 & (x > 1) \end{cases}$$

임의의 양의 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \leq g(x)$ 임을 보이시오.

【2-5】 문항 【2-1】~【2-4】를 이용하여, 함수  $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 그리시오.

## 6.3 출제 의도

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루고 있는 미적분학의 기본적인 내용과 확률과 통계에서 배우는 이항정리를 이용하여, 도함수의 부호에 따른 함수의 증가·감소 판정, 함수의 극한, 이계도함수와 곡선의 오목·볼록 및 변곡점과의 관계 등을 제대로 이해하고 이를 활용할 수 있는지 평가한다. 제시문에는 문제를 풀면서 사용할 수 있도록 관련된 교과서 내용을 서술하였으며, 제시문과 이전에 해결한 문항을 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있도록 구성하였다. 구체적인 평가요소는 다음과 같다.

- 이항정리를 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.
  - 미분을 사용하여 함수의 증가와 감소를 판정할 수 있는지 평가한다.
  - 수  $e$ 의 정의를 이해하고, 이를 활용할 수 있는지 평가한다.
  - 극한에 대한 기본성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지 평가한다.
  - 도함수와 이계도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있는지 평가한다.
- 제시문 [가]는 2015년 개정 교육과정 ‘확률과 통계’ (1) 경우의 수 ② 이항정리, 제시문 [나]는 ‘수학Ⅲ’ (2) 미분 ③ 도함수의 활용, 제시문 [다]는 ‘미적분’ (1) 수열의 극한 ① 수열의 극한 및 ‘수학Ⅲ’ (1) 함수의 극한과 연속 ① 함수의 극한, 제시문 [라]는 ‘미적분’ (2) 미분법 ③ 도함수의 활용’에 관련된 내용이다. 검정교과서에서 공통으로 다루고 있는 정의, 정리, 설명을 원문 그대로 제시하였으며, 이를 통하여 학생들이 문제를 푸는 데 도움을 받을 수 있도록 하였다.
- 문항 [2-1]은 제시문 [가]의 이항정리를 사용하여 주어진 부등식의 우변을  $n$ 제곱한 식을 전개하고, 이를 활용하여 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있는지 평가하는 문항이다. 이항정리는 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로, 대부분의 학생이 제시문을 이용하여 쉽게 문제를 해결할 수 있을 것으로 판단된다.
- 문항 [2-2]는 제시문 [나]에 서술된 도함수의 부호와 함수의 증가·감소의 관계를 이해하고, 합성함수의 미분법 및 함수의 몫의 미분법을 이용하여 도함수를 계산할 수 있으며, 함수의 극한값을 이해하고 이를 활용할 수 있는지 평가하는 문항이다. 미분과 함수의 증가·감소의 관계는 미분의 활용에 있어 매우 중요한 내용으로 교과서에 잘 다루어져 있고, 미분법 또한 학생들에게 매우 익숙한 내용이므로 고등학교 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면 쉽게 해결할 것으로 판단된다.
- 문항 [2-3]은 로그함수의 도함수와 합성함수의 미분법을 이용하여 주어진 함수의 도함수를 찾아내고, 문항 [2-2]에서 보인 부등식을 활용하여 도함수의 부호를 결정한 후 제시문 [나]를 이용하여 함수의 증가·감소를 결정할 수 있는지 평가하는 문항이다. 로그함수를 이용하여 주어진 함수의 도함수를 찾아내는 방법은 모든 교과서에서 다루고 있으므로 학생들이 문항 [2-2]의 내용을 활용하여 쉽게 해결할 수 있을 것으로 판단된다.
- 문항 [2-4]는 수  $e$ 의 정의로부터 바로 구할 수 있는 극한값과 문항 [2-3]에서 확인한 결과를 이용하여 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있는지 평가하는 문항이다. 수  $e$ 의 정의로부터 따라나오는 극한값은 교과서에 설명되어 있거나 예제에서 다루고 있는 기본적인 극한값으로 학생들이 쉽게 찾아내어 문제를 푸는 데 활용할 수 있을 것으로 생각된다.

- 문항 【2-5】는 문항 【2-1】~【2-4】와 제시문 [다]를 모두 활용하여 제시문 [라]에 적혀있는 고려 사항에 따라 그래프의 개형을 그릴 수 있는지 평가하는 문항이다. 치역을 구하기 위하여 주어진 함수의 0에서의 우극한을 구할 수 있으며, 이계도함수의 부호를 이용하여 그래프의 오목·볼록 및 변곡점의 존재 여부를 결정할 수 있는지 평가한다. 모든 검정교과서에서 다루고 있는 내용으로 구성된 문항으로, 문항 【2-1】~【2-4】를 활용하면 어렵지 않게 문제를 풀어낼 것으로 판단된다.

## 6.4 출제 근거

### 6.4.1 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정	교육부 고시 제2015-74호
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 전체	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ㉠ 함수의 극한 [12수학II01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.</li> <li>· [수학II] - (2) 미분 - ㉢ 도함수의 활용 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (1) 수열의 극한 - ㉠ 수열의 극한 [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ㉢ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</li> <li>· [확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ㉢ 이항정리 [12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【2-1】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ㉢ 이항정리 [12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【2-2】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ㉠ 함수의 극한 [12수학II01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다.</li> <li>· [수학II] - (2) 미분 - ㉢ 도함수의 활용 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ㉠ 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ㉢ 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【2-3】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학II] - (2) 미분 - ㉢ 도함수 [12수학II02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.</li> <li>· [수학II] - (2) 미분 - ㉢ 도함수의 활용 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ㉠ 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ㉢ 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.</li> </ul>

하위문항 【2-4】	· [미적분] - (2) 미분법 - ㉠ 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다.
하위문항 【2-5】	· [수학II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ㉠ 함수의 극한 [12수학II01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. · [수학II] - (2) 미분 - ㉡ 도함수 [12수학II02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. · [미적분] - (1) 수열의 극한 - ㉠ 수열의 극한 [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. · [미적분] - (2) 미분법 - ㉠ 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. · [미적분] - (2) 미분법 - ㉡ 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다. · [미적분] - (2) 미분법 - ㉢ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

## 6.4.2 자료 출처

참고자료	교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	홍성복 외	지학사	2018	11, 20, 25, 62, 83~84
		고성은 외	좋은책 신사고	2018	11, 19, 23, 61, 80~81, 83
	미적분	이준열 외	천재교육	2019	17, 19, 55, 61, 88, 102, 112, 115
		고성은 외	좋은책 신사고	2019	15, 18, 49, 55, 80, 91, 102, 106
	확률과 통계	이준열 외	천재교육	2019	29~30
		고성은 외	좋은책 신사고	2019	27~28

## 6.5 문항 해설

### 6.5.1 위원회 자체 평가 의견

제시문 [가], [나], [다], [라] 모두 교과서(‘수학Ⅱ’, ‘확률과 통계’, ‘미적분’)의 내용을 발췌하여 제시하였다. 교육과정을 이수한 학생이라면 제시문을 이해하는데 어려움이 없을 것으로 판단된다. 문항을 해결할 때 사용된 핵심 용어와 기호는 ‘이항정리, 함수의 증가와 감소, 수열의 극한, 함수의 극한, 함수의 그래프의 개형’ 이다. 이는 교육과정에 부합된다.

문항 【2-1】은 부등식을 증명하는 문항으로 접근 방법이 여러 가지가 존재하는데, 제시문 [가]를 이용하라는 문구로 수험생들에게 가이드하고 있어 쉽게 접근하여 해결할 것으로 기대된다.

문항 【2-2】는 부등식의 증명 과정이 두 번 있는데, 각 부등식을 증명할 때 한 쪽으로 이항하여 제시문 [나]를 이용하면 접근이 용이할 것으로 판단된다. 관련 증명은 교과서에서도 다루었던 내용으로 크게 어렵지 않을 것으로 판단된다.

문항 【2-3】~【2-5】는 함수의 그래프의 개형을 그릴 때, 종합적인 상황을 모두 고려할 수 있는지를 평가하고 있다. 앞의 세부 문항을 단계적으로 해결하면서 그래프의 개형을 유추하도록 안내하고 있다.

