[문항카드 6]

1. 일반 정보

유형		■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사
전형명		논술전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		자연계열 / 문제 1
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학
	핵심개념 및 용어	경우의 수
예상 소요 시간		8분

2. 문항 및 제시문

1. 사과, 배, 감, 오렌지가 각각 3개씩 있다. 12개의 과일에는 각각 서로 다른 원산지 상표가 붙어 있다. 사과와 배 1개의 가격은 각각 2천 원이고, 감과 오렌지 1개의 가격은 각각 1천 원이다. 1만 원을 모두 사용하여 과일을 살 때, 적어도 사과 1개와 배 1개는 반드시 포함하는 경우의 수를 구하시오. [40점]

3. 출제 의도

1. 경우의 수를 이해하는지를 확인한다.
2. 조합의 의미를 이해하는지를 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
1	[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	배종숙 외 6인	금성	2018	263-264
	수학	이준열 외 9인	천재교육	2018	263

5. 문항 해설

실생활에서 경우의 수를 이해하고 계산할 수 있는지 확인하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
-	경우를 정확히 나누어 서술	15점
	경우의 수를 조합으로 계산	10점
	정답 510 을 계산	15점

7. 예시 답안

사과 1 개와 배 1 개를 포함하여 1 만원으로 과일을 사는 경우는 다음과 같다.
1) 사과 1 개, 배 1 개 + $1,000$원짜리 6 개
2) 사과 1 개, 배 2 개 + $1,000$원짜리 4 개
3) 사과 2 개, 배 1 개 + $1,000$원짜리 4 개
4) 사과 1 개, 배 3 개 + $1,000$원짜리 2 개
5) 사과 2 개, 배 2 개 + $1,000$원짜리 2 개
6) 사과 3 개, 배 1 개 + $1,000$원짜리 2 개
7) 사과 3 개, 배 2 개
8) 사과 2 개, 배 3 개

1) 의 경우의 수는 ${}_3C_1 \times {}_3C_1 \times {}_6C_6 = 9$
2) 의 경우의 수는 ${}_3C_1 \times {}_3C_2 \times {}_6C_4 = 3 \times 3 \times 15 = 135$
3) 의 경우의 수는 ${}_3C_1 \times {}_3C_2 \times {}_6C_4 = 3 \times 3 \times 15 = 135$
4) 의 경우의 수는 ${}_3C_1 \times {}_3C_3 \times {}_6C_2 = 3 \times 15 = 45$
5) 의 경우의 수는 ${}_3C_2 \times {}_3C_2 \times {}_6C_2 = 3 \times 3 \times 15 = 135$
6) 의 경우의 수는 ${}_3C_1 \times {}_3C_3 \times {}_6C_2 = 3 \times 15 = 45$
7) 의 경우의 수는 ${}_3C_3 \times {}_3C_2 = 3$
8) 의 경우의 수는 ${}_3C_3 \times {}_3C_2 = 3$
그러므로 합의 법칙에 의해 경우의 수는 510 가지이다.

[문항카드 7]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학
	핵심개념 및 용어	무리함수, 역함수, 점과 직선 사이의 거리
예상 소요 시간	8분	

2. 문항 및 제시문

2. 함수 $f(x)=\sqrt{x+3}-1$과 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점을 P라 하고, 곡선 $y=f^{-1}(x)$의 y축과의 교점을 Q라 하자. 점 Q를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 R이라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이를 구하시오. [40점]

3. 출제 의도

1. 무리함수의 그래프를 이해하는지를 확인한다.
2. 함수와 그의 역함수의 그래프 관계를 이해하는지를 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
2	[10수학04-03] 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다. [10수학04-05] 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외 14인	교학사	2018	238-244
	수학	배종숙 외 6인	금성출판사	2018	247-253

5. 문항 해설

무리함수와 역함수의 관계를 이해하여 조건에 맞는 세 점을 찾고 세 점으로 이루어진 삼각형의 넓이를 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
–	함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점으로 계산하는 과정을 서술	10점
	무리함수과 직선 $y=x$ 의 교점이 $\mathrm{P}(1,1)$임을 도출	10점
	두 점 P, Q의 좌표가 $\mathrm{Q}(0,-2)$, $\mathrm{R}(-2,0)$임을 도출	10점
	삼각형 PQR의 넓이가 4임을 도출	10점

7. 예시 답안

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다. 따라서 교점 P의 x좌표는 $\sqrt{x+3}-1=x$의 실근이므로,

$$\begin{aligned} x+3=(x+1)^2=x^2+2x+1 \;&\Rightarrow\; x^2+x-2=0 \\ &\Rightarrow\; (x+2)(x-1)=0 \\ &\Rightarrow\; x=1 \text{ 또는 } x=-2 \end{aligned}$$

그런데 $\sqrt{x+3}-1\geq -1$이므로, $x\geq -1$이다. 따라서 $x=1$이다. 따라서 교점은 $\mathrm{P}(1,1)$이다.

$y=f^{-1}(x)$의 y절편은 $\mathrm{Q}(0,f^{-1}(0))$이므로, $\mathrm{R}(f^{-1}(0),0)$이다. 이때 $f^{-1}(0)=a$라 하면, $f(a)=0$이므로, $a=-2$이다. 따라서 $\mathrm{Q}(0,-2)$, $\mathrm{R}(-2,0)$이다.

Q와 R를 지나는 직선의 방정식은 $y=-x-2$이다. 점 P와 이 직선 사이의 거리는 $d=\dfrac{|1+1+2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}$이고,

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{2}$이므로, 삼각형 PQR의 넓이는 $2\sqrt{2}\times\dfrac{4}{\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{2}=4$이다.

[문항카드 8]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II
	핵심개념 및 용어	연속성, 미분가능성, 도함수
예상 소요 시간	12분	

2. 문항 및 제시문

3. 0이 아닌 두 실수 m, n에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=x^3+3x^2-6x+1,\ g(x)=mx+1+\frac{1}{n}$$

함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

가 모든 실수 x에서 미분가능할 때, mn의 값을 구하시오. [45점]

3. 출제 의도

1. 미분가능성과 연속성의 관계를 이해하는지 확인한다.
2. 다항함수의 도함수를 구할 수 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
3	[12수학II02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다. [12수학II02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	박교식 외 19인	동아출판	2018	60-61
	수학 II	권오남 외 14인	교학사	2018	68-74

5. 문항 해설

함수의 미분가능성과 연속성 사이의 관계와 다항함수의 도함수 계산법을 이해하고 있는지를 평가하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
-	$f(x)$와 $g(x)$가 일치하는 점이 반드시 존재함을 확인	10점
	$f(x)=g(x)$임을 확인하거나 변곡점이 $(-1,9)$임을 도출	5점
	$f(x)-g(x)=0$의 해가 $f'(x)-g'(x)=0$의 해를 포함함을 확인하거나 $f''(x)=6x+6$임을 도출	5점
	$m=-9$를 도출	10점
	$n=-1$을 도출	10점
	$mn=9$를 바르게 계산	5점

7. 예시 답안

$f(x)$와 $g(x)$는 다항함수이므로 모든 점에서 미분 가능한 함수이다. 따라서 $h(x)$가 모든 점에서 미분 가능하기 위해서는 다음 두 가지의 경우를 생각해 볼 수 있다.

(1) $f(x)$와 $g(x)$의 대소 관계가 바뀌지 않는다. 즉, $f(x)$가 $g(x)$보다 항상 크거나 $g(x)$가 $f(x)$보다 항상 커야하므로 삼차함수

$$y=k(x)=f(x)-g(x)=x^3+3x^2-(6+m)x-\frac{1}{n}$$

의 그래프가 x축과 만나는 점이 없어야 한다. 삼차항의 계수가 양수이므로 삼차함수 그래프의 개형에 의하여 이러한 경우는 존재하지 않는다.

(2) $f(x)$와 $g(x)$의 대소 관계가 바뀌는 순간에 두 함수의 함숫값과 도함수 값이 동일하여 각 점에서 연속이며 미분가능하다.

