2) 2021학년도 논술우수자_자연계열 (오전/오후)

① 논술우수자 자연계(오전)

문항카드 2

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후
			■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	함수의 그래프의 개형, 방정식에의 활용, 곡선과 좌표축 사이의 넓이	
예상 소요 시간	30분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 계수가 실수인 삼차다항식 x^3+ax^2+bx+c가 실수 α,β,γ에 대해 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$로 인수분해 되는 경우, 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$은 세 실근 α,β,γ를 갖는다고 한다.
(단, α,β,γ의 값이 서로 다를 필요는 없다.)

(나) 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$이 세 실근 α,β,γ를 가지면, 등식

$$\begin{aligned} x^3+ax^2+bx+c &= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \\ &= x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

이 성립하므로 근과 계수 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\alpha+\beta+\gamma=-a,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b,\quad \alpha\beta\gamma=-c$$

(1-1) 삼차방정식 $x^3-x-t=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 t의 값의 범위를 구하시오. (8점)

(1-2) 삼차방정식 $x^3-x-t=0$이 세 실근 α,β,γ $(\alpha\le\beta\le\gamma)$를 갖는다.

(a) 실근 β의 값의 범위를 구하시오. (5점)

(b) 곡선 $y=x^3-x-t$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 β로 나타내고, S의 최솟값을 구하시오. (17점)

3. 출제 의도

이 문제는 방정식의 실근을 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표로 이해할 수 있는지, 곡선과 좌표축 사이의 넓이를 정적분으로 연결시킬 수 있는지, 다항식의 연산을 수행할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td colspan="3">☐ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
■ 수학 ☐ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ ☐ 미적분 ☐ 확률과 통계</td></tr>
<tr><td rowspan="11">관련
성취기준</td><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (수학)</td></tr>
<tr><td>(가)</td><td>성취기준1</td><td>[수학] - (1) 문자와 식 - ③ 인수분해
[10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (수학)</td></tr>
<tr><td>(나)</td><td>성취기준1</td><td>[수학] - (1) 문자와 식 - ② 나머지정리
[10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다.</td></tr>
<tr><td>(나)</td><td>성취기준2</td><td>[수학] - (1) 문자와 식 - ① 다항식의 연산
[10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (수학II)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">공통</td><td>성취기준1</td><td>[수학Ⅱ] - (3) 적분 - ③ 정적분의 활용
[12수학II03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준2</td><td>[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용
[12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준3</td><td>[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용
[12수학II02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학	고성은 외	좋은책 신사고	2020	78쪽	(가)	
수학	황선욱 외	미래N	2020	84쪽	(가)	
수학	김원경 외	비상	2020	53쪽	(나)	재구성
수학	류희찬 외	천재교과서	2020	62쪽	(나)	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 - 해당사항 없음

5. 문항 해설

(1-1) 방정식에서의 활용에서와 같이 방정식을 두 함수 $y=x^3-x$와 $y=t$의 그래프의 교점으로 이해하면 풀이가 용이하다. 삼차함수의 그래프의 개형에서 극값이 갖는 의미를 바탕으로 방정식의 근의 개수를 연결시키면 $y=x^3-x$의 두 극값 사이에 t값이 존재할 때 서로 다른 세 실근을 가짐을 알 수 있다.

(1-2)(a) 문항 (1-1)과정에서 사잇값 정리를 통해서 서로 다른 세 실근을 갖는 경우는 어렵지 않게 알 수 있다. 또한 t가 극값을 취하게 되면 그래프의 개형을 바탕으로 하나의 중근과 다른 한 근을 갖게 되므로 이 경우를 포함시키면 구하고자 하는 범위를 구할 수 있다.

(1-2)(b) 본 문항의 적분은 다항식의 적분으로써 기본적인 정적분을 적용하면 된다. 근과 계수의 관계에 의해서 주어진 관계식과 α, β, γ가 방정식의 근이 됨을 이용하여 식을 β에 관하여 정리하면 되는 문제이다. 이후 완전제곱식과 양수의 합의 형태로 나타낼 수 있으므로 (1-2)(a)에서 구한 β의 범위를 바탕으로 기본적인 부등식 연산을 이용하여 최솟값을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(1-1)	미분을 통하여 $y=x^3-x$ 또는 $y=x^3-x-t$의 도함수가 0인 점을 찾음	4점
	t가 극값 사이에 존재해야 함을 인지함	4점
(1-2)(a)	(1-1)에서 구한 두 극값을 갖는 점 사이의 범위를 인지함	2점
	서로 같은 두 실근을 인지함	3점
(1-2)(b)	적분을 α, β, γ의 식으로 올바르게 나타냄.	5점
	근과 계수의 관계와 α, β, γ가 $x^3-x-t=0$의 근임을 인지하여 관계식을 구함	2점
	적분을 β에 관한 식으로 나타냄	5점
	부등식 또는 이차함수의 최솟값을 이용하여 최솟값을 구함	5점

7. 예시 답안

(1-1) $x^3-x-t=0$의 근을 함수 $y=x^3-x$와 $y=t$의 그래프들의 교점으로 생각하자. 함수 $y=x^3-x$가 $x=-1/\sqrt{3}$에서 극댓값 $2/\sqrt{3}^3$과 $x=1/\sqrt{3}$에서 극솟값 $-2/\sqrt{3}^3$을 갖는다. 따라서 $-2/\sqrt{3}^3<t<2/\sqrt{3}^3$일 때, 사잇값 정리에 의해서

$\alpha <-1/\sqrt{3}< \beta < 1/\sqrt{3}< \gamma$인 세 근을 갖는다.

