2022학년도 수시모집 논술고사 문항해설 및 채점기준(자연계열)

[덕성여자대학교 문항정보 1]

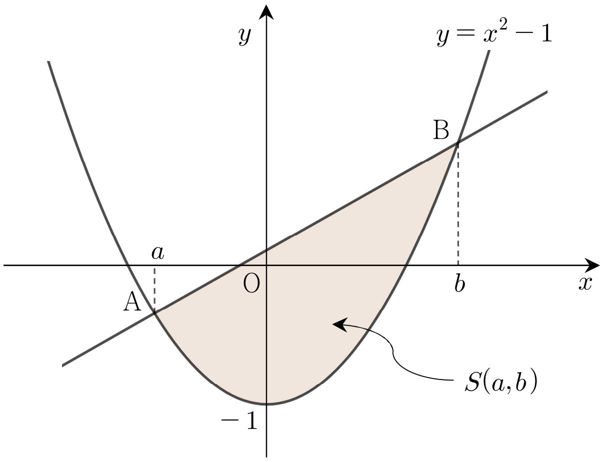
1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열/문항번호1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 Ⅱ
	핵심개념 및 용어	직선의 방정식, 미분, 접선의 방정식, 정적분, 함수의 최솟값
예상 소요 시간	총 90분 중 45분 소요 예상	

2. 문항 및 제시문

[문1]

실수 a, b 에 대하여 $a < b$일 때, <그림 1>과 같이 곡선 $y = x^2 - 1$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\, a^2 - 1)$, $\mathrm{B}(b,\, b^2 - 1)$을 잇는 직선과 이 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a, b)$라고 하자. $a = b$일 때는 $S(a, b) = 0$으로 정의한다.



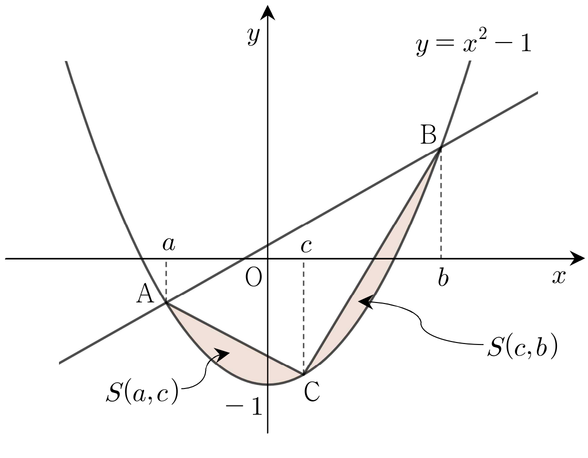
<그림 1>

[문제 1-1]

정적분을 이용하여 $S(a,b)=\dfrac{(b-a)^3}{6}$임을 보이시오. [20점]

[문제 1-2]

<그림 2>와 같이 곡선 $y=x^2-1$ 위의 세 점 $\mathrm{A}(a,\, a^2-1)$, $\mathrm{B}(b,\, b^2-1)$, $\mathrm{C}(c,\, c^2-1)$ (단, $a<c<b$)에 대하여 $S(a,\, c)=S(c,\, b)$를 만족시키는 c를 a, b로 나타내고, 곡선 위의 점 C에서의 접선이 직선 AB와 서로 평행함을 보이시오. [35점]



<그림 2>

[문제 1-3]

닫힌구간 $[-1,\, 2]$에서 함수 $f(x)=2S(-1,\, x)+\sqrt[3]{6S(x,\, 2)}$의 최솟값을 구하시오. [45점]

3. 출제 의도

- 직선의 방정식을 구할 수 있는지 알아본다.
- 다항함수의 정적분을 구할 수 있는지 알아본다.
- 다항함수를 미분하여 접선의 기울기를 구할 수 있는지 알아본다.
- 서로 다른 두 직선의 기울기가 같을 때 두 직선이 서로 평행함을 아는지 알아본다.
- 다항함수의 미분을 이용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
1	1-1	**[수학]-(2)기하-(나)직선의 방정식** [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. **[수학II]-(3)적분-(다)정적분의 활용** [12수학II03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	1-2	**[수학]-(2)기하-(나)직선의 방정식** [10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다. **[수학II]-(2)미분-(다)도함수의 활용** [12수학II02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
	1-3	**[수학II]-(2)미분-(다)도함수의 활용** [12수학II02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수	관련자료	재구성
고등학교 교과서	수학	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2020	120-121, 124		
	수학	이준열 외 9인	천재교육	2020	124-125, 128		
	수학Ⅱ	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2021	88-90, 133-139		
	수학Ⅱ	류희찬 외 10인	천재교과서	2020	88-89, 131-139		

5. 문항 해설

[문제1-1]
- 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구한다.
- 주어진 도형의 넓이를 정적분을 이용하여 구한다.

[문제1-2]
- 주어진 두 도형의 넓이를 같게 하는 점을 구한다.
- 다항함수를 미분하여 주어진 점에서 접선의 기울기를 구한다.
- 서로 다른 두 직선의 기울기가 같음을 보여 두 직선이 서로 평행함을 보인다.

