5 자연계열 논술고사 (오전)

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 Ⅰ. 미적분, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	확률의 덧셈정리, 조건부 확률, 수열의 극한
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

문제 1 (20점)

수직선 위에 점 A가 있고, 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$인 동전이 있다. 이 동전을 한 번 던져서 앞면이 나오면 점 A를 $+1$ 만큼, 뒷면이 나오면 점 A를 -1 만큼 이동시키는 '시행'을 한다. 점 A의 시작 좌표는 1 또는 2 이다. 자연수 n을 '시행횟수'라 하고 위 '시행'을 n회 반복한다. 아래와 같이 '성공', '실패', '보류' 사건을 정의한다.

- 점 A가 좌표 0에 도달하기 전에 좌표 3에 먼저 도달하는 사건을 '성공'으로 정의한다.
- 점 A가 좌표 3에 도달하기 전에 좌표 0에 먼저 도달하는 사건을 '실패'라고 정의한다.
- 점 A가 n회의 '시행' 동안 좌표 0 또는 3에 도달하지 못한 사건을 '보류'라고 정의한다.

'시행횟수'가 n일 때, $x=1$ 또는 $x=2$에 대하여 점 A가 좌표 x에서 시작하여 '성공'할 확률을 $S(n,x)$, '보류'될 확률을 $D(n,x)$, '실패'할 확률을 $F(n,x)$라 하자.

(1) $D(3,1)$과 $D(4,2)$를 구하고, 모든 자연수 n에 대하여 $D(n,1)$과 $D(n,2)$를 각각 n에 대한 식으로 표현하시오.

(2) $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 점 A는 좌표 1에서 시작하면 첫 '시행' 후 $\frac{1}{2}$의 확률로 좌표 0으로 이동하여 '실패'하거나, $\frac{1}{2}$의 확률로 좌표 2로 이동한 후에 '시행'을 반복하게 된다. 이를 이용하여 $S(n,1)$을 $S(n-1,2)$에 대한 식으로 표현하시오.

(3) $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 문항 (2)와 유사한 방식으로 $S(n,2)$를 $S(n-1,1)$에 대한 식으로 표현하시오.

(4) 모든 자연수 n에 대하여 $S(n,2)=F(n,1)$가 성립함을 간단히 설명하고, 이 사실을 이용하여 $a_n = S(n,1)$과 $b_n = S(n,2)$에 대해 수열 $\{a_n + b_n\}$의 극한값 $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$을 구하시오.

(5) 문항 (4)에서 정의한 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 극한이 모두 존재할 때, $\{a_n\}$의 극한값 $\lim_{n\to\infty} a_n$과 $\{b_n\}$의 극한값 $\lim_{n\to\infty} b_n$을 각각 구하시오.

3. 출제 의도

주어진 사건의 확률 및 조건부 확률을 계산할 수 있는지 평가한다. 해당 확률을 계산하여 얻어진 수열의 극한을 구할 수 있는지 평가한다.

(1) 주어진 사건의 확률을 계산할 수 있는지 평가한다.

(2) 주어진 사건을 두 가지 경우로 나누어 각각의 확률을 조건부 확률을 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.

(3) 주어진 사건을 두 가지 경우로 나누어 각각의 확률을 조건부 확률을 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.

(4) 확률의 총합이 1임을 이해하고 있는지 평가한다. 수열의 극한값을 계산할 수 있는지 평가한다.

(5) 두 수열의 합의 극한은 각 수열의 극한값의 합과 같음을 이해하고 있는지 평가한다. 주어진 수열을 상수배한 수열의 극한값은 해당 수열의 극한값의 상수배한 결과와 같음을 이해하고 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취 기준

구분		과목명	교육과정 및 성취기준
제시문		과목명	교육과정 및 성취기준
	1	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{1}$ 확률의 뜻과 활용 [12확통02-02] 확률의 기본 성질을 이해한다.(97쪽)
	2	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{2}$ 조건부확률 [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.(97쪽)
문항 (1)		과목명	교육과정 및 성취기준
	1	교육과정 성취기준	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.(65쪽)
	2	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{2}$ 조건부확률 [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.(97쪽)
문항 (2)		과목명	교육과정 및 성취기준
	1	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{2}$ 조건부확률 [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.(97쪽)
	2	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{2}$ 조건부확률 [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(97쪽)
문항 (3)		과목명	교육과정 및 성취기준
	1	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{1}$ 확률의 뜻과 활용 [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(97쪽)
	2	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{2}$ 조건부확률 [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.(97쪽)
	3	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{2}$ 조건부확률 [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(97쪽)
문항 (4)		과목명	교육과정 및 성취기준
	1	교육과정 성취기준	[미적분] - (1) 수열의 극한 - $\boxed{1}$ 수열의 극한 [12미적01-03] 등비수열의 극한값을 구할 수 있다.(85쪽)
	2	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{1}$ 확률의 뜻과 활용 [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(97쪽)

문항 (5)		과목명	교육과정 및 성취기준
	1	교육과정 성취기준	[미적분] - (1) 수열의 극한 - ① 수열의 극한 [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.(85쪽)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	고성은 외	좋은책신사고	2018	123-124
	수학 I	김원경 외	비상교육	2018	127-128
	확률과 통계	김원경 외	비상교육	2019	44-45, 53-60
	확률과 통계	고성은 외	좋은책신사고	2019	50-51, 58-66
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	16-17, 22-23
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2019	15-16, 19-20
	미적분	이준열 외	천재교육	2019	17-18, 22-23
	미적분	김원경 외	비상교육	2019	16-17, 20-21

5. 문항 해설

(1) 제시문에 주어진 ‘보류’ 사건을 이해하고 동전의 앞뒤가 번갈아 나오는 경우에 해당함을 이용하여 ‘보류’ 될 확률을 계산한다.

(2) 좌표 1에서 시작하여 성공하기 위해서는 첫 시행에서 동전의 앞면이 나와야만 한다. 첫 시행에서 동전의 앞면이 나왔을 때 성공할 확률을 조건부 확률을 이용하여 계산한다.

(3) 좌표 2에서 시작하여 성공하는 사건을 첫 시행에서 동전의 앞면이 나왔을 때 성공하는 사건과 첫 시행에서 동전의 뒷면이 나왔을 때 이후 시행을 반복하여 성공하는 사건으로 나눈다. 동전의 뒷면이 나왔을 때 이후 시행을 반복하여 성공할 확률을 조건부 확률을 이용하여 계산한다.

(4) 대칭성을 이용하여 $S(n,2)=F(n,1)$을 보인다. 확률의 총합이 1임을 이용하여 $a_n+b_n=S(n,1)+S(n,2)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 를 보이고 극한값을 계산한다.

(5) $a_n=\frac{1}{2}b_{n-1}$의 양변에 극한을 취하여 수열 $\{b_n\}$의 극한값이 수열 $\{a_n\}$의 극한값의 2배가 됨을 보인다. $a_n+b_n=S(n,1)+S(n,2)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$의 극한값이 1이므로 이 두 가지 성질을 이용하여 각 수열의 극한값을 계산한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$D(3,1)$과 $D(4,2)$를 구함 (2점) $D(n,1)$과 $D(n,2)$를 구함 (2점)	4
(2)	$S(n,1)=\frac{1}{2}S(n-1,2)$를 올바르게 유도함 (4점)	4
(3)	$S(n,2)=\frac{1}{2}S(n-1,1)+\frac{1}{2}$을 올바르게 유도함 (4점)	4
(4)	$S(n,2)=F(n,1)$가 성립함을 설명함 (2점) $a_n+b_n=S(n,1)+S(n,2)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$을 이용하여 극한값을 계산함 (2점)	4
(5)	두 수열의 극한값을 $a=\lim_{n\to\infty} a_n$과 $b=\lim_{n\to\infty} b_n$ $a+b=1$을 설명한 경우 (1점) $a+b=1$과 $b=\frac{1}{2}a$, $a=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}$중 두 개의 식을 연립하여 a와 b를 구한 경우 (3점)	4

7. 예시 답안

(1) 좌표 1에서 시작하여 3회의 시행 후 ‘보류’가 되는 경우는 3번의 동전을 던지는 ‘시행’에서 ‘앞뒤앞’이 나와야 한다. 이러한 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$이다. 마찬가지로 좌표 2에서 시작하여 4회의 시행 후 ‘보류’가 되는 경우는 4번의 동전을 던지는 ‘시행’에서 ‘뒤앞뒤앞’이 나와야 한다. 이러한 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^4$이다.

좌표 1에서 시작하여 n회의 시행 후 ‘보류’가 되는 경우는 n회의 ‘시행’에서 ‘앞뒤앞…’이 연속으로 번갈아 나오는 경우뿐이다. 따라서 $D(n,1)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이다. 마찬가지로 $D(n,2)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$이다.

(2) 점 A가 좌표 1에서 출발하면 첫 ‘시행’ 후 $\frac{1}{2}$의 확률로 좌표 0으로 이동하여 ‘실패’하거나, $\frac{1}{2}$의 확률로 좌표 2로 이동하여 ‘시행’을 반복하게 된다. 이때 좌표 2로 이동한 후 ‘성공’할 확률은 시작 좌표가 2이고 ‘시행횟수’가 $n-1$인 경우와 같으므로 $S(n-1,2)$이다. 따라서

$S(n,1)=\frac{1}{2}S(n-1,2)$이다.