(1-2)(a) (1-1)에서와 같이 구하고자 하는 방정식의 근을 $y=x^3-x$와 $y=t$의 교점으로 생각하자. $-2/\sqrt{3^3} < t < 2/\sqrt{3^3}$인 경우 문항 (1-1)에서와 같이 사잇값 정리에 의해서 극대점과 극소점 사이에서 두 번째 근을 갖는다. 따라서 $-1/\sqrt{3}< \beta < 1/\sqrt{3}$. 그런데 $t=2/\sqrt{3^3}$, $t=-2/\sqrt{3^3}$인 경우, 각각 $x=-1/\sqrt{3}$, $x=1/\sqrt{3}$에서 중근을 가지므로 β의 값은 $-1/\sqrt{3} \le \beta \le 1/\sqrt{3}$을 만족한다. 나머지 t값의 경우 1개의 실근과 2개의 허근을 갖는다.

(1-2)(b) 제시문 (나)에서 주어진 근과 계수의 관계를 이용하면 다음을 얻을 수 있다. $\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1,\ \alpha\beta\gamma=t,\ \alpha^3-\alpha=t,\ \beta^3-\beta=t,\ \gamma^3-\gamma=t.$ 이용하여 다음 정적분을 β에 관하여 풀면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_\alpha^\gamma |x^3-x-t|dx = \int_\alpha^\beta (x^3-x-t)dx - \int_\beta^\gamma (x^3-x-t)dx \\
&= \beta^4/2-\alpha^4/4-\gamma^4/4-\beta^2+\alpha^2/2+\gamma^2/2-t(2\beta-\alpha-\gamma) \\
&= \beta(\beta+t)/2-\alpha(\alpha+t)/4-\gamma(\gamma+t)/4-\beta^2+\alpha^2/2+\gamma^2/2-t(2\beta-\alpha-\gamma) \\
&= \alpha^2/4+\gamma^2/4-\beta^2/2-(t-t/4)(2\beta-\alpha-\gamma) \\
&= \frac{1}{4}(\beta^2-2\alpha\gamma)-\beta^2/2-\frac{3t}{4}(3\beta) \\
&= \frac{1}{4}(2-3\beta^2-9t\beta) = \frac{1}{4}(-9\beta^4+6\beta^2+2) = -\frac{9}{4}(\beta^2-\frac{1}{3})^2+\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

문항 (1-2)(a)에서 $-1/\sqrt{3} \le \beta \le 1/\sqrt{3}$ 이므로 기본적인 부등식의 연산을 이용하면 $0 \le \beta^2 \le 1/3$ 및 $0 \le (\beta^2-1/3)^2 \le 1/9$가 되어 넓이의 최솟값은 $\beta=0$일 때 $1/2$이다.

8. 대입전형 선행학습 자체영향평가위원회 의견

항목	의견 요약
고교 교육과정 수준 준수여부	- 수학 과목에서 배우는 근의 의미와 수학Ⅱ 과목에서 배우는 그래프의 개형과 방정식의 실근의 관계에 대해 출제되어 고등학교 교육과정의 내용을 충실히 반영하였다.
문항 유형의 적절성	- 수학 과목의 방정식 문제이지만 수학Ⅱ 과목의 함수로 변형하여 그래프를 활용해야하는 분석능력을 요구한 문항이였다. 풀이 과정에서 극값의 존재를 파악하여 그래프를 그린 후 넓이를 구하기 위해 정적분을 사용하는 논리적 사고력과 종합적 사고력을 동시에 평가할 수 있도록 문제가 구성되었다. - 제시문 (가)와 (나)를 통해 삼차방정식의 실근의 존재를 α, β, γ로 표현하여 문제 접근을 용이 하게 해 준 부분에서는 좋은 제시문이었다. 제시문 (가),(나)는 (1-2)(b)를 풀이하는 과정에서 발생하는 정적분을 정리하는데 도움을 주었다. 제시문이 주어진 문제를 해결하기 위한 단서를 적절히 제공했다.
문항 난이도의	- (1-1) 문항에서 '서로 다른 세 실근을 갖도록'이라는 표현과 (1-2)(b) 문

항목	의견 요약
적절성	항에서 '넓이 S를 β로 나타내고'하는 표현이 학생들로 하여금 문제를 명확히 인식하는데 도움이 되었을 것이다. 또한, 제시문 (가)에서 실근의 존재를 언급한 후 (나)에서 근과 계수와의 관계를 설명하여 가독성이 좋은 제시문이었다. - (1-1)과 (1-2)(a) 문제는 난도가 높지 않았다. (1-2)(b)에서 S를 β로 정리하는 과정이 다소 복잡할 수 있으나 제시문 (나)를 활용하면 충분히 계산해볼 수 있는 수준이었다.

문항카드 3

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후
			□ 1번 ■ 2번(의예1번) □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	삼각함수의 극한, 적분과 미분의 관계, 부분적분	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$$

가 성립한다.

