◆ 문항카드 5 (자연계열_오전_1번 문항)

[한양대학교(서울) 문항정보]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 오전 (수학) / 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	부분적분법, 입체도형의 부피, 지수함수와 로그함수의 극한, 곡선의 길이, 도함수를 활용한 함수의 최대와 최소
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 곡선 $y=e^x\,(0 \le x \le \ln t)$와 y축, 직선 $y=t$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 두 입체도형 A와 B가 있다. 도형 A는 y축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형이고, 도형 B는 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형이다. 도형 A의 부피를 $V(t)$, 도형 B의 부피를 $W(t)$라 할 때, 극한값 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t}\frac{W(t)}{V(t)}$를 구하시오.

2. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=(x+1)^{\frac{3}{2}}\ (-1 \le x \le t)$의 길이를 $l(t)$라 하고, 이 곡선 위의 점 $\left(t,\,(t+1)^{\frac{3}{2}}\right)$과 원점 사이의 거리를 $d(t)$라 하자. 이때 극한값 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{l(t)}{d(t)}$를 구하시오.

3. 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $n^2-12n+37$인 정사각형의 넓이를 a_n, 한 변의 길이가 $2n+1$인 정사각형의 넓이를 b_n이라고 하자. $\dfrac{a_n}{b_n}$이 최소가 되는 n을 구하고, 이때 $\dfrac{a_n}{b_n}$의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

자연계열 오전 - 1번 문제는 고등학교 수학교과과정 중 수학II와 미적분의 주요내용을 바탕으로 출제하였다. 다음과 같이 3개의 소문항을 통해서, 여러 가지 미분법, 적분의 활용, 함수의 극한 등을 적절히 활용하여 문제를 논리적으로 해결할 수 있는지를 묻고 있다. 특히, 수학의 개념과 원리를 정확히 이해하고 수학적 사고력을 바탕으로 논리적으로 문제를

해결할 수 있는 능력을 측정하는데 주안점을 두고 출제를 하였다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제 1-1	미적분 - (2) 미분법 - [1] 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다. 미적분 - (3) 적분법 - [2] 정적분의 활용 [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
문제 1-2	수학Ⅱ - (1) 함수의 극한과 연속 - [1] 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. 미적분 - (3) 적분법 - [2] 정적분의 활용 [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 1-3	수학Ⅰ - (3) 수열 - [1] 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-01] 수열의 뜻을 안다. 수학Ⅱ - (2) 미분 - [3] 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학Ⅰ	고성은 외	좋은책 신사고	2018	p.113~p.114
	고등학교 수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2018	p.20~p.24
	고등학교 수학Ⅱ	김원경 외	비상교육	2018	p.86~p.89
	고등학교 미적분	류희찬 외	천재교과서	2019	p.54~p.61 p.186~p.188 p.191~p.198
	고등학교 미적분	이준열 외	천재교육	2019	p.155~p.158

5. 문항 해설

문항 1. 입체도형의 단면의 넓이가 주어졌을 때 정적분을 이용하여 두 종류의 입체도형의 부피를 구하고, 함수의 극한을 이용하여 극한값을 구하는 문제이다.

문항 2. 주어진 곡선의 길이를 미분과 적분을 이용하여 구하고, 곡선 위의 점과 원점 사이의 거리와의 비율을 구한 뒤, 함수의 극한을 이용해 극한값을 구하는 문제이다.

문항 3. 몫의 미분법을 통해서 함수의 도함수를 구하고 이를 활용하여 함수의 그래프의 증가와 감소를 파악하도록 하였다. 미분과 그래프의 증가와 감소를 이용해 최솟값을 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	정적분을 이용하여 도형의 부피 $V(t)$ 와 $W(t)$ 를 정확히 구하였는가?	20
	극한값을 정확히 구하였는가?	10
2	곡선의 길이 $l(t)$ 와 원점으로부터의 거리 $d(t)$ 를 정확히 구하였는가?	30
	극한값을 정확히 구하였는가?	10
3	미분을 이용하여 그래프의 개형과 최솟값을 구하였는가?	20
	최소가 되는 n 과 이때의 $\frac{a_n}{b_n}$ 을 정확히 구하였는가?	10

7. 예시 답안 혹은 정답

1. 정적분을 이용하면 $V(t)=\int_1^t (\ln y)^2\,dy$, $W(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\ln t}(t-e^x)^2\,dx$ 이다. 부분적분을 이용하면

$$V(t)=\int_1^t (\ln y)^2\,dy=[y(\ln y)^2]_1^t-2\int_1^t \ln y\,dy=t(\ln t)^2-2[y\ln y-y]_1^t=t(\ln t)^2-2t\ln t+2t-2$$

이고

$$W(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\ln t}(t-e^x)^2\,dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\ln t}e^{2x}-2te^x+t^2\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}[\frac{1}{2}e^{2x}-2te^x+t^2x]_0^{\ln t}=\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{2}t^2-2t^2+t^2\ln t-\frac{1}{2}+2t)=\frac{\sqrt{3}}{4}(t^2\ln t-\frac{3}{2}t^2+2t-\frac{1}{2})$$

따라서

$$\lim_{t\to\infty}\frac{W(t)}{V(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(t^2\ln t-\frac{3}{2}t^2+2t-\frac{1}{2})}{t(\ln t)^2-2t\ln t+2t-2}$$ 이고, 분모 분자를 $t^2\ln t$ 로 나눠주면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{W(t)}{V(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1-\frac{3}{2\ln t}+\frac{2}{t\ln t}-\frac{1}{2t^2\ln t}}{\frac{\ln t}{t}-\frac{2}{t}+\frac{2}{t\ln t}-\frac{2}{t^2\ln t}}=\infty$$ 가 된다.

2. 곡선의 길이 $l(t)$ 를 구하면

$$l(t)=\int_{-1}^t\sqrt{1+(\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}})^2}\;dx=\int_{-1}^t\sqrt{1+\frac{9}{4}(x+1)}\;dx$$
$$=\int_{-1}^t\sqrt{\frac{9}{4}x+\frac{13}{4}}\;dx=\left[\frac{8}{27}(\frac{9}{4}x+\frac{13}{4})^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^t=\frac{8}{27}(\frac{9}{4}t+\frac{13}{4})^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{27}$$

이다. 한편, $d(t)$는

$d(t)=\sqrt{t^2+((t+1)^{\frac{3}{2}})^2}=\sqrt{t^2+(t+1)^3}$ 이다.

따라서, $\dfrac{l(t)}{d(t)}=\dfrac{8}{27}\dfrac{(\frac{9}{4}t+\frac{13}{4})^{\frac{3}{2}}-1}{\sqrt{t^2+(t+1)^3}}$ 이 된다. 분모와 분자를 $t^{\frac{3}{2}}$로 나눈뒤 극한을 구하면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{l(t)}{d(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{8}{27}\frac{(\frac{9}{4}t+\frac{13}{4})^{\frac{3}{2}}-1}{\sqrt{t^2+(t+1)^3}}=\lim_{t\to\infty}\frac{8}{27}\frac{(\frac{9}{4}+\frac{13}{4}\frac{1}{t})^{\frac{3}{2}}-(\frac{1}{t})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{t}+(1+\frac{1}{t})^3}}=\frac{8}{27}(\frac{9}{4})^{\frac{3}{2}}=1$$

이 된다.

3. 양의 실수 x에 대하여 $f(x)=\dfrac{(x^2-12x+37)^2}{(2x+1)^2}$ 이라고 하자. 이 때, 도함수 $f'(x)$를 구하면

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{2(x^2-12x+37)(2x-12)(2x+1)^2-(x^2-12x+37)^2 2(2x+1)2}{(2x+1)^4} \\ &=\frac{4(x^2-12x+37)\big((x-6)(2x+1)-(x^2-12x+37)\big)}{(2x+1)^3}=\frac{4(x^2-12x+37)(x^2+x-43)}{(2x+1)^3} \end{aligned}$$

이때, $x^2-12x+37=(x-6)^2+1>0$이고, $x>0$일 때 $(2x+1)^3>0$이므로 도함수 $f'(x)$의 부호는 x^2+x-43에 의해 결정된다. x^2+x-43의 $x>0$인 근을 구하면 $x=\dfrac{-1+\sqrt{173}}{2}$ 이다.

$0<x<\dfrac{-1+\sqrt{173}}{2}$ 일 때 $f'(x)<0$ 이고, $x>\dfrac{-1+\sqrt{173}}{2}$ 일 때 $f'(x)>0$이므로, $x=\dfrac{-1+\sqrt{173}}{2}$ 에서 $f(x)$가 최소가 되는 걸 알 수 있다.

$13<\sqrt{173}<14$를 이용하면 $6<\dfrac{-1+\sqrt{173}}{2}<\dfrac{13}{2}<7$ 를 알 수 있다. 따라서 $n=6$ 또는 $n=7$인 경우에 $\dfrac{a_n}{b_n}$가 최소가 된다.

$\dfrac{a_6}{b_6}=\dfrac{1}{13^2}<\dfrac{4}{15^2}=\dfrac{a_7}{b_7}$이므로 $n=6$일 때 최솟값 $\dfrac{a_6}{b_6}=\dfrac{1}{13^2}$를 갖는다.

◆ 문항카드 6 (자연계열_오전_2번 문항)

[한양대학교(서울) 문항정보]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 오전 (수학) / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	절대부등식, 최대최소정리, 함수의 최대와 최소
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

1 이하의 모든 양의 실수 a, b, c와 $abcd=1$을 만족시키는 실수 d에 대하여 부등식

$$a+b+c+d+\frac{1}{abc+abd+acd+bcd}\geq M$$

을 만족시키는 양의 실수 M의 최댓값을 다음과 같이 구하고자 한다.

위 부등식을 아래와 같이 쓰자.

$$a+b+c+\frac{1}{abc}+\frac{1}{abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\geq M$$

$f(x)=a+b+x+\dfrac{1}{abx}+\dfrac{1}{abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}}$ (단, $0<x\leq 1$)이라 하면,

$$f'(x)=\frac{\boxed{(ㄱ)}}{x^2}\left\{\frac{1}{\left(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}\right)^2}-\frac{1}{ab}\right\}\leq 0$$

이므로 $f(c)\geq f(1)$이 성립한다.

이번에는 $f(1)=g(b)$가 되도록 $g(x)=a+x+1+\dfrac{1}{ax}+\dfrac{1}{ax+\frac{1}{a}+\frac{1}{x}+1}$ (단, $0<x\leq 1$)이라 하면,

$g'(x)\leq 0$이므로 $g(b)\geq g(1)$이 성립한다.