〈 계산 〉

즉, 삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$의 세 실근을 α, β, γ라고 하면

$$f(x)-g(x)=x^3+3x^2-(6+m)x-\frac{1}{n}=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$$

이 되고 $f'(\alpha)-g'(\alpha)=0$, $f'(\beta)-g'(\beta)=0$, $f'(\gamma)-g'(\gamma)=0$를 만족한다. 이차방정식 $f'(x)-g'(x)=0$은 근이 최대 2개이므로 $\beta=\gamma$를 삼차방정식의 중근이라고 가정하고 이차방정식 $f'(x)-g'(x)=0$의 두 실근을 α, β라고 하자. 그러면

$$f'(x)-g'(x)=3x^2+6x-(6+m)=3(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

이 성립한다. 따라서 이는

$$f(x)-g(x)=(x-\gamma)\left(x^2+2x-2-\frac{m}{3}\right)=0$$

와 동치이다. 따라서

$$x^3+(2-\gamma)x^2-\left(2+\frac{m}{3}+2\gamma\right)x+\gamma\left(2+\frac{m}{3}\right)=x^3+3x^2-(6+m)x-\frac{1}{n}$$

이고, $2-\gamma=3$, $2+\frac{m}{3}+2\gamma=6+m$, $\gamma\left(2+\frac{m}{3}\right)=-\frac{1}{n}$이다. 그러므로 $d=-1$, $m=-9$, $n=-1$이므로 $mn=9$이다.

아래 [별해]를 이용하여 (2)의 〈계산〉을 대체할 수 있음.

한편, 두 함수의 함숫값과 도함수 값이 동일하다는 것은 각 점에서 삼차방정식 $f(x)=g(x)$과 이차방정식 $f'(x)=g'(x)$이 동시에 성립한다는 것이므로 함수 $y=f(x)$와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점들에서의 접선의 기울기가 모두 같거나 만나는 점이 하나라는 것을 의미한다. 전자의 경우는 존재하지 않으며, 후자의 경우는 두 함수가 $y=f(x)$의 변곡점에서 접하는 것을 의미한다. 따라서 변곡점과 그 점에서의 접선을 구하여 해결하자. $f'(x)=3x^2+6x-6$, $f''(x)=6x+6$이므로 변곡점은 $(-1,9)$이고, 변곡점에서 접선은 $y=-9(x+1)+9=-9x$이다. 따라서 $m=-9$, $n=-1$이므로 $mn=9$이다.

[문항카드 9]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 4	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	속도, 거리
예상 소요 시간	8분	

2. 문항 및 제시문

4. 좌표평면에서 점 P는 시각 $t=0$일 때 $(1,0)$에서 출발하여 시각 t에서 $v(t)=\alpha$의 속도로 x축 위를 움직인다. 점 P에서 곡선$y=x^2$에 그은 접선의 기울기가 양수일 때, 이 접선과 y축이 만나는 점을 Q라 하자. y축 위를 움직이는 점 Q의 시각 $t=2$에서의 속도가 -48일 때, α의 값을 구하시오. (단, α는 양의 실수) [40점]

3. 출제 의도

1. 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 확인한다.
2. 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있는지를 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
4	[12수학II02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학II02-11] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	홍성복 외 10인	지학사	2018	75-77
	수학 II	권오남 외 14인	교학사	2018	103-105
	미적분	류희찬 외 9인	천재교과서	2019	139-142

5. 문항 해설

속도와 미분의 관계를 이해하는지를 평가하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
–	$x=a$에서의 접선의 방정식이 $y-a^2=2a(x-a)$임을 도출	5점
	$a=2(\alpha t+1)$을 도출	5점
	접선의 방정식이 $y=4(\alpha t+1)x-4(\alpha t+1)^2$임을 도출	5점
	$\mathrm{Q}(0,\,-4(\alpha t+1)^2)$을 도출	5점
	$v(t)=-8t(\alpha t+1)$을 도출	10점
	$\alpha=\dfrac{3}{2}$를 도출	10점

7. 예시 답안

점 P에서 곡선 $y=x^2$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (a,a^2)이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=2a$이므로 접선의 방정식은 $y-a^2=2a(x-a)$, 즉, $y=2ax-2a^2+a^2=2ax-a^2$이다. 이 직선이 $(\alpha t+1,0)$을 지나므로

$$0=2a(\alpha t+1)-a^2=a(2\alpha t+2-a)$$

인데 $a\neq 0$이므로, $2\alpha t+2-a=0$이다. 따라서 $a=2(\alpha t+1)$이다. 따라서 접선의 방정식은

$$y=4(\alpha t+1)x-4(\alpha t+1)^2$$

이다. 이 접선의 y절편은 $-4(\alpha t+1)^2$이므로, $\mathrm{Q}(0,\,-4(\alpha t+1)^2)$이다. Q가 y축 위를 움직이는 속도를 $v(t)$라 하면, $v(t)=(-4(\alpha t+1)^2)'=-8\alpha(\alpha t+1)=-8\alpha^2 t-8\alpha$.

이때 $v(2)=-16\alpha^2-8\alpha=-48$이므로, $2\alpha^2+\alpha-6=0 \Rightarrow (2\alpha-3)(\alpha+2)=0$이고, $\alpha>0$이므로 $\alpha=\dfrac{3}{2}$이다.

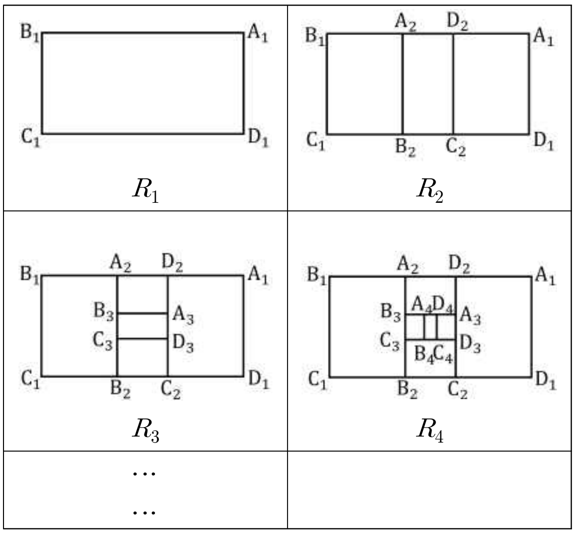
[문항카드 10]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 5	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 미적분
	핵심개념 및 용어	등비수열, 등비급수, 수열의 극한
예상 소요 시간	8분	

2. 문항 및 제시문

5. 아래 그림과 같이 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$은 가로의 길이가 2이고, 세로의 길이가 1인 직사각형이다. 이 직사각형을 R_1이라 하자. R_1에 왼쪽부터 넓이의 비가 $3:2:3$이 되도록 선분 A_1B_1에 수직인 두 선분 A_2B_2와 C_2D_2를 추가하고, R_1의 모든 선분과 추가된 두 선분 A_2B_2와 C_2D_2를 포함하는 도형을 R_2라 하자. R_2 중앙의 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 위로부터 넓이의 비가 $3:2:3$이 되도록 선분 A_2B_2에 수직인 두 선분 A_3B_3과 C_3D_3을 추가하고, R_2의 모든 선분과 추가된 두 선분 A_3B_3과 C_3D_3을 포함하는 도형을 R_3이라 하자. R_3 중앙의 직사각형 $A_3B_3C_3D_3$에 왼쪽부터 넓이의 비가 $3:2:3$이 되도록 선분 A_3B_3에 수직인 두 선분 A_4B_4와 C_4D_4를 추가하고, R_3의 모든 선분과 추가된 두 선분 A_4B_4와 C_4D_4를 포함하는 도형을 R_4라 하자. 이 과정을 반복하여 R_n을 만든다. R_n의 모든 선분의 길이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하시오. [40점]



3. 출제 의도

1. 넓이의 비를 이해하고, 이를 활용해 반복적으로 생기는 도형의 규칙성을 확인할 수 있는지를 평가한다.

2. 확인된 규칙성을 이용하여 등비수열의 합의 형태로 넓이의 합을 나타내는 식을 구할 수 있는지 평가한다.
3. 등비급수의 합을 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
5	[12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다. [12미적01-03] 등비수열의 극한값을 구할 수 있다. [12미적01-06] 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	박교식 외 19인	동아출판	2018	115-120
	미적분	권오남 외 14인	교학사	2018	32-42

5. 문항 해설

넓이의 비를 이용하여 규칙성 있게 그어지는 변들의 길이가 등비수열을 이룸을 알고 있는지를 확인하고, 등비수열을 이용하여 변의 길이의 합의 극한을 구할 수 있는지 알아보는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
-	$S_1=2+2+1+1=6$을 도출	4점
	$S_2=(2+2+1+1)+(1+1)=8$을 도출	4점
	$S_3=(2+2+1+1)+(1+1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=9$을 도출	4점
	$S_4=(2+2+1+1)+(1+1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{19}{2}$을 도출	4점
	$S_1=6,\ S_n=6+2\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\ (n\geq 2)$을 도출	8점
	등비수열의 합 공식을 활용하여 $S_n=10-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$으로 간단히 표현	6점
	$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{10-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}=10$을 바르게 계산	10점

7. 예시 답안

S_1은 R_1의 둘레의 길이이므로 $S_1 = 2+2+1+1 = 6$이다.