[문제1-3]
- [문제 1-1]을 이용하여 함수 $f(x)$를 x에 대한 다항식으로 나타낸다.
- 다항함수의 미분을 이용하여 함수의 그래프의 개형을 구한다.
- 주어진 구간에서 함수의 최솟값을 구한다.

6. 채점 기준

[문제1-1]
- 두 점을 잇는 직선의 방정식을 구한 경우: +6점
- $S(a,b)$를 정적분으로 나타낸 경우: +6점
- 정적분을 계산하여 $S(a,b)=\dfrac{(b-a)^3}{6}$을 보인 경우: +8점

[문제1-2]

- $S(a,c)=\dfrac{(c-a)^3}{6}$, $S(c,b)=\dfrac{(b-c)^3}{6}$임을 안 경우: 8점
- $c=\dfrac{a+b}{2}$임을 보인 경우: +12점
- 미분하여 $g'(x)=2x$를 구한 경우: +5점
- 접선의 기울기 $g'(c)=a+b$를 구한 경우: +5점
- 접선의 기울기와 직선의 기울기가 같음을 보여서 두 직선이 서로 평행함을 보인 경우: +5점

[문제1-3]

- $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{3}+(2-x)$를 구한 경우: +13점
- 함수 $f(x)$를 미분하여 $f'(x)=(x+1)^2-1$을 계산한 경우: +10점
- $f'(x)=0$인 x를 구한 경우: +7점
- 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 최솟값을 가짐을 보인 경우: +10점
- 최솟값 $f(0)=\dfrac{7}{3}$을 구한 경우: +5점

7. 예시 답안

[문제1-1]

두 점 $(a,\, a^2-1)$과 $(b,\, b^2-1)$을 잇는 직선의 방정식은 $y=(a+b)x-ab-1$이다.

$$\begin{aligned} S(a,\, b) &= \int_a^b \{(a+b)x-ab-1-(x^2-1)\}dx \\ &= \int_a^b \{-x^2+(a+b)x-ab\}dx \\ &= \frac{(b-a)^3}{6} \end{aligned}$$

이다.

[문제1-2]

[문제1-1]의 결과에 의해

$$S(a,\, c)=\frac{(c-a)^3}{6},\quad S(c,\, b)=\frac{(b-c)^3}{6}$$

이다.

이제 $(c-a)^3=(b-c)^3$, $a<c<b$인 상수 c를 구하면

$$c-a=b-c$$

즉, $c=\dfrac{a+b}{2}$이다.

$g(x)=x^2-1$이라고 하면 $g'(x)=2x$이고

$$g'(c)=2\left(\frac{a+b}{2}\right)=a+b$$

이다. 따라서 곡선 위의 점 C에서 접선의 기울기는 $a+b$이다.

두 점 A와 B를 잇는 직선의 기울기도 $a+b$이므로, 이 직선의 기울기와 점 C에서 접선의 기울기가 같다. 따라서 점 C에서의 접선과 직선 AB는 서로 평행하다.

[문제1-3]
닫힌구간 $[-1,2]$에서

$$S(-1,x)=\frac{(x+1)^3}{6},\ S(x,2)=\frac{(2-x)^3}{6}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} f(x) &= 2S(-1,x)+\sqrt[3]{6S(x,2)} \\ &= \frac{1}{3}(x+1)^3+(2-x) \end{aligned}$$

이고

$$f'(x)=(x+1)^2-1=x(x+2)$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

닫힌구간 $[-1,2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	$\frac{7}{3}$	↗	$\frac{8}{3}$

따라서 닫힌구간 $[-1,2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖고, 최솟값은

$$f(0)=\frac{7}{3}$$

이다.

2022학년도 수시모집 논술고사 문항해설 및 채점기준(자연계열)

[덕성여자대학교 문항정보 2]

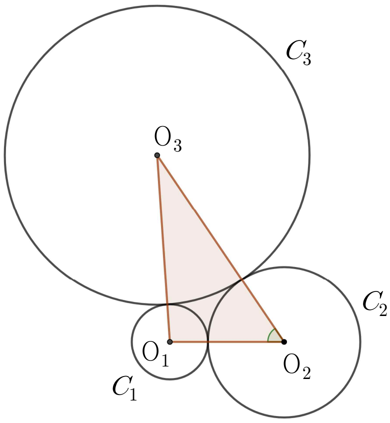
1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열/문항번호2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 로그, 등비수열, 수열의 합
예상 소요 시간	총 90분 중 45분 예상	

2. 문항 및 제시문

[문2]

<그림 1>과 같이 각각 점 O_1, O_2, O_3을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1, 2, 4 인 세 원 C_1, C_2, C_3이 서로 외접하고 있다.



