

3. 자연 · 공학 계열 / 간호학과

【자연·공학/간호학과 1】

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연과학 · 공학계열 / 문항 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 II
	핵심개념 및 용어	함수의 극한, 도함수, 인수분해
예상 소요 시간	30분 / 100분	

2. 문항 및 제시문

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 문제(문제 1, 문제 2)에 답하십시오. (30점)

(ㄱ) 자연수 m, n, l 와 상수 a, b, c 에 대하여 두 함수 $f(x) = ax^{m+1} + bx^m$, $g(x) = x^n + cx^l$ 은 다음 조건을 만족시킨다. (단, $a \neq 0, b \neq 0, n > l$)

$$(가) \quad f(1) = 8, \quad g(1) = 2$$

$$(나) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(x)}{f(x)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x)}{f(x)} = \frac{1}{4}$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 극한값 L 는 다음과 같다.

$$L = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{f(x)}$$

문제 1. (20점) 제시문 (ㄱ)의 a, b, c 의 값을 각각 구하고 그 근거를 논술하십시오.

문제 2. (10점) 제시문 (ㄴ)의 L 의 값을 구하고 그 근거를 논술하십시오.

3. 출제 의도

- 가) 다양한 형태의 함수의 극한을 계산할 수 있는지 확인한다.
 나) 다항함수의 도함수를 구할 수 있는지 확인한다.
 다) 다항식의 인수분해를 하고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (ㄱ)	<p>[수학 III] - (1) 함수의 극한과 연속 - ㉠ 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [수학 III] - (2) 미분 - ㉡ 도함수 [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.</p>
제시문 (ㄴ)	<p>[수학 III] - (1) 함수의 극한과 연속 - ㉠ 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [수학] - (1) 문자와 식 - ㉢ 인수분해 [10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다.</p>
문제 1	<p>[수학 III] - (1) 함수의 극한과 연속 - ㉠ 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [수학 III] - (2) 미분 - ㉡ 도함수 [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.</p>
문제 2	<p>[수학 III] - (1) 함수의 극한과 연속 - ㉠ 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [수학] - (1) 문자와 식 - ㉢ 인수분해 [10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다.</p>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2021	31-43
	수학	황선욱 외	미래엔	2021	34-41
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2021	28-37
	수학 II	배종숙 외	금성출판사	2021	12-31
	수학 II	박교식	동아출판	2021	10-29
	수학 II	고성은 외	좋은책 신사고	2021	11-41
	수학 II	배종숙 외	금성출판사	2021	54-70
	수학 II	박교식	동아출판	2021	53-71
	수학 II	고성은 외	좋은책 신사고	2021	53-68

5. 문항 해설

- 1) 다양한 형태의 함수의 극한을 계산할 수 있는지 확인한다.
- 2) 다항함수의 도함수를 구할 수 있는지 확인한다.
- 3) 다항식의 인수분해를 하고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
논제 1	$g(1) = 2$ 에서 $c = 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1} + lx^{l-1}}{ax^{m+1} + bx^m} = 1$ 에서 $n = m + 2, a = m + 2$	10
	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{n+1} + x^{l+1}}{ax^{m+1} + bx^m} = \frac{1}{4}$ 에서 $l = m - 1, b = 4$ $f(1) = 8$ 에서 $m = 2$ 이고 $a = 4, b = 4$. 따라서, $a = 4, b = 4, c = 1$.	10
논제 2	$f(x) = 4x^3 + 4x^2$ 이고 $g(x) = x^4 + x$ 이므로 $L = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x}{4(x^3 + x^2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{4x(x+1)}$ $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{4x} = -\frac{3}{4}$	10

7. 예시 답안

논제 1.

$$g(1) = 2 \text{ 에서 } c = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1} + lx^{l-1}}{ax^{m+1} + bx^m} = 1 \text{ 에서 } n = m + 2, a = m + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{n+1} + x^{l+1}}{ax^{m+1} + bx^m} = \frac{1}{4} \text{ 에서 } l = m - 1, b = 4$$

$$f(1) = 8 \text{ 에서 } m = 2 \text{ 이고 } a = 4, b = 4.$$

$$\text{따라서, } a = 4, b = 4, c = 1.$$

논제 2.

$$f(x) = 4x^3 + 4x^2 \text{ 이고 } g(x) = x^4 + x \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x}{4(x^3 + x^2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{4x(x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{4x} = -\frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

【자연·공학/간호학과 2】

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	생활과학부 · 미디어기술콘텐츠학과 / 문항 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학
	핵심개념 및 용어	경우의 수, 조합
예상 소요 시간	30분 / 100분	

2. 문항 및 제시문

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 문제(문제 1, 문제 2)에 답하십시오. (30점)

(ㄱ) 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 점 A에 바둑돌이 놓여있다. 동전을 던져 앞면이 나오면 3, 뒷면이 나오면 2 만큼씩 정사각형의 둘레를 따라 시계방향으로 바둑돌을 옮기는 시행을 한다. 8회 시행 후 바둑돌이 점 A로 돌아오게 되는 경우의 수를 a 라고 하자.

(ㄴ) 한 변의 길이가 1인 정팔각형 ABCDEFGH의 점 A에 바둑돌이 놓여있다. 빨간 구슬, 노란 구슬, 파란 구슬이 한 개씩 들어있는 주머니에서 구슬을 한 개 꺼내 빨간 구슬이면 3, 노란 구슬이면 2, 파란 구슬이면 1 만큼씩 정팔각형의 둘레를 따라 시계방향으로 바둑돌을 옮기는 시행을 한다. 8회 시행 후 바둑돌이 점 A로 돌아오게 되는 경우의 수를 b 라고 하자. (단, 꺼낸 구슬은 다시 주머니에 넣는다.)

문제 1. (10점) 제시문 (ㄱ)의 a 의 값을 구하고 그 근거를 논술하십시오.

문제 2. (20점) 제시문 (ㄴ)의 b 의 값을 구하고 그 근거를 논술하십시오.

3. 출제 의도

가) 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.

나) 조합의 의미를 이해하고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (ㄱ)	[수학] - (5) 확률과 통계 - ① 경우의 수 [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.
제시문 (ㄴ)	[수학] - (5) 확률과 통계 - ① 경우의 수 [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.
문제 1	[수학] - (5) 확률과 통계 - ① 경우의 수 [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. [수학] - (5) 확률과 통계 - ② 순열과 조합 [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.
문제 2	[수학] - (5) 확률과 통계 - ① 경우의 수 [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. [수학] - (5) 확률과 통계 - ② 순열과 조합 [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2021	262-277
	수학	황선욱 외	미래엔	2021	261-275
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2021	249-261

5. 문항 해설

가) 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는지를 평가한다.