마지막으로 $g(1)=h\left(a+\dfrac{1}{a}+2\right)$가 되는 $h(x)$를 생각하면……

(이하 생략)

1. 제시문의 (ㄱ)에 알맞은 수식을 쓰고 $f'(x)\leq 0$인 이유를 설명하시오.

2. 제시문에서 생략된 마지막 과정을 완성하여 M의 최댓값을 구하시오.

3. 다음 부등식을 만족시키는 양의 실수 K의 최댓값을 제시문과 동일한 방법으로 구하시오. (단, 실수 a, b, c, d는 제시문과 동일한 조건을 만족한다.)

$$2(a+b+c+d)+\frac{17}{abc+abd+acd+bcd} \geq K$$

3. 출제 의도

본 문제에서는 도함수를 이용하여 절대부등식을 도출하는 과정을 제시하고, 이 과정을 잘 이해하였는지, 이해하였다면 이를 다른 경우에 적용할 수 있는지를 묻고 있다. 이를 통해 수학적 독해능력과 적용능력을 평가하려 하였다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제 2-1	수학II - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속 [12수학II01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적분 - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법 [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다.
문제 2-2	수학 - (3) 수와 연산 - ② 명제 [10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다. 수학II - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학II02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
문제 2-3	수학 - (3) 수와 연산 - ② 명제 [10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다. 미적분 - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학	김원경 외	비상교육	2018	p.191~p.198
	고등학교 수학II	김원경 외	비상교육	2018	p.35~p.42
	고등학교 수학II	이준열 외	천재교육	2018	p.92~p.93
	고등학교 미적분	류희찬 외	천재 교과서	2019	p.96~p.107

5. 문항 해설

[문제2]-1은 함수의 몫의 미분법을 이용하여 도함수를 구하고, 닫힌 구간에서 연속인 함수가 갖는 최댓값과 최솟값을 찾아 주어진 부등식이 성립함을 논증할 수 있는 지를 묻는 문제이다.
[문제2]-2는 제시문을 통해 안내된 미분의 활용에 관련한 방법을 따라 도함수의 부호에 대한 부등식을 세워 논증하고, 산술평균과 기하평균 사이의 관계를 이용하여 주어진 부등식을 만족시키는 실수 M의 최댓값을 구할 수 있는 지를 묻는 문제이다.
[문제2]-3은 앞선 [문제2]-1,2번에서 제시문의 안내에 따라 논증한 부등식의 계수 일부를 변경하여 학생 스스로 부등식의 조건을 만족시키는 실수 K의 최댓값을 구하고 그 과정을 논증할 수 있는지를 묻는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	(ㄱ)에 알맞은 수식을 정확히 썼는가?	10
	도함수의 값이 0보다 작거나 같은 이유를 설명하였는가?	10
2	최댓값을 구하는 과정을 명확히 설명하였는가?	30
	구한 최댓값은 정확한가?	10
3	최댓값을 구하는 과정을 명확히 설명하였는가?	30
	구한 최댓값은 정확한가?	10

7. 예시 답안 혹은 정답

1. $f'(x) = \dfrac{1-abx^2}{x^2}\left\{\dfrac{1}{(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2} - \dfrac{1}{ab}\right\}$

$a,\ b,\ x$ 는 1 이하이므로, $1-abx^2 \geq 0$ 이고,

$(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2 \geq 9$, $\dfrac{1}{(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2} \leq \dfrac{1}{9}$, $\dfrac{1}{ab} \geq 1$이므로

$\left\{\dfrac{1}{(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2} - \dfrac{1}{ab}\right\} \leq 0$,

따라서 $f'(x) \leq 0$ 이다.

2.

$g(1) = h(a+2+\frac{1}{a})$이 되도록 $h(x) = x+\frac{1}{x}$라고 정의하자. 단 $a+2+\frac{1}{a} \geq 4$ 이므로 $h(x)$는 $x \geq 4$에서 정의한다.

이제 $h'(x)=1-\frac{1}{x^2}$ 이고 $\frac{1}{x^2}\le\frac{1}{16}\le 1$이므로, $h'(x)\ge 0$이다.

$\therefore h(2+a+\frac{1}{a})\ge h(4)=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$

따라서 $f(c)\ge f(1)=g(b)\ge g(1)=h(a+\frac{1}{a}+2)\ge h(4)=\frac{17}{4}$ 이고 이 값은 $a=b=c=1$일 때의 값이므로 M의 최대값은 $\frac{17}{4}$.

3. 일반적으로 양의 실수 A, B에 대해 아래 식에 제시문과 문항2의 과정을 반복하면,

$$A(a+b+c+d)+\frac{B}{abc+abd+acd+bcd}=A(a+b+c+\frac{1}{abc})+\frac{B}{abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

$$f(x)=A(a+b+x+\frac{1}{abx})+\frac{B}{abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}},$$

$$f'(x)=\frac{1-abx^2}{x^2}\left\{\frac{B}{(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2}-\frac{A}{ab}\right\}$$

$(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2\ge 9$, $\frac{B}{(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2}\le\frac{B}{9}$, $\frac{A}{ab}\ge A$이므로 $A\ge\frac{B}{9}$ 이면 $f'(x)\le 0$.

$$g(x)=A(a+x+1+\frac{1}{ax})+\frac{B}{ax+\frac{1}{a}+\frac{1}{x}+1}\ ,\ g'(x)=\frac{1-ax^2}{x^2}\left\{\frac{B}{(ax+\frac{1}{a}+\frac{1}{x}+1)^2}-\frac{A}{a}\right\}$$

$A\ge\frac{B}{9}$이면, $g'(x)\le 0$이다.

$h(x)=Ax+\frac{B}{x}$, $x\ge 4$, $h'(x)=A-\frac{B}{x^2}$

$\frac{B}{x^2}\le\frac{B}{16}\le\frac{B}{9}$이므로, $\frac{B}{9}\le A$ 이면 $h'(x)\ge 0$이다.

$A=2$, $B=17$ 일 때 $\frac{17}{9}\le 2$ 이므로 각 단계에 필요한 부등식을 모두 만족한다.

$\therefore h(2+a+\frac{1}{a})\ge h(4)=4A+\frac{B}{4}=8+\frac{17}{4}=\frac{49}{4}$ 가 K의 최대값이 된다.

◆ 문항카드 7 (자연계열_오후1_1번 문항)

[한양대학교(서울) 문항정보]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 오후1(수학) / 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	이항분포, 정규분포, 확률의 덧셈정리, 확률의 곱셈정리
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> 학생 A와 B가 다음과 같이 야구방망이를 휘둘러서 공을 치는 놀이를 한다.

(1) 공을 쳐서 날아간 거리가 $50\,\mathrm{m}$ 이상인 경우 2점, 공을 쳐서 날아간 거리가 $50\,\mathrm{m}$ 미만인 경우 1점,

공을 치지 못한 경우 0점을 얻는다.

(2) 학생 A와 B가 다음과 같은 확률로 공을 친다.

	학생 A	학생 B
공을 쳐서 날아간 거리가 $50\,\mathrm{m}$ 이상일 확률	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
공을 쳐서 날아간 거리가 $50\,\mathrm{m}$ 미만일 확률	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$
공을 치지 못할 확률	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$

<나>

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

<표준정규분포표>

1. 학생 B가 야구방망이를 휘두르는 시행을 50회 반복했을 때 공을 친 횟수가 10 이상이고 20 이하일 확률을 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

2. 학생 A가 야구방망이를 휘두르는 시행을 5회 반복했을 때 얻은 점수가 7점 이상일 확률을 구하시오.

3. 학생 A와 B가 야구방망이를 휘두르는 시행을 각각 2회 반복했을 때 학생 B가 학생 A보다 높은 점수를 얻을 확률을 구하시오.

3. 출제 의도

자연계열 오후1 - 1번 문제는 고등학교 수학교과과정 중 확률과 통계의 주요내용을 바탕으로 출제하였다. 다음과 같이 3개의 소문항을 통해서, 이항분포와 표준정규분포의 관계, 경우의 수, 같은 것이 있는 순열, 확률 등의 내용을 종합적으로 이해하여 해결할 수 있는지를 묻고 있다. 특히, 확률과 통계의 개념을 정확히 이해하고 수학적 사고력을 바탕으로 논리적으로 문제를 해결할 수 있는 능력을 측정하는데 주안점을 두고 출제를 하였다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제 1-1	[확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포 [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
문제 1-2	[확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용 [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 1-3	[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률 [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 확률과 통계	고성은 외	좋은책 신사고	2019	p.50~p.56
	고등학교 확률과 통계	김원경 외	비상교육	2019	p.53~p.63
	고등학교 확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2019	p.103~p.104

5. 문항 해설

문항 1. 충분히 큰 시행에 대하여 이항분포가 근사적으로 정규분포를 따른다는 점을 활용

하고, 표준화를 통하여 확률을 묻는 문제이다.

문항 2. 시행을 반복하였을 때 나올 수 있는 득점의 방법과 그 경우의 수를 구하고, 각각의 경우에 확률을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

문항 3. 각 학생이 얻어야 하는 점수와 그 점수를 얻기 위한 득점의 방법을 빠짐없이 파악하고, 득점을 얻는 경우의 수와 그 확률을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	이항분포로부터 근사적으로 정규분포를 이끌어냈는가?	10
	표준화와 표준정규분포표를 통해 문제를 해결하였는가?	10
2	득점에 따른 경우의 수를 정확히 파악했는가?	20
	각 경우의 확률을 통해 구하고자 하는 확률을 정확히 구했는가?	20
3	두 학생이 받아야 하는 점수에 대한 경우의 수를 정확히 파악했는가?	20
	각 경우의 확률을 통해 구하고자 하는 확률을 정확히 구했는가?	20

7. 예시 답안 혹은 정답

1. 학생 B가 50번의 기회 중에 공을 친 횟수를 확률변수 Y라고 하자. 학생 B가 공을 칠 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(50,\frac{1}{3})$을 따른다. 이 때, $\frac{50}{3},\frac{50\times2}{3}>5$이므로, 이항분포 $\mathrm{B}(50,\frac{1}{3})$는 근사적으로 정규분포 $N(\frac{50}{3},(\frac{10}{3})^2)$를 따른다.

$$\mathrm{P}(10\le Y\le 20)=\mathrm{P}\left(\frac{10-\frac{50}{3}}{\frac{10}{3}}\le Z\le\frac{20-\frac{50}{3}}{\frac{10}{3}}\right)=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)$$
$$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.4772+0.3413=0.8185$$

2. 다섯 번의 차례를 통해 7점 이상을 얻을 때, 가능한 득점의 경우의 수와 각 경우의 확률을 구

점수	득점	경우의 수	확률

하면 오른쪽 표와 같다.