문항 【2-3】은 교과서의 예제에서도 확인할 수 있는 유형으로 쉽게 해결했을 것으로 기대된다.

문항 【2-4】는 새로 정의된 함수  $g(x)$ 와  $n$ 과  $x$ 의 관계를 이해하는 것이 중요하다. 또한,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e$ 임을 파악하고  $1 < f(x) \leq g(x)$ 를 유도하는 것이 중요하다. 이를 활용하여 함수  $f(x)$ 가 나타내는 영역을 예상할 수 있기 때문이다.

문항 【2-5】는 앞의 세부 문항의 결과를 종합하여 함수  $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 그릴 수 있는지를 평가하고 있다. 함수의 그래프의 개형을 그리기 위해서는 함수의 치역, 점근선의 존재 여부, 볼록성 등 여러 가지를 확인해야 한다. 이런 부분을 제시문과 문항에 단계적으로 제시하고 있어 수험생들이 접근하고 해결하는데 도움을 주고 있다.

문항 모두 교육과정에 부합된다.

## 6.5.2 출제 검토 교사 의견

제시문은 ‘수학Ⅱ’, ‘미적분’, ‘확률과 통계’의 교과서에서 문제 해결에 필요한 내용을 그대로 발췌하여 수험생이 내용을 이해하기에 충분할 것으로 판단된다. 또한, 세부 문항들이 모두 연계되어 있어 하나의 문항처럼 보여지는 부분이 인상적이며, 고등학교 교육과정을 벗어난 내용은 없어 교과서에서 나오는 증명을 성실히 해본 수험생이라면 충분히 해결할 수 있을 것으로 판단된다.

문항 【2-1】은 부등식을 증명하는 문항으로 제시문 【가】를 참고하여 해결할 수 있다. 양변이 모두 양수이므로 각각  $n$  거듭제곱하여 크기를 비교하면 된다. 우변을 이항정리에 의해 전개한 후 일부 항의 합이 좌변과 같음을 이용한다면 쉽게 증명할 수 있을 것으로 판단된다.

문항 【2-2】는 부등식이 성립함을 확인하기 위해서 두 번 증명을 해야 하므로 다소 시간이 걸릴 것으로 판단된다. 제시문 【나】의 함수의 증가와 감소를 활용하라고 제시되어 있어 미분을 활용하라는 힌트를 제공해준 부분이 인상적이다.

문항 【2-3】~【2-5】는 함수의 그래프의 개형을 그릴 때, 단계적으로 확인할 부분을 안내하고 있다.

문항 【2-3】은 도함수가 주어진 구간에서 양수임을 확인하고, 제시문 【나】를 이용하여 증가함수임을 확인하는 문항이다.

문항 【2-4】는 부등식  $f(x) \leq g(x)$ 을 증명하는 과정에서  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e$ 와  $1 < f(x) \leq g(x)$ 의 관계를 추론할 수 있어 함수  $f(x)$ 의 치역을 구할 수 있다.

문항 【2-5】는 앞의 세부 문항 모두를 활용해야 하는 문항으로, 변별력이 우수한 문항이라고 판단된다. 함수가 위로 볼록임을 보이기 위하여 이계도함수의 부호를 판정해야 하는데, 이 과정이 어려울 수 있다. 하지만 교육과정 안에서 충분히 해결할 수 있는 문항이다.



### 6.5.3 자문위원 평가 의견

제시문 [가]는 ‘확률과 통계’ 과목의 핵심성취기준인 ‘[12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.’에 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나왔고, 문항 수준은 평균 4.7로 적당하다고 판단하고 있다.

제시문 [나]는 ‘수학Ⅱ’ 과목의 핵심성취기준인 ‘[12수학Ⅱ 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.’에 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나왔고, 문항 수준은 평균 4.8로 적당하다고 판단하고 있다.

제시문 [다]는 ‘수학Ⅱ’, ‘미적분’ 과목의 핵심성취기준인 ‘[12수학Ⅱ 01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.’, ‘[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.’에 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나왔고, 문항 수준은 평균 4.7로 적당하다고 판단하고 있다.

제시문 [라]는 ‘수학Ⅱ’, ‘미적분’ 과목의 핵심성취기준인 ‘[12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.’에 부합한다는 의견이 평균 4.8로 높게 나왔고, 문항 수준은 평균 4.7로 적당하다고 판단하고 있다.

문항 【2-1】은 제시된 부등식을 증명하는 논증 문제이다. 양변이 모두 양수인 부등식의 좌변의 지수가  $\frac{1}{n}$  인 것과 우변의 항이 2개임을 감안하면 제시문 [가]에서 소개된 이항정리를 이용하는 아이디어를 발견할 수 있었을 것으로 기대된다. 또한, 항이 다소 복잡한 형태를 띄고 있으나 차분하게 식을 정리하면 부등식이 성립하는 것을 쉽게 보일 수 있을 것으로 판단된다. 이는 주어진 조건(부등식)의 상황에서 제시문을 활용하기 위한 요소를 발견하고 적용하여 식의 조작을 통해 논리적인 사고를 진행하는 과정을 잘 평가할 수 있는 적절한 수준의 문항이라는 의견이다. 교육과정에 부합한다는 의견이 평균 4.5로 높게 나왔고, 문항 수준은 평균 4.5로 쉬운 편이라는 의견이다.

문항 【2-2】는 주어진 부등식을 증명하기 위하여 주어진 부등식의 항들로 이루어진 함수를 정의하고 미분을 이용하는 문항이다. 이는 고등학교 교육과정에서도 자주 다루어지던 문제 유형인 만큼 학생들에게 익숙한 유형이라 할 수 있을 것이다. 또한, 논리적인 서술의 진행과 함께 유리함수, 로그함수, 무리함수 등 다양한 함수의 미분법을 잘 숙지하고 적용할 수 있는지를 고르게 평가할 수 있는 문항이라는 의견이다. 교육과정에 부합한다는 의견이 평균 4.7로 높게 나왔고, 문항 수준은 평균 4.6으로 쉬운 편이라는 의견이다.

문항 【2-3】은 주어진 함수가 증가하는지를 보여야 하는 논증 문제로 ‘미적분’ 과목에서 중요하게 다루어지는 합성함수의 미분법을 이용해야 한다. 지수가 복잡하게 정의된 함수를 미분할 때 양변에 로그를 취하여 미분을 하는 아이디어는 학생들이 다소 어려움을 느끼는 경향이 있다. 그러나 교육과정에서 중요한 개념으로 다뤄지는 핵심 아이디어이며 수능형 문제에서도 종종 출제되는 아이디어인 만큼 ‘미적분’ 과목을 충실히 학습한 학생이라면 큰 어려움 없이 해결할 수 있는 유형과 난이도를 갖추었다는 의견이다. 교육과정에 부합한다는 의견이 평균 4.7로 높게 나왔고, 문항 수준은 평균 4.6으로 쉬운 편이라는 의견이다.

문항 【2-4】는 제시된 함수의 정의를 이해하고 그래프를 추론하여 주어진 범위에서  $f(x) \leq g(x)$ 임을 보일 수 있으므로 고등학교 교육과정 범위에 해당된다는 의견이 다수였다. 다만, 앞의 세부 문항과 연결이 되어 있어 중간에 계산 실수한 학생들은 어려움이 있을 것으로 예상된다는 의견도 있었다. 교육과정에 부합한다는 의견이 평균 4.3으로 높게 나왔고, 문항 수준은 평균 4.2로 쉬운 편이라는 의견이다.

문항 【2-5】는 앞에서 제시된 세부 문항에서 얻은 사실들을 종합하여 함수  $f(x)$ 의 그래프의 개형을 그려야 하는 문항이다. 도함수를 활용하여 초월함수의 그래프의 개형을 그리는 것은 고등학교 교육과정에서 중요하게 강조되고 있으며 제시된 함수  $f(x)$ 의 식과 그 그래프는 <미분법 단원> 중 무리수  $e$ 를 소개하는 단원에서 언급되기도 하는 만큼 학생들이 앞선 문항과 상관없이 그래프의 개형을 직관하는 사례는 충분히 많을 것으로 보인다는 의견이다. 교육과정에 부합한다는 의견이 평균 4.3으로 높게 나왔고, 문항 수준은

평균 4.3으로 쉬운 편이라는 의견이다.