나) 조합의 수를 구할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 1	8회 동전을 던져 앞면이 나온 횟수를 m , 뒷면이 나온 횟수를 n 이라 하면 $m+n=8$ 이다. 이동거리는 $16 \leq 3m+2n \leq 24$ 이므로 다시 꼭짓점 A로 오기 위하여 $3m+2n$ 는 4의 배수 16, 20, 24 이다.	3
	따라서 (m, n) 은 (0,8), (4,4), (8,0) 이고 구하는 경우의 수 a 는 $a = {}_8C_0 + {}_8C_4 + {}_8C_8 = 72$ 이다.	7
문제 2	8회 주머니에서 구슬을 뽑아 빨간, 노란, 파란 구슬이 나오는 횟수를 각각	5

l, m, n 이라 하면 $l+m+n=8$ 이다. 이동거리는 $8 \leq 3l+2m+n \leq 24$ 이므로 다시 꼭짓점 A로 오기 위하여 $3l+2m+n$ 는 8의 배수 8, 16, 24 이다.	
8과 24이려면 (l, m, n) 는 $(0,0,8), (8,0,0)$ 이고 경우의 수는 2이다.	5
한편 $l+m+n=8$ 이고 $3l+2m+n=16$ 인 경우는 (l, m, n) 이 $(4,0,4), (3,2,3), (2,4,2), (1,6,1), (0,8,0)$ 이고 경우의 수는 ${}_8C_4 \times {}_4C_0 + {}_8C_3 \times {}_5C_2 + {}_8C_2 \times {}_6C_4 + {}_8C_1 \times {}_7C_6 + {}_8C_0 \times {}_8C_8 = 1107$ 이다. 따라서 구하는 경우의 수 $b = 2 + 1107 = 1109$ 이다.	10

7. 예시 답안

문제 1. 8회 동전을 던져 앞면이 나온 횟수를 m , 뒷면이 나온 횟수를 n 이라 하면 $m+n=8$ 이다. 이동거리는 $16 \leq 3m+2n \leq 24$ 이므로 다시 꼭짓점 A로 오기 위하여 $3m+2n$ 는 4의 배수 16, 20, 24 이다. 따라서 (m, n) 은 $(0,8), (4,4), (8,0)$ 이고 구하는 경우의 수 a 는

$$a = {}_8C_0 + {}_8C_4 + {}_8C_8 = 72$$

이다.

문제 2. 8회 주머니에서 구슬을 뽑아 빨간, 노란, 파란 구슬이 나오는 횟수를 각각 l, m, n 이라 하면 $l+m+n=8$ 이다. 이동거리는 $8 \leq 3l+2m+n \leq 24$ 이므로 다시 꼭짓점 A로 오기 위하여 $3l+2m+n$ 는 8의 배수 8, 16, 24 이다. 따라서 8과 24이려면 (l, m, n) 는 $(0,0,8), (8,0,0)$ 이고 경우의 수는 2이다. 한편 $l+m+n=8$ 이고 $3l+2m+n=16$ 인 경우는 (l, m, n) 이 $(4,0,4), (3,2,3), (2,4,2), (1,6,1), (0,8,0)$ 이고 경우의 수는

$${}_8C_4 \times {}_4C_0 + {}_8C_3 \times {}_5C_2 + {}_8C_2 \times {}_6C_4 + {}_8C_1 \times {}_7C_6 + {}_8C_0 \times {}_8C_8 = 1107$$

이다. 따라서 구하는 경우의 수 $b = 2 + 1107 = 1109$ 이다.

【자연·공학/간호학과 3】

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연과학·공학계열 / 문항 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 II
	핵심개념 및 용어	이차방정식의 근과 계수의 관계, 극대와 극소, 함수의 그래프, 도함수의 활용
예상 소요 시간	30분 / 100분	

2. 문항 및 제시문

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(문제 1, 문제 2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(0) = 1$
 (나) 함수 $f(x)$ 의 극값 중 하나는 3이다.
 (다) 도함수 $f'(x)$ 는 $x=0$ 에서 극값을 가진다.

(ㄴ) 실수 a, b 에 대하여 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- 실수 k 에 대하여 방정식 $f(x)=k$ 의 실근의 개수를 n 이라 할 때,
 (가) $a \leq k \leq b$ 이면 $n \geq 2$
 (나) $k < a$ 또는 $k > b$ 이면 $n = 1$

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 삼차함수 $f(x)$ 와 제시문 (ㄴ)의 실수 a, b 에 대하여 실수 k 가 $a \leq k \leq b$ 일 때 방정식 $f(x)=k$ 의 실근 중에서 가장 작은 근을 α , 가장 큰 근을 β 라고 하자. 또한, 닫힌구간 $[a, b]$ 에 속하는 모든 k 에 대한 $\beta - \alpha$ 의 최솟값을 m , 최댓값을 M 라고 하자.

문제 1. (20점) 제시문 (ㄴ)의 a, b 의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

문제 2. (20점) 제시문 (ㄷ)의 m, M 에 대하여 $\frac{M}{m}$ 의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

3. 출제 의도

- 가) 함수의 극대, 극소의 의미를 활용할 수 있는지 확인한다.
 나) 도함수를 활용하여 함수의 그래프를 파악할 수 있는지 확인한다.
 다) 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용할 수 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (ㄱ)	[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
제시문 (ㄴ)	[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
제시문 (ㄷ)	[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 1	[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 2	[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. [수학] - (1) 문자와 식 - ③ 인수분해 [10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다. [수학] - (1) 문자와 식 - ④ 복소수와 이차방정식 [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2021	8-105
	수학	황선욱 외	미래엔	2021	10-107
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2021	8-101
	수학 II	배종숙 외	금성출판사	2021	54-113
	수학 II	박교식	동아출판	2021	53-104
	수학 II	고성은 외	좋은책 신사고	2021	53-109