(나) 다음 삼각함수의 극한이 성립한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

(다) $\sin^2 x$의 부정적분은 다음과 같다.

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \quad (C\text{는 적분상수})$$

(※) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$는

$$\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt = x\sin^2 x$$

를 만족한다.

(2-1) 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 할 때, $\int_0^{\pi} x^2(F(x)-F(0))dx$의 값을 구하시오. (10점)

(2-2) $f(0)$의 값을 구하시오. (10점)

(2-3) 닫힌구간 $[0, 10]$에서 함수 $h(x)=\int_0^x (x^3-t^3)f(t)dt$의 최솟값을 구하시오. (15점)

3. 출제 의도

정적분으로 주어진 함수를 미분할 수 있는지를 알아보고, 삼각함수의 극한과 적분을 계산할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	☐ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"** ☐ 수학 ☐ 수학 I ■ 수학 II ■ 미적분 ☐ 확률과 통계

관련 성취기준

관련 제시문	성취기준	과목명: (수학Ⅱ)
(가)	성취기준 1	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - ② 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.

관련 제시문	성취기준	과목명: (미적분)
(나)	성취기준 2	[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
(다)	성취기준3	[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
(다)	성취기준 4	[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2020	125-130	(가)	
수학Ⅱ	이준열 외	천재교육	2020	121-125	(가)	
미적분	홍성복 외	지학사	2020	67-72	(나)	
미적분	이준열 외	천재교육	2020	71-74	(나)	
미적분	홍성복 외	지학사	2020	61-66 139-143	(다)	재구성
미적분	이준열 외	천재교육	2020	65-68 139-146	(다)	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 - 해당사항 없음

5. 문항 해설

(2-1) 정적분과 미분의 관계를 이용하여 주어진 함수가 만족하는 성질을 찾고 이를 부분적분법에 활용할 수 있는지를 묻는다.

(2-2) 삼각함수로 주어진 함수의 극한을 구할 수 있는지를 묻는다. (2-3) 도함수를 활용하여 그래프의 개형을 파악하고 최솟값을 구할 수 있는지를 알아본다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(2-1)	- $x(F(x)-F(0))=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x\sin^2 x)$임을 보임.	4점
	- $\int_0^{\pi} x^2(F(x)-F(0))dx=-\frac{\pi^2}{8}$임을 보임.	6점
(2-2)	- $f(x)=\frac{\sin x\cos x}{x}-\frac{\sin^2 x}{2x^2}+\cos^2 x-\sin^2 x$임을 보임.	6점
	- $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{3}{2}$임을 보임.	4점
(2-3)	- $h'(x)=\frac{3}{2}x\sin x(\sin x+2x\cos x)$임을 보임.	3점
	- 함수 $h(x)$의 그래프의 개형을 그리고 $x=n\pi$일 때 극솟값을 가짐을 보임.	7점
	- 함수 $h(x)$가 최솟값 $h(3\pi)=-\frac{27}{8}\pi^2$을 가짐을 보임.	5점

7. 예시 답안

(2-1) 주어진 등식을 미분하면 $2x\int_0^x f(t)dt = \frac{d}{dx}(x\sin^2 x)$이므로

$$x(F(x)-F(0)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x\sin^2 x)$$

를 얻는다.

부분적분법과 제시문 (다)를 이용하면

$$\begin{aligned}\int x\sin^2 x dx &= x\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)-\int\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)dx \\ &= \frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}+C\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2(F(x)-F(0))dx &= \left[\frac{1}{2}x^2\sin^2 x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{2}x\sin^2 x dx \\ &= -\int_0^\pi \frac{1}{2}x\sin^2 x dx \\ &= -\left[\frac{x^2}{8}-\frac{x\sin 2x}{8}-\frac{\cos 2x}{16}\right]_0^\pi = -\frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

이다.

(2-2) $x \neq 0$이면 $\int_0^x f(t)dt = \frac{\sin^2 x}{2x}+\sin x\cos x$이므로

$$f(x) = \frac{\sin x\cos x}{x}-\frac{\sin^2 x}{2x^2}+\cos^2 x-\sin^2 x$$

이다. f는 연속이므로 $f(0)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x\cos x}{x}-\frac{\sin^2 x}{2x^2}+\cos^2 x-\sin^2 x\right]=\frac{3}{2}$이다.

(2-3) $h'(x)=3x^2\int_0^x f(t)dt = \frac{3}{2}x\frac{d}{dx}(x\sin^2 x) = \frac{3}{2}x\sin x(\sin x+2x\cos x)$이다.

$h'(x)$는 $\sin x = 0$이거나 $\tan x = -2x$일 때 $h'(x)$의 부호가 바뀌고 극값을 갖는다. 곡선 $y=\tan x$와 직선 $y=-2x$을 그려보면 $0<x<\pi$, $\pi<x<2\pi$, $2\pi<x<3\pi$일 때 각각 1개씩, 모두 3개의 교점을 갖는다.