10 점	2, 2, 2, 2, 2	1	$(\frac{1}{6})^5$
9 점	2, 2, 2, 2, 1	$\frac{5!}{4!1!}=5$	$(\frac{1}{6})^4(\frac{1}{3})$
8 점	2, 2, 2, 2, 0	$\frac{5!}{4!1!}=5$	$(\frac{1}{6})^4(\frac{1}{2})$
	2, 2, 2, 1, 1	$\frac{5!}{3!2!}=10$	$(\frac{1}{6})^3(\frac{1}{3})^2$
7 점	2, 2, 2, 1, 0	$\frac{5!}{3!1!1!}=20$	$(\frac{1}{6})^3(\frac{1}{3})(\frac{1}{2})$
	2, 2, 1, 1, 1	$\frac{5!}{2!3!}=10$	$(\frac{1}{6})^2(\frac{1}{3})^3$

따라서 구하고자 하는 확률은

$$1\times(\frac{1}{6})^5+5\times(\frac{1}{6})^4(\frac{1}{3})+5\times(\frac{1}{6})^4(\frac{1}{2})$$
$$+10\times(\frac{1}{6})^3(\frac{1}{3})^2+20\times(\frac{1}{6})^3(\frac{1}{3})(\frac{1}{2})+10\times(\frac{1}{6})^2(\frac{1}{3})^3$$
$$=\frac{1}{6^5}(1+10+15+40+120+80)=\frac{266}{6^5}=\frac{133}{3888}$$

이다.

3. 두 차례에 두 학생이 받을 수 있는 점수에 따른 경우의 수와 확률은 다음과 같다.

점수	득점	경우의 수	학생 A의 확률	학생 B의 확률
0	0, 0	1	$(\frac{1}{2})^2$	$(\frac{2}{3})^2$
1	0, 1	2	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{18}$
2	2, 0	2	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$
	1, 1	1	$(\frac{1}{3})^2$	$(\frac{1}{12})^2$
3	2, 1	2	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{48}$
4	2, 2	1	$(\frac{1}{6})^2$	$(\frac{1}{4})^2$

학생 B가 학생 A보다 높은 점수를 받기 위해서는 다음과 같이 득점을 하여야 한다.

학생 A의 득점	0				1			2		3
학생 B의 득점	1	2	3	4	2	3	4	3	4	4

$$(\text{학생 A가 0점일 확률})\times\left(\sum_{j=1}^{4}(\text{학생 B가 }j\text{점일 확률})\right)=(\frac{1}{2})^2\left(2\times\frac{1}{18}+2\times\frac{1}{6}+(\frac{1}{12})^2+2\times\frac{1}{48}+(\frac{1}{4})^2\right)$$
$$=(\frac{1}{2})^2\frac{(16+48+1+6+9)}{12^2}=\frac{80}{2^6\times3^2}=\frac{5}{2^2\times3^2}$$

$$(\text{학생 A가 1점일 확률})\times\left(\sum_{j=2}^{4}(\text{학생 B가 }j\text{점일 확률})\right)=(2\times\frac{1}{6})\left(2\times\frac{1}{6}+(\frac{1}{12})^2+2\times\frac{1}{48}+(\frac{1}{4})^2\right)$$
$$=(\frac{1}{3})\frac{(48+1+6+9)}{12^2}=\frac{64}{2^4\times3^3}=\frac{2^2}{3^3}$$

$$(\text{학생 A가 2점일 확률})\times\left(\sum_{j=3}^{4}(\text{학생 B가 }j\text{점일 확률})\right)=\left(2\times\frac{1}{12}+(\frac{1}{3})^2\right)\left(2\times\frac{1}{48}+(\frac{1}{4})^2\right)$$
$$=(\frac{5}{18})\frac{(2+3)}{48}=\frac{25}{2^5\times3^3}=\frac{5^2}{2^5\times3^3}$$

$$(\text{학생 A가 3점일 확률})\times(\text{학생 B가 4점일 확률})=(2\times\frac{1}{18})(\frac{1}{4})^2=\frac{1}{2^4\times3^2}$$

따라서 학생 B의 득점이 학생 A보다 클 확률은

$$\frac{5}{2^2\times3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{5^2}{2^5\times3^3}+\frac{1}{2^4\times3^2}=\frac{120+128+25+6}{2^5\times3^3}=\frac{279}{2^5\times3^3}=\frac{31}{2^5\times3}=\frac{31}{96}$$

◆ 문항카드 8 (자연계열_오후1_2번 문항)

[한양대학교(서울) 문항정보]

1. 일반 정보

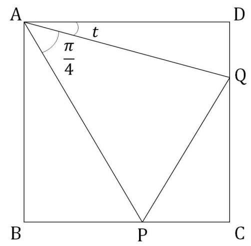
유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 오후1(수학) / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 미적분
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 삼각함수의 덧셈정리, 여러 가지 함수의 정적분, 치환적분법
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

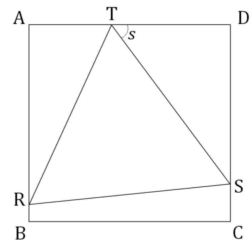
[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다.

<가> 삼각형 PAQ의 두 꼭짓점 P와 Q는 각각 변 BC와 CD 위에 있고, $\angle\mathrm{PAQ} = \frac{\pi}{4}$이다. 선분 AD와 AQ가 이루는 각의 크기를 t라 하자. $\left(단,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{4}\right)$



<나> 삼각형 RST의 세 꼭짓점 R, S, T는 각각 변 AB, CD, DA 위에 있다. 선분 AD와 TS가 이루는 각의 크기를 s라 하자. $\left(단,\ 0 \le s \le \frac{\pi}{2}\right)$



1. 제시문 <가>에서 주어진 삼각형 PAQ의 꼭짓점 A에서 변 PQ에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 각의 크기 t $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{4}\right)$가 변함에 따라 점 H가 이루는 곡선의 길이를 구하시오.

2. 제시문 <가>에서 주어진 삼각형 PAQ의 넓이를 t에 대한 식 $f(t)$로 나타낼 때,
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt$$
의 값을 구하시오.

3. 제시문 <나>에서 주어진 삼각형 RST가 정삼각형이 되기 위한 s의 최솟값을 s_0, 최댓값을 s_1이라 하자.

정삼각형 RST의 넓이를 s에 대한 식 $g(s)$로 나타낼 때,

$$\int_{s_0}^{s_1} g(s)\,ds$$

의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

자연계열 오후(1)-2번 문제는 고교수학과정 중 “미적분-미분법-여러 가지 함수의 미분” 단원의 삼각함수의 덧셈정리와 “미적분-적분법-여러 가지 적분법” 단원의 치환적분법을 주요 내용으로 하고 있다. 도형의 성질을 잘 이해하고 활용하기 위한 중요한 도구의 하나인 삼각함수의 덧셈정리 및 관련 지식을 적절히 활용해서 평면도형이 갖고 있는 성질들을 분석하고, 정확한 논증을 통해 원하는 결과를 도출할 수 있는지를 묻고 있다. 다음 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제 2-1	수학Ⅰ – (2) 삼각함수 – ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. 미적분 – (2) 미분법 – ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
문제 2-2	수학Ⅰ – (2) 삼각함수 – ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적분 – (3) 적분법 – ① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 2-3	미적분 – (2) 미분법 – ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. 미적분 – (3) 적분법 – ① 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학Ⅰ	고성은 외	좋은책 신사고	2018	p.70~p.90
	고등학교 수학Ⅰ	김원경 외	비상교육	2018	p.102~p.107
	고등학교 미적분	류희찬 외	천재교과서	2019	p.68~p.73

5. 문항 해설

[문제2]-1은 특정 조건을 만족하는 삼각형이 갖는 고유의 성질을 이끌어낼 줄 아는지를 묻는 문제이다.

[문제2]-2는 삼각함수의 덧셈정리 등을 이용하여 주어진 삼각형에 대한 필요한 정보를 이끌어내고, 치환적분 등의 기술을 적절히 활용할 줄 아는지를 묻는 문제이다.

[문제2]-3은 정사각형에 내접하는 정삼각형이 만족해야 하는 고유의 성질을 이해하고 치환적분 등의 기술을 적절히 활용할 줄 아는지를 묻는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	삼각형 PAQ의 밑변 PQ에 대한 높이 AH를 구했는가?	20
	수선의 발 H가 이루는 곡선의 길이를 구했는가?	10
2	삼각형 PAQ의 넓이를 각의 크기 t에 대한 식 $f(t)$로 표현했는가?	20
	정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt$를 구했는가?	10
3	각의 크기 s의 최솟값 s_0와 최댓값 s_1을 구했는가?	10
	삼각형 RST의 넓이를 각의 크기 s에 대한 식 $g(s)$로 표현했는가?	20
	정적분 $\int_{s_0}^{s_1} g(s)\,ds$를 구했는가?	10

7. 예시 답안 혹은 정답

[2-1] 오른쪽 첫 번째 그림에서 $\angle\mathrm{DAQ}=t$, $\angle\mathrm{HAQ}=s$라 하면, $\angle\mathrm{BAP}=\frac{\pi}{4}-t$, $\angle\mathrm{HAP}=\frac{\pi}{4}-s$이다.

$$\frac{\cos s}{\cos t}=\overline{\mathrm{AH}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-s\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}\cos s+\sin\frac{\pi}{4}\sin s}{\cos\frac{\pi}{4}\cos t+\sin\frac{\pi}{4}\sin t}=\frac{\cos s+\sin s}{\cos t+\sin t}$$

이고, 정리하면 $\tan t=\tan s$, 즉 $t=s$이므로

삼각형 DAQ와 삼각형 HAQ는 합동이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AD}}=1$이다.

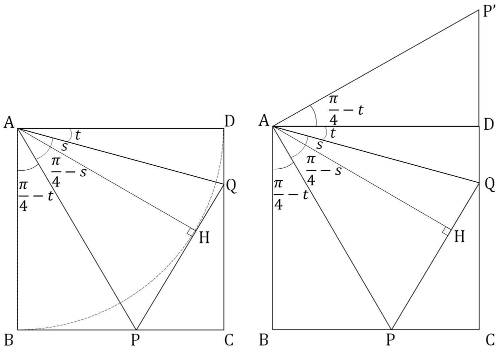
따라서 점 H가 이루는 곡선은 반지름 1인 사분원 이므로 길이는 $\frac{\pi}{2}$이다.

(다른 풀이)

오른쪽 두 번째 그림에서 삼각형 AQP와 삼각형 AQP'은 합동이고, 따라서

$\overline{\mathrm{AH}}$=(삼각형 AQP의 높이)=(삼각형 AQP'의 높이)$=\overline{\mathrm{AD}}=1$ 이다.