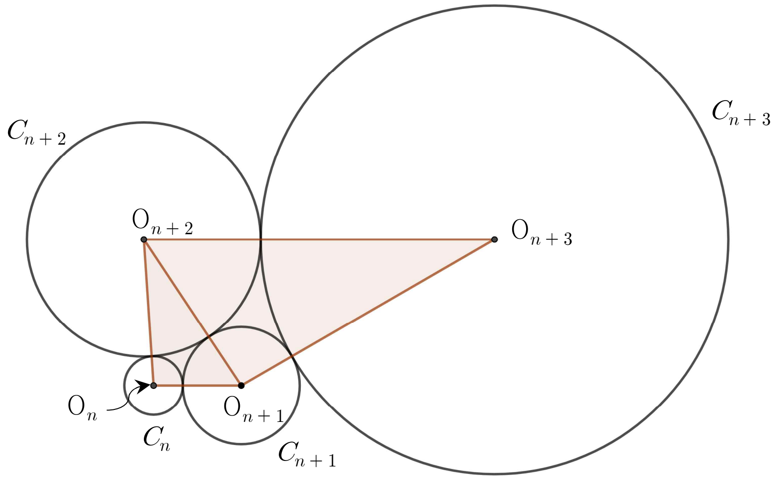
<그림 1>

모든 자연수 n에 대하여 점 O_n을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r_n인 원 C_n이 다음 세 조건 (가), (나), (다)를 만족시킨다.

(가) <그림 2>와 같이 세 원 C_n, C_{n+1}, C_{n+2}는 서로 외접한다.

(나) 수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열이다.

(다) <그림 2>와 같이 삼각형 $O_nO_{n+1}O_{n+2}$와 삼각형 $O_{n+1}O_{n+2}O_{n+3}$은 선분 $O_{n+1}O_{n+2}$만을 공유한다.



<그림 2>

[문제 2-1]
<그림 1>의 삼각형 $O_1O_2O_3$에서 $\cos(\angle O_1O_2O_3)$의 값을 구하시오. [20점]

[문제 2-2]
원 C_n의 넓이를 S_n이라고 하자. $\sum_{n=1}^{N}\log_2\frac{S_n}{\pi}>100$을 만족하는 자연수 N의 최솟값을 구하시오. [40점]

[문제 2-3]
모든 자연수 n에 대하여 직선 O_nO_{n+1}과 직선 $O_{n+2}O_{n+3}$이 서로 평행함을 보이시오. [40점]

3. 출제 의도

[문제 2-1] 주어진 원들의 외접 조건으로부터 중심들 사이의 거리를 구할 수 있는지 알아본다. 삼각형의 세 변의 길이로부터 코사인법칙을 사용하여 삼각형의 내각의 코사인 값을 구할 수 있는지 알아본다.
[문제 2-2] 주어진 첫째항과 공비로부터 등비수열의 일반항을 구하고, 이를 이용하여 주어진 반지름을 가진 원의 넓이를 구할 수 있는지 알아본다. 로그의 정의를 알고 있는지 확인한다. 수열의 합을 구할 수 있는지 알아본다. 주어진 조건을 만족하는 자연수들의 최솟값을 구할 수 있는지 알아본다.
[문제 2-3] 주어진 조건들로부터 외접하는 원들의 중심들로 이루어진 삼각형들의 변의 길이의 일반항을 구할 수 있는지 알아본다. 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 내각의 크기를 구할 수 있는지 알아본다. 대응하는 엇각이 같다는 사실로부터 주어진 직선들이 서로 평행함을 보일 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
2	2-1	**[수학Ⅰ]-(2) 삼각함수-(가) 삼각함수** [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	2-2	**[수학Ⅰ]-(3) 수열-(가) 등차수열과 등비수열** [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. **[수학Ⅰ]-(1) 지수함수와 로그함수-(가) 지수와 로그** [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. **[수학Ⅰ]-(3) 수열-(나) 수열의 합** [12수학Ⅰ03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	2-3	**[수학Ⅰ]-(2) 삼각함수-(가) 삼각함수** [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **[수학Ⅰ]-(3) 수열-(가) 등차수열과 등비수열** [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수	관련자료	재구성
고등학교 교과서	수학Ⅰ	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2020	26, 95, 124, 137		
	수학Ⅰ	김원경 외 14인	비상교육	2020	23, 100, 128, 142		

5. 문항 해설

[문제 2-1]

제시문의 조건으로부터 서로 외접하는 세 원 C_1, C_2, C_3의 각각의 중심 O_1, O_2, O_3이 이루는 삼각형 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$의 변의 길이들을 구한다. 이 결과와 코사인법칙을 이용하여 각 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$의 코사인 값을 구한다.

[문제 2-2]

제시문의 조건 (나)로부터 원 C_n의 반지름 r_n의 일반항을 구하고, 이를 이용하여 C_n의

넓이 S_n의 일반항을 구한다. 로그의 정의를 이용하여 수열 $\log_2\frac{S_n}{\pi}$을 구하고, 수열의 합 $\sum_{n=1}^{N}\log_2\frac{S_n}{\pi}$을 N으로 표현한다. 문제의 조건으로부터 N의 최솟값을 구한다.