전반적으로 제시문과 문항 【2-1】, 【2-2】, 【2-3】은 쉬운 편이라는 의견이고 문항 【2-4】, 【2-5】는 난이도가 높다는 의견이다. 하지만 교육과정에 충실한 학생이라면 충분히 해결 가능한 문항이라는 의견이다.

## 6.6 채점 기준

### 【2-1】

- 주어진 부등식의 우변을  $n$ 제곱한 식을 제시문 [가]의 이항정리를 사용하여 전개할 수 있다.
- 전개한 식을 활용하여 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.

### 【2-2】

- 부등식이 성립함을 보이기 위하여 두 변의 차로 이루어진 함수의 도함수를 계산하고 도함수의 부호를 결정할 수 있다.
- 제시문 [나]에 주어진 도함수의 부호와 함수의 증가·감소의 관계 및 함수의 극한을 이용하여 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.

### 【2-3】

- 도함수를 계산하고 문항 【2-2】의 결과를 이용하여 도함수의 부호를 결정할 수 있다.
- 제시문 [나]에 주어진 도함수의 부호와 함수의 증가·감소의 관계를 이용하여 함수의 증가·감소를 결정할 수 있다.

### 【2-4】

- 정의역에 속하는  $x$ 를 1보다 큰 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 생각할 수 있다.
- $x$ 가 1보다 큰 경우, 문항 【2-3】의 결과와  $e$ 의 정의를 활용하여 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.
- $x$ 가 1보다 작거나 같은 경우, 함수  $g(x)$ 의 정의와 문항 【2-3】의 결과를 이용하여 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.

### 【2-5】

- 문항 【2-1】~【2-4】와 제시문 [다]를 이용하여 함수의 극한을 구하고, 이를 이용하여 주어진 함수의 치역을 찾을 수 있다.
- 이계도함수를 계산하고, 문항 【2-2】의 결과를 이용하여 이계도함수의 부호를 결정할 수 있다.
- 이계도함수의 부호를 이용하여 그래프의 오목·볼록 및 변곡점의 존재 여부를 결정할 수 있다.
- 제시문 [라]를 참고하여 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

## 6.7 답안 사례

【2-1】 1보다 큰 자연수  $n$ 에 대하여,  $(1+n)^{\frac{1}{n}} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ 의 양변이 양수이므로, 양변을  $n$ 제곱하여 얻게 되는 부등식

$$1+n < \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^n \quad (1)$$

이 성립함을 보이면 된다. 제시문 [가]를 이용하여 (1)의 우변을 전개하면,

$$\begin{aligned} & \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^n \\ &= {}_nC_0 + {}_nC_1 \left(\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) + {}_nC_2 \left(\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^2 + \cdots + {}_nC_r \left(\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^r + \cdots + {}_nC_n \left(\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^n \end{aligned} \quad (2)$$

을 얻게 된다. (2)의 우변의 각 항이 양수이므로,

$$\begin{aligned} & {}_nC_0 + {}_nC_1 \left(\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) + {}_nC_2 \left(\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^2 + \cdots + {}_nC_r \left(\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^r + \cdots + {}_nC_n \left(\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^n \\ &> {}_nC_0 + {}_nC_2 \left(\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{2}{n-1} = 1+n \end{aligned}$$

이다. 따라서, 부등식

$$1+n < \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^n \quad (n \text{은 } 1 \text{보다 큰 자연수})$$

이 성립한다.

【2-2】 (i) 임의의 양의 실수  $x$ 에 대하여  $p(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$  이라고 할 때,  $p(x) > 0$ 임을 보이자.

$$p'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0$$

이므로 제시문 [나]에 의하여  $p(x)$ 는 구간  $(0, \infty)$ 에서 감소한다. 또한,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0 - 0 = 0$$

이다. 따라서  $p(x) > 0$ 이다.

(ii) 임의의 양의 실수  $x$ 에 대하여  $q(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  이라고 할 때, 위와 같은 방법으로  $q(x) > 0$ 임을 보이자.

$$q'(x) = -\frac{2x+1}{2x(x+1)\sqrt{x(x+1)}} + \frac{1}{x(x+1)} = -\frac{(2x+1) - 2\sqrt{x(x+1)}}{2x(x+1)\sqrt{x(x+1)}} < 0$$

이다. 여기서,  $(2x+1)^2 - (2\sqrt{x(x+1)})^2 = 1 > 0$ 이고  $2x+1 > 0$ ,  $2\sqrt{x(x+1)} > 0$ 이므로 분자가 양수임을 이용하였다. 그러므로 제시문 [나]에 의하여  $q(x)$ 는 구간  $(0, \infty)$ 에서 감소한다. 또한,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} - \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0 - 0 = 0$$

이다. 따라서  $q(x) > 0$ 이다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식이 성립한다.

【2-3】  $x > 0$ 이면  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > 0$ 이므로 자연로그를 취할 수 있다.  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 의 양변에 자연로그를 취하면  $\ln f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ 이다. 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \times \left(-\frac{1}{x(x+1)}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

이므로 문항 【2-2】에 의하여  $f'(x) = p(x)f(x) > 0$ 이다. 따라서, 제시문 [나]에 의하여  $f(x)$ 는 구간  $(0, \infty)$ 에서 증가한다.

【2-4】 문항 【2-3】에 의하여  $f(x)$ 가 열린구간  $(0, \infty)$ 에서 증가하고  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 이므로  $f(x) < e$  ( $x > 0$ )이다. 따라서  $x > 1$ 이면  $f(x) < e < 3 = g(x)$ 이다.

한편,  $0 < x \leq 1$ 이면,  $\frac{1}{x} \geq 1$ 이므로  $\frac{1}{x}$ 의 정수 부분인  $n$ 에 대하여  $1 \leq n \leq \frac{1}{x} < n+1$ 을 만족한다.

따라서  $0 < x \leq \frac{1}{n} \leq 1$ 이므로 문항 【2-3】과  $g(x)$ 의 정의에 의하여  $f(x) \leq f\left(\frac{1}{n}\right) = g(x)$ 이다.

그러므로, 임의의 양의 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \leq g(x)$ 이다.

【2-5】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) = 1$ 이고 문항 【2-1】로부터

$$1 < (1+n)^{\frac{1}{n}} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad (n \text{은 } 1 \text{보다 큰 자연수})$$

이므로 제시문 [다]에 의하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+n)^{\frac{1}{n}} = 1$ 이다. 따라서  $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = 1$ 이다.

또한,  $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = 1$ 이고 문항 【2-4】로부터  $1 < f(x) \leq g(x)$  ( $x > 0$ )이므로 제시문 [다]에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1 \text{이다.}$$

한편, 문항 【2-3】으로부터  $f'(x) = p(x)f(x)$ 이므로,

$$f''(x) = p'(x)f(x) + p(x)f'(x) = f(x)(p'(x) + p^2(x))$$

이다. 또한,

$$\begin{aligned}
 p'(x) + p^2(x) &= \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)} + \left\{ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right\}^2 \\
 &= \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)} - \frac{2}{x+1} \times \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \left\{ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right\}^2 \\
 &= \frac{2}{x+1} \left\{ \frac{1}{x+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right\} + \left\{ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} \right\} \left\{ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} \right\} \\
 &= -\frac{2}{x+1} \times p(x) - \left\{ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} \right\} \times q(x)
 \end{aligned}$$

이다. 문항 【2-2】로부터  $p(x) > 0$  이고  $q(x) > 0$  이므로  $p'(x) + p^2(x) < 0$  이다. 따라서 구간  $(0, \infty)$  에서  $f''(x) < 0$  이므로 곡선  $y = f(x)$  는 위로 볼록하며 변곡점은 존재하지 않는다.

함수  $y = f(x)$  의 그래프의 개형을 그리기 위하여 제시문 [라]의 내용을 확인하면 다음과 같다.