(3) 점 A가 좌표 2에서 출발하면 첫 '시행' 후 $\frac{1}{2}$의 확률로 좌표 3으로 이동하여 '성공'하거나, $\frac{1}{2}$의 확률로 좌표 1로 이동하여 n-1회 '시행'을 반복하게 된다. 이때 좌표 1로 이동한 후 '성공' 할 확률은 시작좌표가 1이고 '시행횟수'가 $n-1$인 경우와 같으므로 $S(n-1,1)$이다. 따라서 $S(n,2)=\frac{1}{2}S(n-1,1)+\frac{1}{2}$이다.

(4) 좌표 1에서 시작하여 '성공'하는 사건과 좌표 2에서 시작하여 '실패'하는 사건은 대칭이다. 따라서 $S(n,2)=F(n,1)$이다. 확률의 총합은 1이어야 하므로 $S(n,1)+D(n,1)+F(n,1)=1$이다. 이를 이용하여 $a_n+b_n=S(n,1)+S(n,2)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$을 얻을 수 있다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=1$이다.

(5) 두 수열의 극한값을 $a=\lim_{n\to\infty}a_n$과 $b=\lim_{n\to\infty}b_n$로 정의하자. 문항 (4)의 결과에 의해 $a+b=1$이다. 문항 (2)에서 얻은 관계는 $a_n=\frac{1}{2}b_{n-1}$와 같이 표현할 수 있다. 이 식의 양변에 극한을 취하면 $a=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}b_{n-1}=\frac{1}{2}b$이다. 따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$이다.

6 자연계열 논술고사 (오전)

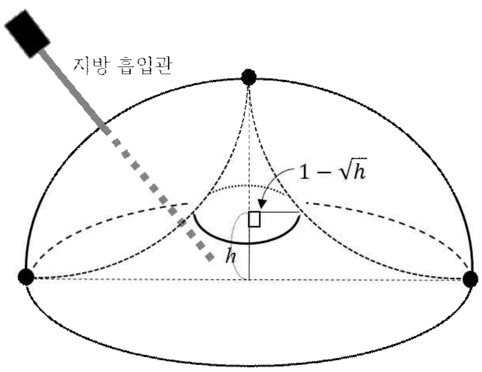
1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	정적분, 속도와 거리, 접선의 방정식, 함수의 극대·극소, 함수의 최대·최소
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

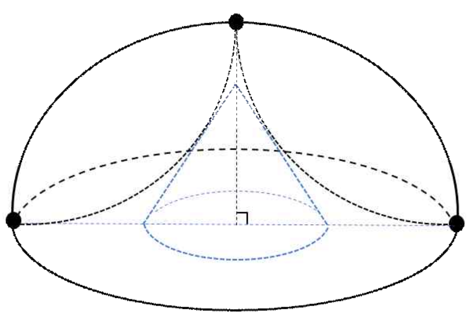
2. 문항 및 제시문

문제 2 (20점)

반지름이 1인 반구 모양의 인간 복부가 <그림 1>에 그려져 있다. 복부 내부에 지방이 있는 부분을 복부의 밑면으로부터 높이가 h인 지점에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면은 반지름이 $1-\sqrt{h}$인 원이며, 이 원은 같은 평면으로 자른 복부의 단면과 중심이 같다. 복부 내부의 지방을 흡입관 끝으로 훑으며 흡입해서 모두 제거한 후, <그림 2>와 같이 지방이 제거된 빈 공간에 원뿔 모양의 의료 보형물을 삽입한다. (단, $0 \le h \le 1$)



<그림 1>


<그림 2>

(1) <그림 1>에서 제거된 지방의 부피를 구하시오.

(2) 복부 위에서 바라보았을 때, 좌표평면 위를 흡입관 끝이 움직인다. 시각 t에서의 흡입관 끝의 위치 점 $\mathrm{P}(x,y)$가

$$x = e^{-t}\cos t,\ y = e^{-t}\sin t$$

일 때, 점 $\mathrm{P}(x,y)$가 시각 $t=0$에서 $t=\pi$까지 움직인 거리를 구하시오.

(3) <그림 2>에서 삽입하는 의료 보형물인 원뿔의 중심축은 반구 밑면의 중심을 지나고 반구 밑면에 수직이다. 이때 삽입 가능한 의료 보형물의 최대 부피를 구하시오.

3. 출제 의도

미분과 적분을 이용하여 입체도형의 부피, 좌표평면 위에서 점이 움직인 거리, 함수의 최댓값을 구할 수 있는지 평가한다.

(1) 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는지 평가한다.

(2) 미분과 적분을 이용하여 좌표평면 위에서 점이 움직인 거리를 구할 수 있는지 평가한다.

(3) 원뿔의 부피를 적절한 함수로 나타내고, 미분을 이용하여 부피의 최댓값을 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취 기준

구분		과목명	교육과정 및 성취기준
제시문	1	교육과정 성취기준	[미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.(88쪽)
문항 (1)	1	교육과정 성취기준	[미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.(88쪽)
	2	교육과정 성취기준	[미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.(88쪽)
문항 (2)	1	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{2}$ 도함수 [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.(75쪽)
	2	교육과정 성취기준	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. (86쪽)
	3	교육과정 성취기준	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.(86쪽)
	4	교육과정 성취기준	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.(86쪽)
	5	교육과정 성취기준	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.(86쪽)
	6	교육과정 성취기준	[미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.(88쪽)
문항 (3)	1	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.(75쪽)
	2	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.(75쪽)
	3	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.(75쪽)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	홍성복 외	지학사	2018	83-92
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2019	157-159
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2019	160-164
	미적분	황선욱 외	미래앤	2019	168-170
	미적분	황선욱 외	미래앤	2019	82-89
	미적분	황선욱 외	미래앤	2019	106-108
	미적분	황선욱 외	미래앤	2019	110-117

5. 문항 해설

(1) 주어진 입체도형을 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 알면 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있다. 문제에서 높이를 축으로 생각하면 단면은 반지름 $1-\sqrt{h}$인 원이다.

(2) 좌표평면 위에서 점이 움직인 거리를 구하는 식을 이용한다.

(3) 원뿔의 축을 포함하는 평면으로 주어진 입체도형을 자르면 원뿔의 모서리가 접하는 곡선의 식을 구할 수 있다. 이로부터 원뿔의 높이와 밑면의 반지름을 구하고 미분을 이용하여 부피의 최댓값을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	부피를 정적분 식으로 나타냄 (2점) 정적분 과정을 보이고 부피를 최종적으로 구함 (2점)	4
(2)	x와 y의 도함수를 구함 (3점) 정적분을 통하여 거리를 구함 (4점)	7
(3)	밑면에 중심과 밑면에 수직인 평면으로 입체 도형을 자른 평면을 $-1 \leq x \leq 1$와 $-1 \leq y \leq 1$구간에서 좌표평면에 표현 (3점) 접선의 방정식을 세우고, 접점의 좌표를 이용하여 원뿔 부피를 함수로 표현 (3점) 합성함수의 미분과 함수의 최댓값 구하는 원리를 이용하여 부피가 최대가 되는 접점의 좌표를 구한 후 최대 부피값 구함 (3점)	9

7. 예시 답안

(1) 높이를 축으로 생각하면 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 반지름 $1-\sqrt{h}$인 원이고 단면적은 $\pi(1-\sqrt{h})^2$이다. 다음과 같이 정적분을 이용하여 부피를 구한다.

$$\int_0^1 \pi(1-\sqrt{h})^2 dh$$
$$=\int_0^1 \pi(1-2\sqrt{h}+h)dh$$
$$=\pi\left[h-\frac{4}{3}h^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}h^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{6}\pi$$

(2) 점 P가 움직인 거리 l은 다음과 같다.

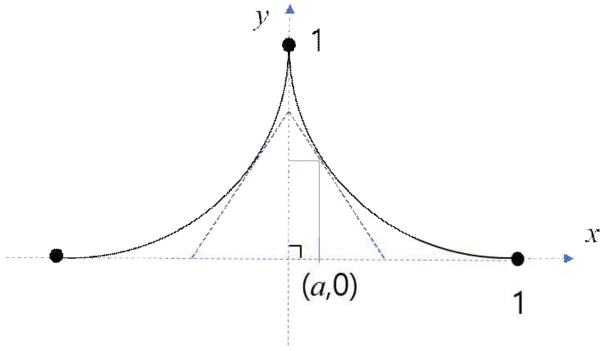
$$l=\int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t,\quad \frac{dy}{dt} = -e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t$$

이므로,

$$l=\int_0^\pi \sqrt{(-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t)^2+(-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^\pi e^{-t}\sqrt{(\cos t+\sin t)^2+(-\sin t+\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^\pi e^{-t}\sqrt{2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt$$
$$=\int_0^\pi e^{-t}\sqrt{2}\,dt$$
$$=\sqrt{2}\left[-e^{-t}\right]_0^\pi$$
$$=\sqrt{2}(1-e^{-\pi})$$

(3)



<그림 3>

밑면의 중심과 밑면에 수직으로 지나는 평면으로 <그림 2>의 복부를 잘랐을 때, 원뿔의 단면은 위의 그림과 같이 $y=(x-1)^2$와 $y=(x+1)^2$에 각각 접하는 2개의 직선들과 x축 상 $(-1,0)$과 $(1,0)$ 사이의 직선으로 이루어진 삼각형이다.