A_2와 D_2는 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$을 $3:2:3$으로 내분하는 점이고, 각각 A_2와 D_2에서 선분 $\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$에 내린 수선의 발을 각각 B_2와 C_2라 하자. 이때 $\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{D}_2} = 1$이고, $S_2 = 6 + (1+1) = 6+2$이다. 마찬가지 방법으로 A_3와 D_3는 선분 $\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2$를 $3:2:3$으로 내분하는 점이고, 각각 A_3와 B_3에서 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$에 내린 수선의 발을 각각 B_3와 C_3라 하자. 이때 $\overline{\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3} = \dfrac{1}{2}$이고,

$S_3 = 6+2+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$이다. 이와 같은 방법으로 $n=1$일 때부터 S_n의 값을 나열해 보면

$S_1 = 2+2+1+1$

$S_2 = (2+2+1+1)+(1+1)$

$S_3 = (2+2+1+1)+(1+1)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$

$S_4 = (2+2+1+1)+(1+1)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)$

$S_5 = (2+2+1+1)+(1+1)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}\right)$

$\cdots$

이므로

$$S_n = 6+2\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 6+2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 10-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{10-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}\right\} = 10$

[문항카드 11]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 6	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II
	핵심개념 및 용어	롤의 정리, 미분
예상 소요 시간	12분	

2. 문항 및 제시문

6. 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속이고 열린구간 $(0,1)$에서 미분가능하며

$$f(0)=0,\ f(1)=2,\ g(1)=2$$

를 만족한다. 이때 $f'(c)=g(c)+cg'(c)$를 만족하는 실수 c가 열린구간 $(0,1)$에 존재함을 논술하시오. [45점]

3. 출제 의도

롤의 정리를 활용하여 주어진 방정식을 만족하는 근의 존재성을 논술할 수 있는가를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
6	[12수학II02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	홍성복 외 10인	지학사	2018	62-69, 78-82
	수학 II	박교식 외 19인	동아출판	2018	62-67, 77-80

5. 문항 해설

닫힌구간에서 연속이고 열린구간에서 미분가능한 두 함수와 구간의 끝점에서의 함숫값이 주어졌을 때 두 함수에 의해서 생성되는 방정식을 롤의 정리를 활용하여 해결한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
-	$h(x)=f(x)-xg(x)$ h는 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속이고 열린구간 $(0,1)$에서 미분가능한 함수 서술	25점
	$h(0)=h(1)=0$ 롤의 정리에 의해서 $h'(c)=0$을 만족하는 c가 열린구간에 존재 서술	10점
	$h'(c)=f'(c)-cg'(c)-g(c)=0$ 즉 $f'(c)=cg'(c)+g(c)$를 만족하는 실수 c가 열린구간 $(0,1)$에 존재 서술	10점

7. 예시 답안

$h(x)=f(x)-xg(x)$로 놓으면 함수 h는 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속이고 열린구간 $(0,1)$에서 미분가능한 함수이고, $h(0)=h(1)=0$을 만족한다. 롤의 정리에 의해서 $h'(c)=0$을 만족하는 c가 열린구간 $(0,1)$에 존재한다. 그러므로 $h'(c)=f'(c)-cg'(c)-g(c)=0$, 즉 $f'(c)=cg'(c)+g(c)$를 만족하는 실수 c가 열린구간 $(0,1)$에 존재한다.

[문항카드 12]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 7	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학II
	핵심개념 및 용어	합성함수, 역함수, 함수의 증가와 감소
예상 소요 시간	17분	

2. 문항 및 제시문

7. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=e^{2x}-e^{x}+x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 함수 $h(x)=x^2+3x+2$에 대하여 방정식

$$(h \circ g)(x)=2x\,g(x)-x^2+3x$$

가 닫힌구간 $[0,2]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, $m+M$의 값을 구하시오. [50점]

3. 출제 의도

1. 합성함수와 역함수의 의미를 알고 있는지 확인한다.
2. 함수의 증가와 감소를 이해하고 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
7	[10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. [10수학04-03] 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다. [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외 9인	천재교육	2018	229-236
	수학 II	권오남 외 14인	교학사	2018	88-95

5. 문항 해설

합성함수와 역함수의 성질을 이용하여 두 함수의 교점이 주어진 구간에 있을 조건을 찾는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
–	$f(x-1)=x$가 $0 \le x \le 2$에서 실근을 가져야 한다는 것 유도	10점
	위에서 $-e^2+e+1 \le k \le \dfrac{5}{4}$ 유도	10점
	$f(x-2)=x$가 $0 \le x \le 2$에서 실근을 가져야 한다는 것 유도	10점
	위에서 $2 \le k \le \dfrac{9}{4}$ 유도	10점
	$m+M=-e^2+e+\dfrac{13}{4}$ 도출	10점

7. 예시 답안

$\{g(x)\}^2+3g(x)+2=2xg(x)-x^2+3x$이므로 $\{g(x)-(x-1)\}\{g(x)-(x-2)\}=0$
따라서 $g(x)=x-1$ 또는 $g(x)=x-2$이다.

ⅰ) 방정식 $g(x)=x-1$, 즉 $f(x-1)=x$가 $0 \le x \le 2$에서 실근을 가져야 한다.

$e^{2(x-1)}-e^{x-1}+x-1+k=x \Rightarrow k=-t^2+t+1=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$ (단, $t=e^{x-1}$)

$0 \le x \le 2$이므로 $\dfrac{1}{e} \le t \le e$이고 $-e^2+e+1 \le k \le \dfrac{5}{4}$.

ⅱ) 방정식 $g(x)=x-2$, 즉 $f(x-2)=x$가 $0 \le x \le 2$에서 실근을 가져야 한다.

$e^{2(x-2)}-e^{x-2}+x-2+k=x \Rightarrow k=-t^2+t+2=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$ (단, $t=e^{x-2}$)

$0 \le x \le 2$이므로, $\dfrac{1}{e^2} \le t \le 1$이고 $2 \le k \le \dfrac{9}{4}$

최솟값 $m=-e^2+e+1$이고 최댓값 $M=\dfrac{9}{4}$이므로 $m+M=-e^2+e+\dfrac{13}{4}$

[문항카드 13]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 8	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	치환적분, 도형의 넓이
예상 소요 시간	17분	

2. 문항 및 제시문

8. 음이 아닌 실수에서 정의된 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x \geq 0$에서 연속인 증가함수이고, $x > 0$에서 미분가능하다.

(나) 함수 $f(x)$는 원점 O와 점 $(1, 1)$을 지난다.

(다) 양수 t에 대하여 원점 O와 세 점

$$\mathrm{A}(0, f(t)),\ \mathrm{B}(t, f(t)),\ \mathrm{C}(t, 0)$$

으로 만들어진 사각형 OABC의 넓이를 $A(t)$라 할 때,

$$\int_0^t f(x)dx = \frac{1}{4}A(t)$$

를 만족한다.

$x \geq \frac{1}{8}$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$와 두 직선 $y=-x+10$, $y=-x+\frac{5}{8}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. [50점]

3. 출제 의도

1. 치환적분법을 이해하고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.
2. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
8	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	이준열 외 7인	천재교육	2018	147-153, 168-171
	미적분	류희찬 외 9인	천재교과서	2019	164-169, 183-185

5. 문항 해설

치환적분법을 통해 주어진 함수를 찾고, 그 함수를 포함한 여러 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
-	$\frac{3}{t}=\frac{f'(t)}{f(t)}$ 유도	10점
	$f(t)=t^3$ 유도	15점
	도형의 넓이 $=2\left(\triangle\mathrm{OAB}넓이+\square\mathrm{ABCD}넓이-\triangle\mathrm{OA'B'}넓이-\square\mathrm{A'B'C'D'}넓이-\int_{1/2}^{1}f(t)dt-\int_{1}^{8}f^{-1}(t)dt\right)$ 유도	15점
	도형의 넓이 $=\frac{2925}{128}=22+\frac{109}{128}$ 도출	10점