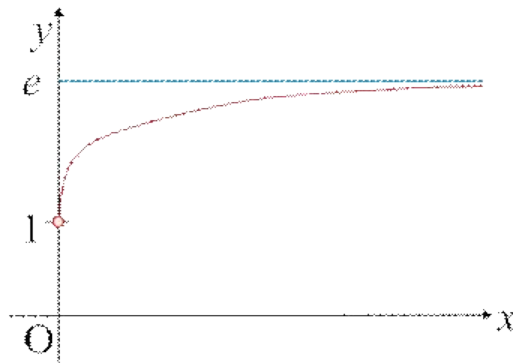
- ① 정의역:  $\{x \mid x > 0 \text{인 실수}\}$ , 치역:  $\{y \mid 1 < y < e \text{인 실수}\}$
- ② 좌표축과의 교점은 없다.
- ③ 열린구간  $(0, \infty)$  에서  $f(x)$  는 증가한다.

$f(x)$  의 극값은 존재하지 않는다.

곡선  $y = f(x)$  는 위로 볼록하며 변곡점은 존재하지 않는다.

- ④ 점근선:  $y = e$

따라서 함수  $y = f(x)$  의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



## 7. 문항카드 7 – 자연계열 2차 1번

### 7.1 일반정보

유형	논술고사	
전형명	논술(일반)전형	
계열(과목)/문항번호	자연계열 2차(물리학전공, 화공생명공학전공, 기계공학전공) / 1번	
출제범위	교육과정 과목명	수학, 수학 II, 미적분, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	· 확률과 경우의 수                      · 역함수의 정의와 응용 · 연속함수의 정의                      · 등비수열 · 이차방정식의 해와 판별식          · 다양한 함수의 정적분
예상소요 시간	40분	/ 100 분

### 7.2 문제 및 제시문(문항)

[제시문]

[가] 함수  $f(x)$ 와 실수  $a$ 에 대하여

- ① 함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 에서 정의되고
- ② 극한값  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재하며
- ③  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

일 때, 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 연속이라고 한다.

[나] 함수  $f: X \rightarrow Y$ 가 일대일대응이면  $f$ 의 역함수  $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 가 존재한다.

[다] 등비급수  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$  ( $a \neq 0$ )은  $|r| < 1$  일 때 수렴하고 그 합은  $\frac{a}{1-r}$  이다.

[문제]

【1-1】 한국시리즈가 코로나 사태로 인하여 3번의 경기 중에서 2번을 먼저 이기는 팀이 최종우승하는 방식으로 축소되었다. 한국시리즈에 진출한 두 팀 A와 B가 첫 경기를 진행하였는데 A팀이 패하였다. 하지만 코로나 사태가 진정되어 이미 치러진 1차전을 포함하여 5번의 경기 중에서 3번을 먼저 이기는 팀이 최종 우승하는 방식으로 되돌아가기로 결정하였다. A팀이 경기마다 승리할 확률이  $p$ 일 때, 이러한 결정에도 불구하고 A팀이 최종 우승할 확률이 변하지 않을  $p$ 의 값을 구하시오. (단,  $0 < p < 1$  이고 두 팀이 비기는 경우는 없다.)

【1-2】 함수  $f(x) = \begin{cases} b - ae^{-2x} & (0 < x < p) \\ ae^{2x} & (x \geq p) \end{cases}$  가 열린구간  $(0, \infty)$ 에서 연속함수가 되기 위한  $p$ 의 값을 구하시오. (단,  $a, b$ 는  $0 < 2a < b$ 를 만족하는 상수)

【1-3】 함수  $f: \left[0, \frac{1}{e}\right] \rightarrow [0, 1]$ 가 닫힌구간  $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ 에서 연속이고 열린구간  $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 에서 미분가능하며  $f(x) = xe^{f(x)}$ 를 만족할 때,

함수  $f$ 의 역함수가 존재함을 보이고  $\int_0^{\frac{1}{e}} f(x) dx$ 의 값을 구하시오.

【1-4】 열린구간  $(0, \infty)$ 에서 연속인 함수  $f(x)$ 가  $\int_1^2 f(x) dx = 3$ 을 만족하고 모든 양의 실수  $x$ 에 대하여

$$f(x) - 2f(2x) = \frac{3}{x^4} \text{을 만족한다.}$$

함수  $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n f(2^n x)$ 에 대하여,  $\int_1^2 g(x) dx$ 의 값을 구하시오.

---

## 7.3 출제 의도

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루고 있는 확률의 기본적인 개념과 함수의 여러 가지 성질 및 미분, 적분을 이해하고 이를 활용할 수 있는지 평가한다. 구체적인 평가요소는 다음과 같다.

- 확률의 정의와 기본성질을 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.
  - 함수의 연속의 뜻을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지 평가한다.
  - 역함수의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.
  - 미분을 사용하여 함수의 증가·감소를 판정할 수 있는지 평가한다.
  - 정적분의 의미를 이해하고, 이를 활용할 수 있는지 평가한다.
  - 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있는지 평가한다.
- 제시문 [가]는 2015년 개정 교육과정 '[수학III] (1) 함수의 극한과 연속 ㉠ 함수의 연속', 제시문 [나]는 '[수학] (4) 함수 ㉡ 함수', 제시문 [다]는 '[미적분] (1) 수열의 극한 ㉢ 급수'에 관련된 내용이다. 검정교과서에서 공통으로 다루고 있는 정의와 설명을 원문 그대로 제시하였으며, 이를 통하여 학생들이 문제를 푸는 데 도움을 받을 수 있도록 하였다.
- 문항 【1-1】은 경우를 잘 나누어서 확률을 계산한 후 이를 통해서 만들어진 방정식을 푸는 문제로 확률의 기본성질을 이해하고 이를 활용할 수 있으며, 간단한 방정식을 풀 수 있는지 평가하는 문항이다. 문제의 상황을 잘 이해하여 경우를 나누어서 각각의 확률을 계산하면 쉽게 풀 수 있는 문제이다.
- 문항 【1-2】는 제시문 [가]에 서술된 함수의 연속의 뜻을 이해하고 이를 활용하여 문제를 풀 수 있으며, 문제의 조건에 맞는 해를 찾아낼 수 있는지 평가하는 문항이다. 미적분학의 중요한 개념인 함수의 연속을 잘 이해하고 방정식의 해의 성질을 파악한 학생은 문제를 쉽게 해결할 수 있을 것으로 판단된다.
- 문항 【1-3】은 미분을 이용하여 함수가 일대일임을 보일 수 있으며, 역함수의 의미를 이해하고 이를 활용하여 문제를 풀 수 있고, 정적분과 넓이의 관계를 이해하고 이를 활용하여 정적분을 계산할 수 있는지 평가하는 문항이다. 여러 개념을 융합해서 해결해야 하는 문제이지만, 고등학교 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면 어려움 없이 해결할 수 있을 것으로 판단된다.
- 문항 【1-4】에서는 주어진 등식을 잘 변형하여 필요한 등식을 찾아내고, 제시문 [다]를 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있으며, 간단한 유리함수의 정적분을 계산할 수 있는지 평가하고자 한다.



## 7.4 출제 근거

### 7.4.1 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정	교육부 고시 제2015-74호
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 전체	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학] - (4) 함수 - ㉠ 함수 [10수학04-03] 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다.</li> <li>· [수학II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ㉡ 함수의 연속 [12수학II01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.</li> <li>· [미적분] - (1) 수열의 극한 - ㉢ 급수 [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【1-1】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [확률과 통계]-(2) 확률 ㉠ 확률의 뜻과 활용 [12확통02-02] 확률의 기본성질을 이해한다.</li> <li>· [확률과 통계]-(2) 확률 ㉡ 조건부확률 [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【1-2】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학] - (1) 문자와 식 ㉣ 복소수와 이차방정식 [10수학01-06] 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 안다. [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.</li> <li>· [수학II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ㉡ 함수의 연속 [12수학II01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.</li> </ul>
하위문항 【1-3】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학] - (4) 함수 - ㉠ 함수 [10수학04-03] 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다.</li> <li>· [수학II] - (2) 미분 - ㉢ 도함수의 활용 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (3) 적분법 - ㉠ 여러 가지 적분법 [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (3) 적분법 - ㉡ 정적분의 활용 [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【1-4】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [미적분]- (1) 수열의 극한 - ㉠ 수열의 극한 [12미적01-03] 등비수열의 극한값을 구할 수 있다.</li> <li>· [미적분]- (1) 수열의 극한 - ㉡ 급수 [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.</li> <li>· [미적분]- (3) 적분법 - ㉠ 여러 가지 정적분 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.</li> </ul>