따라서 점 H가 이루는 곡선은 반지름이 1인 사분원 이므로 길이는 $\frac{\pi}{2}$이다.

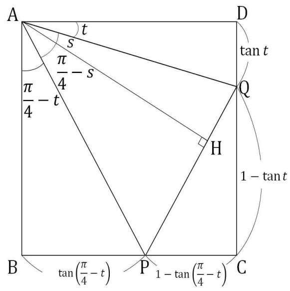


[2-2] 오른쪽 그림에서

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(1-\tan t)^2+\left(1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)^2}=\frac{1+\tan^2 t}{1+\tan t}$ 이므로, 삼각형 PAQ의 넓이 $f(t)$는 $f(t)=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AH}}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\tan^2 t}{1+\tan t}$ 이다. 따라서

($1+\tan t=s$로 치환해서)

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 t}{1+\tan t}dt=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{s}ds=\frac{1}{2}\ln 2\,(=\ln\sqrt{2})$ 이다.



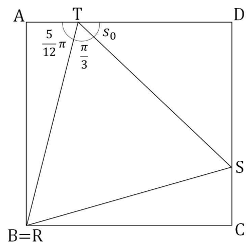
(다른 풀이)

삼각형 PAQ의 넓이 $f(t)$는

$f(t)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{AQ}}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}\frac{1}{\cos t}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{(\cos t+\sin t)\cos t}$ 이다. 따라서

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\cos t+\sin t)\cos t}dt=\cdots=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 t}{1+\tan t}dt=\cdots=\frac{1}{2}\ln 2\,(=\ln\sqrt{2})$ 이다.

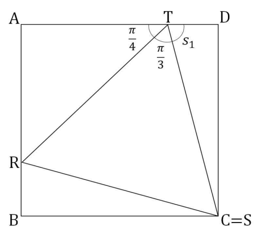
[2-3] 오른쪽 그림에서 $s_0=\frac{\pi}{4}\,(=45^\circ)$, $s_1=\frac{5\pi}{12}\,(=75^\circ)$이다.



$\frac{\pi}{4}\le s\le\frac{5\pi}{12}$ 인 s에 대해, 정삼각형 RST의 한 변의 길이를 a라고 하면, 오른쪽 아래 그림에서 $a\cos\left(\frac{2}{3}\pi-s\right)+a\cos s=1$ 임을 알 수 있고,

따라서

$a=\frac{1}{\cos\left(\frac{2}{3}\pi-s\right)+\cos s}=\frac{1}{\cos\frac{2}{3}\pi\cos s+\sin\frac{2}{3}\pi\sin s+\cos s}=\frac{1}{\sin\left(s+\frac{\pi}{6}\right)}$



이다. 정삼각형 RST의 넓이 $g(s)$는

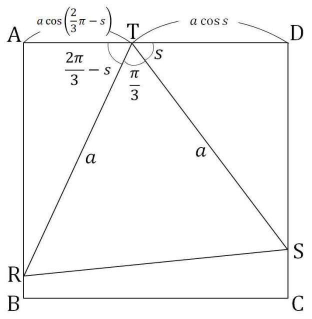
$g(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\left(s+\frac{\pi}{6}\right)}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\csc^2\left(s+\frac{\pi}{6}\right)$ 이고,

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{12}} g(s)\,ds = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{12}} \csc^2\left(s+\frac{\pi}{6}\right)ds \quad \leftarrow t = s+\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\frac{5\pi}{12}}^{\frac{7\pi}{12}} \csc^2 t\,dt = -\frac{\sqrt{3}}{4}\cot t\,\Bigg|_{\frac{5\pi}{12}}^{\frac{7\pi}{12}}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)$$

$$= \sqrt{3}-\frac{3}{2}$$



◆ 문항카드 9 (자연계열_오후2_1번 문항)

[한양대학교(서울) 문항정보]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 오후2(수학) / 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 미적분
	핵심개념 및 용어	수열의 귀납적 정의, 등차수열의 합, 정적분과 급수의 합 사이의 관계, 여러 가지 함수의 정적분
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

수열 $\{a_k\}$는 모든 자연수 k에 대하여 다음을 만족시킨다.

ㄱ. $a_1 = 2021$

ㄴ. $a_{2k} = (a_k - 2020)^{2021} + 2020$

ㄷ. $a_{2k+1} = (a_k - 2022)^{2020} + 2018$

1. a_{36}의 값을 구하시오.

2. $a_k < 2^{2020}$이고 $k \le 2^{100}$인 자연수 k의 개수를 구하시오.

3.a_1, a_2, a_3, $\cdots$ 중 가장 작은 수를 α라 하자. $n > 2$인 자연수 n에 대하여 $a_k = \alpha$이고 $k \le 2^n$인 자연수 k의 개수를 c_n이라 하자.

$S_n = \sum_{t=1}^{n} \frac{2(n-1)}{2c_n + t(n-1)}$이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

[문제1]-1은 제시문에서 주어진 조건들을 활용하여 수열의 한 항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[문제1]-2는 제시문에서 주어진 조건을 만족하는 수열의 특징을 잘 분석하고 이를 토대로 한 문제해결 능력을 갖추고 있는지를 묻는 문제이다.

[문제1]-3은 제시문에서 주어진 조건을 활용하여 새로운 형태의 수열 $\{c_n\}$을 유도하고, 이를 활용하여 정적분 문제를 풀 수 있는지를 묻는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제 1-1	수학 I - (3) 수열 - 3 수학적 귀납법 [12수학 I 03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
문제 1-2	수학 I - (3) 수열 - 1 등차수열과 등비수열 [12수학 I 03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문제 1-3	미적분 - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학 I	이준열 외	천재교육	2018	p.127~p.130
	고등학교 수학 I	황선욱 외	미래엔	2018	p.155~p.157
	고등학교 미적분	류희찬 외	천재교과서	2019	p.156~p.160 p.177~p.181

5. 문항 해설

[문제1]-1은 제시문에서 귀납적으로 정의된 수열의 규칙성을 파악하는 데에 있어 의미가 있는 제36항의 값을 묻는 문제이다. 개연적인 추론 능력을 측정 할 뿐만 아니라 이후에 진행될 [문제1]-2,3의 해결에 필요한 수열 $\{a_n\}$에 대한 이해를 유도하는 중간 단계적인 성격을 지닌 문제이다.

[문제1]-2는 수열 $\{a_n\}$에서 같은 값을 갖는 항들이 규칙적으로 반복되는 특징을 이해하고, 등차수열의 합을 이용하여 조건을 만족시키는 항들의 개수를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

[문제1]-3은 수열 $\{a_n\}$에서 특정한 값을 갖는 항들의 개수로 정의된 새로운 수열 $\{c_n\}$을 구하고 그 일반항 c_n으로 이루어진 급수의 합을 정적분으로 변형하여 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	a_{36}을 잘 계산하였는가?	10
	$a_k = 2021$, $k < 2^{100}$이 되는 k의 개수를 구하였는가?	10
2	$a_k = 2019$, $k < 2^{100}$이 되는 k의 개수를 구하였는가?	20
	$a_k > 2^{2020}$이 되는 k에 대해 그 이유를 잘 설명하였는가?	20
3	c_n을 잘 구하였는가?	20
	수열의 합을 잘 구하였는가?	20

7. 예시 답안 혹은 정답

[1-1]

$36 = 2^2(2(2^2)+1)$ 이므로

$a_2 = (a_1 - 2020)^{2021} + 2020 = 2021$
$a_4 = (a_2 - 2020)^{2021} + 2020 = 2021$
$a_9 = (a_4 - 2022)^{2020} + 2018 = 2019$
$a_{18} = (a_9 - 2020)^{2021} + 2020 = 2019$
$a_{36} = (a_{18} - 2020)^{2021} + 2020 = 2019$

이다.

[1-2] k의 형태에 따라서 조건($a_k < 2^{2020}$)을 만족하는 지 확인해보자.

[형태 1. $k = 2^m, (m \geq 0)$]

$a_1 = 2021$
$a_2 = (a_1 - 2020)^{2021} + 2020 = 2021$
$a_4 = (a_2 - 2020)^{2021} + 2020 = 2021$
...
$a_{2^m} = (a_{2^{m-1}} - 2020)^{2021} + 2020 = 2021$

이므로 $a_k = 2021$이다.

[형태 2. $k = 2^m + 1, (m \geq 1)$]

$a_3 = (a_1 - 2022)^{2020} + 2018 = 2019$
$a_5 = (a_2 - 2022)^{2020} + 2018 = 2019$
...
$a_{2^m+1} = (a_{2^{m-1}} - 2022)^{2020} + 2018 = 2019$

이므로 $a_k = 2019$이다.

[형태 3. $k = 2^l(2^m + 1), (m,l \geq 1)$]

(형태 2)를 만족하는 $a_{2^m+1} = 2019$임을 알 수 있다. 또한, 제시문의 ㄴ 에 의해

$a_{2(2^m+1)} = (a_{2^m+1} - 2020)^{2021} + 2020 = 2019$
$a_{2^2(2^m+1)} = (a_{2(2^m+1)} - 2020)^{2021} + 2020 = 2019$
...
$a_{2^l(2^m+1)} = (a_{2^{l-1}(2^m+1)} - 2020)^{2021} + 2020 = 2019$
이므로 $a_k = 2019$이다.

[형태 4. $k = 2^l(2^m+1)+1, (m,l \geq 1)$]

(형태 2)를 만족하는 $a_{2^m+1} = 2019$임을 알 수 있다. $l=1$인 경우, 제시문의 ㄷ 에 의해

$a_{2(2^m+1)+1} = (a_{2^m+1} - 2022)^{2020} + 2018 > 2^{2020}$이다.

$l>1$인 경우, 제시문 ㄴ 에 의해 $a_{2^{l-1}(2^m+1)} = 2019$이고, 제시문 ㄷ 에 의해

$a_{2^l(2^m+1)+1} = (a_{2^{l-1}(2^m+1)} - 2022)^{2020} + 2018 > 2^{2020}$이다.

따라서, $a_k > 2^{2020}$이다.

[형태 5. k는 형태 1, 2, 3, 4가 아닌 나머지 수]

k는 항상 $(\cdots 2^r(2^l(2^m+1)+1)\cdots)$꼴로 쓸 수가 있으며(단, $m,l,r \geq 1$), (형태 4)에 의해 $a_{2^l(2^m+1)+1} > 2^{2020}$임을 알 수 있다.

a_k는 제시문 ㄴ 과 ㄷ을 반복적용해서 계산이 가능한데, 항상 2022보다 큰 수에 대해 증가하므로 $a_k > 2^{2020}$이다.