<그림 3>의 $x=a$ 에서 $y=(x-1)^2$에 접하는 접선의 기울기는 $2(a-1)$이며, 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=2(a-1)(x-a)+(a-1)^2$$

해당 직선이 x축과 y축과 만나는 점들은 각각 $\left(\frac{a+1}{2},0\right)$과 $(0,1-a^2)$이다.

즉, 원뿔 밑면의 반지름은 $\frac{a+1}{2}$이고, 원뿔의 높이는 $1-a^2$이다.

따라서 원뿔의 부피는 $\mathrm{V}=\frac{1}{12}\pi(a+1)^2(1-a^2)$이다. 단, $0\le a\le 1$ 이다.

함수 V의 도함수 $\frac{d\mathrm{V}}{da}=\frac{1}{6}\pi(a+1)(-2a^2-a+1)$는 $a=\frac{1}{2}$에서 $\frac{d\mathrm{V}}{da}=0$,

$0<a<\frac{1}{2}$에서 $\frac{d\mathrm{V}}{da}>0$, $\frac{1}{2}<a<1$에서 $\frac{d\mathrm{V}}{da}<0$ 을 만족한다. 그래프의 개형으로부터 구간 $[0,1]$에서 함수 V는 $a=\frac{1}{2}$에서 최댓값 $\frac{9}{64}\pi$을 취한다. 즉, 원뿔의 최대 부피는 $\frac{9}{64}\pi$ 이다.

7 자연계열 논술고사 (오전)

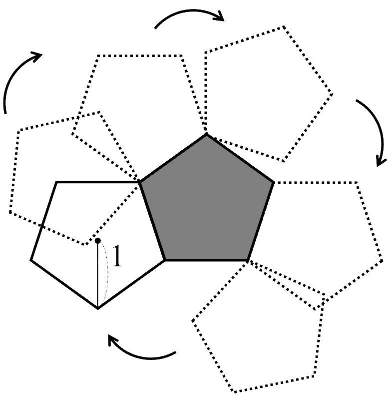
1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 수열의 극한, 함수의 극한
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

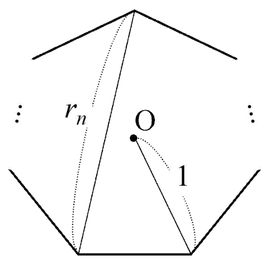
2. 문항 및 제시문

문제 3 (20점)

아래 <그림 1>과 같이 중심에서 꼭짓점까지의 거리가 1인 정n각형 두 개가 꼭짓점을 맞대며 한 변에서 서로 접하고 있다. 두 도형 중 하나의 '고정 도형'은 제 자리에 고정되어 있다. 나머지 하나의 '회전 도형'이 꼭짓점을 축으로 다음 변이 접할 때까지 회전하고, 이를 반복하여 '고정 도형'의 주위를 돌아 원래 자리까지 움직인다. (단, 정n각형의 중심은 외접원의 중심이다.)



<그림 1>



<그림 2>

(1) $n=3$일 때 '회전 도형'이 훑고 지나간 면적을 구하시오.

(2) n이 3 이상의 홀수일 때 <그림 2>와 같이 중심 O에서 꼭짓점까지의 거리가 1인 정n각형의 가장 먼 두 꼭짓점 사이의 거리를 r_n이라 하자. $r_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ 임을 보이시오.

(3) n이 3 이상의 홀수일 때 '회전 도형'이 훑고 지나간 면적을 S_n이라 하자. S_n의 식을 구하고, $\lim_{k\to\infty} S_{2k+1}$의 값과 그 의미를 설명하시오. (단, k는 자연수이다.)

3. 출제 의도

간단한 평면도형과 삼각함수의 기본적인 성질을 이해하는지 평가한다. 이를 바탕으로 주어진 수학적 조건에서 변형되는 수열의 식을 수립하고 응용할 수 있는지 평가한다. 삼각함수로 이루어진 수열의 극한값을 구할 수 있는지 평가한다.

(1) 간단한 도형의 넓이를 삼각함수를 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.

(2) 간단한 도형에서 각과 변의 길이 사이의 관계를 삼각함수를 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.

(3) 도형의 넓이를 삼각함수를 이용하여 구할 수 있는지 평가한다. 삼각함수의 극한을 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취 기준

		과목명	교육과정 및 성취기준
제시문	1	교육과정 성취기준	[수학 I] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수 [12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.(64쪽)
문항 (1)	1	교육과정 성취기준	[수학 I] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수 [12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.(64쪽)
	2	교육과정 성취기준	[수학 I] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수 [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(64쪽)

<table>
<tr><td>문항 (2)</td><td>

	과목명	교육과정 및 성취기준
1	교육과정 성취기준	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트 함수의 그래프를 그릴 수 있다.(64쪽)

</td></tr>
<tr><td>문항 (3)</td><td>

	과목명	교육과정 및 성취기준
1	교육과정 성취기준	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.(64쪽)
2	교육과정 성취기준	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(64쪽)
3	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - ① 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.(74쪽)
4	교육과정 성취기준	[미적분] - (1) 수열의 극한 - ① 수열의 극한 [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.(85쪽)
5	교육과정 성취기준	[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다. (86쪽)

</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	홍성복 외	지학사	2018	68-111
	수학 Ⅰ	고성은 외	좋은책신사고	2018	65-109
	수학 Ⅱ	홍성복 외	지학사	2018	10-29
	미적분	김원경 외	비상교육	2018	11-26, 49-73
	미적분	황선욱 외	미래엔	2018	11-26, 53-77
	미적분	이준열 외	천재교육	2018	10-27, 54-80

5. 문항 해설

(1) 주어진 조건에 맞는 평면도형의 형태를 이해하고, 가장 간단한 정다각형인 정삼각형의 성질 및 부채꼴의 성질을 이용하여 주어진 도형의 넓이를 구한다.

(2) 삼각함수를 이용하여 이등변삼각형의 각과 변의 길이 사이의 관계를 구한다.

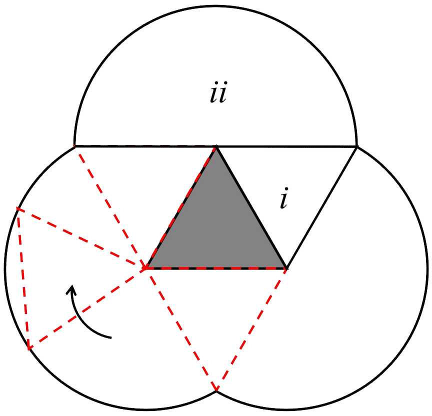
(3) 부채꼴 및 이등변삼각형의 넓이를 원주각과 삼각함수를 이용하여 구한다. 삼각함수의 극한값을 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	'회전 도형'이 훑고 지나간 도형의 형태를 구하고 과정을 설명함 (2점) '회전 도형'이 훑고 지나간 면적을 구함 (2점)	4
(2)	중심과 두 연이은 꼭지점이 이루는 각이 $2\pi/n$ 임을 설명함 (2점) r_n을 포함하는 이등변삼각형을 나타냄 (2점) $\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)=r_n/2$ 임을 이용하여 r_n의 값을 구함 (2점)	6
(3)	r_n을 변으로 갖는 이등변삼각형과 r_n을 반지름으로 갖는 부채꼴로 이루어짐을 설명함 (2점) 이등변삼각형과 부채꼴 각각의 면적을 구함 (3점) S_n의 식과 $\lim_{k\to\infty}S_{2k+1}$의 극한값을 구함 (3점) 극한을 취할 시 정다각형의 형태가 원이 되는 것을 설명함 (2점)	10

7. 예시 답안

(1) 정삼각형이 차지하는 (i) 영역과, 꼭짓점의 궤적에 포함되는 (ii) 영역의 합으로 나누어 생각할 수 있다.

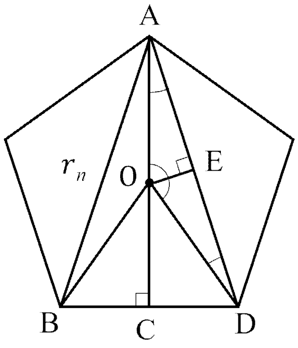


(i) 영역: 정삼각형 3개, 한 변의 길이 $\sqrt{3}$: 총 넓이 $3\times(\frac{3\sqrt{3}}{4})$

(ii) 영역: 부채꼴 3개, 반지름 $\sqrt{3}$, 중심각 π: 총 넓이 $3\times(3\pi/2)$

총 넓이 $\frac{9\sqrt{3}}{4}+\frac{9\pi}{2}$

(2) 정n각형의 중심을 O라고 한다 (예시 그림: $n=5$인 경우)



이등변삼각형 OBD에서 $\angle BOD = 2\pi/n$ 이므로,

$\angle COD = 1/2 \times \angle BOD = \pi/n$

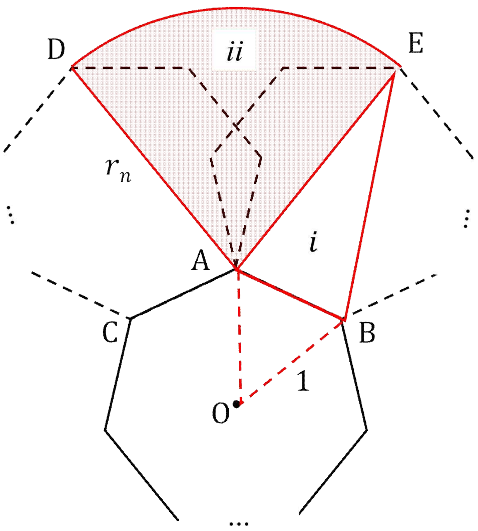
$\angle AOD = \pi - \angle COD = \dfrac{n-1}{n}\pi$ 이므로,

이등변삼각형 AOD에서 $\angle OAD = \angle ODA = \left(\pi - \dfrac{n-1}{n}\pi\right)/2 = \dfrac{\pi}{2n}$

$\cos(\angle ODA) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) = \dfrac{\overline{DE}}{1} = r_n/2$

$r_n = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$

(3) n개의 (i) 영역 및 (ii) 영역의 합으로 생각할 수 있다. 이때 (i)은 정n각형의 한 변과 두 개의 가장 먼 두 꼭짓점 사이를 잇는 선분으로 이루어진 이등변삼각형이고, (ii)는 r_n을 반지름으로 갖는 부채꼴이다.