7. 예시 답안

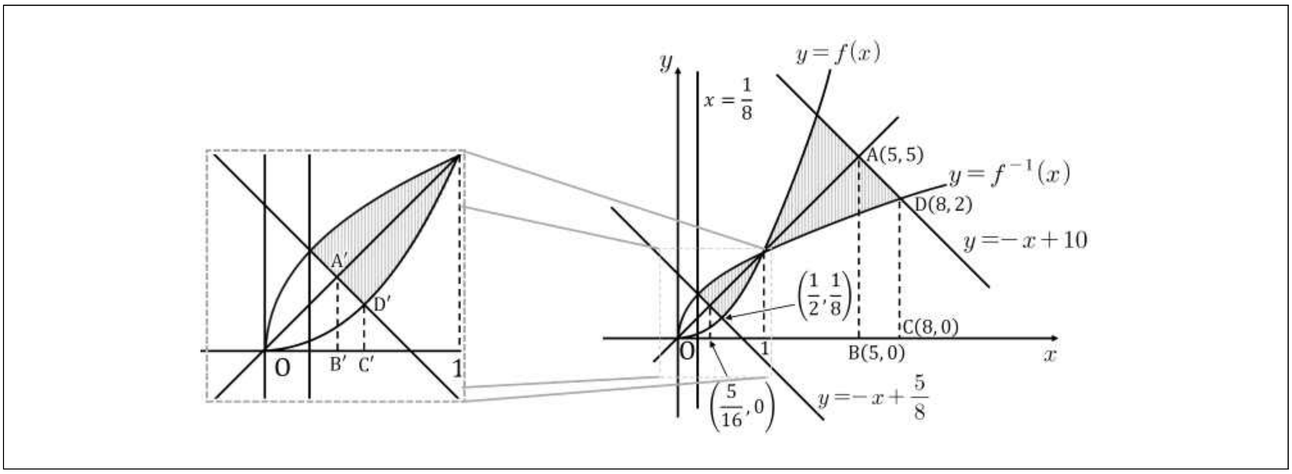
$A(t)=tf(t)$이므로 $\int_0^t f(x)dx=\frac{1}{4}tf(t)$이다.

이때 양변을 미분하여 정리하면 $\frac{3}{t}=\frac{f'(t)}{f(t)}$을 얻고, $f(1)=1$이므로 치환적분법에 의하여 $f(t)=t^3$을 얻는다. 따라서 $f^{-1}(t)=t^{\frac{1}{3}}$이다. 그러므로

도형의 넓이

$$=2\left(\triangle\mathrm{OAB}넓이+\square\mathrm{ABCD}넓이-\triangle\mathrm{OA'B'}넓이-\square\mathrm{A'B'C'D'}넓이-\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(t)dt-\int_{1}^{8}f^{-1}(t)dt\right)$$

$$=\frac{2925}{128}=22+\frac{109}{128}$$



A′
D′
O
B′
C′
1
y
$y=f(x)$
$x=\frac{1}{8}$
A(5, 5)
$y=f^{-1}(x)$
D(8, 2)
$y=-x+10$
$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$
C(8, 0)
O
1
B(5, 0)
x
$y=-x+\frac{5}{8}$
$\left(\frac{5}{16},0\right)$

[문항카드 14]

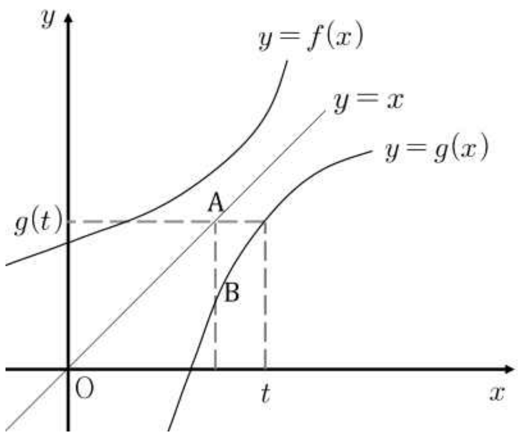
1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(약학과) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분, 수학, 기하
	핵심개념 및 용어	역함수의 미분, 접선의 방정식, 점과 직선 사이의 거리, 포물선, 타원, 쌍곡선
예상 소요 시간	20분	

2. 문항 및 제시문

1. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

<가> 함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $f(x)=x^3+x+1$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 두 점 $(0, g(t))$와 $(t, g(t))$를 잇는 선분과 직선 $y=x$의 교점을 A라고 하고 점 A를 지나고 y축과 평행인 직선과 곡선 $y=g(x)$의 교점을 B라고 한다.



<나> 점 P는 포물선 $sy^2=-x+3-\frac{4}{s}-\sqrt{17}$ 위를 움직인다. (단, s는 양의 실수이다)

[1-1] 제시문 <가>에서 점 B의 y좌표를 $h(t)$라고 할 때, 곡선 $y=h(x)$의 $x=3$에서의 접선의 방정식을 구하시오. [35점]

[1-2] 제시문 <나>의 점 P 중에서 문제 [1-1]의 접선과 가장 가까운 점 P_0을 찾고, 이때 점 P_0과 접선 사이의 거리 d를 구하시오. [20점]

[1-3] 문제 [1-2]의 점 P_0이 중심이고 문제 [1-1]의 접선에 접하는 원 위를 움직이는 점 C와

문제 [1-2]의 점 P_0을 x축에 대하여 대칭이동한 점 D에 대하여, 선분 CD의 수직이등분선과 직선 P_0C의 교점을 Q라 하자. 이때 점 Q가 그리는 도형의 방정식에 대하여 논술하시오. (단, 점 C와 점 D가 일치하는 경우는 제외한다) [35점]

3. 출제 의도

[1-1] 역함수의 미분법을 이용할 수 있는지 확인한다. 접선의 방정식을 구할 수 있는지 확인한다.
[1-2] 포물선의 방정식을 이용해 접선의 방정식을 구할 수 있는지 확인한다. 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있는지 확인한다.
[1-3] 타원의 뜻을 알고 있는지 확인한다. 쌍곡선의 뜻을 알고 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
1-1	[10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다. [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.
1-2	[10수학02-05]점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. [12기하01-04]이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.
1-3	[12기하01-02]타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. [12기하01-03]쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학	류희찬 외 10인	천재교과서	2021	142-144
	고등학교 수학	권오남 외 14인	교학사	2021	124-126
	고등학교 기하	고성은 외 5인	좋은책신사고	2021	11-28
	고등학교 기하	홍성복 외 10인	지학사	2021	10-29
	고등학교 미적분	이준열 외 7인	천재교육	2021	99-100
	고등학교 미적분	류희찬 외 9인	천재교과서	2021	116-118

5. 문항 해설

[1-1] 역함수의 개념을 파악하고 이를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
[1-2] 주어진 포물선 위의 점과 포물선과 만나지 않는 한 직선 사이의 최소거리는 해당 직선과 평행한 포물선의 접선 위의 점에서의 거리라는 것을 이용하여 정확한 계산을 할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

[1-3] 주어진 조건으로부터 점 Q의 자취가 범위에 따라서 타원, 원, 쌍곡선의 형태를 가지게 됨을 유도할 수 있는지 평가하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	$h(x)=g(g(x))$임을 확인	5점
	$h'(x)=g'(g(x))g'(x)$임을 확인	5점
	$g(3)=1$을 도출	5점
	$g(1)=0$을 도출	5점
	$h(3)=0$을 도출	5점
	$h'(3)=\frac{1}{4}$를 도출	5점
	접선이 $y=\frac{1}{4}(y-3)$임을 도출	5점
1-2	최소거리가 접선의 기울기가 $\frac{1}{4}$임을 확인	5점
	점 P_0의 좌표가 $\left(3-\frac{8}{s}-\sqrt{17},\ -\frac{2}{s}\right)$임을 도출	5점
	점과 직선 사이의 거리 구하는 공식 $\frac{\lvert ax+by+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$을 서술	5점
	$d=1$임을 도출	5점
1-3	$\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{D}}=\frac{4}{\mathrm{s}}$임을 확인	5점
	삼각형 QCD가 이등변삼각형이 됨을 확인	5점
	$s<4$일 때, $\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}}-\overline{\mathrm{DQ}}=1$임을 확인	5점
	$s<4$일 때, 쌍곡선 $\frac{(sx-3s+8+s\sqrt{17})^2}{16-s^2}-y^2=-\frac{1}{4}$임을 도출	5점
	$s=4$일 때, $\mathrm{Q}=\mathrm{P}_0$임을 확인	5점
	$s>4$일 때, $\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}}+\overline{\mathrm{DQ}}=1$임을 확인	5점
	$s>4$일 때, 타원 $\frac{(sx-3s+8-s\sqrt{17})^2}{s^2-16}+y^2=\frac{1}{4}$임을 도출	5점

7. 예시 답안

1-1

문제에서 주어진 조건에 따라 B의 좌표는 $(g(x), g(g(x)))$가 되므로 $h(x)=g(g(x))$가 된다. 따라서 구하고자 하는 접선의 방정식은 점 $(3, h(3))$을 지나고 기울기가 $h'(3)$인 직선의 방정식인

$$y=h'(3)(x-3)+h(3)$$

이 된다. 이 때, 합성함수의 미분법에 의해 $h'(x)=g'(g(x))g'(x)$로 구할 수 있다. 한편, $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 역함수의 미분법에 의하여

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$

가 된다. 먼저 $g(3)=p$이라고 가정하면

$$f(p)=3$$
$$p^3+p+1=3$$
$$(p-1)(p^2+p+2)=0$$

이므로 $p=1$, 즉 $g(3)=1$이 된다. 다음으로 $g(1)=q$이라고 가정하면

$$f(q)=1$$
$$q^3+q+1=1$$
$$q(q^2+1)=0$$

이므로 $q=0$, 즉 $g(1)=0$이 된다. 따라서

$h(3)=g(g(3))=g(1)=0$

$h'(3)=g'(g(3))g'(3)=g'(1)g'(3)=\dfrac{1}{f'(g(1))}\times\dfrac{1}{f'(g(3))}$

$=\dfrac{1}{f'(0)}\times\dfrac{1}{f'(1)}=1\times\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$

이므로 구하고자 하는 방정식은

$$y=\frac{1}{4}(x-3)$$

이 된다.