5. 문항 해설

- 1) 함수의 극대, 극소의 의미를 알고 이를 활용하여 삼차함수를 구할 수 있는지 확인한다.
- 2) 도함수를 활용하여 함수의 그래프를 파악하고 이를 통해 방정식의 근의 개수를 파악할 수 있는지 확인한다.
- 3) 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하여 두 근의 차이를 계산할 수 있는지 확인한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 1	$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $f(0) = 1$ 이므로 $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ 이다. $f(x)$ 의 도함수를 $g(x)$ 라고 하면 $g(x) = f'(x) = 3x^2 + 2px + q$ 이고, 도함수 $g(x)$ 가 $x = 0$ 에서 극값을 가지므로 $g'(0) = 2p = 0$ 이다. 따라서 $f(x) = x^3 + qx + 1$ 이고 $f'(x) = 3x^2 + q$ 이다. $f(x)$ 가 극값을 가지므로 $q < 0$ 이고, $c = \sqrt{-q}/\sqrt{3}$ 라고 하면 $q = -3c^2$ 이므로 $f(x) = x^3 - 3c^2x + 1$ 이다. $f'(\pm c) = 0$ 이고 $c > 0$ 이므로 $x = -c$ 에서 극댓값 $f(-c) = 2c^3 + 1 > 1$ 을 가지고, $x = c$ 에서 극솟값 $f(c) = -2c^3 + 1 < 1$ 을 가진다. 그러므로 $2c^3 + 1 = 3$ 이고 $c = 1$ 이다. 따라서 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 이다.	10
	$f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값 3, $x = 1$ 에서 극솟값 -1 을 가진다. 제시문 (ㄴ)의 a 는 $f(x)$ 의 극솟값이고 b 는 $f(x)$ 의 극댓값이므로 $a = -1$, $b = 3$ 이다.	10
문제 2	$-1 \leq k \leq 3$ 에 대하여 $f(t) = k$ 이고 $-1 \leq t \leq 1$ 인 t 는 유일하게 존재하고 $\alpha \leq t \leq \beta$, $f(\alpha) = f(t) = f(\beta) = k$, $f(x) - k = (x - \alpha)(x - t)(x - \beta)$ 이다. $f(x) - k = f(x) - f(t) = x^3 - 3x - (t^3 - 3t) = (x - t)(x^2 + tx + t^2 - 3)$ 이므로 α, β 는 방정식 $x^2 + tx + t^2 - 3 = 0$ 의 두 근이다. 따라서 $(\beta - \alpha)^2 = (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta = t^2 - 4(t^2 - 3) = -3t^2 + 12$ 이다.	10
	$-1 \leq t \leq 1$ 이므로 $M = 2\sqrt{3}$ 이고 $m = 3$ 이다. 따라서 $\frac{M}{m} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다.	10

7. 예시 답안

문제 1.

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $f(0) = 1$ 이므로

$f(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ 이다.

$f(x)$ 의 도함수를 $g(x)$ 라고 하면 $g(x) = f'(x) = 3x^2 + 2px + q$ 이고, 도함수 $g(x)$ 가 $x = 0$ 에서 극값을 가지므로 $g'(0) = 2p = 0$ 이다.

따라서 $f(x) = x^3 + qx + 1$ 이고 $f'(x) = 3x^2 + q$ 이다.

$f(x)$ 가 극값을 가지므로 $q < 0$ 이고, $c = \sqrt{-q}/\sqrt{3}$ 라고 하면 $q = -3c^2$ 이므로 $f(x) = x^3 - 3c^2x + 1$ 이다.

$f'(\pm c) = 0$ 이고 $c > 0$ 이므로

$x = -c$ 에서 극댓값 $f(-c) = 2c^3 + 1 > 1$ 을 가지고,

$x = c$ 에서 극솟값 $f(c) = -2c^3 + 1 < 1$ 을 가진다. 그러므로 $2c^3 + 1 = 3$ 이고 $c = 1$ 이다. 따라서 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 이다.

$f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값 3, $x = 1$ 에서 극솟값 -1 을 가진다. 제시문 (ㄴ)의 a 는 $f(x)$ 의 극솟값이고 b 는 $f(x)$ 의 극댓값이므로 $a = -1$, $b = 3$ 이다.

문제 2.

$-1 \leq k \leq 3$ 에 대하여 $f(t) = k$ 이고 $-1 \leq t \leq 1$ 인 t 는 유일하게 존재하고

$\alpha \leq t \leq \beta$, $f(\alpha) = f(t) = f(\beta) = k$, $f(x) - k = (x - \alpha)(x - t)(x - \beta)$ 이다.

$f(x) - k = f(x) - f(t) = x^3 - 3x - (t^3 - 3t) = (x - t)(x^2 + tx + t^2 - 3)$ 이므로

α, β 는 방정식 $x^2 + tx + t^2 - 3 = 0$ 의 두 근이다.

따라서 $(\beta - \alpha)^2 = (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta = t^2 - 4(t^2 - 3) = -3t^2 + 12$ 이다.

$-1 \leq t \leq 1$ 이므로 $M = 2\sqrt{3}$ 이고 $m = 3$ 이다.

따라서 $\frac{M}{m} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다.

4. 의예과

【의예 1】

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	의예과 / 문항 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	경우의 수, 확률, 조건부확률
예상 소요 시간	25분 / 100분	

2. 문항 및 제시문

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 논제에 답하시오. (170점)

(ㄱ) 상자 A에는 검은 공 1개와 흰 공 4개가 들어 있고 상자 B에는 검은 공 3개와 흰 공 2개가 들어 있다. 서로 다른 주사위 3개를 동시에 던져 나온 눈의 수 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차이가 2 또는 4이면 상자 A에서, 아니면 상자 B에서 공을 하나 뽑는 시행을 두 번 반복한다. (단, 뽑힌 공은 상자에 다시 넣지 않는다.)

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 시행에 대하여 첫 번째 시행에서 검은 공이 나올 확률을 p , 첫 번째 시행에서 흰 공이 나왔을 때 두 번째 시행에서 검은 공이 나올 확률을 q 라고 하자.

논제. (170점) 제시문 (ㄴ)의 p 와 q 의 값을 각각 구하고 그 근거를 논술하시오.

3. 출제 의도

본 문제는 확률, 조건부확률의 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다. 확률의 합의 법칙을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다. 또 조건부확률을 구하는 방법을 이해하고 활용할 수 있으며 이를 논술할 수 있는 지를 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (ㄱ)	<p>[확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용 [12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다.</p>
제시문 (ㄴ)	<p>[확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용 [12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. [확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률 [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.</p>
논제	<p>[수학] - (5) 확률과 통계 - ① 경우의 수 [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. [수학] - (5) 확률과 통계 - ② 순열과 조합 [10수학05-02] 순열의 의미를 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있다. [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. [확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용 [12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. [12확통02-02] 확률의 기본 성질을 이해한다. [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률 [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.</p>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2021	262-277
	수학	황선욱 외	미래엔	2021	261-272
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2021	249-260
	확률과 통계	이준열 외	천재교육	2021	44-70
	확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2021	43-66
	확률과 통계	고성은 외	좋은책 신사고	2021	43-70