$\angle CAB$는 정n각형의 내각이므로 $\angle CAB = \pi\left(\dfrac{n-2}{n}\right)$

이등변삼각형 ABE에 대하여 위 문제에서 $\frac{\angle AEB}{2} = \frac{\pi}{2n}$ 이므로 $\angle EAB = \frac{\pi}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)$

점 A 주위로 $2\pi = \angle DAE + 2\angle EAB + \angle CAB$ 이므로 $\angle DAE = 3\pi/n$

위 문제에서 주어진 것과 같이 $r_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$

(i) 이등변삼각형 n개, 긴 변 $r_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$, 사이각 π/n:

총 넓이 $n \times \left(2\cos\frac{\pi}{2n}\right)^2 \times \frac{\sin(\pi/n)}{2}$

(ii) 부채꼴 n개, 반지름 $r_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$, 중심각 $3\pi/n$:

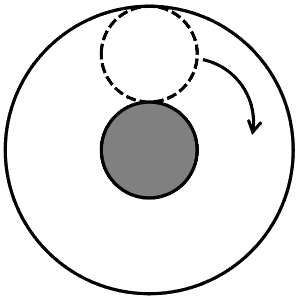
총 넓이 $n \times \left(2\cos\frac{\pi}{2n}\right)^2 \times \frac{3\pi}{2n}$

$S_n = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \times \left(\frac{n\sin(\pi/n)}{2} + \frac{3\pi}{2}\right)$

$S_{2k+1} = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2(2k+1)}\right) \times \left(\frac{(2k+1)\sin(\pi/(2k+1))}{2} + \frac{3\pi}{2}\right)$

$\lim_{k \to \infty} S_{2k+1} = 8\pi$

극한을 취하면 반지름 1인 원 '회전도형'이 반지름 1인 원 '고정도형'의 둘레에 접하며 움직이는 것과 같다 (아래 그림과 같이 반지름 3인 원의 중심에 반지름 1인 구멍이 뚫린 영역)



8 자연계열 논술고사 (오후)

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	조합을 이용한 경우의 수, 함수의 그래프, 함수의 증감
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

문제 1 (20점)

공원에 서식하는 다람쥐의 개체수 N을 예측하고자 한다. 먼저 공원 내 다람쥐 20마리를 잡아 표식을 부착한 뒤 풀어 주었다. 며칠 후 공원에서 임의로 잡은 25마리를 모아 표식을 확인하였다. 이때 3마리만 표식이 있을 확률을 $f(N)$이라고 하자.

위와 같은 사건이 일어나려면 다람쥐는 42마리 이상임을 알 수 있다. 즉 $N \geq 42$이다.

(1) 함수 $f(N)$을 구하시오.

(2) $g(N)=\dfrac{f(N+1)}{f(N)}$일 때, $g(N)$을 $\dfrac{N^2+cN+d}{N^2+aN+b}$의 형태로 구하시오.

(3) $f(N+1)>f(N)$을 만족하는 N의 범위와 $f(N+1)<f(N)$을 만족하는 N의 범위를 각각 구하시오.

(4) 위의 결과를 이용하여 $f(N)$이 최대가 되는 자연수 N의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오.

3. 출제 의도

주어진 사건이 일어날 경우의 수와 확률을 계산할 수 있는지 평가한다. 또한 함수의 증감을 파악하여 확률이 최대가 되는 값을 구할 수 있는지 평가한다.

(1) 조합을 이용하여 확률을 구할 수 있는지 평가한다.

(2) 식을 정리하여 간단한 유리함수 형태로 변형할 수 있는지 평가한다.

(3) 일차 부등식을 만족하는 변수의 범위를 찾을 수 있는지 평가한다.

(4) 위의 결과를 바탕으로 함수의 증감을 파악하여 확률이 최대가 되는 자연수를 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취 기준

<table>
<tr><td rowspan="7">제시문</td><td></td><td>과목명</td><td>교육과정 및 성취기준</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>교육과정
성취기준</td><td>[수학] -(5) 확률과 통계 -$\boxed{1}$ 경우의 수
[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.(53쪽)</td></tr>
<tr><td>평가준거
성취기준</td><td>[수학] -(5) 확률과 통계 - (가) 경우의 수
[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.(44쪽)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>교육과정
성취기준</td><td>[수학] -(5) 확률과 통계 - $\boxed{2}$ 순열과 조합
[10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. (53쪽)</td></tr>
<tr><td>평가준거
성취기준</td><td>[수학] -(5) 확률과 통계 - (나) 순열과 조합
[10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.(44쪽)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>교육과정
성취기준</td><td>[확률과 통계]- (2) 확률 - $\boxed{1}$ 확률의 뜻과 활용
[12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다.(97쪽)</td></tr>
<tr><td>평가준거
성취기준</td><td>[확률과 통계] - (2) 확률 - (가) 확률의 뜻과 활용
[12확통02-01-①] 통계적확률과 수학적확률의 의미를 이해할 수 있다.(154쪽)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="9">문항 (1)</td><td></td><td>과목명</td><td>교육과정 및 성취기준</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>교육과정
성취기준</td><td>[수학] - (4) 함수 - 1 함수
[10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.(52쪽)</td></tr>
<tr><td>평가준거
성취기준</td><td>[수학] - (4) 함수 - (가) 함수
[10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.(43쪽)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>교육과정
성취기준</td><td>[수학] - (5) 확률과 통계 - 1 경우의 수
[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.(53쪽)</td></tr>
<tr><td>평가준거
성취기준</td><td>[수학] - (5) 확률과 통계 - (가) 경우의 수
[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.(44쪽)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>교육과정
성취기준</td><td>[수학] - (5) 확률과 통계 - 2 순열과 조합
[10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. (53쪽)</td></tr>
<tr><td>평가준거
성취기준</td><td>[수학] - (5) 확률과 통계 - (나) 순열과 조합
[10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.(44쪽)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>교육과정
성취기준</td><td>[확률과 통계] - (2) 확률 - 1 확률의 뜻과 활용
[12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다.(97쪽)</td></tr>
<tr><td>평가준거
성취기준</td><td>[확률과 통계] - (2) 확률 - (가) 확률의 뜻과 활용
[12확통02-01-①] 통계적확률과 수학적확률의 의미를 이해할 수 있다.(154쪽)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">문항 (2)</td><td></td><td>과목명</td><td>교육과정 및 성취기준</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>교육과정
성취기준</td><td>[수학] - (1) 문자와 식 - 1 다항식의 연산
[10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다.(48쪽)</td></tr>
<tr><td>평가준거
성취기준</td><td>[수학] - (1) 문자와 식 - (가) 다항식의 연산
[10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다.(37쪽)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>교육과정
성취기준</td><td>[수학] -(5) 확률과 통계 - 2 순열과 조합
[10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. (53쪽)</td></tr>
<tr><td>평가준거
성취기준</td><td>[수학] -(5) 확률과 통계 - (나) 순열과 조합
[10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.(44쪽)</td></tr>
</table>

문항		과목명	교육과정 및 성취기준
문항 (3)	1	교육과정 성취기준	[수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{1}$ 다항식의 연산 [10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다.(48쪽)
		평가준거 성취기준	[수학] - (1) 문자와 식 - (가) 다항식의 연산 [10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다.(37쪽)
	2	교육과정 성취기준	[수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{6}$ 여러 가지 방정식과 부등식 [10수학01-14] 미지수가 1개인 연립일차부등식을 풀 수 있다.(48쪽)
		평가준거 성취기준	[수학] - (1) 문자와 식 - (바) 여러 가지 방정식과 부등식 [10수학01-14] 미지수가 1개인 연립일차부등식을 풀 수 있다.(39쪽)
	3	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할수 있다. (75쪽)
		평가준거 성취기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. (104쪽)
문항 (4)	1	교육과정 성취기준	[수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{6}$ 여러 가지 방정식과 부등식 [10수학01-14] 미지수가 1개인 연립일차부등식을 풀 수 있다.(48쪽)
		평가준거 성취기준	[수학] - (1) 문자와 식 - (바) 여러 가지 방정식과 부등식 [10수학01-14] 미지수가 1개인 연립일차부등식을 풀 수 있다.(39쪽)
	2	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (2)미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. (75쪽)
		평가준거 성취기준	[수학Ⅱ] - (2)미분 - (다) 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. (104쪽)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	고성은 외	좋은책신사고	2018	83-85, 249-251, 257-259
	수학	류희찬 외	천재교과서	2018	83-86, 258-262, 268-272
	확률과 통계	박교식 외	동아출판	2019	43-45
	확률과 통계	김원경 외	비상교육	2019	53-56
	수학 II	고성은 외	좋은책신사고	2018	87-90
	수학 II	홍성복 외	지학사	2018	90-92

5. 문항 해설

(1) 전체 N마리 중 25마리를 뽑는 모든 경우의 수는 ${}_{N}\mathrm{C}_{25}$ 이다. 문제에 기술된 사건(뽑은 25마리 중 3마리는 표식이 있고 나머지는 표식이 없을 사건)의 경우의 수는 표식이 있는 20마리 중 3마리를 뽑고, 표식이 없는 $(N-20)$마리 중 22마리를 뽑는 경우의 수이므로 ${}_{20}\mathrm{C}_3 \times {}_{N-20}\mathrm{C}_{22}$ 이다. 구하는 확률은 두 경우의 수의 비이다.