[문제 2-3]

제시문의 귀납적 조건 (가), (나)로부터 삼각형 $O_nO_{n+1}O_{n+2}$와 삼각형 $O_{n+1}O_{n+2}O_{n+3}$의 각 변의 길이를 알아낸다. 코사인법칙을 이용하여 각 $O_nO_{n+1}O_{n+2}$와 각 $O_{n+1}O_{n+2}O_{n+3}$의 코사인 값이 같음을 보인다. 두 엇각 $O_nO_{n+1}O_{n+2}$와 $O_{n+1}O_{n+2}O_{n+3}$의 크기가 같음을 보이고, 이를 이용하여 두 직선 O_nO_{n+1}과 $O_{n+2}O_{n+3}$이 서로 평행함을 보인다.

6. 채점 기준

[문제 2-1]

- (1)과 같이 세 선분 O_1O_2, O_2O_3, O_1O_3의 길이를 구한 경우: +10점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(5점): 시도는 하였지만 (1)과 같은 완벽한 답을 얻지 못하였다.
−A(10점): 외접조건을 이용하여 (1)과 같은 답을 얻었다.

- 코사인법칙을 이용하여 (2)와 같이 각 $O_1O_2O_3$의 코사인 값을 구한 경우: +10점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(5점): 코사인법칙을 아는 정도이거나, 혹은 코사인법칙을 이용하려 했으나 완벽한 답을 얻지 못하였다.
−A(10점): 코사인법칙을 이용하여 (2)과 같은 답을 얻었다.

[문제 2-2]

- 제시문의 조건 (나)로부터 수열 $\{r_n\}$의 일반항을 알아내고, (3)과 같이 원 C_n의 넓이 S_n을 구한 경우: +10점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(5점): $\{r_n\}$의 일반항만 알아내었다.
−A(10점): S_n의 일반항을 알아내었다.

- 로그의 정의를 이용하여 (4)와 같이 $\log_2\frac{S_n}{\pi}$을 구한 경우: +10점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(5점): 로그를 이용하려 하였지만 (4)와 같은 답을 얻지 못하였다.
−A(10점): 로그를 이용하여 (4)의 답을 얻었다.

- (5)와 같이 $\sum_{n=1}^{N} \log_2 \frac{S_n}{\pi}$ 을 N으로 표현한 경우: +15점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−C(5점): $\sum$의 의미를 알지만, 이를 이용한 계산을 할 수 없다.
−B(10점): $\sum$의 의미를 알고 계산을 하였지만 정확한 답을 얻지 못하였다.
−A(15점): (5)와 같이 정확한 답을 얻었다.

- (5)를 이용하여 N의 최솟값을 알아낸 경우: +5점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−A(5점): 완벽한 답을 하였다.

[문제 2−3]
예시답안 1)

- (6)과 같이 삼각형 $O_nO_{n+1}O_{n+2}$와 삼각형 $O_{n+1}O_{n+2}O_{n+3}$의 각 변의 길이를 알아낸 경우: +10점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(5점): 시도는 하였지만 완벽한 답을 얻지 못하였다. 혹은 일반적인 n에 대해서가 아니라, n이 1 혹은 2인 일부 경우들에 대한 답만을 얻었다.
−A(10점): 외접조건을 이용하여 (6) 혹은 (9)와 같은 답을 얻었다.

- 코사인법칙을 이용하여 (7)과 같이 각 $O_nO_{n+1}O_{n+2}$와 각 $O_{n+1}O_{n+2}O_{n+3}$의 코사인 값이 같음을 보인 경우: +15점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−C(5점): 코사인법칙을 알고, 이를 이용하려 시도만 하였다. 혹은 일반적인 n에 대해서가 아니라, n이 1 혹은 2인 일부 경우들에 대한 답만을 얻었다.
−B(10점): 코사인법칙을 알고 일부 내각의 코사인 값을 구하였다.
−A(15점): 대응하는 내각들의 코사인 값이 같음을 보였다.

- (8)과 같이 각 $O_nO_{n+1}O_{n+2}$와 각 $O_{n+1}O_{n+2}O_{n+3}$의 크기가 같음을 보인 경우: +5점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다. 혹은 일반적인 n에 대해서가 아니라, n이 1 혹은 2인 일부 경우들에 대한 답만을 얻었다.

−A(5점): 0° 와 180° 사이의 각들, 즉 삼각형의 내각들은 코사인 값이 같을 경우 각의 크기도 같다는 점을 알고, 이를 이용하여 대응하는 각들의 크기가 같음을 보였다.

- 두 엇각 $\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2}$와 $\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2}\mathrm{O}_{n+3}$이 같다는 사실을 이용하여 두 직선 $\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}$과 $\mathrm{O}_{n+2}\mathrm{O}_{n+3}$이 서로 평행함을 보인 경우: +10점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(5점): 엇각 등을 이용하여 두 직선이 평행함을 보이려 하였으나, 요구하는 답을 하지 못하였다. 혹은 일반적인 n에 대해서가 아니라, n이 1 혹은 2인 일부 경우들에 대한 답만을 얻었다.
−A(10점): 엇각들의 크기가 같으면 대응하는 두 직선이 평행임을 이용하여, 문제가 요구하는 답을 하였다.