$a_k < 2^{2020}$을 만족하는 경우는 (형태 1) (즉, $k=2^m$), (형태 2) (즉, $2^m+1, (m \geq 1)$), (형태 3) (즉, $2^l(2^m+1), (m,l \geq 1)$)이 전부이다. 이들 중 $k \leq 2^{100}$를 만족하는 자연수는 (형태 1)의 101가지 $(m=0,1,...100)$, 형태 2의 99가지 $(m=1,2,...99)$, 형태 3의 $\frac{98 \cdot 99}{2} = 4851$가지

$((l,m) = (1,1),(1,2),...,(1,98),(2,1),(2,2),...,(2,97),(3,1),(3,2),...,(3,96),...,(98,1))$

총 101+99+4851=5051

[1-3] $\alpha = 2019$ 이다. $a_k = 2019$는 1번 풀이의 (형태 2)와 (형태 3)의 k만 가능하다.

(형태 2)는 $m=1,2,...n-1$인 경우에만 $2^m+1 \leq 2^n$를 만족하므로 $n-1$개가 가능하다.

(형태 3)은 $l=1,...,n-2$인 경우, $m=1,2,...n-l-1$인 경우에만 $2^l(2^m+1) \leq 2^n$를 만족하므로

$\sum_{l=1}^{n-2}(n-l-1) = (n-1)(n-2) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ 개가 가능하다.

따라서, $c_n = \frac{(n-2)(n-1)}{2} + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ 이고,

$S_n = \sum_{t=1}^{n} \frac{2(n-1)}{2c_n + t(n-1)} = \sum_{t=1}^{n} \frac{2}{n+t} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \frac{2}{1+\frac{t}{n}}$ 를 만족한다.

따라서, $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{2}{1+x}dx = [2\ln(1+x)]_0^1 = 2\ln 2$ 이다.

◆ 문항카드 10 (자연계열_오후2_2번 문항)

[한양대학교(서울) 문항정보]

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연계열 오후2(수학) / 문제 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학Ⅱ, 미적분</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>함수의 극한, 함수의 극한의 대소 관계, 평균값 정리, 여러 가지 미분법, 치환적분법, 곡선의 길이</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">45분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> $a>0$, $0 \le b \le 1$인 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sqrt{1+e^x}+\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-b}{\sqrt{1+e^x}+b}\right)$$

의 도함수가 $f'(x)=\sqrt{1+e^x}$ 이다.

<나> 곡선 $y=h(x)$ $(c \le x \le d)$의 길이는 $\int_c^d \sqrt{1+\{h'(x)\}^2}\,dx$ 이다.

<다> 수열 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\beta_n = L$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $\alpha_n \le \gamma_n \le \beta_n$이면, $\lim_{n\to\infty}\gamma_n = L$이다.

<라> 연속함수 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$에 대하여 닫힌구간 $[c, d]$에서 $p(x) \le q(x) \le r(x)$이면

$$\int_c^d p(x)dx \le \int_c^d q(x)dx \le \int_c^d r(x)dx$$

이다.

1. $a+b$의 값을 구하시오.

2. 실수 k에 대하여 곡선 $y=e^x$ $\left(k \le x \le k+\frac{1}{e^k}\right)$의 길이를 $g(k)$라 할 때, $\lim_{k\to\infty} g(k)$의 값을 구하시오.

3. 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{F(2x)}{e^x}$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0\right)$

3. 출제 의도

본 문제는 수학II-함수의 극한과 연속 및 미적분-미분법, 적분법 단원에서 공부한 함수의 극한, 함수의 미적분에 대한 기본적 지식을 묻는 문제로, 다음 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제 2-1	미적분 – (2) 미분법 – ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
문제 2-2	수학II – (2) 미분 – ③ 도함수의 활용 [12수학II02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. 미적분 – (2) 미분법 – ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다. 미적분 – (3) 적분법 – ① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적분 – (3) 적분법 – ② 정적분의 활용 [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 2-3	수학II – (1) 함수의 극한과 연속 – ① 함수의 극한 [12수학II01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. 수학II – (3) 적분 – ② 정적분 [12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학II	김원경 외	비상교육	2018	p.23~p.27, p.74~p.77 p.112~p.115
	고등학교 수학II	홍성복 외	지학사	2018	p.20~p.25 , p.78~p.82 p.125~p.130
	고등학교 미적분	류희찬 외	천재교과서	2019	p.54~p.56. p.164~p.170
	고등학교 미적분	이준열	천재교육	2019	p.61~p.64, p.178~p.180

5. 문항 해설

[문제2]-1은 합성함수의 미분법을 이용하여 주어진 함수를 미분할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[문제2]-2는 곡선의 길이 공식을 활용하여 주어진 곡선의 길이를 구하고, 이의 극한값을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[문제2]-3은 주어진 함수의 부정적분의 형태를 추론하여 제시된 값을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	$a+b$의 값을 잘 구하였는가?	20
2	곡선 $e^x\left(k \le x \le k+\frac{1}{e^k}\right)$의 길이 $g(k)$를 잘 계산하였는가?	10
	$\lim_{k\to\infty} g(k)$의 값을 잘 계산하였는가? (직접 계산 또는 평균값 정리의 응용)	30
3	함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$를 적절히 정하고 이를 계산할 수 있는 형태로 표현하였는가?	20
	위에서 구한 $F(x)$를 통해 제시된 값을 잘 계산하였는가?	20

7. 예시 답안 혹은 정답

[2-1]

함수 $f(x)=a\sqrt{1+e^x}+\ln\left(\sqrt{1+e^x}-b\right)-\ln\left(\sqrt{1+e^x}+b\right)$를 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\left(a+\frac{1}{\sqrt{1+e^x}-b}-\frac{1}{\sqrt{1+e^x}+b}\right)=\sqrt{1+e^x}$$

따라서

$$e^x\left[a+\frac{2b}{(1+e^x)-b^2}\right]=2(1+e^x)$$

즉 $e^x\left[a\{(1+e^x)-b^2\}+2b\right]=2(1+e^x)\{(1+e^x)-b^2\}$

전개하면

$$ae^{2x}+\left[a(1-b^2)+2b\right]e^x=2e^{2x}+2(2-b^2)e^x+2(1-b^2)$$

양변의 계수를 비교하면 $a=2,\ b=1$이다. 따라서 $a+b=3$

[2-2] 제시문 <나>, 치환적분법 및 문제 1에 의하여

$$g(k)=\int_{k}^{k+e^{-k}}\sqrt{1+e^{2t}}\,dt \;=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2e^{-k}}\sqrt{1+e^{x}}\,dx \;\;(x=2t\;\;\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2})$$
$$=\frac{1}{2}(f(2k+2e^{-k})-f(2k))$$

<해 1> 평균값 정리에 의하여

$$g(k)=\frac{1}{2}f'(c)\,2e^{-k}=e^{-k}f'(c)=e^{-k}\sqrt{1+e^{c}}$$

를 만족하는 c가 열린구간 $(2k, 2k+2e^{-k})$에 적어도 하나 존재한다. 구간 $(-\infty,\infty)$에서 $f''(x)=A'(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가한다. 따라서

$$e^{-k}\sqrt{1+e^{2k}}<g(k)=e^{-k}\sqrt{1+e^{c}}<e^{-k}\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}$$

이고

$$\lim_{k\to\infty}e^{-k}\sqrt{1+e^{2k}}=\lim_{k\to\infty}\sqrt{1+e^{-2k}}=1,\qquad \lim_{k\to\infty}e^{-k}\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}=\lim_{k\to\infty}\sqrt{e^{2e^{-k}}+e^{-2k}}=1$$

제시문 <다>에 의하여 $\lim_{k\to\infty}g(k)=1$

<해 2> 문제 1에 의하여

$$g(k)=\frac{1}{2}(f(2k+2e^{-k})-f(2k))\;=\left[\sqrt{1+e^{x}}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{x}}-1}{\sqrt{1+e^{x}}+1}\right)\right]_{2k}^{2k+2e^{-k}}$$
$$=\left(\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}-\sqrt{1+e^{2k}}\right)\;+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}-1}{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}+1}\times\frac{\sqrt{1+e^{2k}}+1}{\sqrt{1+e^{2k}}-1}\right)\;\;\text{......}\;(3)$$

한편

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}-\sqrt{1+e^{2k}}\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{e^{2k}\left(e^{2e^{-k}}-1\right)}{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}+\sqrt{1+e^{2k}}}$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{e^{k}\left(e^{2e^{-k}}-1\right)}{\sqrt{e^{-2k}+e^{2e^{-k}}}+\sqrt{e^{-2k}+1}}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}e^{k}\left(e^{2e^{-k}}-1\right)=\lim_{l\to 0}\frac{e^{2l}-1}{2l}=1\;\;(l=e^{-k}\text{로 치환})\;\;\text{......}\;(4)$$

이고

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}-1}{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}+1}\times\frac{\sqrt{1+e^{2k}}+1}{\sqrt{1+e^{2k}}-1}\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{e^{-2k}+e^{2e^{-k}}}-e^{-k}}{\sqrt{e^{-2k}+e^{2e^{-k}}}+e^{-k}}\times\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{e^{-2k}+1}-e^{-k}}{\sqrt{e^{-2k}+1}+e^{-k}}=1\times 1=1$$

따라서

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}-1}{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}+1}\times\frac{\sqrt{1+e^{2k}}+1}{\sqrt{1+e^{2k}}-1}\right)=\ln 1=0\;\;\text{......}\;(5)$$

식 (3), (4), (5)로부터 $\lim_{k\to\infty}g(k)=1+0=1$을 얻는다.