(2) ${}_{n}\mathrm{C}_{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$을 이용하여 $g(N) = \dfrac{f(N+1)}{f(N)}$을 정리하면 간단한 2차 다항식의 비 $\dfrac{N^2+cN+d}{N^2+aN+b}$ 의 형태로 나타낼 수 있다.

(3) (2)에서 구한 $\dfrac{f(N+1)}{f(N)} = \dfrac{N^2-43N+456}{N^2-40N-41}$ 을 이용하여 주어진 두 개의 부등식 $f(N+1) > f(N)$ 과 $f(N+1) < f(N)$을 만족하는 N 의 범위를 각각 찾을 수 있다.

(4) (3)으로부터 자연수에서 정의된 함수 $f(N)$의 증감을 알 수 있고, $f(N)$이 최대가 되는 N의 값을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	조합을 이용하여 확률을 N에 대한 함수로 올바르게 표시 (7점)	7
(2)	문제에서 요구한 유리함수 형태로 $g(N)$을 표시 (3점)	3
(3)	N 의 범위를 각각 올바르게 구함 (5점) 두 개의 범위중 한 가지만 올바르게 구함 (2점)	5
(4)	$N=166$ 을 올바르게 구하고 이때 $f(N)$가 자연수 N 일 때 최대가 됨을 설명 (5점) $g(N)>1$일 때 $f(N)$ 는 증가하며, $g(N)<1$일 때 $f(N)$ 은 감소함을 판단 (2점) 일차부등식을 통한 풀이를 통해 $f(N)$의 증감을 올바르게 판단 (2점)	5

7. 예시 답안

(1)

총 경우의 수: ${}_{N}C_{25}$ (총 N마리중 25마리를 순서 상관없이 뽑는 경우의 수)

문제의 사건이 일어날 경우의 수: ${}_{20}C_3 \times {}_{N-20}C_{22}$ (표식이 붙여진 20마리 중 3마리를 뽑을 경우의 수 × 표식이 붙여지지 않은 $(N-20)$마리 중 $(25-3)$마리를 뽑을 경우의 수)

따라서 이 사건의 확률은

$$f(N) = \frac{{}_{20}C_3 \times {}_{N-20}C_{22}}{{}_{N}C_{25}} = \frac{\dfrac{20!}{3!(20-3)!}\,\dfrac{(N-20)!}{(22)!(N-20-22)!}}{\dfrac{N!}{25!(N-25)!}} = \frac{20!25!(N-20)!(N-25)!}{3!17!22!(N-42)!N!}$$

답안으로 가능한 다른 표현들

$$f(N) = \frac{{}_{20}C_3 \times {}_{N-20}C_{22}}{{}_{N}C_{25}},\quad f(N) = \frac{20\times 19\times 18\times 25\times 24\times 23\times (N-20)!(N-25)!}{3!(N-42)!N!}$$

(2)

$$g(N) = \frac{\dfrac{{}_{20}C_3 \times {}_{N+1-20}C_{22}}{{}_{N+1}C_{25}}}{\dfrac{{}_{20}C_3 \times {}_{N-20}C_{22}}{{}_{N}C_{25}}} = \frac{\dfrac{20!25!(N+1-20)!(N+1-25)!}{3!17!22!(N+1-42)!(N+1)!}}{\dfrac{20!25!(N-20)!(N-25)!}{3!17!22!(N-42)!N!}} = \frac{(N-19)(N-24)}{(N-41)(N+1)} = \frac{N^2-43N+456}{N^2-40N-41}$$

(3) $42 \le N$ 일 때, $f(N) > 0$ 이므로 $f(N+1) > f(N)$일 필요충분조건은

$1 < \dfrac{f(N+1)}{f(N)} = \dfrac{N^2-43N+456}{N^2-40N-41}$ 즉, $N^2-43N+456 > N^2-40N-41$ 이다.

따라서 $3N < 497$, $N < \dfrac{497}{3} = 165.666...$ 이다.

N 은 자연수이므로 $42 \le N \le 165$

마찬가지로 $f(N+1) < f(N)$ 일 필요충분조건은 $N > 165.666...$ 이다.

N 은 자연수 이므로 $N \ge 166$

(4) (3)으로부터 42이상의 자연수의 집합에서 정의된 함수 $f(N)$에 대해, $42 \le N \le 165$일 때 $f(N) < f(N+1)$ 이고, $N \ge 166$일 때 $f(N) > f(N+1)$ 이다.

즉, $f(42) < f(43) < \cdots < f(165) < f(166) > f(167) > \cdots$ 이므로 $N = 166$ 일 때 $f(N)$ 은 최대가 된다.

9 자연계열 논술고사 (오후)

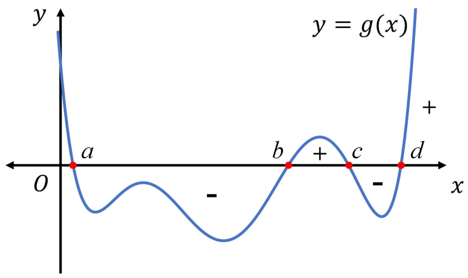
1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	다항함수, 함수의 개형, 미분, 이계도함수, 롤의 정리
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

문제 2 (20점)

다음의 예는 함수 $g(x)$의 그래프와 함숫값의 부호를 나타낸 표이다. 방정식 $g(x)=0$은 양의 실근 a, b, c, d를 갖는다.



x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$
$g(x)$	$g(0)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

다음 롤의 정리에 따라, 위의 미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 a와 b 사이에 $g'(x)=0$의 양의 실근이 하나 이상 존재함을 알 수 있다.

<롤의 정리>

함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $g(a) = g(b)$이면 $g'(c) = 0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

실수 계수를 갖는 n차 다항함수 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$가 다음의 조건 (a)와 (b)를 만족한다.

(a) $a_n > 0,\ a_{n-1} \cdots a_1 a_0 \neq 0$
(b) 함수 $f(x), f'(x), f''(x)$의 그래프들은 x축에 접하지 않는다.

이러한 다항함수 $f(x)$에 대하여 세 방정식 $f(x)=0,\ f'(x)=0,\ f''(x)=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수를 각각 $k_0,\ k_1,\ k_2$라고 하자.

(1) $a_0 > 0$ 이면 $f(x) = 0$의 서로 다른 양의 실근의 개수 k_0가 짝수이고, $a_0 < 0$ 이면 k_0가 홀수임을 위의 제시문에 주어진 것과 같은 표를 이용하여 설명하시오.

(2) 롤의 정리를 이용하여 $k_0 \leq k_1 + 1$ 이 성립함을 설명하시오.

(3) $n \geq 1$이고 a_0와 a_1의 부호가 같은 경우, $k_0 \leq k_1$ 이 성립함을 설명하시오.

(4) $n \geq 2$이고 $a_0,\ a_1,\ a_2$의 부호가 모두 같은 경우, $k_0 \leq k_2$ 이 성립함을 설명하시오.

(5) 다항함수 $f(x) = x^4 + 2718x^3 - 2818x^2 - 3141x - 5926$는 제시문의 조건 (a)와 (b)를 만족한다. 위의 결과들을 이용하여 방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 양의 실근의 개수를 구하시오.