1-2

포물선의 접선 중 문제 [1-1]의 접선과 기울기가 같은 접선을 구하여, 이 때 포물선과 접선의 교점과 문제 [1-1]의 접선과의 거리를 구하면 된다. 포물선의 접선의 기울기를 $m=\dfrac{1}{4}$, 접하는 점을 (x_1, y_1)이라 고 하면

$$2sy_1m=-1,\ y_1=-\frac{1}{2sm}=-\frac{2}{s}$$

$$x_1=-sy_1^2+3-\frac{4}{s}-\sqrt{17}=3-\frac{8}{s}-\sqrt{17}$$

이 된다. 문제 [1-1]의 접선을 다시 적으면 $x-4y-3=0$이 되므로 점과 직선 사이의 거리의 공식을 이용하면 거리의 최솟값 d는

$$d=\frac{\left|3-\frac{8}{s}-\sqrt{17}-4\left(-\frac{2}{s}\right)-3\right|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}=1$$

이 된다.

1-3

점 P_0을 중심으로 하는 원의 반지름은 $d=1$이 된다. 또한, 점 D의 좌표는 포물선 위의 점

$\left(3-\frac{8}{s}-\sqrt{17}, \frac{2}{s}\right)$이 되므로 $\overline{\mathrm{P_0D}}=\frac{4}{\mathrm{s}}$가 된다.

1) $s<4$일 때

포물선 위의 점 D는 주어진 원 외부에 위치하며, 삼각형 QCD는 이등변삼각형이 되므로 $\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{DQ}}=\mathrm{k}$라고 하면

$$\overline{\mathrm{P_0Q}}=\overline{\mathrm{P_0C}}+\overline{\mathrm{CQ}}=1+k$$

이다. 따라서 $\left|\overline{\mathrm{P_0Q}}-\overline{\mathrm{DQ}}\right|=1$로 일정하므로 점 Q가 그리는 도형은 점 $\mathrm{P_0}$과 점 D로부터의 거리의 차가 1인 쌍곡선이 된다. 따라서 쌍곡선의 방정식을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\left(x-3+\frac{8}{s}+\sqrt{17}\right)^2}{\frac{4}{s^2}-\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=-1$$

$$\frac{(sx-3s+8+s\sqrt{17})^2}{16-s^2}-y^2=-\frac{1}{4}$$

2) $s=4$일 때

포물선 위의 점 D는 주어진 원 위에 위치하며, 1)과 마찬가지로 삼각형 QCD은 이등변삼각형이 된다. 또한, CD의 수직이등분선이 항상 원의 중심 $\mathrm{P_0}$을 지나므로 $\mathrm{Q}=\mathrm{P_0}$가 된다.

3) $s>4$일 때

포물선 위의 점 D는 주어진 원 내부에 위치하며, 1)과 마찬가지로 삼각형 QCD은 이등변삼각형이 되므로 $\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{DQ}}=\mathrm{k}$라고 하면

$$\overline{\mathrm{P_0Q}}=\overline{\mathrm{P_0C}}-\overline{\mathrm{CQ}}=1-k$$

이다. 따라서 $\overline{\mathrm{P_0Q}}+\overline{\mathrm{DQ}}=1$로 일정하므로 점 Q가 그리는 도형은 점 $\mathrm{P_0}$과 점 D로부터의 거리의 합이 1인 타원이 된다. 따라서 타원의 방정식을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\left(x-3+\frac{8}{s}+\sqrt{17}\right)^2}{\frac{1}{4}-\frac{4}{s^2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$$

$$\frac{(sx-3s+8+s\sqrt{17})^2}{s^2-16}+y^2=\frac{1}{4}$$

[문항카드 15]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(약학과) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	지수함수의 미분, 함수의 극대와 극소, 함수의 그래프, 지수함수의 적분, 도형의 넓이, 함수의 곱의 미분
예상 소요 시간	25분	

2. 문항 및 제시문

2. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

양의 상수 a에 대하여 다음 조건이 만족된다.

(1) 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=a$$

이다.

(2) 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$는 $x=-a$와 $x=a$에서 극댓값을 갖고 두 극댓값은 모두 양수이다.

(3) 함수

$$h(x)=\frac{1}{2e^2}x$$

에 대하여 방정식 $(g'\circ h\circ g)(x)=0$은 3개 이상의 서로 다른 실근을 갖고 $x=-a$가 그 실근 중 하나이다.

[2-1] 제시문을 만족하는 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 그리고 제시문의 a의 값을 구하시오. [70점]

[2-2] 문제 [2-1]의 a에 대하여 곡선 $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $y=g(-a)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. [20점]

3. 출제 의도

[2-1] 지수함수를 미분할 수 있는지 확인한다.
함수의 곱을 미분할 수 있는지 확인한다.
함수의 극대와 극소를 판정할 수 있고 설명할 수 있는지 확인한다.

함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있는지 확인한다. [2-2] 지수함수의 적분을 이해하고 이를 활용할 수 있는지 확인한다. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
2-1	[12수학II02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적II02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적II02-10] 이계도함수를 구할 수 있다. [12미적II02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
2-2	[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학II	권오남 외 14인	교학사	2021	88-99
	고등학교 수학II	이준열 외 9인	천재교육	2021	65-69 132-139
	고등학교 미적분	김원경 외 14인	비상교육	2020	123
	고등학교 미적분	권오남 외 14인	교학사	2021	60-63

5. 문항 해설

[2-1] 함수의 극대와 극소에 대하여 주어진 조건을 적용하여 상수값을 찾고 이를 이용하여 함수의 그래프의 개형을 그리는 문제이다.

[2-2] 다항함수와 지수함수의 곱을 적분함으로써 여러 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 문제이다.

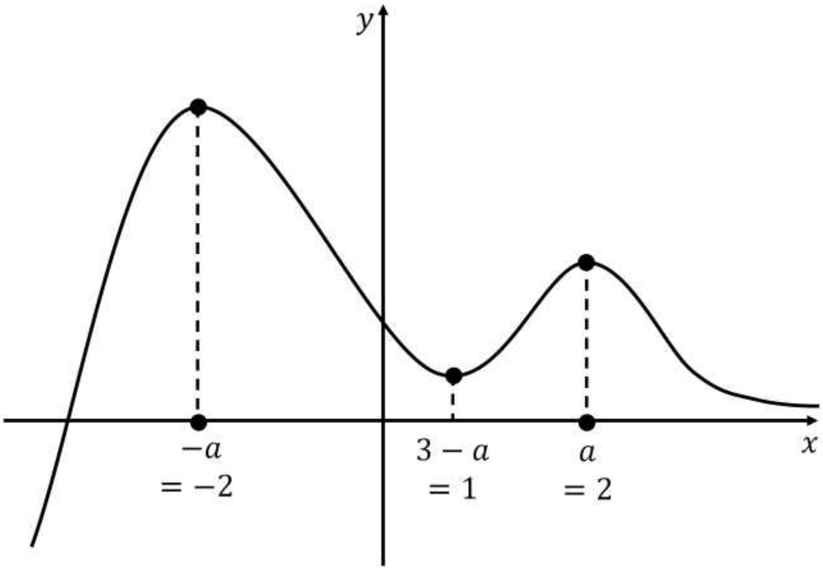
6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	$x=-a,\ x=a,\ x=3-a$에서 $g'(x)=0$이 됨을 증명	10점
	$g(-a)>g(a)$임을 보이고 그래프에 표시	10점
	$g(-a)=2e^2(3-a)$이면 서로 다른 근이 3개가 안 됨을 증명	15점
	$g(-a)=2e^2a$로부터 $a=2$ 유도	10점