그러므로 함수 $h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	a_1	$\cdots$	π	$\cdots$	a_2	$\cdots$	2π	$\cdots$	a_3	$\cdots$	3π	$\cdots$	10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

(2-1)과 같은 방법으로

$$h(n\pi)=\int_0^{n\pi}\frac{3}{2}x\frac{d}{dx}(x\sin^2x)dx=\left[\frac{3}{2}x^2\sin^2x\right]_0^{n\pi}-\int_0^{n\pi}\frac{3}{2}x\sin^2xdx$$

$$=-\int_0^{n\pi}\frac{3}{2}x\sin^2xdx$$

$$=-\frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin2x}{4}-\frac{\cos2x}{8}\right]_0^{n\pi}=-\frac{3n^2\pi^2}{8}$$

이므로, $h(x)$는 구간 $[0,10]$에서 최솟값 $h(3\pi)=-\frac{27}{8}\pi^2$을 가진다.

8. 대입전형 선행학습 자체영향평가위원회 의견

항목	의견 요약
고교 교육과정 수준 준수여부	- 수학Ⅱ 과목에서 배우는 정적분의 정의와 미적분 과목에서 배우는 삼각함수의 미분법과 적분법 그리고 부분적분법을 통합한 문제로 고등학교 교육과정 중 기본이 되는 내용을 잘 반영하였다.
문항 유형의 적절성	- 정적분으로 주어진 식을 먼저 양변을 미분해야 됨을 풀이 과정에서 보여주는 과정을 통해 문제를 이해하고 분석하는 능력을 평가할 수 있다. 또한, 제시문에 주어진 $\sin^2x$의 원시함수를 활용하여 부정적분을 구하는 풀이 과정을 통해 논리적 사고력을 연속인 함수의 함숫값을 극한값으로 구하고 부분적분법을 활용해야하는 풀이 과정을 통해 종합적 사고력을 평가할 수 있을 것이다. - 제시문 (가)와 (나)는 모든 수학 선생들께서 수업 시간 증명하는 과정을 설명하시며 중요성을 언급하였을 것으로 생각되어 학생들이 친숙하게 느꼈을 것으로 판단한다. (다)는 부분적분법을 적용함에 있어 편하게 활용하였을 것이므로 답안 작성에 많은 도움이 되었을 것이다. 모든 제시문이 문제 풀이에 적절히 도움이 될 수 있고 충분히 이해할 수 있도록 잘 제시되었다.
문항 난이도의 적절성	- 모든 문항이 '값을 구하라'는 구성으로 평소 학생들이 내신이나 수능 준비를 하면서 많이 다뤄본 문제 유형이라 학생들 입장에서 문제가 명료하였을 것이다. 또한, 제시문도 평소 많이 보았을 것이므로 가독성이 좋았을 것이다. - 수학Ⅱ 과목과 미적분 과목을 학습할 때 학생들이 가장 많이 다뤄보았을 미적분의 기본정리, 문자를 포함한 정적분, 부분적분법을 활용하는 문제들이라 난도는 높게 느껴지지 않았을 것이다. 다만, 부분적분법을 활용할 때 적분할 함수를 선택하는 과정에서 제시문 활용의 숙련도에 따라 난도가 높게 느껴진 학생들도 일부 있을 수 있겠지만 일반 고등학생 수준을 고려할 때 난도는 적절하다.

문항카드 4

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후
			□ 1번 □ 2번 ■ 3번 (의예2번)
출제 범위	핵심개념 및 용어	코사인법칙, 중복조합, 연속함수	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표평면 위의 임의의 세 점 A, B, C에 대하여, 부등식 $\overline{AB}+\overline{BC}\geq \overline{AC}$가 성립한다.
역으로, 좌표평면 위에 임의의 두 점 A, B가 있고, 임의의 두 양수 p, q가 부등식

$$|p-q| \leq \overline{AB} \leq p+q$$

를 만족하면, $\overline{AC}=p$, $\overline{BC}=q$인 점 C가 좌표평면 위에 존재한다.

(나) (코사인법칙) 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라고 하면,
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$가 성립한다.

(3-1) 좌표평면에서 $\overline{OP_1}=10$, $\overline{P_1P_2}=20$인 점 P_1이 존재하는 점 P_2의 집합을 S라고 할 때, 도형 S의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) (5점)

(3-2) 좌표평면에서 $\overline{OP_1}=a_1$, $\overline{P_1P_2}=a_2$, $\overline{P_2P_3}=a_3$인 두 점 P_1, P_2가 존재하는 점 P_3의 집합이 $\{P \mid \overline{OP} \leq 9\}$가 되도록 하는 자연수 a_1, a_2, a_3의 순서쌍 (a_1, a_2, a_3)의 개수를 구하시오. (10점)

(3-3) 자연수 a_1, a_2, a_3과 실수 θ $(0 \leq \theta < \pi)$에 대하여 다음 조건을 만족하는 좌표평면 위의 점 P_3의 집합을 T_θ라고 하자.

> $\overline{OP_1}=a_1$, $\overline{P_1P_2}=a_2$, $\overline{P_2P_3}=a_3$이고 $\theta \leq \angle OP_1P_2 \leq \pi$와 $\theta \leq \angle P_1P_2P_3 \leq \pi$를 만족하는 두 점 P_1, P_2가 존재한다.

(3-2)의 자연수 a_1, a_2, a_3에 대하여, 집합 T_θ가 집합 $\{P \mid \overline{OP} \le 9\}$와 같아지도록 하는 θ의 값의 범위는 $0 \le \theta \le \alpha$이다.