5. 문항 해설

확률의 계산을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가한다. 또, 조건부확률을 구할 수 있는지 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점															
	<p>주사위 3개를 던져 가장 큰 수와 가장 작은 수가 각각 3과 1로 차이가 2인 경우는 (1,1,3), (1,2,3), (1,3,3) 이고 경우의 수는 $3+6+3=12$ 이다. 또, 4와 2, 5와 3, 6과 4로 차이가 나는 경우의 수도 각각 12 이므로 차이가 2인 경우의 수는 $12 \times 4 = 48$ 이다.</p> <p>같은 방법으로 5와 1로 차이가 4인 경우는 (1,1,5), (1,2,5), (1,3,5), (1,4,5), (1,5,5)이고 경우의 수는 $3+6+6+6+3=24$ 이고 6과 2로 차이가 4인 경우의 수도 24이므로 차이가 4인 경우의 수는 48이다.</p>	40															
	<p>즉, 주사위 3개를 던져 상자 A가 선택될 확률은</p> $\frac{48+48}{6^3} = \frac{4}{9}$ <p>따라서 구하는 첫 번째 시행에서 검은 공이 나올 확률은</p> $p = \frac{4}{9} \times \frac{1}{5} + \frac{5}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{19}{45}$	40															
	<p>첫 번째 시행에서 흰 공이 나오고 두 번째 시행에서 검은 공이 나오는 경우는 다음 표의 4 가지이고 각각 확률은 표와 같다.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>첫 번째 흰 공</th><th>두 번째 검은 공</th><th>확률</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>상자 A</td><td>상자 A</td><td>$\frac{4}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{4}$</td></tr> <tr> <td>상자 A</td><td>상자 B</td><td>$\frac{4}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{9} \times \frac{3}{5}$</td></tr> <tr> <td>상자 B</td><td>상자 A</td><td>$\frac{5}{9} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{5}$</td></tr> <tr> <td>상자 B</td><td>상자 B</td><td>$\frac{5}{9} \times \frac{2}{5} \times \frac{5}{9} \times \frac{3}{4}$</td></tr> </tbody> </table>	첫 번째 흰 공	두 번째 검은 공	확률	상자 A	상자 A	$\frac{4}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{4}$	상자 A	상자 B	$\frac{4}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{9} \times \frac{3}{5}$	상자 B	상자 A	$\frac{5}{9} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{5}$	상자 B	상자 B	$\frac{5}{9} \times \frac{2}{5} \times \frac{5}{9} \times \frac{3}{4}$	40
첫 번째 흰 공	두 번째 검은 공	확률															
상자 A	상자 A	$\frac{4}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{4}$															
상자 A	상자 B	$\frac{4}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{9} \times \frac{3}{5}$															
상자 B	상자 A	$\frac{5}{9} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{5}$															
상자 B	상자 B	$\frac{5}{9} \times \frac{2}{5} \times \frac{5}{9} \times \frac{3}{4}$															
	<p>그러므로 첫 번째 시행에서 흰 공이 나오고 두 번째 시행에서 검은 공이 나올 확률은</p> $\frac{4}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{9} \times \frac{3}{5} + \frac{5}{9} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{5} + \frac{5}{9} \times \frac{2}{5} \times \frac{5}{9} \times \frac{3}{4}$ $= \frac{73}{3 \times 5 \times 9 \times 2}$	20															
	<p>따라서 구하는 조건부확률 q는</p> $q = \frac{\frac{73}{3 \times 5 \times 9 \times 2}}{\frac{26}{45}} = \frac{73}{156}$	30															

7. 예시 답안

주사위 3개를 던져 가장 큰 수와 가장 작은 수가 각각 3과 1로 차이가 2인 경우는 (1,1,3), (1,2,3), (1,3,3) 이고 경우의 수는 $3+6+3=12$ 이다. 또, 4와 2, 5와 3, 6과 4로 차이가 나는 경우의 수도 각각 12 이므로 차이가 2인 경우의 수는 $12 \times 4 = 48$ 이다.

같은 방법으로 5와 1로 차이가 4인 경우는 (1,1,5), (1,2,5), (1,3,5), (1,4,5), (1,5,5)이고 경우의 수는 $3+6+6+6+3=24$ 이고 6과 2로 차이가 4인 경우의 수도 24이므로 차이가 4인 경우의 수는 48이다.

즉, 주사위 3개를 던져 상자 A가 선택될 확률은

$$\frac{48+48}{6^3} = \frac{4}{9}$$

이다.

따라서 구하는 첫 번째 시행에서 검은 공이 나올 확률은

$$p = \frac{4}{9} \times \frac{1}{5} + \frac{5}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{19}{45}$$

이다.

첫 번째 시행에서 흰 공이 나오고 두 번째 시행에서 검은 공이 나오는 경우는 다음 표의 4 가지이고 각각 확률은 표와 같다.

첫 번째 흰 공 상자	두 번째 검은 공 상자	확률
상자 A	상자 A	$\frac{4}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{4}$
상자 A	상자 B	$\frac{4}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{9} \times \frac{3}{5}$
상자 B	상자 A	$\frac{5}{9} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{5}$
상자 B	상자 B	$\frac{5}{9} \times \frac{2}{5} \times \frac{5}{9} \times \frac{3}{4}$

그러므로 첫 번째 시행에서 흰 공이 나오고 두 번째 시행에서 검은 공이 나올 확률은

$$\begin{aligned} & \frac{4}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{9} \times \frac{3}{5} + \frac{5}{9} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{5} + \frac{5}{9} \times \frac{2}{5} \times \frac{5}{9} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{73}{3 \times 5 \times 9 \times 2} \end{aligned}$$

따라서 구하는 조건부확률 q 는

$$q = \frac{\frac{73}{3 \times 5 \times 9 \times 2}}{\frac{26}{45}} = \frac{73}{156}$$

이다.

【의예 3】

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	의예과 / 문항 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	중학교 수학 1, 고등학교 수학, 고등학교 수학 I, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	소수, 소인수분해, 정수, 순열과 조합, 원순열, 여러 가지 수열의 합
예상 소요 시간	25분 / 100분	

2. 문항 및 제시문

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하시오. (180점)

- (ㄱ) 학생 A 와 B 를 포함하는 $k+2$ 명으로 구성된 동아리에 대하여 아래 경우의 수를 a_k 라고 하자.
(단, k 는 3 이상인 자연수이다.)

학생 A, B 를 포함하여 동아리 학생 5명을 뽑아 원탁에 앉힐 때
 A 와 B 가 서로 이웃하여 앉는 경우의 수

- (ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 a_k 와 3보다 큰 소수 p 에 대하여 다음 집합 S 의 가장 작은 원소를 b_k 라고 하자.

$$S = \left\{ m \mid m \text{는 } m \geq \frac{a_k}{p} \text{인 자연수} \right\}$$

- (ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 p 와 b_k 에 대하여 L 는 다음과 같다.

$$L = \sum_{k=3}^{p-1} b_k$$

논제. (180점) 제시문 (ㄷ)의 합 L 를 구하고 그 근거를 논술하시오.