	$g(3-a)>0$을 보이고 극솟값이 1사분면에 있음을 그래프에 표시	10점
	$\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$를 그래프에 표시	5점
	$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$을 그래프에 표시	5점
	$x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$, $x=4$일 때 변곡점이 발생함을 유도	5점
2-2	$\int_{-2}^{2} g(x)\,dx=-62e^{-2}+6e^{2}$ 유도	10점
	넓이 $62e^{-2}+10e^{2}$를 정확히 유도	10점

7. 예시 답안

2-1	$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 할 수 있으므로 $g(x)=(x^3+ax^2+bx+c)e^{-x}$ $g'(a)-g'(-a)=2a(a^2+b-2a)=0$에서 $b=-a^2+2a$이고 b를 $g'(a)+g'(-a)=0$에 대입하면 $c=-a^3+2a^2+2a$가 되어 $g(x)=(x^3+ax^2+(-a^2+2a)x+(-a^3+2a^2+2a))e^{-x}$ 이고 $g'(x)=-(x-a)(x+a)(x+a-3)e^{-x}$이다. 따라서 $x=-a, a, 3-a$에서 $g'(x)=0$이고 $g'(x)$는 $x=3-a$에서 극솟값을 가지므로 $-a<3-a<a$ 에서 $a>\frac{3}{2}$. $g(a)=(4a^2+2a)e^{-a}$ 이고 $g(-a)=2ae^{a}$이므로 $\frac{g(-a)}{g(a)}=\frac{e^{2a}}{2a+1}$. $h(x)=e^{2x}-2x-1$라면 $x\ge\frac{1}{2}$에서 $h'(x)>0$이고 $h\left(\frac{1}{2}\right)>0$이므로 $a>\frac{3}{2}$에서 $g(-a)>g(a)$이고 함수 $g(x)$는 $-a$에서 최댓값을 갖는다 (즉 $-\infty<g(x)\le g(-a)$이다) $g'(h(g(x)))=0$의 실근의 개수가 3개 이상이려면, $g(x)=-2e^2a$, $g(x)=2e^2a$, $g(x)=2e^2(3-a)$의 서로 다른 실근의 개수의 합이 3 이상이어야 한다. $g(-a)>0$이므로 $x=-a$가 한 근이려면 $g(-a)=2e^2a$ 또는 $g(-a)=2e^2(3-a)$. $g(-a)=2e^2(3-a)$이면 모든 x에서 $g(x)\le 2e^2(3-a)<2e^2a$이므로 $g(x)=2e^2a$가 실근을 갖지 않고 $g(x)=-2e^2a$는 1개의 실근을 갖기 때문에 $g'(h(g(x)))=0$는 2개의 근만 갖는다. 따라서 $g(-a)=2e^2a$이고 $2ae^a=2e^2a$이므로 $a=2$. $g(3-a)=(27-10a)e^{a-3}$이고 $a=2$이므로 $3-a>0$이고 $g(3-a)>0$ $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ $x\ge -a$에서 $g(x)\ge 0$이고 e^{-x}로 인해 $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ (즉 x축이 점근선) $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$, $x=4$일 때 변곡점 발생 $g(x)$의 변곡점의 x좌표는 $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 4

	따라서 그래프의 개형은 다음과 같다. 
2–2	$\int_{-2}^{2} g(x)\,dx = \int_{-2}^{2}(x^3+2x^2+4)e^{-x}\,dx = -62e^{-2}+6e^2$ 문제 [2–1]에서 $a=2$ 이므로 $(-a,0)$, $(a,0)$, $(a, g(-a))$, $(-a, g(-a))$로 만든 사각형의 넓이$=2a\,g(-a)=16e^2$ $x \geq -a$에서 $g(x) \geq 0$이므로 넓이$=16e^2-(-62e^{-2}+6e^2)=62e^{-2}+10e^2$.

[문항카드 16]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(약학과) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분, 수학II, 수학
	핵심개념 및 용어	접선의 방정식, 연속성, 미분가능성, 감소함수, 역함수, 직선의 방정식, 교점, 극한, 접점, 접선, 매개변수
예상 소요 시간	25분	

2. 문항 및 제시문

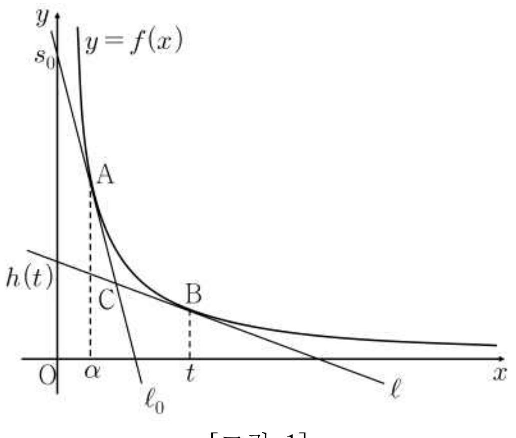
3. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

<가> 양의 실수에서 정의되고 연속인 이계도함수를 갖는 함수 $y=f(x)$에 대하여 $f''(x)>0$ 이고, [그림 1]과 같이 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$와 $\mathrm{B}(t, f(t))$에서 접선을 그었을 때 두 접선 ℓ_0과 ℓ이 점 C에서 만난다. 접선 ℓ_0의 y절편을 s_0, 그리고 접선 ℓ의 y절편을 $h(t)$로 한다.

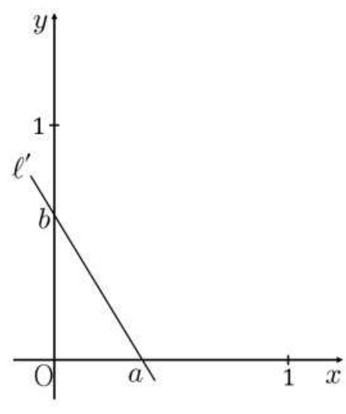
<나> [그림 2]와 같이 직선 ℓ'의 x절편과 y절편을 각각 a와 b라 하자. 이때 a와 b는 다음을 만족한다.

$$0<a<1,\ 0<b<1,\ a+b=1$$

<다> 어떤 구간에서 정의된 연속함수가 감소(또는 증가)하면 역함수가 존재하고 그 역함수도 연속함수가 된다.



[그림 1]



[그림 2]

[3-1] 제시문 <가>에서 주어진 함수 $h(t)$의 연속성, 미분가능성, 도함수의 성질에 관하여 논술하고, 이를 이용하여 함수 $h(t)$의 역함수 $h^{-1}(t)$의 존재성과 극한값 $\lim_{s\to s_0} h^{-1}(s)$에 관하여

논술하시오. [30점]

[3-2] 두 실수 c, d(단, $0 < c < d < 1$)에 대하여 제시문 <나>의 직선과 같은 성질을 갖고 x절편이 각각 c와 d인 두 직선의 방정식과 그 교점을 구하시오. [10점]

[3-3] 함수 $y = g(x)$가 0과 1 사이에서 연속인 이계도함수를 갖고 $g''(x) > 0$을 만족한다. 곡선 $y = g(x)\,(0 < x < 1)$ 위 모든 점에서의 접선이 제시문 <나>의 직선과 같은 성질을 가질 때, 함수 $y = g(x)\,(0 < x < 1)$를 구하시오. [30점]

[3-4] 문제 [3-3]의 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속일 때 $x = 0$과 $x = 1$에서의 함숫값을 찾고 두 곡선 $y = g(x)$, $y = 4x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [20점]

3. 출제 의도

[3-1] 기본적인 미적분학의 지식을 활용해서 접선의 절편의 극한과 접점의 극한 사이의 관계를 논리적으로 설명할 수 있는가를 평가한다.

[3-2] 직선의 절편에 관한 조건이 주어졌을 때 직선의 방정식을 세우고 두 직선의 교점을 구할 수 있는가를 평가한다.

[3-3] 접선의 y절편을 활용하여 접점을 논리적으로 유추해낼 수 있는가를 평가한다.

[3-4] 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 적분을 이용하여 구할 수 있는가를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
3-1	[12수학II02-01] 미분계수의 기하적 의미를 이해한다. [12수학II02-02] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다. [12수학II02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
3-2	[10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다.
3-3	[12수학II02-01] 미분계수의 기하적 의미를 이해한다. [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.
3-4	[10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 미적분	이준열 외 7인	천재교육	2021	82–106
	고등학교 미적분	고성은 외 5인	좋은책신사고	2020	76–96
	고등학교 수학	이준열 외 9인	천재교육	2021	123–127
	고등학교 수학	배종숙 외 6인	금성출판사	2021	110–137
	고등학교 수학II	박교식 외 19인	동아출판	2020	53–96
	고등학교 수학II	권오남 외 14인	교학사	2021	12–62

5. 문항 해설

[3-1] 접선의 방정식을 세우고 이를 통해서 접선의 y 절편을 구한다. 이계도함수의 성질을 활용하여 접점의 x 좌표와 접선의 y 절편 사이의 관계에 의해서 주어진 함수의 역함수의 존재성과 연속성을 파악하고 그 극한의 개념을 이해한다.