(a) $a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 4$일 때, $\cos\alpha$의 값을 구하시오. (10점)

(b) α가 최대가 되도록 하는 자연수 a_1, a_2, a_3의 값을 찾고, 이때의 $\cos\alpha$의 값을 구하시오. (10점)

3. 출제 의도

삼각형의 세 변의 길이와 제시문 (가)에서 주어진 부등식과의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 좌표평면 위의 점의 집합에 관한 문제를 해결 할 수 있는지 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	☐ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"** ☐ 수학 ■ 수학 I ☐ 수학 II ☐ 미적분 ☐ 확률과 통계

관련 성취기준

관련 제시문	성취기준	과목명: (수학I)
(나)	성취기준 1	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학I	박교식 외	동아출판	2018	90	나	
수학I	권오남 외	교학사	2018	101	나	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 - 해당사항 없음

5. 문항 해설

(3-1) 좌표평면 위의 점이 그리는 도형의 방정식을 구하는 문제이다. 제시문 (가)에서 주어진 부등식을 이용하여 원점으로부터 구하려는 점의 거리에 대한 조건을 구할 수 있다.

(3-2) (3-3) 문제의 조건을 만족하는 점 P_3가 주어졌을 때, 원점 O를 중심으로 P_3를 회전시킨 모든 점도 조건을 만족한다. 또한 P와 Q가 집합의 원소라면 O로부터의 거리가 $\overline{OP}$ 와 $\overline{OQ}$ 사이에 있는 점도 집합의 원소가 된다는 관찰로 부터 주어진 조건을 만족하기 위한 가장 중요한 조건이 O가 집합의 원소가 된다는 사실을 알 수 있다. 이러한 사고의 방식은 연속함수의 개념을 잘 이해하고 있는지를 평가하는 좋은 척도가 된다고 본다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	$S=\{P \mid 10 \le \overline{OP} \le 30\}$임을 보이면	3
	S의 넓이가 800π임을 보이면	2
(3-2)	$a_1+a_2+a_3=9$을 보이면	2
	$\overline{OP_1}=a_1$, $\overline{P_1P_2}=a_2$, $\overline{P_2O}=a_3$가 되는 P_1, P_2가 존재하는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3)이 만족하는 필요충분조건을 정확하게 찾아내면 (조건이 필요충분하다는 것을 예시답안처럼 엄밀하게 증명할 필요는 없으나 연속에 관한 아이디어가 들어가 있어야 함.)	5
	조건을 만족하는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3)의 개수가 10개임을 구하면	3
(3-3) (a)	$\overline{OP_1}=2$, $\overline{P_1P_2}=3$, $\overline{P_2O}=4$인 삼각형에서 α가 $\angle P_1$와 $\angle P_2$ 중 작은 것과 같다는 것을 보이면	7
	$\cos\alpha=\frac{7}{8}$임을 구하면	3
(3-3) (b)	(a_1, a_2, a_3)이 $(4,1,4)$일 때 α가 최대임을 보이면	7
	$\cos\alpha=\frac{1}{8}$을 보이면	3

7. 예시 답안

(3-1) 제시문 (가)에 의해 $\overline{OP_2} \le \overline{OP_1}+\overline{P_2P_2}=30$, $\overline{OP_2} \ge \overline{P_2P_2}-\overline{OP_1}=10$이고, 실제로 $10 \le \overline{OP_2} \le 30$인 좌표평면의 점 P_2에 대하여 제시문 (가)에 의하여 $\overline{OP_1}=10, \overline{P_1P_2}=20$인 P_1이 존재한다. 따라서 주어진 집합은 $\{P \mid 10 \le \overline{OP} \le 30\}$과 같고, 넓이는 800π이다.

(3-2) 조건을 만족하는 점 P_3의 집합을 T라고 하자. 제시문 (가)에 의해
$\overline{OP_3} \leq \overline{OP_2} + \overline{P_2P_3} \leq (\overline{OP_1} + \overline{P_1P_2}) + \overline{P_2P_3} \leq a_1 + a_2 + a_3$
이다. $\overline{OP_3}$의 최댓값은 O, P_1, P_2, P_3가 직선위에 이 순서대로 놓여있을 때이고,
이때 $\overline{OP_3} = a_1 + a_2 + a_3 = 9$를 만족하므로 조건을 만족할 때 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$이여야 한다.