3. 출제 의도

다항식으로 주어진 방정식의 서로 다른 양의 실근의 개수에 관한 조건을 탐구하는 과정을 통하여, 롤의 정리 및 연속함수와 다항함수의 기본적인 특성을 이해하는지 평가하고, 해답을 유도하는 과정이 요구하는 수학적 사고력을 평가하고자 하였다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취 기준

구분		과목명	교육과정 및 성취기준
제시문	1	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{2}$ 도함수 [12수학Ⅱ02-04] 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다. (75쪽) [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. (75쪽)
		평가준거 성취기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (나) 도함수 [12수학Ⅱ02-04,05-①] 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.(103쪽)
	2	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. (75쪽) [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. (75쪽)
		평가준거 성취기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. (104쪽) [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. (104쪽)
	3	교육과정 성취기준	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.(87쪽)
		평가준거 성취기준	[미적분] - (2)미분법 - (나) 여러 가지 미분법 [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.(126쪽)
문항 (1)	1	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (1)함수의 극한과 연속 - $\boxed{1}$ 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.(74쪽)
		평가준거 성취기준	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (가) 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.(102쪽)
	2	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (1)함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(74쪽)
		평가준거 성취기준	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (나) 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(102쪽)
	3	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (2)미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.(75쪽) [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.(75쪽) [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.(75쪽)

<table>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><td></td><td>평가준거
성취기준</td><td>[수학Ⅱ] - (2)미분 - (다) 도함수의 활용
[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.(104쪽)
[12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.(104쪽)
[12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.(104쪽)</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>문항 (2)</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>과목명</td><td>교육과정 및 성취기준</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>교육과정
성취기준</td><td>[수학Ⅱ]- (2)미분 - 3 도함수의 활용
[12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.(75쪽)
[12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.(75쪽)</td></tr>
<tr><td>평가준거
성취기준</td><td>[수학Ⅱ] - (2)미분 - (다) 도함수의 활용
[12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. (104쪽)
[12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. (104쪽)</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>문항 (3)</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>과목명</td><td>교육과정 및 성취기준</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>교육과정
성취기준</td><td>[수학Ⅱ] - (2)미분 - 2 도함수
[12수학Ⅱ02-04] 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.(75쪽)
[12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.(75쪽)</td></tr>
<tr><td>평가준거
성취기준</td><td>[수학Ⅱ] - (2)미분 - (나) 도함수
[12수학Ⅱ02-04,05-①] 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.(103쪽)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>교육과정
성취기준</td><td>[수학Ⅱ] - (1)함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속
[12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(74쪽)</td></tr>
<tr><td>평가준거
성취기준</td><td>[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (나) 함수의 연속
[12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(102쪽)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>교육과정
성취기준</td><td>[수학Ⅱ] - (2)미분 - 3 도함수의 활용
[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.(75쪽)
[12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.(75쪽)
[12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.(75쪽)</td></tr>
<tr><td>평가준거
성취기준</td><td>[수학Ⅱ] - (2)미분 - (다) 도함수의 활용
[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.(104쪽)
[12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.(104쪽)
[12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.(104쪽)</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

문항		과목명	교육과정 및 성취기준
문항 (4)	1	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (2)미분 - $\boxed{2}$ 도함수 [12수학Ⅱ02-04] 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.(75쪽) [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.(75쪽)
		평가준거 성취기준	[수학Ⅱ] - (2)미분 - (나) 도함수 [12수학Ⅱ02-04,05-①] 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.(103쪽)
	2	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (2)미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.(75쪽)
		평가준거 성취기준	[수학Ⅱ] - (2)미분 - (다) 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. (104쪽)
	3	교육과정 성취기준	[미적분] - (2)미분법 - $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.(87쪽)
		평가준거 성취기준	[미적분] - (2)미분법 - (나) 여러 가지 미분법 [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.(126쪽)

문항		과목명	교육과정 및 성취기준
문항 (5)	1	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (2)미분 - $\boxed{2}$ 도함수 [12수학Ⅱ02-04] 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.(75쪽) [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.(75쪽)
		평가준거 성취기준	[수학Ⅱ] - (2)미분 - (나) 도함수 [12수학Ⅱ02-04,05-①] 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.(103쪽)
	2	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (2)미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.(75쪽)
		평가준거 성취기준	[수학Ⅱ] - (2)미분 - (다) 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.(104쪽)
	3	교육과정 성취기준	[미적분] - (2)미분법 -$\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다. (87쪽)
		평가준거 성취기준	[미적분] - (2)미분법 -(나) 여러 가지 미분법 [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다. (126쪽)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	홍성복 외	지학사	2020	78-93
	수학II	고성은 외	좋은책신사고	2020	75-90
	미적분	황선욱 외	미래엔	2020	110-117
	미적분	김원경 외	비상교육	2020	90

5. 문항 해설

(1) 최고차항의 계수가 양수인 다항함수 $f(x)$의 그래프의 개형과 제시문에 주어진 것과 같은 함숫값의 부호를 나타낸 표를 이용하면 $f(x)$의 상수항 a_0의 부호가 $f(x)=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 홀수인지 짝수인지를 결정함을 알 수 있다.

(2) 롤의 정리로부터 다항함수로 정의되는 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 양의 실근 사이에는 반드시 하나 이상의 $f'(x)=0$의 양의 실근이 존재한다. 이로부터 문제의 부등식이 성립함을 알 수 있다.

(3) $f'(x)$의 상수항이 a_1이므로 문항 (1)의 결과로부터 a_0와 a_1의 부호가 같은 경우, $f(x)=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수와 $f'(x)=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 모두 홀수이거나 모두 짝수임을 알 수 있다. 문항 (2)에 주어진 부등식을 이용한다.

(4) 방정식 $f(x)=0$과 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수에 관한 문항 (3)의 결과를 방정식 $f'(x)=0$과 방정식 $f''(x)=0$에 적용한다.

(5) 위의 문항 (4)의 결과를 적용하여, 주어진 4차 다항함수로부터 정의되는 방정식의 서로 다른 양의 실근의 개수가 만족하는 부등식을 얻고 문항 (1)의 결과를 이용한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	예시 답안의 표와 유사한 표를 그리고 정확한 논리 전개로 설명함 (5점)	5
(2)	서로 다른 양의 실근을 $0 < r_1 < r_2 < \ \dots \ < r_{k_0}$와 같이 표현하고, 롤의 정리를 적용하여 설명함 (3점)	3
(3)	문항 (1)의 결과를 이용하여 $k_0 \neq k_1 + 1$를 도출하고, 문항 (2)의 결과를 이용하여 설명함 (5점)	5
(4)	문항 (3)의 결과를 이용하여 설명함 (3점)	3
(5)	문항 (4)의 결과를 이용하여 $k_0 \leq k_2$를 도출하고, 문항 (1)의 결과를 이용하여 $k_0 = 1$를 구함 (4점)	4

7. 예시 답안

(1) $f(x)$의 그래프가 x축에 접하지 않으므로 근의 전후에서 $f(x)$의 값의 부호가 바뀐다. $f(x) = 0$의 서로 다른 양의 실근을 $r_1 < r_2 < \ \dots \ < r_{k_0}$라 하면, $a_0 > 0$인 경우와 $a_0 < 0$인 경우의 제시문에 주어진 것과 같은 표는 각각 아래와 같다.

(a) $a_0 > 0$인 경우

x	0	$\cdots$	r_1	$\cdots$	r_2	$\cdots$	$\cdots$	r_{k_0}	$\cdots$
$f(x)$	a_0	+	0	-	0	+	$\cdots$	0	$(-1)^{k_0}$의 부호

(b) $a_0 < 0$인 경우

x	0	$\cdots$	r_1	$\cdots$	r_2	$\cdots$	$\cdots$	r_{k_0}	$\cdots$
$f(x)$	a_0	-	0	+	0	-	$\cdots$	0	$(-1)^{k_0+1}$의 부호

$f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로, $r_{k_0} < x$인 x의 구간에서 $f(x)$의 값의 부호는 $+$이어야 한다. 따라서, $a_0 > 0$일 때 $(-1)^{k_0}$의 부호가 $+$이어야 하므로 k_0는 짝수이다. 마찬가지로 $a_0 < 0$일 때 $k_0 + 1$이 짝수이어야 하므로 k_0는 홀수이다.

만약 $f(x) = 0$의 양의 실근이 존재하지 않는다면 즉, $k_0 = 0$이라면, 위와 같은 표의 $x > 0$ 구간 전체에서 함숫값의 부호가 $+$이어야 하므로 $a_0 > 0$이다. 따라서 이 경우도 (1)은 성립한다.

(2) 항상 $k_1 \geq 0$이므로 $k_0 \leq 1$인 경우 주어진 부등식은 당연히 성립한다.
이제 $k_0 \geq 2$이라고 가정하고, $f(x) = 0$의 서로 다른 양의 실근을 $r_1 < r_2 < \ \dots \ < r_{k_0}$라 하자.

각 $1 \le i \le k_0 - 1$에 대하여 롤의 정리에 의해 $r_i < s_i < r_{i+1}$인 $f'(x) = 0$의 양의 실근 s_i이 존재한다.

즉, $r_1 < s_1 < r_2 < s_2 < r_3 < \ ... \ < r_{k_0 - 1} < s_{k_0 - 1} < r_{k_0}$인 $f'(x) = 0$의 서로 다른 양의 실근 $s_1, s_2, \ ..., s_{k_0 - 1}$이 존재한다. 따라서 $k_1 \ge k_0 - 1$이 성립하므로 $k_0 \le k_1 + 1$이다.

(3) 문항 (1)에 의해 $f(x)$의 상수항인 a_0와 $f'(x)$의 상수항인 a_1의 부호가 같은 경우, k_0와 k_1은 모두 짝수이거나 모두 홀수이다. 따라서 $k_0 \ne k_1 + 1$ 이다. 문항 (2)에 의해 $k_0 \le k_1 + 1$이므로 $k_0 \le k_1$ 이다.

(4) 문항 (3)에 의해 $k_0 \le k_1$이다. $f'(x)$의 상수항인 a_1과 $f''(x)$의 상수항인 $2a_2$의 부호가 같으므로 마찬가지로 문항 (3)에 의하여 $k_1 \le k_2$이다. 따라서 $k_0 \le k_1 \le k_2$ 이므로 $k_0 \le k_2$이다.

(5) 주어진 다항함수 $f(x)$는 a_0, a_1, a_2의 부호가 모두 같다. 따라서, 문항 (4)의 결과에 의해 $k_0 \le k_2$이다. 또한, $f''(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^2 + 3 \cdot 2718 \cdot x - 2 \cdot 2818$이고 $f''(x) = 0$은 2차 방정식이므로, $k_2 \le 2$이다. 따라서, $k_0 \le k_2 \le 2$이다.