[3-2] 기본적인 직선의 방정식을 세우고 직선 사이의 교점을 구한다.

[3-3] 절편의 극한을 통해서 교점의 극한을 이끌어내고 이를 통해서 곡선 위의 점에 대한 매개변수 방정식을 얻는다. 매개변수 방정식을 풀어서 함수의 형태를 찾아낸다.

[3-4] 문제 [3-3]의 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0,\,1]$에서 연속일 때 $x=0$과 $x=1$에서의 함숫값을 찾고 두 곡선 $y=g(x)$, $y=4x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	점 $x=t$에서 곡선 $y=f(x)$의 접선의 방정식: $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 도출	6점
	위 접선의 y 절편 $h(t)$: $h(t)=-tf'(t)+f(t)$ 도출	6점
	‘함수 $h(t)$는 연속함수이고, 미분가능하며 도함수가 연속이라는 사실을 알 수 있다.’ 서술	6점
	‘$h'(t)=-tf''(t)<0$이므로 함수 $h(t)$는 감소함수이다.’ 서술	6점
	제시문 <다>를 활용하여 ‘함수 $h(t)$의 역함수가 존재하고’ 에 의해서 함수 $h^{-1}(s)$도 연속임을 서술	6점
3-2	직선의 방정식: $\dfrac{x}{c}+\dfrac{y}{1-c}=1,\quad \dfrac{x}{d}+\dfrac{y}{1-d}=1\quad (0<c<d<1)$ 서술	5점
	교점: $x=cd,\quad y=(1-c)(1-d)=1-(c+d)+cd$ 서술	5점
3-3	문제 [3-2]에서 x 절편이 d인 직선의 y 절편은 $1-d$인데 극한 $\lim\limits_{d\to c}$ 에 의해서 $1-c$ 즉, x 절편이 c인 직선의 y 절편으로 수렴함을 서술	6점

	문제 [3-1]에 의해서 y 절편의 수렴은 접점의 수렴을 의미함을 서술	6점
	제시문 ⟨가⟩의 [그림 1]에서와 같이 두 접선의 교점은 접점 사이에 놓여있어서 극한 $\lim\limits_{d \to c}$ 에 의해서 교점은 x 절편이 c 인 접선의 접점으로 수렴함을 서술	6점
	실제 x 절편이 c 인 접선의 접점은 문제 [3-2]의 교점에 극한 $\lim\limits_{d \to c}$ 를 취하면 다음을 얻는다. $x = c^2,\ \ y = 1 - 2c + c^2\ \ (0 < c < 1)$ 서술	6점
	$g(x) = 1 - 2\sqrt{x} + x$ 이다. 도출	6점
3-4	$x = 0$에서의 함숫값은 1, $x = 1$에서의 함숫값은 0 서술	5점
	$4x^2 = 1 - 2\sqrt{x} + x$ 도출	5점
	$X = \sqrt{x}$ 라 놓으면 $4X^4 - X^2 + 2X - 1 = (2X-1)(X+1)(2X^2 - X + 1) = 0 \Rightarrow X = \frac{1}{2}\ \ (\because X > 0)$ 따라서 $x = \frac{1}{4}$ 도출	5점
	두 곡선 $y = g(x)$, $y = 4x^2$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 $\int_0^{\frac{1}{4}} 4x^2\,dx + \int_{\frac{1}{4}}^{1} (1 - 2\sqrt{x} + x)\,dx = \frac{7}{96}$ 도출	5점

7. 예시 답안

3-1	점 $x = t$에서 곡선 $y = f(x)$의 접선의 방정식은 다음과 같다. $y = f'(t)(x - t) + f(t)$ 위 접선의 y 절편 $h(t)$를 구하면 다음과 같다. $h(t) = -tf'(t) + f(t)$ 위로부터 함수 $h(t)$는 연속함수이고, 미분가능하며 도함수가 연속이라는 사실을 알 수 있다. 뿐만 아니라 $h'(t) = -tf''(t) < 0$이므로 함수 $h(t)$는 감소함수이다. 따라서 함수 $h(t)$의 역함수가 존재하고 제시문 ⟨다⟩에 의해서 함수 $h^{-1}(s)$도 연속임을 알 수 있다. 함수 $h^{-1}(s)$가 연속이므로 $\lim\limits_{s \to s_0} h^{-1}(s) = h^{-1}(s_0) = \alpha$ 가 된다.
3-2	$0 < c < d < 1$ 인 실수 c와 d에 대하여 직선 ℓ'과 같은 성질을 갖는 직선의 방정식은 각각 다음과 같다. $\frac{x}{c} + \frac{y}{1-c} = 1, \quad \frac{x}{d} + \frac{y}{1-d} = 1$ x, y에 관한 연립방정식을 풀면 다음과 같은 해를 얻는다. $x = cd, \quad y = (1-c)(1-d) = 1 - (c+d) + cd.$
3-3	문제 [3-2]에서 x 절편이 d인 직선의 y 절편은 $1 - d$인데 극한 $\lim\limits_{d \to c}$ 에 의해서 $1 - c$ 즉, x 절편이 c 인 직선의 y 절편으로 수렴한다. 문제 [3-1]에 의해서 y 절편의 수렴은 접점의 수렴을 의미한다. 제시문 ⟨가⟩의 [그림 1]에서

	와 같이 두 접선의 교점은 접점 사이에 놓여있다. 따라서 극한 $\lim_{d \to c}$ 에 의해서 교점은 x 절편이 c 인 접선의 접점으로 수렴한다. 이러한 방식으로 곡선 위의 점에 관한 매개변수 방정식을 얻을 수 있다. 실제 x 절편이 c 인 접선의 접점은 문제 [3-2]의 교점에 극한 $\lim_{d \to c}$ 를 취하면 다음을 얻는다. $$x = c^2,\ \ y = 1 - 2c + c^2\ \ (0 < c < 1)$$ 앞에서 설명했듯이 이 관계식이 함수 $g(x)$ 의 매개변수 방정식이다. 이 방정식을 풀어서 매개변수 c 를 없애면 x 와 y 사이의 관계식 $y = 1 - 2\sqrt{x} + x$ 얻을 수 있고 이것이 함수 $g(x)$가 된다. 따라서 $g(x) = 1 - 2\sqrt{x} + x$ $(0 < x < 1)$이다.
3-4	$x = 0$에서의 함숫값은 1이고 $x = 1$에서의 함숫값은 0이다. 먼저 두 그래프의 교점을 구하기 위한 방정식 $g(x) = h(x)$는 다음과 같다. $$4x^2 = 1 - 2\sqrt{x} + x$$ $X = \sqrt{x}$ 라 놓으면 다음을 얻는다. $$4X^4 - X^2 + 2X - 1 = (2X-1)(X+1)(2X^2 - X + 1) = 0 \Rightarrow X = \frac{1}{2}\ (\because X > 0)$$ 따라서 $x = \frac{1}{4}$ 이다. 두 곡선 $y = g(x)$, $y = 4x^2$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $$\int_0^{\frac{1}{4}} 4x^2\,dx + \int_{\frac{1}{4}}^{1} (1 - 2\sqrt{x} + x)\,dx = \frac{7}{96}$$

[문항카드 17]

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연계열(약학과) / 문제 4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>확률과 통계, 수학 II</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>확률변수, 확률분포, 이항분포</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">20분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

4. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

<가> 어느 공장에서 생산되는 제품 하나의 무게는 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서는 매일 15000개의 제품을 생산하고 제품 1개의 무게가 $m-2\sigma$ 이하이거나 $m+2\sigma$ 이상인 제품은 불량품으로 판정한다. (단, 무게의 단위는 kg 이다)

<나> <표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48

<다> 2, 4, 8이 각각 하나씩 적힌 3장의 카드가 있다. 각각의 카드를 선택할 확률은 $\mathrm{P}(Z \leq -1.5)$, $\mathrm{P}(-1.5 \leq Z \leq 2)$, $\mathrm{P}(Z \geq 2)$이다. 임의로 선택한 카드에서 나온 수를 a라 할 때, $f(x)=\log_8 x$, $g(x)=\log_a\left(\dfrac{x}{2}\right)$라 하자. (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다)

[4-1] 제시문 <가>의 공장에서 생산되는 제품 한 개의 무게를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(|X-m| \leq 6)=0.96$, $\mathrm{P}(X \geq 22)=0.84$일 때 m, σ를 구하시오. [15점]

[4-2] 제시문 <가>의 공장에서 하루에 생산되는 15000개의 제품 중에서 불량품의 개수가 n보다 클 확률이 0.02일 때, n을 구하시오. [25점]

[4-3] 1000일 중 제시문 <가>의 공장에서 하루에 생산되는 15000개의 제품 중에서 불량품의 개수가 문제 [4-2]의 n보다 크게 되는 날짜의 수에 대하여 논술하시오. [15점]

[4-4] x축에 평행한 직선 $y=t$와 제시문 <다>의 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점을 각각 P, Q라 할 때, $h(t)=\overline{\mathrm{PQ}}$이다. $t \geq 1$에서 함수 $h(t)$의 최솟값이 1 이상일 확률을 구하시오. [25점]

3. 출제 의도

[4-1] 정규분포에 따르는 확률변수의 확률을 이해하는지 확인한다. 표준정규분포표를 이해하는지 확인한다.