채점위원 참고: 본 예시답안에서는 예시답안 2)의 <그림 4>의 각 β가 엇각임을 이용하고 있습니다. 하지만 <그림 4>의 각 α 혹은 각 γ가 엇각임을 이용하는 답안도 비슷한 기준으로 채점할 수 있습니다.

예시답안 2)

- (9)와 같이 삼각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2}$와 삼각형 $\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2}\mathrm{O}_{n+3}$의 각 변의 길이를 알아낸 경우: +10점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(5점): 시도는 하였지만 완벽한 답을 얻지 못하였다. 혹은 일반적인 n에 대해서가 아니라, n이 1 혹은 2인 일부 경우들에 대한 답만을 얻었다.
−A(10점): 외접조건을 이용하여 (6) 혹은 (9)와 같은 답을 얻었다.

- (10)등을 이용하여 삼각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2}$와 삼각형 $\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2}\mathrm{O}_{n+3}$이 서로 닮은 도형임을 보인 경우: +15점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−C(5점): 닮은 도형의 개념을 알지만, 문제의 상황에 정확히 적용하지 못하였다.
−B(10점): 일반적인 n에 대해서가 아니라, n이 1 혹은 2인 일부 경우들에 대한 답만을 얻었다.
−A(15점): 대응하는 삼각형들이 서로 닮은 도형임을 보였다.

- (11)과 같이 삼각형 $\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2}\mathrm{O}_{n+3}$의 내각들과 삼각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2}$의 내각들의 대응관계를 보인 경우: +5점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다. 혹은 일반적인 n에 대해서가 아니라, n이 1 혹은

2인 일부 경우들에 대한 답만을 얻었다.
−A(5점): 같은 크기를 가지는 내각들의 구체적 대응관계를 알아내었다.

- (12)등을 보임으로써 두 직선 O_nO_{n+1}과 $O_{n+2}O_{n+3}$이 서로 평행함을 보인 경우: +10점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(5점): 엇각 등을 이용하여 두 직선이 평행함을 보이려 하였으나, 요구하는 답을 하지 못하였다. 혹은 일반적인 n에 대해서가 아니라, n이 1 혹은 2인 일부 경우들에 대한 답만을 얻었다.
−A(10점): 엇각들의 크기가 같으면 대응하는 두 직선이 평행임을 이용하여, 문제가 요구하는 답을 하였다.

채점위원 참고: 본 예시답안에서는 <그림 4>의 각 β가 엇각임을 이용하고 있습니다. 하지만 <그림 4>의 각 α 혹은 각 γ가 엇각임을 이용하는 답안도 비슷한 기준으로 채점할 수 있습니다.

예시답안 3)

- (6) 혹은 (9)와 같이 삼각형 $O_nO_{n+1}O_{n+2}$와 삼각형 $O_{n+1}O_{n+2}O_{n+3}$의 각 변의 길이를 알아낸 경우: +10점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(5점): 시도는 하였지만 완벽한 답을 얻지 못하였다. 혹은 일반적인 n에 대해서가 아니라, n이 1 혹은 2인 일부 경우들에 대한 답만을 얻었다.
−A(10점): 외접조건을 이용하여 (6) 혹은 (9)와 같은 답을 얻었다.

- (13)등과 같이 점 O_{n+2}의 좌표가 만족하는 조건을 쓴 경우: +5점

−E(0점): 시도를 하였지만 정확한 답을 얻지 못하였다. 혹은 일반적인 n에 대해서가 아니라, n이 1 혹은 2인 일부 경우들에 대한 답만을 얻었다.
−A(5점): 완벽한 답을 하였다.

- (14)등과 같이 점 O_{n+2}의 좌표를 구한 경우: +10점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(5점): 점 O_{n+2}의 좌표가 만족하는 조건을 이용하여 좌표를 계산하였으나 정확한 답을 얻지 못하였다. 혹은 일반적인 n에 대해서가 아니라, n이 1 혹은 2인 일부 경우들에 대한 답만을 얻었다.
−A(10점): 점 O_{n+2}의 좌표가 만족하는 조건을 이용하여 정확한 답을 얻었다.

- (15)등과 같이 점 O_{n+3}의 좌표를 구하고 이를 이용하여 두 직선 O_nO_{n+1}과 $O_{n+2}O_{n+3}$이 서로 평행함을 보인 경우: +15점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−C(5점): 점 O_{n+3}의 y좌표를 구하려 하였으나 정확한 답을 얻지 못하였다. 혹은 일반적인 n에 대해서가 아니라, n이 1 혹은 2인 일부 경우들에 대한 답만을 얻었다.
−B(10점): 점 O_{n+3}의 y좌표를 정확하게 구하였다.
−A(15점): 점 O_{n+2}와 O_{n+3}의 y좌표가 같음을 이용하여 두 직선이 평행함을 보였다.

채점위원 참고: 본 예시답안에서 잡은 좌표계와 다른 좌표계를 잡는 답안의 경우, 점 O_{n+2}, 점 O_{n+3}의 좌표 등, 답안의 구체적인 숫자들이 달라질 수 있습니다. 하지만, 이런 경우들도 비슷한 기준으로 채점할 수 있습니다.