(a) $P \in T$이고 $\overline{OA} = \overline{OP}$라고 가정하자. 그러면 점 A는 점 P를 원점을 중심으로 회전해서 얻어진다. 이때 $\overline{OP_1} = a_1$, $\overline{P_1P_2} = a_2$, $\overline{P_2P} = a_3$인 두 점 P_1, P_2가 존재하는데 같은 회전에 의해서 P_1, P_2가 옮겨진 점을 각각 A_1, A_2라고 하면, $\overline{OA_1} = a_1$, $\overline{A_1A_2} = a_2$, $\overline{A_2A} = a_3$이므로 $A \in T$이다.
(b) $P \in T$이고 $\overline{OP} < r < a_1 + a_2 + a_3$라고 가정하자. 정의에 의하여 $\overline{OP_1} = a_1$, $\overline{P_1P_2} = a_2$, $\overline{P_2P_3} = a_3$인 두 점 P_1, P_2가 존재하며, $\angle OP_1P_2 = \alpha_1$, $\angle P_1P_2P_3 = \alpha_2$라고 하자.
$\alpha_1 \leq \theta \leq \pi$인 임의의 실수 θ에 대하여 $\overline{P_1P_2'} = a_2$, $\overline{P_2'P_3'} = a_3$, $\angle OP_1P_2' = \theta$, $\angle P_1P_2'P_3' = \alpha_2$인 점 P_2', P_3'를 잡아서 $f(\theta) = \overline{OP_3'}$라고 정의하자. 마찬가지로,
$\alpha_2 \leq \theta \leq \pi$인 임의의 실수 θ에 대하여 $\overline{P_1P_2'} = a_2$, $\overline{P_2'P_3'} = a_3$, $\angle OP_1P_2' = \pi$, $\angle P_1P_2'P_3' = \theta$인 점 P_2', P_3'를 잡아서 $f(\theta) = \overline{OP_3'}$라고 정의하자. 그러면 $f(\alpha_1) = \overline{OP}$, $f(\pi) = g(\alpha_2)$, $g(\pi) = a_1 + a_2 + a_3$이고 $f(\theta)$와 $g(\theta)$는 연속함수이므로 사잇값 정리에 의하여 $g(t) = r$인 t $(\alpha_1 < t \leq \pi)$ 또는 $g(t) = r$인 t $(\alpha_2 \leq t < \pi)$가 존재한다. 따라서 $\overline{OP_3'} = r$인 어떤 점 P_3'이 집합 T의 원소이다.

(a), (b)에 의하여 $T = \{P \mid \overline{OP} \leq 9\}$일 필요충분조건은 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$이고 $O \in T$인 것이다.
$O \in T$이려면 $\overline{OP_1} = a_1$, $\overline{P_1P_2} = a_2$, $\overline{OP_2} = a_3$인 두 점 P_1, P_2가 존재해야하며 이는 세 자연수 a_1, a_2, a_3 중에 가장 큰 것 a가 다른 두 자연수의 합 $9 - a$보다 작거나 같을 때이다. 따라서 자연수 a_1, a_2, a_3가 조건을 만족하려면, $a_1 + a_2 + a_3 = 9$이고, $a_1, a_2, a_3 \leq 4$이어야 한다.

순서쌍 (a_1, a_2, a_3)의 개수를 세기위해, a_1, a_2, a_3중 하나가 5 이상인 것을 빼주면
${}_3H_6 - 3 \times {}_2H_0 - 3 \times {}_2H_1 - 3 \times {}_2H_2 = {}_8C_2 - 3 \times {}_1C_1 - 3 \times {}_2C_1 - 3 \times {}_3C_1 = 10$
개다. (또는 중복조합을 쓰지 않고 순서쌍의 개수를 모두 세어도 된다.)

(3-3) 문제 (3-2)의 조건을 만족하는 세 자연수 a_1, a_2, a_3에 대하여, $T_\theta = \{P \mid \overline{OP} \leq 9\}$일 필요충분조건은 $O \in T_\theta$인 것이다. 따라서 $\overline{OP_1} = a_1$, $\overline{P_1P_2} = a_2$, $\overline{OP_2} = a_3$인 삼각형 OP_1P_2의 두 각 $\angle P_1$, $\angle P_2$중에 작은 값이 α가 된다.
(a) $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_4 = 4$이므로 $\angle P_2 < \angle P_1$이다. 따라서 코사인법칙에 의해
$\alpha = \angle P_2 = \dfrac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \times 3 \times 4} = \dfrac{7}{8}$이다.
(b) α가 최대인 경우는 $a_1 = 4, a_2 = 1, a_3 = 4$인 경우이고 $\cos\alpha = \dfrac{4^2 + 1^2 - 4^2}{2 \times 4 \times 1} = \dfrac{1}{8}$이다.

8. 대입전형 선행학습 자체영향평가위원회 의견

항목	의견 요약
고교 교육과정 수준 준수여부	- 부등식을 평면좌표에 표현하는 내용을 바탕으로 수학Ⅰ 과목에서 중요하게 다루고 있는 코사인법칙을 활용하는 문제로 교육과정 내용이 충실히 잘 반영되었다.
문항 유형의 적절성	- (3-1)과 (3-2) 문제를 통해 제시문에 주어진 부등식을 활용하여 주어진 식을 좌표평면에 표현할 수 있는지를 알아봄으로써 이해 및 분석능력을 평가할 수 있었을 것이다. 또한 문제에 주어진 부등식 조건을 만족하는 좌표평면 위의 점들을 찾아가는 풀이 과정 중 함수의 연속성을 바탕으로 사잇값 정리로 이어지는 내용을 통해 논리적 사고력을 제시문에 주어진 코사인법칙을 활용함으로써 종합적 사고력을 평가할 수 있었을 것이다. - 제시문 (가)에서 (3-1)과 (3-2) 문제의 풀이 과정에서 결정적인 역할을 담당하는 부등식이 주어져 답안 작성에 많은 도움이 되었을 것이다. 제시문 (나)에서 주어진 코사인법칙 또한 (3-3) 문제를 해결함에 있어 풀이 방향을 제시하는 역할을 충실히 했다.
문항 난이도의 적절성	- 좌표평면의 두 점 사이의 거리에 대한 이해를 바탕으로 부등식을 좌표평면에 표현하는 내용을 알고 주어진 제시문을 활용하면 쉽게 이해할 수 있도록 문제와 제시문이 명료하고 가독성이 좋게 구성되어 있다. - (3-1) 문제는 주어진 제시문을 활용하면 쉽게 해결할 수 있었을 것이다. 하지만 (3-2) 문제는 먼저 조건에 맞는 여러 경우를 가정하고 이를 확인하는 과정을 거쳐 해결해야 함으로 일반 고등학생들에게는 난도가 높게 느껴졌을 수 있다. (3-2)를 잘 푼 학생들은 이를 바탕으로 (3-3)을 잘 해결할 수 있었을 것이다.