[2-3] $G(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$라 하면, $F(x)=G(x)+C$ (C는 상수)가 성립한다. 따라서

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}F(2x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x/2}F(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x/2}(G(x)+C) = \lim_{x\to\infty} e^{-x/2}G(x)$$

의 값을 구하면 된다. 문제 1에 의해

$$G(x) = 2\int_0^x \sqrt{1+e^t}\,dt + \int_0^x \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1}\right)dt = 2(f(x)-f(0)) + \int_0^x \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1}\right)dt \text{......} \quad (6)$$

한편 구간 $(-\infty,\infty)$에서 $f'(x)$가 증가하고, 구간 $(-1,\infty)$에서 $\frac{x-1}{x+1}$ 도 증가하므로

임의의 양수 t에 대하여

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \le \frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1} \le 1$$

$$-\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \le \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1}\right) \le 0 \text{ ......} \quad (7)$$

제시문 <라>에 의하여, 임의의 양수 x에 대하여

$$-\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)x \le \int_0^x \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1}\right)dt \le 0$$

제시문 <다>에 의하여

$$0 = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\lim_{x\to\infty} e^{-x/2}x \le \lim_{x\to\infty} e^{-x/2}\int_0^x \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1}\right)dt \le 0$$

식 (6), (7)과 제시문 <다>에 의하여

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} e^{-x/2}G(x) &= 2\lim_{x\to\infty} e^{-x/2}(f(x)-f(0)) + \lim_{x\to\infty} e^{-x/2}\int_0^x \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1}\right)dt \\
&= 2\lim_{x\to\infty} e^{-x/2}f(x) + 0 = 2\lim_{x\to\infty} e^{-x/2}f(x) \\
&= 4\lim_{x\to\infty} e^{-x/2}\sqrt{1+e^x} + 2\lim_{x\to\infty} e^{-x/2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right) \\
&= 4+0 = 4
\end{aligned}$$

◆ 문항카드 11 (자연계열_의예과_1번 문항)

[한양대학교(서울) 문항정보]

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연계열 의예과(국어, 도덕, 사회) / 문제1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>교육과정 과목명</td><td>국어과 : 독서, 화법과 작문, 언어와 매체
도덕과 : 생활과 윤리, 윤리와 사상
사회과 : 사회 · 문화</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>감정 판독, 가설, 검증, 보편성</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">45분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 자료

[문제 1] (가)의 핵심 내용을 '~가설'(전체 글자 수 10자 이내)의 형식으로 정리하고 그렇게 명명한 이유를 밝힌 다음, 그 가설과 관련하여 (나)가 의미하는 바를 논하고, 이를 바탕으로 (다)가 시사하는 바를 설명하시오. (600자, 50점)

(가)

『인간과 동물의 감정 표현』(1872)에서 찰스 다윈은 모든 인간의 웃음 짓기와 눈살 찌푸리기는 진화적 적응의 일환으로 하는 행동이라고 주장했다. 서로에게 자신의 감정을 정확하고 신속하게 전달하는 것이야말로 인류 생존에 중요한 일이었기 때문에 얼굴이 마음의 게시판으로 발전했다는 것이다. 일반적으로 다윈의 이러한 견해는 얼굴에 표현된 기본적인 감정의 의미를 인간이 판독해 내는 능력 또한 생물학적으로 설명될 수 있다는 주장으로 받아들여진다.

(나)

2013년 하리요와 크리베이라는 두 인류학자가 트로브리안드 제도를 찾았다. 파푸아뉴기니에서 동쪽으로 약 100㎞ 떨어진 솔로몬해의 한가운데 위치한 그곳에서는 4만 명가량의 섬 주민들이 옛 조상들과 마찬가지로 물고기를 잡고 농사를 지으며 살아가고 있었다. 두 인류학자는 이러한 트로브리안드 제도의 주민들에게 행복, 슬픔, 분노, 공포, 혐오를 느끼는 것처럼 보이는 얼굴 사진들과 무표정한 중립적인 얼굴 사진을 보여주었다. 그러고 나서 그들이 보인 반응을, 같은 사진에 스페인 마드리드의 한 고등학교 학생들이 보인 반응과 비교했다.

실험 결과는 뜻밖이었다. 마드리드 고등학생들 거의 모두가 행복한 얼굴이라고 판단한, 웃고 있는 얼굴 사진에 대해 트로브리안드 사람들은 53%만이 행복한 감정이 보인다고 답했을 뿐, 23%는 중립적인 얼굴이라고 답한 것이다. 그나마 이 행복한 얼굴 사례가 두 집단의 감정 판단이 가장 일치한 경우였고, 나머지 다른 얼굴의 경우에는 그 일치도가 훨씬 낮게 나왔다. 가장 놀라운 점은 마드리드 고등학생들이 공포에 사로잡힌 전형적인 얼굴이라고 인식한 것을 대부분의 트로브리안드 사람들은 위협적인 얼굴이라고 인식했다는 사실이다. 즉 스페인에서는 "나는 겁먹고 있어요!"라고

인식하는 표정이 트로브리안드에서는 상대방을 겁주려는 얼굴이라고 인식한다는 것이다. 그런가 하면 마드리드 고등학생들에게는 분노를 드러내고 있는 전형적인 얼굴, 즉 꾹 다문 입술과 위협적인 눈초리에 대해서도 트로브리안드 사람들은 갈팡질팡했다. 33%는 공포에 사로잡힌 얼굴, 20%는 기쁜 얼굴, 17%는 슬픈 얼굴이라고 판단한 것이다.

이러한 결과가 예외적인 경우가 아님을 보이기 위해 하리요와 크리베이는 아프리카 모잠비크로 가서 고립 생활을 하는 무와니족을 대상으로 동일한 실험을 수행했다. 결과는 마찬가지였다.

(다)

영화나 텔레비전 드라마를 보면 심근경색(심장마비) 환자들은 으레 갑작스런 가슴 통증에 가슴을 움켜쥐며 쓰러지는 모습을 보인다. 일반인은 물론 기존 의학계에서조차 심근경색의 전형적 전조 증상은 가슴이 조여드는 듯한 통증으로 널리 알려진 탓이다. 하지만 이러한 증상은 남성 환자에게서만 전형적일 뿐, 여성 환자는 심근경색이 오기 전에 불면증과 피로감, 숨참, 메슥거림 등을 경험할 가능성이 더 높고, 통증 또한 머리나 배에서 느껴지는 경우가 많다. 이런 사실이 최근에서야 의학계에 알려진 것은 기존 의학 데이터 수집이 남성 위주로 이루어졌거나 남성과 여성을 구별하지 않고 이루어졌기 때문인 것으로 추정된다.

3. 출제 의도

2021년도 자연계 의예과 논술 문제는 인간의 감정 표현에 대한 다윈의 생각의 핵심을 '~가설' 형태로 정리하고 이에 대해 최근에 수행된 실험 결과가 어떤 평가를 내리는 지를 판단한 후, 이를 바탕으로 의학 데이터 수집에서의 젠더 격차의 상황에 적용하도록 요구하는 방식으로 구성되었다. 응시생들이 주어진 지문의 내용을 그대로 사용할 수 없고 의미 추출이나 추상화, 유비 추론 등을 활용하여 답안을 작성해야만 하도록 문항을 구성함으로써 변별력을 높였다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td>1. 교육부 고시 제2015-74호 [별책5] "국어과 교육과정"
2. 교육부 고시 제2015-74호 [별책6] "도덕과 교육과정"
3. 교육부 고시 제2015-74호 [별책7] "사회과 교육과정"</td></tr>
<tr><td>관련 성취기준</td><td>1. 국어과 교육과정
<table>
<tr><th colspan="2">과목명: 독서</th><th>관련</th></tr>
<tr><td>성취
기준
1</td><td>[12독서02-01] 글에 드러난 정보를 바탕으로 중심 내용, 주제, 글의 구조와 전개 방식 등 사실적 내용을 파악하며 읽는다.
[12독서02-01] 이 성취기준은 글을 읽고 중심 내용, 주제, 글의 구조, 글의 전개 방식 등을 파악하는 사실적 독해 능력을 기르기 위해 설정하였다. 사실적 독해는 글에 드러난 정보를 종합하여 글의 표면적 의미를 파악하는 것을 말한다. 이를 위해 내용의 중요도 평정, 중심 내용과 세부 내용의 구분, 각 문단 내용들 사이의 관계 파악, 선정한 내용들의 종합과 재구성 등의 독해 기능을 종합적으로 동원하여 글의 내용을 파악하</td><td>제시문
(가)
(나)
(다)</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

	도록 한다.	
성취 기준 2	[12독서02-02] 글에 드러나지 않은 정보를 예측하여 필자의 의도나 글의 목적, 숨겨진 주제, 생략된 내용을 추론하며 읽는다.	제시문 (가) (나) (다)
성취 기준 3	[12독서03-03] 과학·기술 분야의 글을 읽으며 제재에 담긴 지식과 정보의 객관성, 논거의 입증 과정과 타당성, 과학적 원리의 응용과 한계 등을 비판적으로 이해한다.	제시문 (가) (나)
성취 기준 4	[12독서03-05] 지역의 사회·문화적 특성이 다양한 형식과 내용으로 글에 반영되어 있음을 이해하고 다양한 지역에서 생산된 가치 있는 글을 읽는다.	제시문 (나) (다)
성취 기준 5	[12독서04-02] 의미 있는 독서 활동에 참여함으로써 타인과 교류하고 다양한 삶의 방식과 세계관을 이해하는 태도를 지닌다.	제시문 (가) (나) (다)

	과목명: 화법과 작문	관련
성취 기준 1	[12화작03-01] 가치 있는 정보를 선별하고 조직하여 정보를 전달하는 글을 쓴다. [12화작03-01] 이 성취기준은 수집한 정보의 가치를 판단하여 선별, 조직함으로써 정보 전달력이 높은 글을 쓰는 능력을 기르기 위해 설정하였다. 정보의 가치를 판단하는 기준을 정하여 가치 있는 정보를 선별하고 이를 범주화하여 내용을 조직하면 독자가 글의 내용을 이해하고 기억하는 데 도움이 된다는 점을 이해하도록 한다. 그리고 다양한 방법으로 자료를 수집하여 정보를 전달하는 글을 쓰도록 한다.	답안 작성 과정과 그에 따른 평가
성취 기준 2	[12화작03-04] 타당한 논거를 수집하고 적절한 설득 전략을 활용하여 설득하는 글을 쓴다. [12화작03-04] 이 성취기준은 독자의 요구, 관심사, 수준 등을 고려하여 논거를 수집하고 조직함으로써 설득력이 높은 글을 쓰는 능력을 기르기 위해 설정하였다. 수집한 논거의 타당성, 신뢰성, 공정성 여부를 판단하고, 주제, 목적, 독자를 고려하여 적절한 설득 전략을 활용하도록 한다.	답안 작성 과정과 그에 따른 평가
성취 기준 3	[12화작03-05] 시사적인 현안이나 쟁점에 대해 자신의 관점을 수립하여 비평하는 글을 쓴다. [12화작03-05] 이 성취기준은 시사 현안이나 쟁점을 여러 관점에서 살펴본 후 자신의 관점을 수립하여 비평문을 쓰도록 함으로써 경험과 사고를 확장하고 논리적, 비판적 사고력을 신장하기 위해 설정하였다. 시사 현안이나 쟁점을 다양한 관점에서 충분히 분석한 후 자신의 관점을 정하고, 그 관점에 따라 의견이나 주장, 견해가 명료하게 드러나도록 글을 쓰게 한다. 그 과정에서 자신이 선택하지 않은 관점의 단점이나 약점, 문제점을 근거를 들어 비판할 수 있다.	답안 작성 과정과 그에 따른 평가