## 7.4.2 자료 출처

참고자료	교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외	교학사	2018	51
		박교식 외	동아출판	2018	221~222
		황선욱 외	미래엔	2018	58, 227~228
	수학II	배종숙 외	금성출판사	2019	33~34, 78
		김원경 외	비상교육	2018	31~32
		고성은 외	좋은책 신사고	2019	80, 83
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2019	24, 35~36, 156, 172, 183
		고성은 외	좋은책 신사고	2019	19, 32~33, 127, 137, 140, 155
	확률과 통계	배종숙 외	금성출판사	2019	55, 76, 80
		황선욱 외	미래엔	2019	43, 63

## 7.5 문항 해설

### 7.5.1 위원회 자체 평가 의견

인기 스포츠 이벤트에서 발생한 수학적 사건을 확률 및 연속, 극한, 적분 등의 고등학교 수학 교과서 내의 개념을 수학적 추론을 통해 해결하는 문제로 제시문과 소문항 모두 교육과정의 범위와 수준을 충족하고 동시에 논술문항답게 적절한 난이도로 출제된 문제였다고 할 수 있다.

제시문은 교과서에서 제시되는 연속 및 역함수, 등비급수의 수렴조건 등을 그대로 제시되어 학생들이 실제 문제 해결 시 아이디어를 얻을 수 있도록 쉽게 제시되어 있었다. 문항 【1-1】, 【1-2】는 확률의 독립시행 및 연속에 대한 개념을 정확히 알고 있으면 해결할 수 있었던 평이한 수준의 문항으로 제시되어 학생들이 해결하는데 어렵지 않았을 것이며 제시문과도 연동하여 교육과정 수준에 적합하게 출제가 잘 된 문항이었다. 또한 문항 【1-3】, 【1-4】의 경우는 역함수, 역함수와 넓이와의 관계, 주어진 식의 변형을 통한 적분 계산 등을 잘 이해하고 있어야만 해결할 수 있었던 난이도 있는 문항이었긴 하나 교육과정의 범위와 수준에 맞게 공부한 학생이라면 해결할 수 있는 문제였다고 할 수 있다.

제시문 및 모든 문항이 교육과정 내의 범위와 수준에 충족한다는 근거는 다음과 같다. 먼저 제시문의 경우 교과서 내용 분류 기준으로, 각 제시문 [가, 나, 다] 순서대로, '[수학II]-(1)함수의 극한과 연속-②함수의 연속', '[수학]-(4)함수-①함수', '[미적분]-(1)수열의 극한-②급수' 등의 내용 범위에 맞추어 충실히 제시되어 있었다. 또한 교육과정 상의 평가 기준에서 제시하고 있는 '[12수학II01-03]함수의 연속의 뜻을 안다.', '[10수학04-03]역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다.', '[12미적01-05]등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.' 등의 기준에 충족하고 있었다.

각 문항별로는 먼저 교과서 내용 분류에서는 문항 【1-1】은 '[확률과 통계]-(2) 확률 ①확률의 뜻과 활용, ②조건부확률', 문항 【1-2】는 '[수학]-(1)문자와 식 ④복소수와 이차방정식, [수학II]-(1)함수의 극한과 연속-②함수의 연속', 문항 【1-3】은 '[수학]-(4)함수-①함수, [수학II]-(2)미분-③도함수의 활용, [미적분]-(3)적분법-①여러 가지 적분법, ②정적분의 활용', 문항 【1-4】는 '[미적분]-(1)수열의 극한-①수열의 극한, ②급수, (3)적분법-①여러 가지 적분법' 등의 교과서 내용에 충실히 맞추어 수학적 추론 능력을 기를 수 있도록 변형된 문제이다.

또한, 문항별 평가 기준으로는 문항 【1-1】은 '[12확통02-02]확률의 기본성질을 이해한다. [12확통02-06]사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.', 문항 【1-2】는 '[10수학01-06]이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 안다, [10수학01-07]이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다, [12수학II01-03]함수의 연속의 뜻을 안다.' 문항 【1-3】은 '[10수학04-03]역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다, [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다, [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-05]곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.', 문항 【1-4】는 '[12미적01-03]등비수열의 극한값을 구할 수 있다, [12미적01-05]등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다, [12미적03-03]여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.' 등의 평가 기준에 모두 범위 및 수준 등에 충족하는 문항들이었다.

위와 같이 제시문 및 문항 모두 교육과정의 범위와 평가 기준에 근거하여 출제되었고 난이도 역시 문항 별로 적절히 배치된 구조로 출제되었다.

## 7.5.2 출제 검토 교사 의견

검토 교사 모두 일상생활 속에서 일어날 수 있는 수학적 사건을 고등학교 수학 교육과정에서 학습한 독립시행, 연속, 적분, 급수 등의 단원을 활용하여 수학적 추론 능력을 측정하는 적절한 교육과정의 범위와 수준, 난이도를 갖춘 문제라는 의견이었다.

제시문 [가, 나, 다] 모두 [수학], [수학III], [미적분] 교과서에서 발췌하여 구성하여 교육과정의 범위와 수준에 충분히 부합하는 내용으로 구성되었다는 평가였다. 특히 교과서의 표현이 그대로 수록되어 수험생들에게 익숙하게 느껴질 것으로 생각하였다. 또한, 해당 부분은 수험생들이 문제의 실마리를 찾고 해결하는데 일정 부분 도움을 주는 역할도 했을 거라고 판단하였다.

문항 【1-1】은 프로야구에서 한국시리즈를 치르는 방식이 코로나 사태로 인해 바뀐 것에 착안하여 충분히 일어날 수 있는 현상을 가정해본 후 [확률과 통계] 교과서의 독립시행을 활용하여 확률이 변하지 않는 상황을 예상해봄으로써 평소 확률에 관심이 있는 사람이라면 충분히 궁금증을 가져왔을 만한 주제를 택한 점이 인상적인 문항이었다. 문제 해결에 추론을 요구하고 있어서 다양한 수학 교과 역량을 평가하기에 적합한 문제였다고 판단하였다.

문항 【1-2】는 여러 가지 미분과 적분의 기초가 되는 [함수의 연속]의 정의를 적용하는 문항으로 주어진 함수의 형태가 조금 복잡하긴 하지만 수험생들이  $e^{2x}$ 를 치환하는 아이디어만 생각한다면 어렵지 않게 해결할 수 있을 것으로 판단하였으며 교과서에서 제공하고 있는 익숙한 함수로 구성되어 ‘제시문 [가]의 내용을 이용하면 해결할 수 있다.’라는 의견이었다.

문항 【1-3】은 주어진 함수  $f(x) = xe^{f(x)}$ 의 형태를  $\frac{f(x)}{e^{f(x)}} = x$ 의 꼴로 변형한 후  $(g \circ f)(x) = x$ 를 활용하여 역함수를 추론하는 과정이 [수학] 교과서의 역함수 단원에 대한 이해를 바탕으로 하고 있어 수험생들에게 조금 어렵게 다가갈 수도 있을 것이다. 하지만 문항에서 역함수의 존재를 보이라는 문구가 제시되어 있어 문항에 주어지지 않았을 경우보다는 수험생들이 문제의 접근이 크게 어렵지 않을 것으로 생각된다. 역함수의 기하학적 의미를 활용하여 [미적분]에서 학습한 함수  $f(x)$ 의 정적분이 직사각형의 넓이와 역함수 적분의 차와 같다는 것을 이용하는 문제로 수학적 추론 능력을 통해 충분히 해결할 수 있었을 것으로 판단하였다.