문항카드 5

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■오전(의예) □ 오후 □ 1번 □ 2번 ■ 의예3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	집합, 수학적 귀납법	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 3] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(수학적 귀납법) 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
(1) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
(2) $n=k$ $(k \geq 1)$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(※) 자연수 m에 대하여 ($4m+1$개의 원소로 이루어진) 집합

$$X=\{-2m, -2m+1, \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, 2m-1, 2m\}$$

의 어떤 부분집합 A가 다음 조건을 만족한다.

A의 어떠한 원소 a,b,c에 대하여도 $a+b+c \neq 0$이다. 단, a, b, c가 서로 다를 필요는 없다.

예를 들어, 0은 A의 원소가 될 수 없다. 왜냐하면 $0+0+0=0$이기 때문이다.

(3-1) (a) $-2m \in A$인 경우, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$에 대하여 i와 $2m-i$ 중 하나는 A의 원소가 될 수 없음을 보이시오. (5점)
(b) $-2m \in A$이고 $2m \in A$인 경우, $n(A) \leq 2m$임을 보이시오. (5점)
(3-2) 수학적 귀납법을 이용하여 $n(A) \leq 2m$임을 증명하시오. (15점)
(3-3) 각 자연수 m에 대하여, 위의 조건을 만족하고 $n(A)=2m$이고 $-2m \notin A$, $2m \notin A$인 집합 A를 하나 찾으시오. (5점)

3. 출제 의도

이 문제는 주어진 지문의 상황과 질문의 내용을 잘 이해하고 수학적 귀납법을 이해하고 활용할 수 있는 학생들은 어렵지 않기 해결할 수 있는 문제이다. 어려운 수학적 계산을 잘 하거나 함수 문제를 잘 푸는 학생들 중에도 가끔 아주 단순한 논리적 사고와 서술에는 약한 학생들이 많다. 논리적이고 합리적인 사고 능력을 키우고자 하는 것이 수학교육의 주요 목표이기 때문에 본 문제는 그러한 목표 추구에 부합하고자 만든 문제이다. 학교 교육 현장에서도 계산 중심의 수학 외에도 논리적 사고와 서술에 대한 교육이 중요하다는 인식이 확대되기를 기대한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td colspan="3">☐ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"
☐ 수학 ■ 수학Ⅰ ☐ 수학Ⅱ ☐ 미적분 ☐ 확률과 통계</td></tr>
<tr><td rowspan="2">관련
성취기준</td><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (수학 Ⅰ)</td></tr>
<tr><td>(가)</td><td>성취기준 1</td><td>[수학Ⅰ] - (3)수열 - 3 수학적 귀납법
[12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학1	류희찬 등	천재교과서	2017	153	(수학적 귀납법)	없음
수학1	권오남 등	교학사	2017	155	(수학적 귀납법)	없음

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 - 해당사항 없음

5. 문항 해설

이 문제에서 물어 보는 내용이 무엇인지를 이해할 수 있고 수학적 귀납법을 이해하고 활용할 수 있는 학생들은 어렵지 않기 해결할 수 있는 문제이다.

(3-1)은 i와 $2m-i$가 둘 다 A에 속하면 $i+(2m-i)+(-2m)=0$이 되어 주어진 조건에 위배된다는 단순한 관찰을 할 수 있는지를 묻는 문제이다. 음수에서도 대칭적으로 성립한다.

(3-2)는 경우를 (3-1)의 (b)의 경우 외에도 $-2m\in A,\ 2m\notin A$인 경우에 대하여도 수학적 귀납법을 이용하여 문제를 증명할 수 있는지, 그리고 나머지 경우들에도 같은 논리로 증명할 수 있는지를 묻고 있다. 이 문항은 우선, 경우를 4가지 경우로 나누어 따지고자 하는 것, 그리고 그 중에서도 특히 $-2k-2\in A,\ 2k+2\notin A$인 경우에 대하여 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 명제를 증명하는 것이 핵심이 된다.