3. 출제 의도

- 가) 순열과 조합, 원순열을 이해하고 활용할 수 있는지를 확인한다.
 나) 집합의 개념 및 표현방법을 이해하고 활용할 수 있는지를 확인한다.
 다) 소수, 소인수분해, 정수와 유리수의 뜻을 알고 활용할 수 있는지를 확인한다.
 라) 합의 기호의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (ㄱ)	<p>[수학] - (5) 확률과 통계 - ① 경우의 수 [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.</p> <p>[수학] - (5) 확률과 통계 - ② 순열과 조합 [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.</p> <p>[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ① 순열과 조합 [12확통01-01] 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.</p>
제시문 (ㄴ)	<p>[수학] - (1) 수와 연산 - ① 소인수분해 [9수01-01] 소인수분해의 뜻을 알고, 자연수를 소인수분해할 수 있다.</p> <p>[수학] - (3) 수와 연산 - ① 집합 [10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.</p>
제시문 (ㄷ)	<p>[수학] - (3) 수열 - ② 수열의 합 [12수학 I 03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학 I 03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.</p>
문제	<p>[수학] - (1) 수와 연산 - ① 소인수분해 [9수01-01] 소인수분해의 뜻을 알고, 자연수를 소인수분해할 수 있다.</p> <p>[수학] - (1) 수와 연산 - ② 정수와 유리수 [9수01-03] 양수와 음수, 정수와 유리수의 개념을 이해한다.</p> <p>[수학] - (3) 수와 연산 - ① 집합 [10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.</p> <p>[수학] - (5) 확률과 통계 - ① 경우의 수 [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.</p> <p>[수학] - (5) 확률과 통계 - ② 순열과 조합 [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.</p> <p>[수학] - (3) 수열 - ② 수열의 합 [12수학 I 03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학 I 03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.</p> <p>[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ① 순열과 조합 [12확통01-01] 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.</p>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
중학교 교과서	수학1	이준열 외	천재교육	2020	11-57
	수학1	강옥기 외	동아출판	2020	11-67
	수학1	김화경 외	좋은책 신사고	2020	13-56
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2021	172-192, 262-276
	수학	황선욱 외	미래엔	2021	175-188, 261-273
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2021	165-179, 249-260
	수학	황선욱 외	미래엔	2021	143-150
	수학	이준열 외	천재교육	2021	141-153
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2021	133-140
	확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2021	11-18
	확률과 통계	이준열 외	천재교육	2021	10-20
	확률과 통계	고성은 외	좋은책 신사고	2021	11-19

5. 문항 해설

- 1) 조합과 원순열을 이용하여 주어진 경우의 수를 구할 수 있는지를 평가한다.
- 2) 소수, 소인수분해, 정수의 개념을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는지를 평가한다.
- 3) 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
논제	<p>동아리에서 학생 3명을 선택하는 경우의 수는 ${}_kC_3 = \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}$, 이웃하는 두 학생 A, B를 한 사람으로 생각하여 4명이 원탁에 앉는 경우의 수는 $(4-1)! = 3!$, 이웃하는 두 학생 A, B가 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는 2이다. 따라서 제시문 (ㄴ)의 a_k는 다음과 같다.</p> $a_k = \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \times 3! \times 2 = 2k(k-1)(k-2)$	40
	<p>제시문 (ㄷ)의 L을 구하기 위해</p> $b_k - \frac{a_k}{p} = c_k \quad (k = 3, 4, \dots, p-1)$ <p>라고 하자. 그러면 $0 \leq c_k < 1$이다.</p> <p>한편, $2 \leq l \leq p-1$인 자연수 l에 대하여 $l < p$이므로 $3 \leq k \leq p-1$인 자연수 k에 대하여 a_k는 3보다 큰 소수 p를 약수로 갖지 않는다. 만약 $3 \leq k \leq p-1$인 자연</p>	50

<p>수 k에 대하여 $\frac{a_k}{p}$이 자연수 q이라면 $a_k = qp$가 되어 자연수를 소인수분해한 결과는 곱하는 순서를 생각하지 않으면 오직 한 가지뿐이라는 것에 모순이다. 따라서 $\frac{a_k}{p}$는 자연수가 아니다. 즉, $3 \leq k \leq p-1$인 자연수 k에 대하여</p> $0 < c_k < 1 \quad \text{이고} \quad 0 < c_k + c_{p+2-k} < 2$	
<p>한편, $3 \leq k \leq p-1$인 자연수 k에 대하여</p> $c_k + c_{p+2-k} = b_k + b_{p+2-k} - \left(\frac{a_k}{p} + \frac{a_{p+2-k}}{p} \right)$ $= b_k + b_{p+2-k} - 2(p^2 - 3(k-1)p + 3k^2 - 6k + 2)$ <p>이고 이 값이 정수이므로</p> $c_k + c_{p+2-k} = 1 \quad (k = 3, 4, \dots, p-1)$ <p>따라서</p> $\sum_{k=3}^{p-1} c_k = \sum_{k=3}^{p-1} c_{p+2-k} = \frac{p-3}{2}$	50
<p>그러므로 제시문 (ㄷ)의 L은 다음과 같다.</p> $L = \sum_{k=3}^{p-1} b_k = \sum_{k=3}^{p-1} \frac{a_k}{p} + \sum_{k=3}^{p-1} c_k = \frac{2}{p} \sum_{k=3}^{p-1} k(k-1)(k-2) + \frac{p-3}{2}$ $= \frac{2}{p} \sum_{k=1}^{p-2} (k^3 - k) + \frac{p-3}{2} = \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{2} + \frac{p-3}{2}$ $= \frac{(p-3)(p^2 - 3p + 3)}{2}$	40

7. 예시 답안

동아리에서 학생 3명을 선택하는 경우의 수는 ${}_k C_3 = \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}$, 이웃하는 두 학생 A, B 를 한 사람으로 생각하여 4명이 원탁에 앉는 경우의 수는 $(4-1)! = 3!$, 이웃하는 두 학생 A, B 가 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는 2이다. 따라서 제시문 (ㄴ)의 a_k 는 다음과 같다.

$$a_k = \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \times 3! \times 2 = 2k(k-1)(k-2)$$

제시문 (ㄷ)의 L 을 구하기 위해

$$b_k - \frac{a_k}{p} = c_k \quad (k = 3, 4, \dots, p-1)$$

라고 하자. 그러면 $0 \leq c_k < 1$ 이다.

한편, $2 \leq l \leq p-1$ 인 자연수 l 에 대하여 $l < p$ 이므로 $3 \leq k \leq p-1$ 인 자연수 k 에 대하여 a_k 는 3보다 큰 소수 p 를 약수로 갖지 않는다. 만약 $3 \leq k \leq p-1$ 인 자연수 k 에 대하여 $\frac{a_k}{p}$ 이 자연수 q 이라면

$a_k = qp$ 가 되어 자연수를 소인수분해한 결과는 곱하는 순서를 생각하지 않으면 오직 한 가지뿐이라는 것에 모순이다. 따라서 $\frac{a_k}{p}$ 는 자연수가 아니다. 즉, $3 \leq k \leq p-1$ 인 자연수 k 에 대하여

$$0 < c_k < 1 \quad \text{이고} \quad 0 < c_k + c_{p+2-k} < 2$$

한편, $3 \leq k \leq p-1$ 인 자연수 k 에 대하여

$$\begin{aligned} c_k + c_{p+2-k} &= b_k + b_{p+2-k} - \left(\frac{a_k}{p} + \frac{a_{p+2-k}}{p} \right) \\ &= b_k + b_{p+2-k} - 2(p^2 - 3(k-1)p + 3k^2 - 6k + 2) \end{aligned}$$

이고 이 값이 정수이므로

$$c_k + c_{p+2-k} = 1 \quad (k = 3, 4, \dots, p-1)$$

따라서

$$\sum_{k=3}^{p-1} c_k = \sum_{k=3}^{p-1} c_{p+2-k} = \frac{p-3}{2}$$

그러므로 제시문 (ㄷ)의 L 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=3}^{p-1} b_k = \sum_{k=3}^{p-1} \frac{a_k}{p} + \sum_{k=3}^{p-1} c_k = \frac{2}{p} \sum_{k=3}^{p-1} k(k-1)(k-2) + \frac{p-3}{2} \\ &= \frac{2}{p} \sum_{k=1}^{p-2} (k^3 - k) + \frac{p-3}{2} = \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{2} + \frac{p-3}{2} \\ &= \frac{(p-3)(p^2 - 3p + 3)}{2} \end{aligned}$$

【의예 4】

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	의예과 / 문항 4	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II
	핵심개념 및 용어	연속, 극대, 극소, 함수의 증가와 감소, 도함수의 활용, 함수의 그래프, 부정적분, 정적분
예상 소요 시간	30분 / 100분	

2. 문항 및 제시문

[문항 4] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 논제에 답하시오. (180점)

(ㄱ) 상수 n 에 대하여 명제 p 는 다음과 같다.