문항 (1)에 의해 $a_0 < 0$인 경우에 k_0는 홀수이므로, $k_0 \le 2$로부터 $k_0 = 1$임을 알 수 있다. 따라서, $f(x) = 0$의 서로 다른 양의 실근의 개수는 1이다.

10 자연계열 논술고사 (오후)

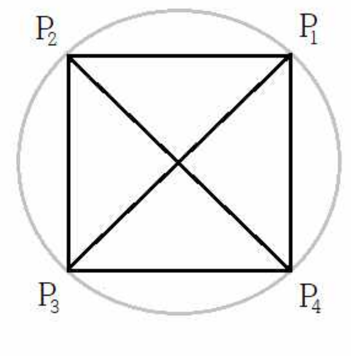
1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 확률과 통계, 미적분
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 조합, 수열의 극한, 정적분과 급수
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

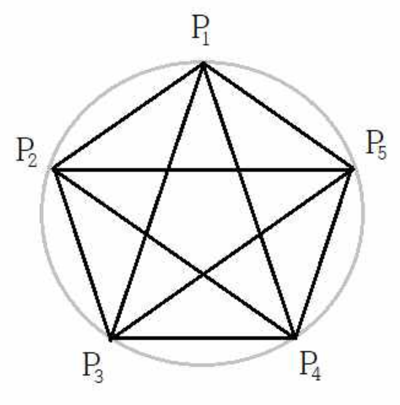
2. 문항 및 제시문

문제 3 (20점)

반지름이 1인 원에 내접하는 정다각형들을 생각하자. 이러한 정n각형의 꼭짓점들을 시곗바늘이 도는 방향과 반대인 방향의 순서대로 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n$이라 하자.



$n = 4$



$n = 5$

정n각형의 두 꼭짓점을 잇는 선분들은 ${}_n\mathrm{C}_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 개 있다. 이 선분들의 길이의 평균을 M_n이라 하자. 가령 정사각형의 두 꼭짓점을 잇는 선분은 6개 있고 그 길이의 평균 M_4는

아래와 같다.

$$M_4 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + 2 + 2}{6} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{3}$$

(1) 정n각형의 꼭짓점 P_i, P_j를 잇는 선분의 길이 $\overline{\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j}$를 구하시오. (단, $1 \leq i < j \leq n$ 이다.)

(2) 정n각형의 첫번째 꼭짓점과 다른 꼭짓점을 잇는 선분들의 길이 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$, $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3}$, …, $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_n}$의 평균을 L_n이라 하자. $M_n = L_n$임을 설명하시오.

(3) $\lim_{n \to \infty} M_n$의 값을 구하시오.

(4) 정$2n$각형의 꼭짓점들이 홀수번째 꼭짓점은 검은색으로, 짝수번째 꼭짓점은 흰색으로 칠해져 있다. 서로 같은 색 두 꼭짓점을 잇는 선분들의 개수와 서로 다른 색 두 꼭짓점을 잇는 선분들의 개수를 각각 구하시오.

(5) 위 (4)의 정$2n$각형에서 서로 같은 색 두 꼭짓점을 잇는 선분들의 길이의 평균을 F_n이라 하고, 서로 다른 색 두 꼭짓점을 잇는 선분들의 길이의 평균을 G_n이라 하자. $\lim_{n \to \infty} F_n$, $\lim_{n \to \infty} G_n$의 값을 각각 구하시오.

3. 출제 의도

정다각형의 두 꼭짓점을 잇는 선분들의 길이와 그 평균에 대한 문제이다. 삼각함수의 기본 성질, 정적분과 급수의 관계, 경우의 수, 평균의 정의, 수열의 극한 등을 이해하고 적절히 응용할 수 있는지 평가한다.

(1) 삼각함수를 이용하여 간단한 평면도형에서 선분의 길이를 구할 수 있는지 평가한다.
(2) 평균의 정의와 정다각형의 대칭성을 이해하는지 평가한다.
(3) 정적분과 급수의 관계로부터 급수의 극한을 구할 수 있는지 평가한다.
(4) 간단한 경우의 수를 구할 수 있는지 평가한다.
(5) 모집단을 나누었을 때, 각 집단의 평균과 전체의 평균과의 관계를 이해하는지 평가한다.
수열의 극한의 기본 성질을 이해하는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취 기준

		과목명	교육과정 및 성취기준
제시문	1	교육과정 성취기준	[수학] - (5) 확률과 통계 - $\boxed{2}$ 순열과 조합 [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.(53쪽)
제시문	1	평가준거 성취기준	[수학] - (5) 확률과 통계 - (나) 순열과 조합 [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.(44쪽)
제시문	2	교육과정 성취기준	[수학 Ⅰ] - (3) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-01] 수열의 뜻을 안다. (65쪽)
제시문	2	평가준거 성취기준	[수학 Ⅰ] - (3) 수열 - (가) 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-01-①] 수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다. (81쪽)
제시문	3	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (3) 통계 - $\boxed{1}$ 확률분포 [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다. (98쪽)
제시문	3	평가준거 성취기준	[확률과 통계] - (3) 통계 - (가) 확률분포 [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다. (155쪽)
		과목명	교육과정 및 성취기준
문항 (1)	1	교육과정 성취기준	[수학 Ⅰ] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수 [12수학Ⅰ02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.(64쪽) [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.(64쪽)
문항 (1)	1	평가준거 성취기준	[수학 Ⅰ] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수 [12수학Ⅰ02-01-②] 호도법의뜻을 알 수 있다.(80쪽) [12수학Ⅰ02-02-①] 삼각함수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.(80쪽)
문항 (1)	2	교육과정 성취기준	[수학 Ⅰ] - (3) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-01] 수열의 뜻을 안다.(65쪽)
문항 (1)	2	평가준거 성취기준	[수학 Ⅰ] - (3) 수열 - (가) 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-01-①] 수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다.(81쪽)

문항 (2)

	과목명	교육과정 및 성취기준
1	교육과정 성취기준	[수학] - (5) 확률과 통계 - $\boxed{2}$ 순열과 조합 [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.(53쪽)
	평가준거 성취기준	[수학] - (5) 확률과 통계 - (나) 순열과 조합 [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.(44쪽)
2	교육과정 성취기준	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-01] 수열의 뜻을 안다.(65쪽)
	평가준거 성취기준	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - (가) 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-01-①] 수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다.(81쪽)
3	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (3) 통계 - $\boxed{1}$ 확률분포 [12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.(98쪽) [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.(98쪽)
	평가준거 성취기준	[확률과 통계] - (3) 통계 - (가) 확률분포 [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.(155쪽)

문항 (3)

	과목명	교육과정 및 성취기준
1	교육과정 성취기준	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-01] 수열의 뜻을 안다.(65쪽)
	평가준거 성취기준	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - (가) 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-01-①] 수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다.(81쪽)
2	교육과정 성취기준	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - $\boxed{2}$ 수열의 합 [12수학Ⅰ03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(65쪽)
	평가준거 성취기준	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - (나) 수열의 합 [12수학Ⅰ03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(82쪽)
3	교육과정 성취기준	[미적분] - (1) 수열의 극한 - $\boxed{1}$ 수열의 극한 [12미적01-01] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.(85쪽)
	평가준거 성취기준	[미적분] - (1) 수열의 극한 - (가) 수열의 극한 [12미적01-01] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.(124쪽)
4	교육과정 성취기준	[미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.(88쪽)
	평가준거 성취기준	[미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법 [12미적03-03-③] 삼각함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.(128쪽)

	5	교육과정 성취기준	[미적분] - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.(88쪽)
		평가준거 성취기준	[미적분] - (3) 적분법 - (나) 정적분의 활용 [12미적03-04-①] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(129쪽)
문항 (4)		과목명	교육과정 및 성취기준
	1	교육과정 성취기준	[수학] - (5) 확률과 통계 - ① 경우의 수 [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.(53쪽)
		평가준거 성취기준	[수학] - (5) 확률과 통계 - (가) 경우의 수 [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.(44쪽)
	2	교육과정 성취기준	[수학] - (5) 확률과 통계 - ② 순열과 조합 [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.(53쪽)
		평가준거 성취기준	[수학] - (5) 확률과 통계 - (나) 순열과 조합 [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.(44쪽)
	3	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용 [12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.(97쪽)
		평가준거 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - (가) 확률의 뜻과 활용 [12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.(154쪽)
문항 (5)		과목명	교육과정 및 성취기준
	1	교육과정 성취기준	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - ① 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-01] 수열의 뜻을 안다.(65쪽)
		평가준거 성취기준	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - (가) 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-01-①]수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다.(81쪽)
	2	교육과정 성취기준	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - ② 수열의 합 [12수학Ⅰ03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(65쪽)
		평가준거 성취기준	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - (나) 수열의 합 [12수학Ⅰ03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(82쪽)
	3	교육과정 성취기준	[미적분] - (1) 수열의 극한 - ① 수열의 극한 [12미적01-01] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.(85쪽) [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.(85쪽)

	평가준거 성취기준	[미적분] - (1) 수열의 극한 - (가) 수열의 극한 [12미적01-01] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.(124쪽) [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.(124쪽)
4	교육과정 성취기준	[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.(88쪽)
	평가준거 성취기준	[미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법 [12미적03-03-③] 삼각함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.(128쪽)
5	교육과정 성취기준	[미적분] - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.(88쪽)
	평가준거 성취기준	[미적분] - (3) 적분법 - (나) 정적분의 활용 [12미적03-04-①] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(129쪽)
6	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용 [12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.(97쪽)
	평가준거 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - (가) 확률의 뜻과 활용 [12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.(154쪽)
7	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포 [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.(98쪽)
	평가준거 성취기준	[확률과 통계] - (3) 통계 - (가) 확률분포 [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.(155쪽)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	류희찬 외	천재교과서	2018	258-262, 269
	수학	김원경 외	비상교육	2018	243-246, 254
	수학 Ⅰ	김원경 외	비상교육	2018	81
	수학 Ⅰ	류희찬 외	천재교과서	2018	92
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2019	69, 152
	미적분	이준열 외	천재교육	2019	166
	미적분	김원경 외	비상교육	2019	17
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	17
	확률과 통계	고성은 외	좋은책신사고	2019	84-87
	확률과 통계	김원경 외	비상교육	2019	77-80

5. 문항 해설

(1) 정n각형의 인접한 두 꼭짓점 사이의 중심각은 $\dfrac{2\pi}{n}$이므로 i번째, j번째 꼭짓점 사이의 중심각을 구할 수 있다. 주어진 중심각을 가지는 부채꼴의 현의 길이를 삼각함수를 이용하여 구한다.