7. 예시 답안

[문제 2−1]

$r_1=1,\ r_2=2,\ r_3=4$이고 세 원 C_1, C_2, C_3가 제시문 <그림 1>과 같이 서로 외접하므로

$$\begin{aligned}\overline{O_1O_2}&=r_1+r_2=1+2=3,\\ \overline{O_2O_3}&=r_2+r_3=2+4=6,\\ \overline{O_1O_3}&=r_1+r_3=1+4=5.\end{aligned} \quad (1)$$

삼각형 $O_1O_2O_3$에 코사인법칙을 적용하면

$$\cos(\angle O_1O_2O_3)=\frac{\overline{O_1O_2}^2+\overline{O_2O_3}^2-\overline{O_1O_3}^2}{2\cdot\overline{O_1O_2}\cdot\overline{O_2O_3}}=\frac{3^2+6^2-5^2}{2\cdot3\cdot6}=\frac{20}{2\cdot3\cdot6}=\frac{5}{9}. \quad (2)$$

[문제 2−2]

조건 (나)에 의하여 수열 $\{r_n\}$이 첫째항 1, 공비 2인 등비수열이므로

$$r_n=1\cdot2^{n-1}=2^{n-1}$$

이다. 따라서 원 C_n의 넓이 S_n은

$$S_n=\pi\left(2^{n-1}\right)^2=2^{2n-2}\pi \quad (3)$$

이고, 로그의 정의에 의하여

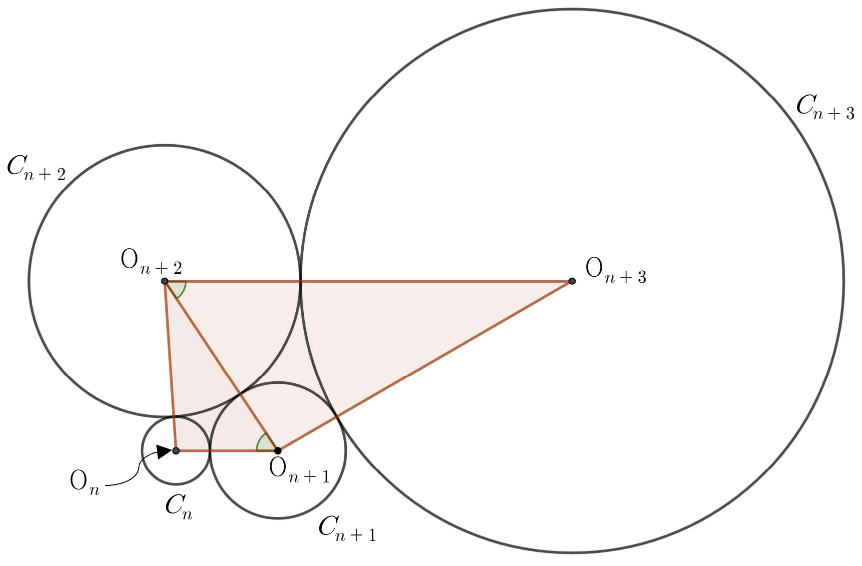
$$\log_2 \frac{S_n}{\pi} = \log_2 2^{2n-2} = 2n-2. \tag{4}$$

(5)에 의하여

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \log_2 \frac{S_n}{\pi} &= \sum_{n=1}^{N} (2n-2) = 2\sum_{n=1}^{N} n - \sum_{n=1}^{N} 2 = 2 \cdot \frac{1}{2} N(N+1) - 2N \\ &= N(N-1). \end{aligned} \tag{5}$$

$N(N-1)$이 자연수 N에 대한 증가함수이고 $10(10-1) = 90 < 100$, $11(11-1) = 110 > 100$이므로, 구하는 N의 최솟값은 11이다.

[문제 2-3]
예시답안 1)



<그림 3>

제시문의 조건 (가), (나)에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{O}_n \mathrm{O}_{n+1}} &= r_n + r_{n+1} = 2^{n-1} + 2^n, \\ \overline{\mathrm{O}_n \mathrm{O}_{n+2}} &= r_n + r_{n+2} = 2^{n-1} + 2^{n+1}, \\ \overline{\mathrm{O}_{n+1} \mathrm{O}_{n+2}} &= r_{n+1} + r_{n+2} = 2^n + 2^{n+1}, \\ \overline{\mathrm{O}_{n+1} \mathrm{O}_{n+3}} &= r_{n+1} + r_{n+3} = 2^n + 2^{n+2}, \\ \overline{\mathrm{O}_{n+2} \mathrm{O}_{n+3}} &= r_{n+2} + r_{n+3} = 2^{n+1} + 2^{n+2} \end{aligned} \tag{6}$$