	과목명: 언어와 매체	관련
성취 기준 1	[12언매02-05]문장의 짜임에 대해 탐구하고 정확하면서도 상황에 맞는 문장을 사용한다. [12언매02-05] 이 성취기준은 문장 짜임의 탐구에 대한 이전 학년의 성취기준을 심화한 것으로, 문장의 짜임을 탐구하여 정확하고 적절하게	답안 작성 과정과 그에

	문장을 사용하는 능력을 기르기 위해 설정하였다. 문장은 크게 홑문장과 겹문장으로, 겹문장은 이어진문장과 안은문장으로, 이어진문장은 대등하게 연결된 이어진문장과 종속적으로 연결된 이어진문장으로, 안은문장은 명사절을 가진 안은문장, 관형사절을 가진 안은문장, 부사절을 가진 안은문장, 서술절을 가진 안은문장, 인용절을 가진 안은문장으로 나뉘므로, 이런 다양한 문장을 적절하게 사용할 수 있도록 한다. 비슷한 단어를 사용하여 문장을 만들더라도 홑문장이나 겹문장, 이어진문장이나 안은문장이 문맥에 따라 정확성이나 적절성에서 차이가 있음을 이해하며, 이를 구별해서 담화 특성에 맞게 사용할 수 있는 능력을 기르는 데 중점을 두도록 한다.	따른 평가
성취 기준 2	[12언매02-07]담화의 개념과 특성을 탐구하고 적절하고 효과적인 국어 생활을 한다. [12언매02-07] 이 성취기준은 담화의 특성에 대한 이전 학년의 성취기준을 심화한 것으로, 이전 학년에서 배운 담화의 개념과 특성에 대한 이해를 바탕으로 담화의 생산과 수용에 효과적으로 참여하는 태도를 기르기 위해 설정하였다. 담화의 개념, 담화의 구성 요소, 담화의 맥락을 이해하고 담화 생산 및 수용에 활용하는 데 중점을 둔다.	답안 작성 과정과 그에 따른 평가
성취 기준 3	[12언매02-09]다양한 사회에서의 국어 자료의 차이를 이해하고 상황에 맞게 국어 자료를 생산한다. [12언매02-09] 이 성취기준은 지역의 차이, 세대나 성별 또는 계층의 차이, 문화적인 차이 등에 따라 언어 사용 양상이 다름을 이해함으로써 상황에 맞는 국어 자료를 생산하는 능력을 기르기 위해 설정하였다. 다양한 방언 자료, 해외에서 생산된 국어 자료, 국어로 번역된 외국 자료 등에 나타나는 언어적인 특성에 주목하도록 한다.	답안 작성 과정과 그에 따른 평가
성취 기준 4	[12언매02-11]다양한 국어 자료를 통해 국어 규범을 이해하고 정확성, 적절성, 창의성을 갖춘 국어생활을 한다. [12언매02-11] 이 성취기준은 국어생활을 영위하는 과정에서 지켜야 할 국어 규범에 대한 이해를 심화함으로써 정확한 국어를 사용하는 태도를 기르기 위해 설정하였다. 규범은 언어 사용에서 지켜야 할 기준이 된다는 점에서 정확성을 요구하지만 구어와 문어, 문학어와 일상어, 표준어와 방언, 현실 공간과 가상 공간 등에서 사용의 적절성 수준이 다르다. 규범에 대한 심화된 이해를 통해 언어의 정확성뿐 아니라 적절성과 창의성에 주목하도록 한다.	답안 작성 과정과 그에 따른 평가

2. 도덕과 교육과정

과목명: 생활과 윤리		관련
성취 기준 1	[12생윤05-03] 문화의 다양성을 존중해야 하는 이유를 다문화 이론의 관점에서 설명하고, 오늘날 종교 갈등을 극복하기 위한 방안을 제시할 수 있다.	문항 전체
성취 기준 2	[12생윤06-01] 사회에서 일어나는 다양한 갈등의 양상을 제시하고, 사회 통합을 위한 구체적인 방안을 제안할 수 있으며 바람직한 소통 행위를 담론윤리의 관점에서 설명하고 일상생활에서 실천할 수 있다.	제시문 (다)

과목명: 윤리와 사상		관련
성취 기준 1	[12윤사04-06] 동·서양의 평화사상들을 탐구하여 세계시민주의와 세계시민윤리의 원칙 및 지향을 이해하고, 이를 통해 세계시민이 가져야 할 태도에 대해 성찰할 수 있다.	답안 작성 과정과 그에

		따른 평가

3. 사회과 교육과정

	과목명: 사회 · 문화	관련
성취기준 1	[12사문01-01] 사회·문화 현상이 갖는 특성을 분석하고 다양한 관점을 적용하여 사회·문화 현상을 설명한다. [12사문01-01]을 통해 사회·문화 현상의 특성을 자연 현상의 특성과 비교하여 분석하고 사회·문화 현상을 설명하는 기능론, 갈등론, 상징적 상호작용론 등 다양한 관점의 특징을 파악한다. 사회·문화 현상을 올바르게 이해하기 위해서는 여러 관점을 균형 있고 조화롭게 활용하는 노력이 필요하다는 점을 인식한다.	답안 작성 과정과 그에 따른 평가
성취기준 2	[12사문04-03] 다양한 사회 불평등 양상을 조사하고 그와 관련한 차별을 개선하기 위한 방안을 모색한다. [12사문04-03]을 통해 사회적 소수자, 성 불평등, 빈곤의 양상과 그 문제점 및 해결 방안을 탐색한다. 특히 사회적 소수자는 인종, 민족, 국적, 신체 등 다양한 요인에 의해 규정될 수 있다는 점과 그로 인해 발생하는 차별에 대한 대응이 필요하다는 점을 인식한다.	답안 작성 과정과 그에 따른 평가

나) 자료 출처

교과서 외

자료명(도서명)	작성자(저자)	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
타인의 해석	말콤 글래드웰	김영사	2020	191~200	제시문(가), (나)	○
열등한 성	앤절라 사이니	현암사	2019	91~92	제시문(다)	○
보이지 않는 여자들	캐럴라인 크리아도 페레스	웅진 지식하우스	2020	272~276	제시문(다)	○

5. 문항 해설

이 문항은 문두의 요구사항에 따라 세 갈래로 이루어진다. 첫째는 제시문 (가)의 핵심을 적절하게 추출하여 간결하게 '~가설' 형태로 정리할 수 있는지와 그 정리에 대한 설득력 있는 이유를 제시하는지를 평가하고, 둘째는 제시문 (나)의 실험 결과가 자신이 명명한 '~가설'에 대해 갖는 반증 관계를 적절하게 서술하는지를 평가하고, 마지막으로는 제시문 (다)의 의료 데이터 젠더 격차 상황이 제시문 (가)와 제시문 (나) 사이의 관계를 다른 방식으로 보여주고 있음을 올바르게 설명하는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준			배점
	영역	항목과 핵심내용		
	구성과 전개	(가)의 내용을 (예를 들어) '감정 보편성 가설' 등으로 명명하고 그 이유를 (가)의 내용을 바탕으로 적절하게 제시한 후, (나)의 실험결과가 감정 표현이 보편적이라는 가설에 대한 반증 사례에 해당한다는 점과 실제로 문화적 차이가 감정 판독에 상당한 영향을 끼친다는 점을 설명하고, (다)의 심장병 증상 사례가 질병 증상에 대해 일종의 '보편성'을 가정했던 기존 의학계의 암묵적 가정이 최근 연구 결과에 의해 반증되는 내용이 (가)와 (나) 사이의 관계와 유사하다는 점을 지적하고 의학적 맥락에서 젠더 데이터 격차의 문제점을 지적한다.		5
	설득력 있는 종합과 창의적인 해결책 제시	종합적 추상화	제시문 (가) 내용의 핵심을 '~가설'의 형태로 종합하고 추상화하여 요약하여 제시하고 그에 대한 이유를 설명한다.	15
		비판적 분석	제시문 (나) 내용이 앞서 자신이 제시한 '~가설'에 대한 반증 사례가 된다는 점을 분석해 내고, 그것이 제시문 (가) 내용과 달리 감정 표현과 판독 과정에 문화적 차이가 영향을 끼침을 의미한다는 점을 설명한다.	10
		창의적 유비 추론	제시문 (다)에 제시된 심장병 증상의 사례가 제시문 (가)와 (나) 사이의 관계와 유비될 수 있으며, 의학 데이터에서 암묵적으로 가정되던 '보편성'이 남성과 여성의 차이를 간과하고 있었음을 설명하고 그것이 갖는 문제점을 지적한다.	15
	문장과 표현	정확한 단어 및 표현 선택, 자연스러운 문장 구성, 문장 및 단락 사이의 유기적 연결을 평가한다.		5

7. 예시 답안 혹은 정답

(합격자 우수답안)

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

(가)의 핵심 내용은 '감정 표현의 선험성 가설'이라 정리할 수 있다. 제시문 (가)에서 다윈이 감정 표현의 행위가 인류가 생존하는데 있어 큰 역할을 했고, 그로 인해 모든 인간이 얼굴에서 드러나는 감정 표현의 의미를 선험적으로 이해하고 활용할 수 있게 진화했다고 주장했기 때문이다. 하지만 (나)의 실험 결과는 서로 다른 고립된 문화에서 감정 표현에 대한 인식이 다르게 나타나며 제시문 (가)의 내용을 부정하고 있다. 이로부터 (가)의 다윈이 잘못된 결론에 이르게 된 것은 자신이 속한 문화, 즉 유럽에서의 경우를 인류 전체의 범위로 확대하여 해석했기 때문임을 알 수 있다. 이를 과학 철학에서는 '성급한 일반화의 오류'를 범했다고 이야기한다. 제시문 (다)에서도 마찬가지로 심근경색 환자들의 증상 관련 표본 수집에서 체계적이지 못한 정보 처리로 인해 남녀 사이의 차이를 파악하지 못하는 '성급한 일반화의 오류'의 사례가 제시된다. 의학에서 모든 치료는 정확한 진단을 바탕으로 이루어져야 한다. 또한 정확한 증상의 파악이 이루어지지 않으면 정확한 진단도 있을 수 없기 때문에 제시문 (다)는 의학 데이터 분석이 정확하지 못한 경우에 대한 경각심을 일으키고 이를 바탕으로 앞으로의 의학에서 더욱 주의 깊은 데이터 분석을 해야 함을 일깨우는 것이다.