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극댓값을 가지고 $x = \beta$ 에서 극솟값 0을 가지면 방정식 $f(x - f(x)) = f(x)$ 는 열린구간 (α, β) 에서 n 개의 실근을 갖는다.

(ㄴ) 최고차항의 계수 k 가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x - f(x)) = f(x)$ 의 모든 실근은 a, b, c, d, e 이고 $f(b) = f(d)$ 이다.
(단, $a < b < c < d < e$)

(나) 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 0이다.

이 함수 $f(x)$ 와 실수 k, a, b, c 에 대하여 $m = k(b - a)f(2b - c)$ 라고 하자.

논제. (180점) 제시문 (ㄱ)의 명제 p 가 참이 되도록 하는 n 의 값이 있는지 판별하고, 있는 경우 n 의 값을 구하시오. 또한 제시문 (ㄴ)의 m 의 값을 구하시오. 이 모든 과정의 근거를 논술하시오.

3. 출제 의도

- 가) 함수의 극대, 극소의 의미를 활용할 수 있는지 확인한다.
 나) 방정식의 근의 존재성 문제에 사잇값정리를 활용할 수 있는지 확인한다.
 다) 도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있고 방정식에 대한 문제를 해결할 수 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (ㄱ)	<p>[수학 III] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용</p> <p>[12수학Ⅱ 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</p> <p>[수학 III] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용</p> <p>[12수학Ⅱ 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.</p>
제시문 (ㄴ)	<p>[수학 III] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용</p> <p>[12수학Ⅱ 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</p> <p>[수학 III] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용</p> <p>[12수학Ⅱ 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.</p>
문제	<p>[수학 III] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용</p> <p>[12수학Ⅱ 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</p> <p>[수학 III] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용</p> <p>[12수학Ⅱ 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.</p> <p>[수학 III] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용</p> <p>[12수학Ⅱ 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</p> <p>[수학 III] - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속</p> <p>[12수학Ⅱ 01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p> <p>[수학 III] - (3) 적분 - ① 부정적분</p> <p>[12수학Ⅱ 03-02] 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.</p> <p>[수학 III] - (3) 적분 - ② 정적분</p> <p>[12수학Ⅱ 03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.</p>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	배종숙 외	금성출판사	2021	12-154
	수학 II	박교식	동아출판	2021	11-152
	수학 II	고성은 외	좋은책 신사고	2021	11-155

5. 문항 해설

- 1) 함수의 극대, 극소의 의미를 알고 이를 활용하여 삼차함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있는지 확인한다.
- 2) 사잇값정리와 함수의 증가, 감소를 활용하여 구간에서 방정식의 근의 개수를 파악할 수 있는지 확인한다.
- 3) 도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있고 방정식에 대한 문제를 해결할 수 있는지 확인한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	<p>삼차함수 $f(x)$가 $x = \alpha$에서 극댓값을 가지고 $x = \beta$에서 극솟값 0을 가진다고 하고 $f(x)$의 최고차항의 계수 k가 양수라고 하자.</p> <p>$f(x)$가 $x = \alpha$에서 극댓값을 가지고 $x = \beta$에서 극솟값 0을 가지므로 $f'(x) = 3k(x - \alpha)(x - \beta)$이고 $f(\beta) = 0$, $\alpha < \beta$이다.</p> <p>따라서</p> $f(x) = \int_{\beta}^x f'(t)dt + f(\beta)$ $= k(x - \beta)^3 + \frac{3(\beta - \alpha)k}{2}(x - \beta)^2 = k(x - \frac{3\alpha - \beta}{2})(x - \beta)^2$ <p>이다.</p> <p>$\alpha \leq t \leq \beta$인 실수 t에 대하여 x에 관한 방정식 $f(x) = f(t)$의 실근 중 가장 작은 근 x를 $g(t)$라고 하고 $h(t) = t - f(t) - g(t)$라고 하자.</p> <p>$\alpha < t < \beta$인 t에 대해서 $f(t) > 0$이므로 $t - f(t) < t$이고 방정식 $f(x) = f(t)$의 실근 x 중 t 보다 작은 근은 $g(t)$가 유일하므로 $\alpha < t < \beta$일 때 $f(t - f(t)) = f(t)$일 필요충분조건은 $t - f(t) = g(t)$, 즉, $h(t) = 0$인 것이다. 따라서 열린구간 (α, β)에서 방정식 $f(x - f(x)) = f(x)$의 실근의 개수는 열린구간 (α, β)에서 방정식 $h(x) = 0$의 실근의 개수와 같다.</p>	30
논제	<p>$f(x) = k(x^3 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)x^2 + 3\alpha\beta x - \frac{1}{2}\beta^2(3\alpha - \beta))$이고</p> <p>$f(x) - f(t) = k(x - t)(x^2 + \frac{1}{2}(2t - 3\alpha - 3\beta)x + 3\alpha\beta + t^2 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)t)$이므로</p> <p>$g(t)$는 이차방정식 $x^2 + \frac{1}{2}(2t - 3\alpha - 3\beta)x + 3\alpha\beta + t^2 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)t = 0$의 두 근 중 더 작은 근이다. 그러므로 근의 공식에 의해</p> $g(t) = (3(\alpha + \beta) - 2t - \sqrt{3(3\beta - \alpha - 2t)(\beta - 3\alpha + 2t)})/4$ <p>이고, $\alpha \leq t \leq \beta$에서 $g(t)$는 연속이다. 따라서 $h(t) = t - g(t) - f(t)$도 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이다.</p> <p>$h(\alpha) = \alpha - \alpha - f(\alpha) < 0$이고</p> <p>$h(\beta) = \beta - g(\beta) - f(\beta) = \beta - g(\beta) = \frac{3}{2}(\beta - \alpha) > 0$이므로 사잇값 정리에 의해 열린구간 (α, β)에서 $h(t) = 0$인 실수 t가 적어도 하나 존재한다.</p>	30
	<p>$\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta$에 대해서 $g(t_1) \leq \alpha$, $g(t_2) \leq \alpha$이고, 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 $f(x)$는 감소하므로 $f(g(t_1)) = f(t_1) > f(t_2) = f(g(t_1))$이고, 구간 $(-\infty, \alpha]$에서 $f(x)$는 증가하므로 $g(t_1) > g(t_2)$ 이다. 즉, 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 $g(t)$는 감소한다.</p> <p>닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 $f(t)$, $g(t)$는 감소하므로 $h(t) = t - g(t) - f(t)$는 증가하는 연속함수이다. 따라서 열린구간 (α, β)에서 $h(t) = 0$인 실수 t의 개수는 1이다.</p> <p>따라서 $n = 1$일 때 명제 p가 참이다.</p>	30