[4-2] 실생활 자료에서 확률분포를 이해하는지 확인한다. 이항분포와 정규분포의 관계를 이해하는지 확인한다.

[4-3] 실생활 자료에서 확률분포를 이해하는지 확인한다. 이항분포를 이해하는지 확인한다.

[4-4] 확률의 의미를 이해하고 있는지 확인한다. 정규분포의 뜻을 알고 그 성질을 이해하고 있는지 확인한다. 함수의 극대와 극소를 판정할 수 있고 설명할 수 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
4-1	[12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
4-2	[12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
4-3	[12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
4-4	[12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학II	홍성복 외 10인	지학사	2021	83-89
	고등학교 수학II	권오남 외 14인	교학사	2021	88-95
	확률과 통계	황선욱 외 9인	미래엔	2021	79-84
	확률과 통계	류희찬 외 9인	천재교과서	2020	93-112

5. 문항 해설

[4-1] 정규분포에 따르는 확률변수의 확률을 이해하고 표준정규분포표를 이용할 수 있는지를 평가하는 문제이다

[4-2] 실생활 자료에서 확률분포를 이해하는지를 평가하는 문제이다.

[4-3] 실생활 자료에서 확률분포를 이해하는지를 평가하는 문제이다.

[4-4] 주어진 구간에서 함수의 최솟값을 계산하고 이를 이용하여 확률을 계산하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
4-1	$\mathrm{P}\left(\frac{\lvert X-m\rvert}{\sigma} \le \frac{6}{\sigma}\right)=0.96$ 을 $\mathrm{P}\left(\lvert Z\rvert \le \frac{6}{\sigma}\right)=0.96$ 으로 전환	5점
	$\mathrm{P}(\lvert X-m\rvert \le 6)=0.96$ 조건을 이용하여 $\sigma=3$ 을 계산	5점
	$\mathrm{P}(X>22)=0.84$ 조건과 $\sigma=3$을 이용하여 $m=25$ 을 계산	5점
4-2	불량품이 나올확률 0.04를 계산	5점
	불량품의 개수를 확률변수 Y로 잡고 이항분포를 따른다고 도출	5점
	$B(15000,\ 0.04)$ 을 계산	5점
	Y가 $N(600,\ 24^2)$ 를 따른다는 것을 도출	5점
	$n=648$ 을 계산	5점
4-3	불량품이 n개 초과하는 날의 수를 확률변수 T로 설정	5점
	$\mathrm{E}(T)=20$을 계산	5점
	기댓값은 20일이라고 도출	5점
4-4	$a=2$일 때는 $h(t)$는 $t=1$일 때 최솟값 $h(1)=4$임을 유도	7점
	$a=4$일 때는 $h(t)$는 $t=1$일 때 최솟값 $h(1)=4$임을 유도	7점
	$a=8$일 때는 $h(t)$는 $t=1$일 때 최솟값 $h(1)=4$임을 유도	7점
	확률은 $\mathrm{P}(Z\le-1.5)+\mathrm{P}(Z\ge 2)=0.09$ 유도	4점

7. 예시 답안

4-1	1) $\mathrm{P}(\lvert X-m\rvert \le 6)=0.96$에 의해 $\mathrm{P}\left(\frac{\lvert X-m\rvert}{\sigma} \le \frac{6}{\sigma}\right)=0.96$이고 $\mathrm{P}\left(\lvert Z\rvert \le \frac{6}{\sigma}\right)=0.96$이다. $\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{6}{\sigma}\right)=0.48$이고 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.48$ 이므로 $\frac{6}{\sigma}=2$이다. $\therefore \sigma=3$ 2) $\mathrm{P}(X>22)=0.84$에 의해 $\mathrm{P}(Z>\frac{22-m}{3})=0.84$이다.

	$\mathrm{P}(Z>-1)=0.84$이므로 $\dfrac{22-m}{3}=-1$이다. $\therefore m=25$

4-2

$m=25$, $\sigma=3$이므로 X는 정규분포 $N(25,\, 3^2)$을 따른다. 불량품이 나올 확률을 계산하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X>31)+\mathrm{P}(X<19)&=\mathrm{P}\left(Z>\frac{31-25}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z<\frac{19-25}{3}\right)\\&=2\mathrm{P}(Z>2)\\&=2(0.5-0.48)\\&=0.04 \quad \text{-----------①}\end{aligned}$$

이다.

하루에 생산된 제품 15000개 중에서 불량품의 개수를 확률변수 Y라 하자.

①에 의하여 제품 각각의 불량품일 확률이 0.04이므로 Y는 이항분포 $B(15000,\, 0.04)$를 따른다. 따라서 Y의 평균과 표준편차는

$$\mathrm{E}(Y)=15000\times 0.04=600,\ \sigma(Y)=\sqrt{15000\times 0.04\times 0.96}=24$$

이다. 15000은 충분히 큰 수이므로 Y는 근사적으로 정규분포 $N(600,\, 24^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(Y>n)=0.02$인 n을 구하기 위해 $\mathrm{P}(Y>n)=\mathrm{P}\left(Z>\dfrac{n-600}{24}\right)$를 만족하는 n을 찾아야 하고, 표준정규분포표를 이용하면 $\mathrm{P}(Z>2)=0.02$이므로 $\dfrac{n-600}{24}=2$이다. 따라서 $n=648$이다.

4-3

1000일의 기간 중 불량품이 n개 초과하는 날의 수를 확률변수 T라 하자. 문제 [4-2]에 의하여 하루에 발생하는 불량품이 n을 초과하는 확률이 0.02 이므로 T는 이항분포 $\mathrm{B}(1000,\, 0.02)$를 따른다.

그러므로 $\mathrm{E}(T)=1000\times 0.02=20$이고 $\mathrm{V}(T)=1000\times 0.02\times 0.98=19.6$이므로 $4<\sigma(T)<5$이다.

1000일 중 불량품이 648개가 초과되는 날의 기댓값은 20일이다.

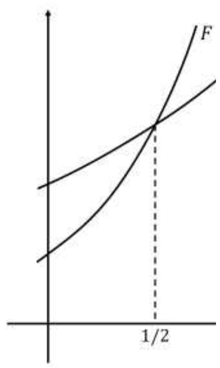
4-4

$f(x)$와 $g(x)$의 역함수를 고려하면 $h(t)$는 $x=t$가 $F(x)=8^x$와 $G(x)=2a^x$가 만나는 점 사이의 거리이다.

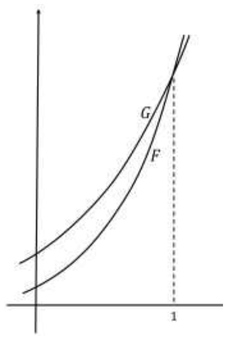
$a=2$일 때는 [그림 1]처럼 $h(t)$는 $t=1$일 때 최소이고 $h(1)=8-4=4$.

$a=4$일 때는 [그림 2]처럼 $h(t)$는 $t=1$일 때 최소이고 $h(1)=0$.

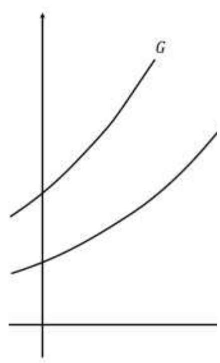
$a=8$일 때는 [그림 3]처럼 $h(t)$는 $t=1$일 때 최소이고 $h(1)=8$.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

따라서 확률은 $\mathrm{P}(Z\le -1.5)+\mathrm{P}(Z\ge 2)=(0.5-0.43)+(0.5-0.48)=0.09$.