◆ 문항카드 12 (자연계열_의예과_2번 문항)

[한양대학교(서울) 문항정보]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 의예과(수학) / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 미적분, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	원과 직선의 위치관계, 수열의 귀납적 정의, 여러 가지 적분법, 수열의 극한의 기본성질, 이항정리, 수열의 극한의 대소 관계
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> 평면 위에 반지름이 1인 원 C와 D가 서로 접하고 있다. 원 C와 D는 각각 직선 l과 서로 다른 점에서 접한다. 원 C, D, 직선 l에 둘러싸인 영역을 A라고 하자.

<나> 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$0 < f(x) < 2, \qquad f'(x) = -f(x)\sqrt{2-f(x)}, \qquad \lim_{t \to 0+} f(t) = 2$$

를 만족시킨다.

<다> $e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.71828\ldots$

1. 제시문 <가>에서 직선 l에 접하면서 영역 A에 들어갈 수 있는 가장 큰 원을 C_1이라 하자. 영역 A에서 원 C_1, $\cdots$, C_n의 내부를 제외한 영역에 들어가고, 그 중심이 원 C_1, $\cdots$, C_n의 중심과 다르며, 직선 l에 접하는 가장 큰 원 하나를 택하여 C_{n+1}이라 하자. 원 C_{12}의 반지름을 구하시오.

2. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = \int_{\frac{1}{n}}^{2021n} f(x)\,dx$$

를 만족시킨다. $\lim_{n \to \infty} a_n$의 값을 구하시오.

3. 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \int_0^1 e^{-(n+2)x}(1+e^x)^n\,dx$$

를 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}b_n$ 의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

본 문제는 수학Ⅰ-수열, 확률과 통계-경우의 수, 미적분-수열의 극한, 미분법, 적분법 단원에서 공부한 이항정리, 함수의 미적분, 수열의 극한에 대한 기본적인 지식을 묻는다. 다음 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제 2-1	수학 – (2) 기하 – ③ 원의 방정식 [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. 수학Ⅰ – (3) 수열 – ③ 수학적 귀납법 [12수학Ⅰ03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
문제 2-2	미적분 – (1) 수열의 극한 – ① 수열의 극한 [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. 미적분 – (3) 적분법 – ① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 2-3	확률과통계 – (1) 경우의 수 – ② 이항정리 [12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다. 미적분 – (1) 수열의 극한 – ① 수열의 극한 [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. 미적분 – (3) 적분법 – ① 여러 가지 적분법 [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학	김원경 외	비상교육	2018	p.127~p.138
	고등학교 수학Ⅰ	고성은 외	좋은책 신사고	2018	p.144~p.145
	고등학교 미적분	류희찬 외	천재교과서	2019	p.18~p.23, p.156~p.176
	고등학교 미적분	이준열 외	천재교육	2019	p.17~p.21 ,p.139~p.159
	고등학교 확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2019	p.27~p.37
	고등학교 확률과 통계	김원경 외	비상교육	2019	p.21~p.32

5. 문항 해설

[문제2]-1은 서로 접하는 원들의 반지름으로부터 도출되는 수열에 관한 문제로, 수열을 추적하여 그 값을 얻어내는 능력을 평가하는 문제이다.

[문제2]-2는 주어진 함수 f의 성질을 적절히 이용하여 제시된 적분값 a_n을 함수 f와 자연수 n에 대한 형태로 나타내고, 수열의 극한의 성질을 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 극한값을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[문제2]-3은 문제에서는 이항정리, 치환적분법, 부분적분법을 사용하여 제시된 적분값 b_n을 n에 대한 적절한 식으로 나타내고, 수열의 극한의 성질을 이용하여 수열 $\{b_n\}$의 극한값을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	수열의 12번째 값을 정확히 얻었는가?	10
	계산과정을 명확히 설명하였는가?	20
2	적분값 a_n을 함수 f와 자연수 n에 대한 형태로 나타내었는가?	15
	수열 $\{a_n\}$의 극한값을 계산하였는가?	15
3	적분값 b_n을 n에 대한 적절한 식으로 나타내었는가?	30
	수열 $\{b_n\}$의 극한값을 계산하였는가?	10

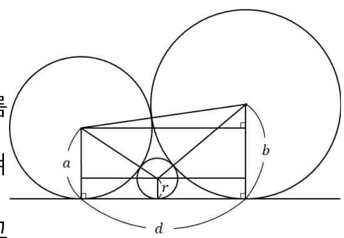
7. 예시 답안 혹은 정답

[2-1]

직선 l에 접하는 두 원의 반지름이 a, b라고 할 때, 이 두 원에 접하고 x축에 접하는 원의 반지름 r을 구하면

$(a+b)^2=(a-b)^2+d^2$ 이므로 $d=2\sqrt{ab}$ 이고, $d=\sqrt{(a+b)^2-(a-r)^2}+\sqrt{(b+r)^2-(b-r)^2}=2\sqrt{ab}$ 에서

$$\sqrt{r}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}} \cdots (\star)$$ 를 얻을 수 있다.



이제 원 C, D에서 시작하여 $C_1, C_2, \ldots$ 의 각각의 반지름 $r_1, r_2, \ldots$를 생각할 때 $c_n=\frac{1}{\sqrt{r_n}}$ 으로 정의하여 ($\star$)를 이용하여 c_n을 계산하자. 만약 원 C_n이 직선 l과 원 C_k, C_m에 접한다고

하자. 이제 $\frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{1}{\sqrt{r_k}}+\frac{1}{\sqrt{r_m}}=c_n=c_k+c_m$이다. A의 영역 중 가장 큰 원부터 채워 넣어야 하므로 c_n이 작은 순서대로 위 계산을 반복해 주면 된다. 다음은 위에서 설명한 과정을 그림으로 나타낸 것이다.

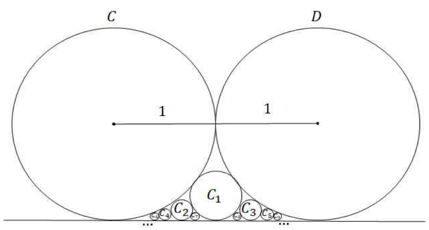


그림 1 원 C_n을 생성하는 과정

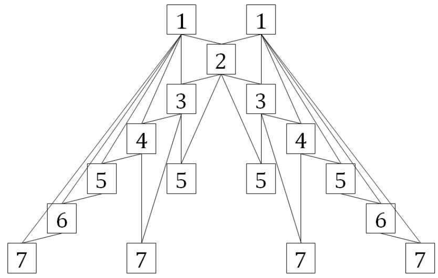


그림 2 c_n을 구하는 과정

따라서 $c_{12}=c_{13}=c_{14}=c_{15}=7$이므로, $r_{12}=\left(\frac{1}{7}\right)^2=\frac{1}{49}$이다

[2-2] 제시문 <나>에 의하여 구간 $(0,\infty)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다. 따라서 $f(x)$는 일대일 함수이다. $u=f(x)$로 치환하면

$$a_n=\int_{\frac{1}{n}}^{2021n} f(x)\,dx=\int_{f(\frac{1}{n})}^{f(2021n)} u\frac{du}{f'(x)}=-\int_{f(\frac{1}{n})}^{f(2021n)} u\frac{du}{f(x)\sqrt{2-f(x)}}$$

$$=-\int_{f(\frac{1}{n})}^{f(2021n)}\frac{du}{\sqrt{2-u}}=2\left[\sqrt{2-u}\,\right]_{f(\frac{1}{n})}^{f(2021n)}=2\left(\sqrt{2-f(2021n)}-\sqrt{2-f(\frac{1}{n})}\right)$$

가정에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2-f(\frac{1}{n})}=\sqrt{2-\lim_{t\to 0+}f(t)}=0$$

이고, 구간 $(0,\infty)$에서 함수 $f(x)$는 $0<f(x)<2$이고 감소하므로 함수 $\sqrt{2-f(x)}$는 $0<\sqrt{2-f(x)}<\sqrt{2}$이고 증가한다.

자연수 n에 대하여 $c_n=\int_1^n\sqrt{2-f(x)}\,dx$라 하면, $c_n\geq\int_1^n\sqrt{2-f(1)}\,dx=\sqrt{2-f(1)}\,(n-1)$ 한편

$c_n=-\int_1^n\frac{f'(x)}{f(x)}dx=-[\ln f(x)]_1^n=-(\ln f(n)-\ln f(1))$, 즉 $\ln f(n)-\ln f(1)\leq-\sqrt{2-f(1)}\,(n-1)$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\ln f(n)=-\infty$ 또는 $\lim_{n\to\infty}f(2021n)=\lim_{n\to\infty}f(n)=0$.

그러므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=2\lim_{n\to\infty}\sqrt{2-f(2021n)}=2\sqrt{2}$

[2-3] <해 1> 이항정리에 의하여

$$b_n=\int_0^1 e^{-(n+2)x}\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k e^{(n-k)x}\,dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \int_0^1 e^{-(k+2)x}dx \quad (t=e^{-x} \text{ 으로 치환})$$

$$=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \int_{e^{-1}}^1 t^{k+1}dt=\int_{e^{-1}}^1 t(t+1)^n dt$$

한편, 부분적분법에 의하여

$$\int_{e^{-1}}^1 t(t+1)^n dt=\left[\frac{t(t+1)^{n+1}}{n+1}\right]_{e^{-1}}^1-\frac{1}{n+1}\int_{e^{-1}}^1 (t+1)^{n+1}dt$$

$$=\frac{2^{n+1}-e^{-1}(1+e^{-1})^{n+1}}{n+1}-\frac{2^{n+2}-(1+e^{-1})^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

따라서

$$\frac{n}{2^n}b_n=\frac{2n}{n+1}-\frac{e^{-1}(1+e^{-1})n}{n+1}\left(\frac{1+e^{-1}}{2}\right)^n$$

$$-\frac{4n}{(n+1)(n+2)}+\frac{(1+e^{-1})^2 n}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{1+e^{-1}}{2}\right)^n \quad \cdots(\bigstar\bigstar)$$

제시문 <다>에 의하여 $\frac{1+e^{-1}}{2}\in(0,1)$ 이므로, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+e^{-1}}{2}\right)^n=0$

그러므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}b_n=2$

<해 2> $\frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}(1+e^{-x})^{n+1}=-e^{-x}(1+e^{-x})^n$

$b_n=\int_0^1 e^{-x}\cdot e^{-x}(1+e^{-x})^n dx$ 라 쓰고 부분적분법을 사용하면

$$b_n=\left[-\frac{1}{n+1}e^{-x}(1+e^{-x})^{n+1}\right]_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1 e^{-x}(1+e^{-x})^{n+1}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{n+1}e^{-x}(1+e^{-x})^{n+1}\right]_0^1+\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}(1+e^{-x})^{n+2}\right]_0^1$$

이로부터 $(\bigstar\bigstar)$를 얻는다.