<p>즉, 명제 p가 참이 되도록 하는 n의 값은 있으며, 그 값은 1이다.</p>	
<p>제시문 (ㄴ)의 함수를 $f(x)$라고 하면 위의 논의로부터 $f(x) = k\left(x - \frac{3\alpha - \beta}{2}\right)(x - \beta)^2$이다. 따라서 극댓값을 $M = f(\alpha)$라고 하면 $f(x) - M = k(x - \alpha)^2\left(x - \frac{3\beta - \alpha}{2}\right)$이다. $\gamma = \frac{3\beta - \alpha}{2}$라고 하자.</p> <p>방정식</p> $f(x - f(x)) = f(x) \quad \text{-----} \quad (*)$ <p>의 근 x를 다음의 경우로 나누어 생각하자.</p> <p>i) $x - f(x) = x$ 인 경우: $f(x) = 0$을 만족하는 x는 $x = \frac{3\alpha - \beta}{2}$ 또는 $x = \beta$이고 이 경우는 위 방정식 (*)의 근이 된다.</p> <p>ii) $x - f(x) \neq x$ 인 경우: $x - f(x) \neq x$이고 $f(x - f(x)) = f(x)$라고 하자. $f(x) \neq 0$이고 서로 다른 $x - f(x)$와 x에서의 f의 함숫값이 같으므로 $0 < f(x) \leq M$ 이다.</p> <p>따라서 $x - f(x) < x$이고 $f(x - f(x)) = f(x)$이므로 $\alpha < x \leq \gamma$ 이다. (단, $x \neq \beta$)</p> <p>방정식 (*)의 i)에서의 두 근이 $\frac{3\alpha - \beta}{2}$, β이고 $\frac{3\alpha - \beta}{2} < \alpha < \beta$이므로 방정식 (*)의 근 중 가장 작은 값은 $\frac{3\alpha - \beta}{2}$이고 나머지 근은 모두 α보다 크다. 즉, $a = \frac{3\alpha - \beta}{2}$이고 $\alpha < b$이다.</p> <p>위의 논의로부터 방정식 (*)는 열린구간 (α, β)에서 유일한 근을 가지므로 b가 열린구간 (α, β)에서의 방정식 (*)의 유일한 근임을 알 수 있다. 즉, $b < \beta$이다.</p> <p>그런데 $x = \beta$도 방정식 $f(x - f(x)) = f(x)$의 근이고 $b < \beta$이므로 $c = \beta$이다.</p> <p>따라서 $b < \beta = c < d$이고 $f(d) = f(b) > 0$임을 알 수 있다.</p>	<p>30</p>
<p>$f(b - f(b)) = f(b) = f(d) = f(d - f(d))$이고 $b - f(b) < b < d$이므로 $b - f(b)$, b, $d - f(d)$, d는 모두 방정식 $f(x) = f(b)$의 근이고, $b - f(b)$, b, d는 서로 다르다.</p> <p>그런데 $b - f(b) < d - f(d) < f(d)$이므로 $d - f(d) = b$이다.</p> <p>그러므로 $d - b = f(d) = f(b)$이다.</p> <p>$d - b = q > 0$라고 하면 $q = f(d) = f(b)$이고 방정식 $f(x) = f(b)$의 서로 다른 세 실근은 $b - q$, b, $b + q$ 이다.</p> <p>따라서</p> $f(x) = k(x - b + q)(x - b)(x - b - q) + f(b) = k((x - b)^3 - q^2(x - b)) + q \text{이다.}$	<p>30</p>
$f'(x) = k(3(x - b)^2 - q^2) = 3k\left(x - b - \frac{q}{\sqrt{3}}\right)\left(x - b + \frac{q}{\sqrt{3}}\right) \text{ 이므로}$	<p>30</p>

$$b + \frac{q}{\sqrt{3}} = \beta = c, \quad b - \frac{q}{\sqrt{3}} = \alpha \quad \text{이고} \quad a = \frac{3\alpha - \beta}{2} = b - \frac{2}{\sqrt{3}}q \quad \text{이다.}$$

$$0 = f(\beta) = f(b + \frac{q}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}kq^3 + q \quad \text{이므로} \quad k = \frac{3\sqrt{3}}{2q^2} \quad \text{이다.}$$

$$f(2b - c) = f(b - \frac{q}{\sqrt{3}}) = \frac{3\sqrt{3}}{2q^2}(-\frac{2}{3\sqrt{3}}q^3) + q = 2q \quad \text{이므로}$$

$$m = k(b - a)f(2b - c) = \frac{3\sqrt{3}}{2q^2} \times \frac{2q}{\sqrt{3}} \times 2q = 6 \quad \text{이다.}$$

7. 예시 답안

삼차함수 $f(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극댓값을 가지고 $x = \beta$ 에서 극솟값 0을 가진다고 하고 $f(x)$ 의 최고차항의 계수 k 가 양수라고 하자.

$f(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극댓값을 가지고 $x = \beta$ 에서 극솟값 0을 가지므로

$f'(x) = 3k(x - \alpha)(x - \beta)$ 이고 $f(\beta) = 0$, $\alpha < \beta$ 이다.

따라서

$$f(x) = \int_{\beta}^x f'(t)dt + f(\beta) = k(x - \beta)^3 + \frac{3(\beta - \alpha)k}{2}(x - \beta)^2 = k(x - \frac{3\alpha - \beta}{2})(x - \beta)^2 \quad \text{이다.}$$

$\alpha \leq t \leq \beta$ 인 실수 t 에 대하여 x 에 관한 방정식 $f(x) = f(t)$ 의 실근 중 가장 작은 근 x 를 $g(t)$ 라고 하고 $h(t) = t - f(t) - g(t)$ 라고 하자.