문항 【1-4】는 제시문 [다]에서 주어진 등비급수를 활용하여 함수  $g(x)$ 의 식을 유도하는 과정이 [미적분] 교과서에 나오는 예제에서는 다루어지지 않은 형태이지만 [함수의 극한] 단원에서 극한값을 구할 때 변수와 상수의 처리를 충분히 다루기 때문에 수험생들이 충분히 해결할 수 있을 것으로 예상되며 이 문제도 역시 ‘수학적 추론’ 능력을 평가할 수 있었던 문항이었다. 함수  $g(x)$ 로부터 힌트를 얻어 주어진 항등식을

$$2^{k-1}f(2^{k-1}x) - 2^k f(2^k x) = \frac{3}{8^{k-1}x^4} \text{과 같이 수열의 관계식으로 변형해야 하며, 유도한 관계식으로부터}$$

$k$ 의 자리에  $1, 2, 3, \dots, n$ 을 대입한 관계식을 정리하여 함수  $g(x)$ 를 유도하여 해결할 수 있었던 문항이었다.

### 7.5.3 자문위원 평가 의견

평균 경력 13.1년의 15명의 현직교사 의견을 5점 척도로 구성된 설문 문항을 종합한 결과 자연계열 2차 1번 문항의 제시문의 난이도(논술 제시문 난이도는? 응답기준 1점-매우쉽다에서 5점-매우어렵다.)는 평균 1.7(쉽다)이었으며 문제의 난이도는 평균 3.3(보통)이었다.

또한, 제시문과 문항에 대해서는 고등학교 교육과정 범위에 해당하는가?에 대한 질문(고등학교 교육과정의 성취기준 및 내용요소를 포함하는 문항인가? - 응답기준은 1점-전혀아니다에서 5점-매우그렇다.)과 고등학교 교육과정 수준에 적합한가?에 대한 질문(해당 교육과정을 이수한 학습자들이 그 내용요소를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가? - 응답기준은 위와 동일)로 구성된 문항에 대한 응답결과를 요약한 결과 제시문의 수준은 평균 4.8(고등학교 교육과정 수준에 매우 적합), 고등학교 교육과정 범위에 대한 의견은 4.9(고등학교 교육과정의 성취기준과 내용요소에 매우 적합)이었다.

각 문제의 범위에 대한 응답은 4개 소문항에 대해 각각 평균 4.7, 4.8, 4.5, 4.2로 평가하여 대부분 범위에 대해 매우 그렇다는 의견이었다. 또한 각 문제의 수준에 대한 응답은 4개 소문항에 대해 각각 평균 4.7, 4.5, 4.3, 4.1로 평가하여 위와 마찬가지로 대부분 교육과정 수준에 매우 적합한 문항으로 응답하였다.

제시문 [가, 나, 다]는 [수학II], [수학], [미적분] 교과서에서 나오는 개념으로 교육과정 상에서 주요하게 다뤄진 내용을 인용하였고 각각의 문제들도 모두 범위 및 성취 수준에 부합하고 있다는 의견이 대부분이었다. 문제 【1-3】, 【1-4】의 경우에는 수학 개념을 정확히 이해하고 활용할 수 있어야 하고 많은 지식을 요구하고 창의적인 해결 과정이 필요하긴 하지만 변별력 있는 난이도 있는 문항으로 평가하였다. 물론 문항 【1-1】, 【1-2】의 경우에는 다소 쉽게 느껴질 수준의 난이도로 평이하게 출제되었으며 특히 1번의 경우는 확률을 공부하고 독립사건 및 독립시행을 이용하여 충분히 해결할 수 있었던 창의적인 문항이었다고 평가하였다.

또한, 범위 및 수준에 대한 세부 의견으로는 제시문 및 문항 모두 교육과정 내 범위와 수준을 충분히 충족하도록 출제된 것으로 판단하였다. 세부적으로는 제시문 [가, 나, 다] 모두 내용 체계의 [수학], [수학II], [미적분] 교과서 내의 ‘함수, 역함수, 함수의 연속, 수열의 극한, 급수’ 단원 내용을 충실히 적용하였으며 성취기준으로도 ‘[12수학II01-03]함수의 연속의 뜻을 안다, [10수학04-03]역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다, [12미적01-05]등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.’ 등을 충족하는 내용으로 구성되어 있었다는 의견이 대부분이었다.

그리고 제시문 및 문제의 난이도에 대한 의견으로는 ‘논술 제시문 [가, 나, 다]는 교과서 개념에 근거한 제시문으로 평이한 편임.’, ‘문항 【1-1】는 조합을 이용해서 확률을 구하는 문제로서 고교 교육과정에서 기본적으로 학습하는 유형이기에 학생들이 쉽게 느꼈을 것이다.’, ‘문항 【1-2】는 보통이다. 연속의 정의를 따라가면 어렵지 않게 해결할 수 있음.’, ‘문항 【1-3】은 역함수로 바꾸어 해결해야겠다는 생각만 떠오르다면 충분히 해결할 수 있겠으나 그러지 못했다면 많이 헤매지 않았을까 한다.’, ‘문항 【1-4】는 문제에서 주어진 조건으로 정리하는 아이디어가 중요한 문제로 추론 능력과 문제 해결력을 확인할 수 있는 문제라 사료된다.’와 ‘문항 【1-2】, 【1-4】 또한 모의고사에서 출제되는 유형의 문제이지만 주어진 수식에 알맞은 모양을 대입하여 구하고자 하는 식의 형태를 만들 수 있어야 하며 문제를 해결하기 위해 관련 수학 개념을 정확히 이해하고 활용할 수 있어야 하기에 변별력이 있는 문제라 생각합니다. 위와 같은 이유로 ‘자연계열 2차 1번 문항의 전체적인 난이도는 보통이라 생각합니다.’의 의견도 있었다.

## 7.6 채점 기준

### 【1-1】

- 우승하는 방식에 따라 경우를 나누어서 A팀이 우승할 확률을 구할 수 있다.
- 확률이 같아야 함을 이용하여 방정식을 세운 후 해를 구하고 확률이 될 수 있는 값을 구할 수 있다.

### 【1-2】

- 함수가 연속임을 이용하여 방정식을 세운 후, 해를 구할 수 있다.
- 문제에서 주어진 조건을 만족하는 해를 찾아낼 수 있다.

### 【1-3】

- 도함수를 이용하여 함수가 증가하므로 일대일임을 보일 수 있다.
- 역함수의 뜻을 이해하고, 이를 활용하여 역함수가 존재함을 보일 수 있다.
- 역함수의 의미와 정적분과 넓이의 관계를 이해하고, 이를 활용하여 정적분을 계산할 수 있다.

### 【1-4】

- 문제를 해결하기 위하여 주어진 등식을 적절하게 변형할 수 있다.
- 등비급수의 합을 구할 수 있다.
- 간단한 유리함수의 정적분을 계산할 수 있다.

## 7.7 답안 사례

【1-1】(i) 3번의 경기 중에서 2번을 먼저 이기는 팀이 우승하는 방식에서, A팀이 우승하기 위해서는 남은 2경기를 모두 이겨야 하므로, 우승할 확률  $p_1 = p^2$ 이다.

(ii) 5번의 경기 중에서 3번을 먼저 이기는 팀이 우승하는 방식을 고려하자.

① 4차전까지 진행되는 경우: 3경기를 모두 연달아 이겨야 하므로 확률은  $p^3$ 이다.

② 5차전까지 진행되는 경우: 마지막 경기는 반드시 이겨야 하고, 나머지 세 경기 중 한 번만 져야 하므로 확률은  $3p^3(1-p)$ 이다.

따라서, 이 방식에서 A팀이 우승할 확률  $p_2 = p^3 + 3p^3(1-p)$ 이다.

A팀이 우승할 확률이 변하지 않으려면  $p_1 = p_2$ 를 만족해야 하므로

$$p^2 = p^3 + 3p^3(1-p), \text{ 즉 } p^2(3p-1)(p-1) = 0$$

이다. 따라서 조건  $0 < p < 1$ 로부터  $p = \frac{1}{3}$ 이다.

【1-2】함수  $f(x)$ 가 열린 구간  $(0, \infty)$ 에서 연속이 되기 위해서는

$$b - ae^{-2p} = ae^{2p}, \text{ 즉, } ae^{4p} - be^{2p} + a = 0$$

을 만족해야 한다.  $X = e^{2p}$ 라고 하면,

$$aX^2 - bX + a = 0 \quad (X > 1)$$

을 만족해야 한다. 따라서,

$$X = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a} \text{ 이고 } X > 1$$

이어야 한다.