(2) 한 꼭짓점 P_i와 다른 꼭짓점을 이은 선분들의 길이의 평균은 각 $1 \le i \le n$에 대해 모두 동일한 값 L_n이다. 이 n개의 식을 모두 더하면 식의 한쪽 변에 임의의 두 꼭짓점을 잇는 선분은 두 번씩 나타난다. 이로부터 $M_n = L_n$을 얻을 수 있다.

(3) (1)과 (2)에 의해 M_n을 삼각함수의 적당한 급수로 나타낼 수 있다. 정적분과 급수와의 관계에 의해 $n \to \infty$일 때 이 급수의 극한은 삼각함수의 정적분과 같다.

(4) 정$2n$각형에서 검은색, 흰색 꼭짓점들은 각각 n개 있다. 서로 다른 색 꼭짓점을 잇는 선분의 개수는 검은색 꼭짓점 중 하나, 흰색 꼭짓점 중 하나를 선택하는 경우의 수와 같고, 서로 같은 색 꼭짓점을 잇는 선분의 개수는 전체에서 이 개수를 빼서 얻을 수 있다.

(5) 정$2n$각형에서 검은색 꼭짓점들은 정n각형의 꼭짓점들이다. 따라서 정$2n$각형에서 두 꼭짓점이 모두 검은색인 선분의 개수는 정n각형의 두 꼭짓점을 잇는 선분의 개수 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 이고, 그 길이의 평균은 M_n 이다. 두 꼭짓점이 모두 흰색인 선분의 개수와 길이의 평균도 마찬가지이다. 이로부터 $F_n = M_n$임을 알 수 있다.
한편, (4)에서 구한 정$2n$각형의 서로 같은 색 꼭짓점을 잇는 선분들, 서로 다른 색 두 꼭짓점을 잇는 선분들 각각의 개수로부터 M_{2n}을 F_n과 G_n으로 나타낼 수 있다. 이로부터 G_n의 극한값을 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	답을 구하고 (그림 등을 이용하여) 설명함 (3점)	3
(2)	설명과 식의 전개가 논리적이고 정확함 (4점)	4
(3)	급수의 극한을 정적분으로 나타내어 극한을 구하였으며 식의 전개과정이 정확함 (4점)	4
(4)	같은 색, 다른 색 꼭짓점을 잇는 선분의 개수중 하나만 구함 (1점) 같은 색, 다른 색 꼭짓점을 잇는 선분의 개수 모두 구함 (3점)	3
(5)	$\lim\limits_{n\to\infty} F_n$을 구하고 그 과정을 설명함 (3점) $\lim\limits_{n\to\infty} G_n$을 구하고 그 과정을 설명함 (3점)	6

7. 예시 답안

(1) 정n각형의 인접한 두 꼭짓점 사이의 중심각은 $\dfrac{2\pi}{n}$ 이므로 i번째, j번째 꼭짓점 사이의 중심각은 $k=j-i$라 하면 $\dfrac{2\pi}{n}k$ ($1 \le k \le \dfrac{n}{2}$인 경우) 또는 $2\pi - \dfrac{2\pi}{n}k$ ($\dfrac{n}{2} \le k \le n-1$인 경우) 이다. 반지름 1인 원에서 중심각이 $0 \le \theta \le \pi$인 현의 길이는 $2\sin\dfrac{\theta}{2}$이며 중심각이 $2\pi - \theta$인 현 ($\pi \le \theta \le 2\pi$)의 길이 또한 $2\sin\dfrac{2\pi-\theta}{2} = 2\sin\left(\pi - \dfrac{\theta}{2}\right) = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$ 이므로 i번째, j번째 꼭짓점 사이의 거리 $\overline{\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j}$는 $2\sin\dfrac{\pi}{n}k$ 이다.

(2) 꼭짓점 P_i와 다른 꼭짓점을 이은 선분들의 길이의 평균은 각 $1 \le i \le n$에 대해 모두 동일한 값 L_n이다. 즉,

$$L_n = \frac{1}{n-1}\left(\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} + \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3} + \cdots + \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_n}\right)$$
(P_1와 다른 꼭짓점을 이은 선분의 길이의 평균)

$$L_n = \frac{1}{n-1}\left(\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1} + \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} + \cdots + \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_n}\right)$$
(P_2와 다른 꼭짓점을 이은 선분의 길이의 평균)

....

$$L_n = \frac{1}{n-1}\left(\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_1} + \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_2} + \cdots + \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n-1}}\right)$$
(P_n와 다른 꼭짓점을 이은 선분의 길이의 평균)

임의의 두 꼭짓점을 잇는 선분은 위의 n개의 식의 우변에서 두 번씩 나타난다. 가령 꼭짓점 P_i, P_j를 잇는 선분은 i번째, j번째 식의 우변에 한 번씩 나타난다. 따라서 위의 n개의 식을 모두 더하면

$$n \times L_n = \frac{1}{n-1} \times 2 \times (\text{모든 선분의 길이의 합})$$
$$= \frac{1}{n-1} \times 2 \times \frac{n(n-1)}{2} \times M_n = n \times M_n$$

을 얻고, 따라서 $L_n = M_n$ 이다.

(3) (1)과 (2)에 의해

$$M_n = L_n = \frac{1}{n-1}\left(\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} + \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3} + \cdots \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_n}\right)$$
$$= \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} 2\sin\left(\frac{\pi}{n}k\right) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2\sin\left(\pi\frac{k}{n}\right) \qquad \left(\because \sin\left(\pi\frac{n}{n}\right) = 0\right)$$

이고, $n \to \infty$일 때 극한을 취하면 정적분과 급수 사이의 관계에 의해 극한값은

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1} \times \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2\sin\left(\pi\frac{k}{n}\right)$$
$$= 1 \times \int_0^1 2\sin\pi x\,dx = -\frac{2}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1 = \frac{4}{\pi}$$

이다.

(4) 정$2n$각형에서 검은색, 흰색 꼭짓점들은 각각 n개 있다. 서로 다른 색 꼭짓점을 잇는 선분의 개 수는 검은색 꼭짓점 중 하나, 흰색 꼭짓점 중 하나를 선택하는 경의의 수와 같으므로 $n \times n = n^2$이다. 서로 같은 색 꼭짓점을 잇는 선분의 개수는 전체에서 이 개수를 뺀 수이므로 ${}_{2n}\mathrm{C}_2 - n^2 = \dfrac{2n(2n-1)}{2} - n^2 = n(n-1)$ 이다.

(5) 정$2n$각형에서 검은색 꼭짓점들은 정n각형의 꼭짓점들이다. 따라서 정$2n$각형에서 두 꼭짓점이 모두 검은색인 선분의 개수는 정n각형의 두 꼭짓점을 잇는 선분의 개수 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 이고, 그 길이의 평균은 M_n 이다. 두 꼭짓점이 모두 흰색인 선분의 개수와 길이의 평균도 마찬가지이다. 따라서 같은 색 꼭짓점을 잇는 선분의 길이의 평균은 $F_n = \dfrac{1}{2}M_n + \dfrac{1}{2}M_n = M_n$ 이고 그 극한은 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = \lim\limits_{n\to\infty} M_n = \dfrac{4}{\pi}$ 이다.

정$2n$각형의 두 꼭짓점들을 잇는 선분들의 길이의 평균 M_{2n}은 서로 같은색 꼭짓점을 잇는 선분들, 서로 다른색 두 꼭짓점을 잇는 선분들 각각의 개수와 길이의 평균으로부터

$$M_{2n} = \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)/2}F_n + \frac{n^2}{2n(2n-1)/2}G_n = \frac{n-1}{2n-1}F_n + \frac{n}{2n-1}G_n$$

와 같이 쓸 수 있다. $n \to \infty$일 때 극한을 취하면 $\lim\limits_{n\to\infty} M_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} M_n = \dfrac{4}{\pi}$ 로부터

$\dfrac{4}{\pi} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{\pi} + \dfrac{1}{2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} G_n$, 즉, $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = \dfrac{4}{\pi}$ 이다.