$\alpha < t < \beta$ 인 t 에 대해서 $f(t) > 0$ 이므로 $t - f(t) < t$ 이고

방정식 $f(x) = f(t)$ 의 실근 x 중 t 보다 작은 근은 $g(t)$ 가 유일하므로

$\alpha < t < \beta$ 일 때 $f(t - f(t)) = f(t)$ 일 필요충분조건은 $t - f(t) = g(t)$, 즉, $h(t) = 0$ 인 것이다. 따라서 열린 구간 (α, β) 에서 방정식 $f(x - f(x)) = f(x)$ 의 실근의 개수는 열린구간 (α, β) 에서 방정식 $h(x) = 0$ 의 실근의 개수와 같다.

$$f(x) = k(x^3 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)x^2 + 3\alpha\beta x - \frac{1}{2}\beta^2(3\alpha - \beta)) \quad \text{이고}$$

$$f(x) - f(t) = k(x - t)(x^2 + \frac{1}{2}(2t - 3\alpha - 3\beta)x + 3\alpha\beta + t^2 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)t) \quad \text{이므로} \quad g(t) \text{는} \quad \text{이차방정식}$$

$$x^2 + \frac{1}{2}(2t - 3\alpha - 3\beta)x + 3\alpha\beta + t^2 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)t = 0 \quad \text{의 두 근 중 더 작은 근이다.} \quad \text{그러므로 근의 공식에 의해}$$

$g(t) = (3(\alpha + \beta) - 2t - \sqrt{3(3\beta - \alpha - 2t)(\beta - 3\alpha + 2t)})/4$ 이고, $\alpha \leq t \leq \beta$ 에서 $g(t)$ 는 연속이다. 따라서 $h(t) = t - g(t) - f(t)$ 도 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 연속이다.

$$h(\alpha) = \alpha - \alpha - f(\alpha) < 0 \quad \text{이고} \quad h(\beta) = \beta - g(\beta) - f(\beta) = \beta - g(\beta) = \frac{3}{2}(\beta - \alpha) > 0 \quad \text{이므로 사잇값 정리에 의해}$$

열린구간 (α, β) 에서 $h(t) = 0$ 인 실수 t 가 적어도 하나 존재한다.

$\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta$ 에 대해서 $g(t_1) \leq \alpha$, $g(t_2) \leq \alpha$ 이고, 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 $f(x)$ 는 감소하므로 $f(g(t_1)) = f(t_1) > f(t_2) = f(g(t_2))$ 이고 구간 $(-\infty, \alpha]$ 에서 $f(x)$ 는 증가하므로 $g(t_1) > g(t_2)$ 이다. 즉, 닫

원구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 $g(t)$ 는 감소한다.

달원구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 $f(t), g(t)$ 는 감소하므로 $h(t) = t - g(t) - f(t)$ 는 증가하는 연속함수이다. 따라서 열린구간 (α, β) 에서 $h(t) = 0$ 인 실수 t 의 개수는 1이다.

따라서 $n=1$ 일 때 명제 p 가 참이다.

즉, 명제 p 가 참이 되도록 하는 n 의 값은 있으며, 그 값은 1이다.

제시문 (L)의 함수를 $f(x)$ 라고 하면 위의 논의로부터 $f(x) = k\left(x - \frac{3\alpha - \beta}{2}\right)(x - \beta)^2$ 이다. 따라서 극댓값을 $M = f(\alpha)$ 라고 하면 $f(x) - M = k(x - \alpha)^2\left(x - \frac{3\beta - \alpha}{2}\right)$ 이다. $\gamma = \frac{3\beta - \alpha}{2}$ 라고 하자.

방정식

$$f(x - f(x)) = f(x) \quad \text{-----} \quad (*)$$

의 근 x 를 다음의 경우로 나누어 생각하자.

i) $x - f(x) = x$ 인 경우: $f(x) = 0$ 을 만족하는 x 는 $x = \frac{3\alpha - \beta}{2}$ 또는 $x = \beta$ 이고 이 경우는 위 방정식 (*)의 근이 된다.

ii) $x - f(x) \neq x$ 인 경우: $x - f(x) \neq x$ 이고 $f(x - f(x)) = f(x)$ 라고 하자.
 $f(x) \neq 0$ 이고 서로 다른 $x - f(x)$ 와 x 에서의 f 의 함숫값이 같으므로 $0 < f(x) \leq M$ 이다.
 따라서 $x - f(x) < x$ 이고 $f(x - f(x)) = f(x)$ 이므로 $\alpha < x \leq \gamma$ 이다. (단, $x \neq \beta$)

방정식 (*)의 i)에서의 두 근이 $\frac{3\alpha - \beta}{2}, \beta$ 이고 $\frac{3\alpha - \beta}{2} < \alpha < \beta$ 이므로 방정식 (*)의 근 중 가장 작은 값은 $\frac{3\alpha - \beta}{2}$ 이고 나머지 근은 모두 α 보다 크다. 즉, $a = \frac{3\alpha - \beta}{2}$ 이고 $\alpha < b$ 이다.

위의 논의로부터 방정식 (*)는 열린구간 (α, β) 에서 유일한 근을 가지므로 b 가 열린구간 (α, β) 에서의 방정식 (*)의 유일한 근임을 알 수 있다. 즉, $b < \beta$ 이다.

그런데 $x = \beta$ 도 방정식 $f(x - f(x)) = f(x)$ 의 근이고 $b < \beta$ 이므로 $c = \beta$ 이다.

따라서 $b < \beta = c < d$ 이고 $f(d) = f(b) > 0$ 임을 알 수 있다.

$f(b - f(b)) = f(b) = f(d) = f(d - f(d))$ 이고 $b - f(b) < b < d$ 이므로 $b - f(b), b, d - f(d), d$ 는 모두 방정식 $f(x) = f(b)$ 의 근이고, $b - f(b), b, d$ 는 서로 다르다.

그런데 $b - f(b) < d - f(d) < f(d)$ 이므로 $d - f(d) = b$ 이다.

그러므로 $d - b = f(d) = f(b)$ 이다.

$d - b = q > 0$ 라고 하면 $q = f(d) = f(b)$ 이고 방정식 $f(x) = f(b)$ 의 서로 다른 세 실근은 $b - q, b, b + q$ 이다.

따라서 $f(x) = k(x - b + q)(x - b)(x - b - q) + f(b) = k((x - b)^3 - q^2(x - b)) + q$ 이다.

$f'(x) = k(3(x - b)^2 - q^2) = 3k(x - b - \frac{q}{\sqrt{3}})(x - b + \frac{q}{\sqrt{3}})$ 이므로

$$b + \frac{q}{\sqrt{3}} = \beta = c, \quad b - \frac{q}{\sqrt{3}} = \alpha \quad \text{이고} \quad a = \frac{3\alpha - \beta}{2} = b - \frac{2}{\sqrt{3}}q \quad \text{이다.}$$

$$0 = f(\beta) = f\left(b + \frac{q}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}kq^3 + q \quad \text{이므로} \quad k = \frac{3\sqrt{3}}{2q^2} \quad \text{이다.}$$

$$f(2b - c) = f\left(b - \frac{q}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2q^2}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}q^3\right) + q = 2q \quad \text{이므로}$$

$$m = k(b - a)f(2b - c) = \frac{3\sqrt{3}}{2q^2} \times \frac{2q}{\sqrt{3}} \times 2q = 6 \quad \text{이다.}$$