이므로, 코사인법칙을 이용하면

$$\cos(\angle O_nO_{n+1}O_{n+2}) = \frac{\overline{O_nO_{n+1}}^2 + \overline{O_{n+1}O_{n+2}}^2 - \overline{O_nO_{n+2}}^2}{2\cdot \overline{O_nO_{n+1}}\cdot \overline{O_{n+1}O_{n+2}}}$$
$$= \frac{(2^{n-1}+2^n)^2 + (2^n+2^{n+1})^2 - (2^{n-1}+2^{n+1})^2}{2(2^{n-1}+2^n)(2^n+2^{n+1})}$$
$$= \frac{(3^2+6^2-5^2)(2^{n-1})^2}{2\cdot 3\cdot 6\cdot (2^{n-1})^2} = \frac{3^2+6^2-5^2}{2\cdot 3\cdot 6}, \quad \left(=\frac{5}{9}\right)$$

$$\cos(\angle O_{n+1}O_{n+2}O_{n+3}) = \frac{\overline{O_{n+1}O_{n+2}}^2 + \overline{O_{n+2}O_{n+3}}^2 - \overline{O_{n+1}O_{n+3}}^2}{2\cdot \overline{O_{n+1}O_{n+2}}\cdot \overline{O_{n+2}O_{n+3}}}$$
$$= \frac{(2^n+2^{n+1})^2 + (2^{n+1}+2^{n+2})^2 - (2^n+2^{n+2})^2}{2(2^n+2^{n+1})(2^{n+1}+2^{n+2})}$$
$$= \frac{(3^2+6^2-5^2)(2^n)^2}{2\cdot 3\cdot 6\cdot (2^n)^2} = \frac{3^2+6^2-5^2}{2\cdot 3\cdot 6}. \quad \left(=\frac{5}{9}\right)$$

따라서

$$\cos(\angle O_nO_{n+1}O_{n+2}) = \cos(\angle O_{n+1}O_{n+2}O_{n+3}) \tag{7}$$

을 얻는다. 각 $O_nO_{n+1}O_{n+2}$와 각 $O_{n+1}O_{n+2}O_{n+3}$이 삼각형의 내각들이므로

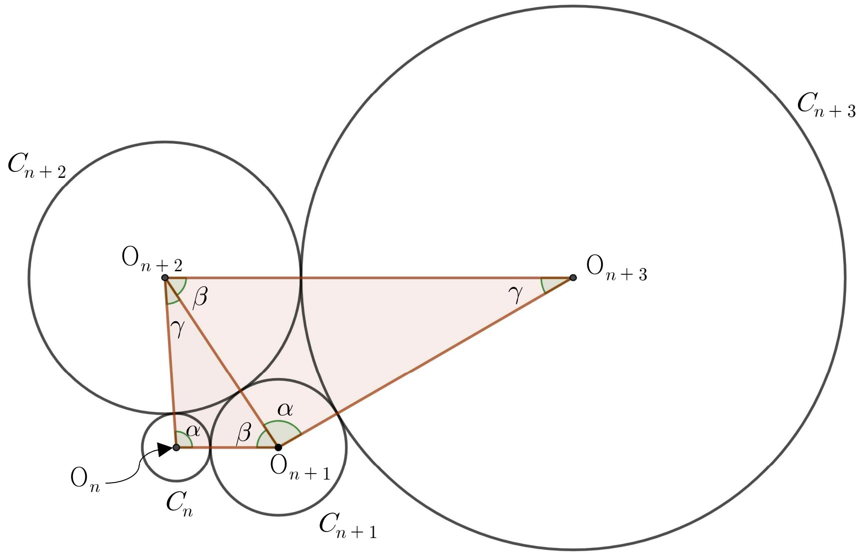
$$0 < \angle O_nO_{n+1}O_{n+2} < \pi,\ 0 < \angle O_{n+1}O_{n+2}O_{n+3} < \pi$$

이고, 따라서 (7)에 의하여

$$\angle O_nO_{n+1}O_{n+2} = \angle O_{n+1}O_{n+2}O_{n+3}. \tag{8}$$

<그림 3>에서와 같이 두 엇각 $O_nO_{n+1}O_{n+2}$, $O_{n+1}O_{n+2}O_{n+3}$의 크기가 같으므로, 직선 O_nO_{n+1}과 직선 $O_{n+2}O_{n+3}$은 서로 평행하다.

예시답안 2)



<그림 4>

$\angle \mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+2} = \alpha$, $\angle \mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2} = \beta$, $\angle \mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+2}\mathrm{O}_{n+1} = \gamma$ 라고 하자. 제시문의 조건 (가), (나)에 의하여

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}} &= r_n + r_{n+1} = 2^{n-1} + 2^n = 3 \cdot 2^{n-1}, \\
\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+2}} &= r_n + r_{n+2} = 2^{n-1} + 2^{n+1} = 5 \cdot 2^{n-1}, \\
\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2}} &= r_{n+1} + r_{n+2} = 2^n + 2^{n+1} = 6 \cdot 2^{n-1}, \\
\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+3}} &= r_{n+1} + r_{n+3} = 2^n + 2^{n+2} = 10 \cdot 2^{n-1}, \\
\overline{\mathrm{O}_{n+2}\mathrm{O}_{n+3}} &= r_{n+2} + r_{n+3} = 2^{n+1} + 2^{n+2} = 12 \cdot 2^{n-1}
\end{aligned} \tag{9}$$