(i)  $b > 2a > 0$ 이므로  $\frac{b + \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a} > \frac{b}{2a} > 1$ 이므로  $X = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a}$ 는 해가 된다.

(ii)  $\frac{b - \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a}$ 과 1의 대소관계를 알아보기 위하여 1에서  $\frac{b - \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a}$ 을 빼면

$$1 - \frac{b - \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4a^2} - (b - 2a)}{2a} > 0$$

이다. 여기서,  $\sqrt{b^2 - 4a^2} > 0$ ,  $b - 2a > 0$ 이고

$$(b^2 - 4a^2) - (b - 2a)^2 = 4ab - 8a^2 = 4a(b - 2a) > 0$$

이므로 분자가 양수임을 이용하였다. 따라서  $\frac{b - \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a} < 1$ 이 되어  $\frac{b - \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a}$ 는 해가 아니다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여  $p = \frac{1}{2} \ln X = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{b + \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a} \right)$ 이다.

【1-3】 $g(x) = xe^{-x}$ 에 대하여,  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = e^{-1}$ 이고 열린구간  $(0, 1)$ 에 속한 임의의  $x$ 에 대하여

$$g'(x) = (1-x)e^{-x} > 0$$

이므로  $g(x)$ 는 닫힌구간  $[0, 1]$ 에서 증가함수가 되어  $g: [0, 1] \rightarrow \left[0, \frac{1}{e}\right]$ 는 일대일대응이다. 따라서 제시

문 [나]에 의하여  $g$ 의 역함수  $g^{-1}: \left[0, \frac{1}{e}\right] \rightarrow [0, 1]$ 가 존재하며,  $g^{-1}(x) = xe^{g^{-1}(x)}$ 를 만족한다. 한편 함수  $f: \left[0, \frac{1}{e}\right] \rightarrow [0, 1]$ 가 정의역에 속하는 모든  $x$ 에 대하여  $f(x) = xe^{f(x)}$ , 즉  $(g \circ f)(x) = x$ 를 만족하므로  $f(x) = g^{-1}(x)$ 이다. 그러므로 함수  $f$ 의 역함수가 존재하며  $f^{-1}(x) = g(x) = xe^{-x}$ 이다.

따라서  $\int_0^{\frac{1}{e}} f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx$ 는 두 변의 길이가  $1, \frac{1}{e}$ 인 직사각형의 넓이와 같으므로

$$\int_0^{\frac{1}{e}} f(x) dx = \frac{1}{e} - \int_0^1 xe^{-x} dx = \frac{1}{e} - \left(-xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx\right) = \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{2}{e}\right) = \frac{3}{e} - 1$$

이다.

【1-4】 주어진 항등식  $f(x) - 2f(2x) = \frac{3}{x^4}$ 의  $x$  대신  $2x$ 를 넣어서 얻은 등식에 2를 곱하면

$$2f(2x) - 2^2f(2^2x) = \frac{3}{x^4} \times \frac{1}{8}$$

을 얻는다. 같은 방식으로  $2f(2x) - 2^2f(2^2x) = \frac{3}{x^4} \times \frac{1}{8}$ 의  $x$  대신  $2x$ 를 넣어서 얻은 등식에 2를 곱하면

$$2^2f(2^2x) - 2^3f(2^3x) = \frac{3}{x^4} \times \left(\frac{1}{8}\right)^2$$

을 얻는다. 이를 반복하여 얻은 등식을 일렬로 나열하면

$$\begin{aligned} f(x) - 2f(2x) &= \frac{3}{x^4} \\ 2f(2x) - 2^2f(2^2x) &= \frac{3}{x^4} \times \frac{1}{8} \\ 2^2f(2^2x) - 2^3f(2^3x) &= \frac{3}{x^4} \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 \\ &\vdots \\ 2^{n-1}f(2^{n-1}x) - 2^n f(2^n x) &= \frac{3}{x^4} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

이므로 좌변과 우변을 각각 더하면

$$f(x) - 2^n f(2^n x) = \sum_{k=1}^n \frac{3}{x^4} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}$$

이다. 제시문 [다]에 의하여 우변은 수렴하며 이 등비급수의 합은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3}{x^4} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{k-1} = \frac{24}{7x^4}$$

이다. 따라서

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n f(2^n x) = f(x) - \frac{24}{7x^4}$$

이므로

$$\int_1^2 g(x) dx = \int_1^2 f(x) dx - \int_1^2 \frac{24}{7x^4} dx = 3 + \frac{8}{7x^3} \Big|_1^2 = 3 - 1 = 2$$

이다.



## 8. 문항카드 8 – 자연계열 2차 2번

### 8.1 일반정보

유형	논술고사	
전형명	논술(일반)전형	
계열(과목)/문항번호	자연계열 2차(물리학전공, 화공생명공학전공, 기계공학전공) / 2번	
출제범위	교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	· 사잇값 정리 · 평균값 정리 · 최대·최소 정리 · 함수의 극한 · 정적분 · 삼각함수의 미분
예상소요 시간	60분	/ 100 분

### 8.2 문제 및 제시문(문항)

#### [제시문]

[가] 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고  $f(a) \neq f(b)$ 일 때,  $f(a)$ 와  $f(b)$  사이의 임의의 실수  $k$ 에 대하여  $f(c)=k$ 인  $c$ 가 열린구간  $(a, b)$ 에 적어도 하나 존재한다.

[나] 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간  $(a, b)$ 에서 미분가능하면  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 인  $c$ 가 열린구간  $(a, b)$ 에 적어도 하나 존재한다.

[다] 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이면  $f(x)$ 는  $[a, b]$ 에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

[라]  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때  $\sin x < x < \tan x$ 이 성립한다.

#### [문제]

【2-1】 함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 가지며  $f(1)=f(2)=3$ ,  $f(3)=5$ 일 때,  
 $f'(a)=\frac{3}{2}$ 인  $a$ 와  $f''(b)>1$ 인  $b$ 가 모두 열린구간  $(1, 3)$ 에 존재함을 보이시오.

【2-2】 함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 모든  $x$ 에 대하여  $f(x+2)=f(x)$ 를 만족하며,  
 $\int_1^3 f(x)dx=1$ 일 때,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_{-x}^x f(t)dt$ 의 값을 구하시오.

함수  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  에 대하여, 문항 【2-3】과 【2-4】에 답하시오.

【2-3】 함수  $f(x)$  가 열린구간  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  에서 감소함을 보이시오.

【2-4】 임의의 자연수  $k$  에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 0+} \int_x^{3x} \frac{(f(t))^k}{t} dt$  의 값을 구하시오.

---

### 8.3 출제 의도

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루어지는 미적분학의 기본적인 내용을 이해하고 이를 여러 가지 주어진 상황에 적용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다. 삼각함수와 주기함수의 성질, 평균값 정리, 사잇값 정리, 최대·최소 정리, 적분과 극한값의 계산, 도함수를 이용한 함수의 증가와 감소 판정 등 고등학교 교육과정에서 다루는 핵심적인 내용을 제대로 이해하고 활용할 수 있는지 평가하고자 하였다. 구체적인 평가요소는 다음과 같다.