이므로,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}} : \overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+2}} : \overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2}} &= 3:5:6 \\
&= 6:10:12 \\
&= \overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2}} : \overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+3}} : \overline{\mathrm{O}_{n+2}\mathrm{O}_{n+3}}
\end{aligned} \tag{10}$$

이고, 따라서 삼각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2}$와 삼각형 $\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2}\mathrm{O}_{n+3}$은 서로 닮은 도형이다. <그림 4>에서와 같이

$$\angle \mathrm{O}_{n+2}\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+3} = \alpha, \ \angle \mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2}\mathrm{O}_{n+3} = \beta, \ \angle \mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+3}\mathrm{O}_{n+2} = \gamma \tag{11}$$

이고, 특히

$$\angle \mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2} = \beta = \angle \mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2}\mathrm{O}_{n+3} \tag{12}$$

이므로 두 엇각 $\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2}$, $\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2}\mathrm{O}_{n+3}$의 크기가 같다. 따라서 직선 $\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}$과

직선 $O_{n+2}O_{n+3}$은 서로 평행하다.

예시답안 3)
제시문의 조건 (나)를 이용하여 (6) 혹은 (9)를 보인다. (9)를 이용하여 점 O_n의 좌표가 $(0,0)$, 점 O_{n+1}의 좌표가 $(3\cdot 2^{n-1},0)$이 되도록 좌표평면을 잡는다. 점 O_{n+2}의 좌표를 (a,b)로 놓으면, (9)와 조건 (가)에 의하여, 일반성을 잃지 않고

$$\begin{aligned}(6\cdot 2^{n-1})^2 &= \overline{O_{n+2}O_{n+1}}^2 = (a-3\cdot 2^{n-1})^2+(b-0)^2,\\ (5\cdot 2^{n-1})^2 &= \overline{O_{n+2}O_n}^2 = (a-0)^2+(b-0)^2\end{aligned} \tag{13}$$

이 성립한다. (13)의 두 식의 차로부터

$$(6\cdot 2^{n-1})^2-(5\cdot 2^{n-1})^2=-6\cdot 2^{n-1}a+(3\cdot 2^{n-1})^2,$$

즉

$$\begin{aligned}a &= -\frac{1}{6\cdot 2^{n-1}}\left\{(6\cdot 2^{n-1})^2-(5\cdot 2^{n-1})^2-(3\cdot 2^{n-1})^2\right\}\\ &= -\frac{2^{n-1}}{6}(6^2-5^2-3^2)=-\frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}\end{aligned}$$

을 얻고, 다시 (13)의 두 번째 식으로부터

$$\begin{aligned}b &= \sqrt{(5\cdot 2^{n-1})^2-\left(-\frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}\right)^2}=\frac{2^{n-1}}{3}\sqrt{15^2-1^2}=\frac{2^{n-1}}{3}\sqrt{224}\\ &= \frac{4\sqrt{14}}{3}\cdot 2^{n-1}\end{aligned}$$

을 얻는다. 따라서 O_{n+2}의 좌표는

$$\left(-\frac{1}{3}\cdot 2^{n-1},\ \frac{4\sqrt{14}}{3}\cdot 2^{n-1}\right). \tag{14}$$

좌표가

$$\begin{aligned}\left(a+\overline{O_{n+2}O_{n+3}},\ b\right) &= \left(-\frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}+12\cdot 2^{n-1},\ \frac{4\sqrt{14}}{3}\cdot 2^{n-1}\right)\\ &= \left(\frac{35}{3}\cdot 2^{n-1},\ \frac{4\sqrt{14}}{3}\cdot 2^{n-1}\right)\end{aligned}$$

인 점을 R이라고 하면, (9)에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{O_{n+1}R}^2 &= \left(\frac{35}{3}\cdot 2^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}\right)^2+\left(\frac{4\sqrt{14}}{3}\cdot 2^{n-1}-0\right)^2\\ &= \left\{\left(\frac{26}{3}\right)^2+\left(\frac{4\sqrt{14}}{3}\right)^2\right\}(2^{n-1})^2=100(2^{n-1})^2=(10\cdot 2^{n-1})^2\\ &= \overline{O_{n+1}O_{n+3}}^2\end{aligned}$$

이고 $\overline{O_{n+2}R} = \overline{O_{n+2}O_{n+3}}$이다. 즉, 점 O_{n+3}과 점 R은 점 O_{n+1}로부터 같은 거리에 있고, 마찬가지로 점 O_{n+3}과 점 R은 점 O_{n+2}로부터도 같은 거리에 있다. 따라서 제시문의 조건 (다)에 의하여 점 $R = O_{n+3}$이고 점 O_{n+3}의 좌표는

$$\left(\frac{35}{3} \cdot 2^{n-1}, \frac{4\sqrt{14}}{3} \cdot 2^{n-1}\right). \tag{15}$$

직선 O_nO_{n+1}이 x축 위에 있고, (14), (15)에 의하여 점 O_{n+2}와 점 O_{n+3}의 y좌표가 같으므로, 직선 O_nO_{n+1}과 직선 $O_{n+2}O_{n+3}$은 서로 평행하다.