- 사잇값 정리를 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.
  - 미분을 사용하여 함수의 증가와 감소를 판정할 수 있는지 평가한다.
  - 평균값 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있는지 평가한다.
  - 최대·최소 정리를 이해하고, 이를 미적분에 활용할 수 있는지 평가한다.
  - 삼각함수의 극한에 대한 기본성질을 이해하고, 이를 미적분에 적용할 수 있는지 평가한다.
  - 함수의 극한에 대한 기본성질을 이해하고, 이를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는지 평가한다.
  - 정적분의 개념을 이해하고 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.
- 제시문은 2015년 개정 교육과정 ‘수학II’ (1) 함수의 극한과 연속 ㉠ 함수의 연속, (2) 미분, ㉡ 도함수의 활용’과 ‘미적분’ (2) 미분법 ㉢ 여러 가지 함수의 미분’에 관련된 내용이다. 모두 2015년 개정 교육과정 검정교과서에서 공통으로 다루고 있는 정의, 정리, 설명을 원문 그대로 게재한 것으로, 학생들이 문제를 푸는 데 도움을 받을 수 있는 제시문들로 구성하였다.
- 문항 【2-1】은 제시문 [가]의 사잇값 정리와 제시문 [나]의 평균값 정리를 이해하고 이를 활용할 수 있는지 평가하는 문항이다. 사잇값 정리와 평균값 정리는 각각 연속인 함수와 미분가능한 함수와 관련된 가장 중요한 정리로 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로 수학적 사고력을 가진 학생은 제시문을 이용하여 큰 어려움 없이 문제를 해결할 수 있을 것으로 판단된다.
- 문항 【2-2】는 주기함수의 성질과 제시문 [다]의 최대·최소 정리를 정적분에 활용하여 극한값을 계산하는 문제로 정답뿐만 아니라 정답에 도달하는 과정을 함께 평가하고자 하는 문항이다. 교과서에 있는 여러 개념을 복합적으로 활용하는 문제이지만 고등학교 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면 어려움 없이 해결할 수 있을 것으로 판단된다.
- 문항 【2-3】은 함수의 몫의 미분법과 삼각함수의 미분법을 이용하여 주어진 함수의 도함수를 찾아내고, 제시문 [라]에 주어진 부등식을 활용하여 도함수의 부호를 결정함으로써 함수가 감소하는 것을 보일 수 있는지 평가하는 문항이다. 이와 관련된 방법은 매우 기초적인 내용이고 모든 교과서에서 다루어지므로 학생 대부분이 쉽게 해결할 수 있을 것으로 판단된다.
- 문항 【2-4】는 문항 【2-3】에서 확인한 결과를 이용하여 부등식을 찾아내고, 극한의 성질을 이해하고 이를 활용하여 주어진 극한값을 구하는 문항이다. 문항 【2-3】이 매우 평이한 것과 대조되어 문항 【2-4】는 우수 학생을 변별하려는 목적으로 출제되었으나, 문제 해결을 위한 단서들이 제시문과 문항 【2-3】에 제시되어 있으므로, 고등학교 교육과정을 충실히 이수하여 수학적 논리력을 갖춘 학생은 어렵지 않게 정답에 도달할 것으로 판단된다.

## 8.4 출제 근거

### 8.4.1 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정	교육부 고시 제2015-74호
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 전체	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ㉔ 함수의 연속 [12수학II01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</li> <li>· [수학II] - (2) 미분 - ㉔ 도함수의 활용 [12수학II02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ㉔ 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【2-1】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ㉔ 함수의 연속 [12수학II01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</li> <li>· [수학II] - (2) 미분 - ㉔ 미분계수 [12수학II02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.</li> <li>· [수학II] - (2) 미분 - ㉔ 도함수의 활용 [12수학II02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.</li> </ul>
하위문항 【2-2】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ㉔ 함수의 극한 [12수학II01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.</li> <li>· [수학II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ㉔ 함수의 연속 [12수학II01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</li> <li>· [수학II] - (3) 적분 - ㉔ 정적분의 활용 [12수학II03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【2-3】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학II] - (2) 미분 - ㉔ 도함수의 활용 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ㉔ 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ㉔ 여러 가지 미분법 [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ㉔ 도함수의 활용 [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【2-4】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ㉔ 함수의 극한 [12수학II01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ㉔ 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (3) 적분법 - ㉔ 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (3) 적분법 - ㉔ 정적분의 활용 [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</li> </ul>

## 8.4.2 자료 출처

참고자료	교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	이준열 외	천재교육	2018	20
		홍성복 외	지학사	2018	20, 36, 38~39, 59, 78, 81, 83, 141
		김원경 외	비상교육	2018	18, 35, 37~38, 51, 74, 76, 78, 125
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2019	75~76, 96, 135, 156, 183
		고성은 외	좋은책 신사고	2019	66~67, 76, 109, 127, 140, 155

## 8.5 문항 해설

### 8.5.1 위원회 자체 평가 의견

[수학II], [미적분] 등 교과서에서 중요하게 다루고 있는 평균값정리, 사잇값 정리, 연속함수의 최대·최소 정리, 부등식, 적분 등의 개념을 제시문 및 각 문항에 적용한 문제로, 교육과정의 수준 및 범위에 충족하는 내용으로 출제되었으며 문제 난이도 역시 적절한 수준으로 제시된 문제였다. 특히 사잇값 정리를 미분을 통해 한 번 더 고민하여 문제를 해결하게 만든 문항 【2-1】과 제시문 및 앞 문항의 감소하는 함수에 대한 아이디어를 통해 적분에서 공부한 정적분의 대소관계를 문항에 적용하는 등 각 단계별로 문항을 해결하도록 제시문과 문항에 문제 해결의 길잡이를 제공한 문항 【2-3】, 【2-4】도 수험생들의 수학적 추론 능력을 확인해 볼 수 있는 좋은 평가 문항이었다. 특히 문항 【2-4】는 정적분의 숨은 뜻이나 주어진 문제에서 함수  $f(x)$ 에  $3x$ 를 대입하여 부등식으로 자연스럽게 확장하는 단계를 잘 찾지 못하면 쉽지 않았을 문제이기도 하였다. 다소 해결 과정이 어려울 수도 있었으나 교육과정을 충실히 이수하고 공부한 수험생이라면 해결할 수 있었던 문항이었다. 전반적으로 난이도가 아주 높지는 않았지만, 난이도별로 문항이 적절히 잘 배치된 문제라고 할 수 있다.

세부적인 제시문 및 문항별 교육과정 범위와 수준에 대한 근거는 다음과 같다. 먼저, 제시문의 경우 교과서 내용 분류로는 제시문 [가, 나, 다, 라] 순서대로 각각 ‘[수학II]-(1)함수의 극한과 연속-②함수의 연속, (2)미분-③도함수의 활용, [미적분]-(2)미분법-①여러 가지 함수의 미분’에서 제시한 내용으로 구성되어 수험생들이 이해하는 데 큰 어려움이 없는 수준으로 제시되었다. 또한, 제시문 [가, 나, 다, 라]의 교육과정 평가 기준으로는 ‘[12수학II01-04]연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다, [12수학II02-07]함수에 대한 평균값정리를 이해한다, [12미적02-04]삼각함수의 극한을 구할 수 있다.’에서 제시되는 범위에 충족하는 내용으로 적절한 난이도로 제시되었다.

다음으로 각 문항의 경우 교과서 내용 분류로는 문항 【2-1】은 ‘[수학II]-(1) 함수의 극한과 연속-②함수의 연속, (2)미분-①미분계수, ③도함수의 활용’, 문항 【2-2】는 ‘[수학II]-(1)함수의 극한과 연속-①함수의 극한, ②함수의 연속, (3)적분-③정적분의 활용’, 문항 【2-3】은 ‘[수학II]-(2)미분-③도함수의 활용, [미적분]-(2)미분법-①여러 가지 함수의 미분, ②여러 가지 미분법, ③도함수의 활용’, 문항 【2-4】는 ‘[수학II]-(1)함수의 극한과 연속-①함수의 극한, [미적분]-(2)미분법-①여러 가지 함수의 미분, (3)적분법-①여러 가지 적분법, ②정적분의 활용’의 내용에 근거하여 출제된 문제로 구성되어 있었다. 각 문항의 평가 기준에서는 문항 【2-1】은 ‘[12수학II01-04]연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다, [12수학II02-03]미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다, [12수학II02-07]함수에 대한 평균값정리를 이해한다.’, 문항 【2-2】는 ‘[12수학

II01-02]함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다, [12수학II01-04]연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다, [12수학II03-05]곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.’, 문항 【2-3】은 ‘[12수학II02-08]함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다, [12미적02-04]삼각함수의 극한을 구할 수 있다, [12미적02-06]함수의 몫을 미분할 수 있다, [12미적02-13]방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.’, 문항 【2-4】는 ‘[12수학II01-02]함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다, [12미적02-04]삼각함수의 극한을 구할 수 있다, [12미적03-03]여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다, [12미적03-05]곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.’의 평가 기준에 부합하는 내용으로 구성되었다.

위와 같이 제시문 및 각 문항 모두 교육과정의 범위와 평가 기준에 근거하여 출제되었고 난이도 역시 문항별로 적절히 배치된 구조로 출제되었다.