(3-3)은 주어진 조건을 만족하면서 $n(A)=2m$인 집합 A의 실례를 찾는 문제이다. 이 문제 해결의

결과를 통하여 우리는 두 가지 사실을 알 수 있다. 첫째, 짝수 $2m$에 대하여 조건을 만족하는 집합 $n(A)$은 $2m$ 이하라는 것을 (3-2)에서 보였는데, 최댓값 $2m$을 갖는 예가 실제로 존재한다는 사실, 그리고 둘째는 짝수일 때만이 아니라 홀수 $2m-1$인 경우에도 조건을 만족하는 집합 $n(A)$의 최댓값을 구할 수 있다는 것이고 그 값은 $2m$라는 사실이다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	(a) 간단한 논리이므로 합리적인 설명이 있으면	5점
	(b) 간단한 논리이므로 합리적인 설명이 있으면	5점
(3-2)	경우를 (3-1)의 (b)의 경우 외의 3가지로 나누면	3점
	$-2k-2\in A,\ 2k+2\notin A$ 또는 $-2k-2\notin A,\ 2k+2\in A$ 경우에 증명하면	7점
	나머지 경우에 대하여 증명을 마치면	5점
(3-3)	올바른 예를 하나 찾아 서술하기만 하면	5점

7. 예시 답안

(3-1) (a) i와 $2m-i$가 둘 다 A의 원소라면 $-2m\in A$라는 가정으로부터 $i+(2m-i)+(-2m)=0$이 되어 조건에 위배된다. 따라서 둘 다 A의 원소일 수는 없다.

(b) $i\in\{1,2,\ \dots\ ,m\}$에 대하여 $-i$와 $-2m+i$도 동시에 A에 속할 수 없으므로($\because$ $2m\in A$) 모두 $2m$개의 각 쌍에서 숫자 하나씩은 A의 원소가 될 수 없다. 0도 빠지므로 A의 원소는 많아야 $(4m+1)-(2m+1)=2m$개이다.

(3-2) 우선, $m=1$일 때는 A가 $\{-2,-1,1,2\}$ 중 3개의 원소를 포함한다면 주어진 조건을 만족하지 않으므로 A의 원소는 2개 이하여야 한다. 이제, 수학적 귀납법에 따라 $m=k$일 때 성립한다고 가정하고 $k+1$일 때 성립함을 보이자. $-2k-2,\ 2k+2\in A$인 경우는 3-1 (b)에서 증명하였다. 이제 다음과 같은 3가지 경우를 따져 보자.

(i) $-2k-2\in A,\ 2k+2\notin A$인 경우.

(i)-1: $2k+1\notin A$이면, 집합 $A\cap\{-2k,-2k+1,\ \dots\ ,2k-1,2k\}$은 수학적 귀납법의 가정에 의해 $2k$개 이하의 원소를 갖는다. 따라서 A는 더 가질 수 있는 원소가 $-2k-2,-2k-1$ 뿐이므로 $2k+2$개 이하의 원소를 갖는다.

(i)-2: $2k+1\in A$이면, 앞의 (3-1)과 같은 논법에 의해

◆ $i\in\{1,2,\ \dots\ ,k+1\}$에 대하여 $i,\ 2(k+1)-i$ 중 하나는 A에 속하지 않으므로($\because$

$-2k-2 \in A$) $2(k+1)$개의 양의 정수 중 $k+1$개가 빠지고 또한 $2k+2 \not\in A$이므로, 모두 $k+2$개가 빠진다. 따라서 양의 정수 중에서는 k개 이하가 A에 속한다.

◆ $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$에 대하여 $-i$, $(-2k+1)+i$ 중 하나는 A에 속하지 않으므로($\because$ $2k+1 \in A$), 음의 정수 중에서 k개가 빠지므로 음의 정수는 $k+2$개 이하가 A에 속한다.

따라서 $n(A) \le k+(k+2) = 2(k+1)$이다.

(ii) $-2k-2 \not\in A$, $2k+2 \in A$인 경우는 (ii)과 대칭적인 이유로 성립한다.

(iii) $-2k-2 \not\in A$, $2k+2 \not\in A$, 인 경우, 앞의 (i)-1과 동일한 수학적 귀납법에 의해 $n(A) \le 2k+2$이다.

(3-3) 모든 홀수들의 집합은 $2m$개의 원소로 이루어져 있고, 주어진 조건을 만족한다. 왜냐하면 세 홀수의 합이 0이 될 수는 없기 때문이다. 또 다른 예로는

$$A = \{-2m+1, 2m+2, \ldots, -m+1\} \cup \{m-1, m, m+1, \ldots, 2m-1\}$$

가 있다.

8. 대입전형 선행학습 자체영향평가위원회 의견

항목	의견 요약
고교 교육과정 수준 준수여부	- 수학 과목에서 배우는 집합의 표현에 대한 이해를 바탕으로 수학Ⅰ 과목에서 배우는 수학적 귀납법을 풀이에 적용하는 문제로 각 과목에서 중요한 내용을 잘 반영하였다.
문항 유형의 적절성	- 문제에 주어진 조건을 해석함으로써 (3-1) 문제를 쉽게 해결하는 과정을 통해 문제 이해 및 분석능력을 평가할 수 있었을 것이다. 또한, (3-2) 문제를 해결함에 있어 수학적 귀납법을 따라 여러 경우를 확인하는 풀이 과정을 통해 논리적 사고력을 (3-2) 문제 해결과정에서 알게 된 내용을 (3-3) 문제 풀이에 적용하는 과정을 통해 종합적 사고력을 평가할 수 있었을 것이다. - 문제에 제시된 0이 집합 A의 원소가 될 수 없음을 설명한 부분은 (3-1) 문제를 해결하는 결정적인 힌트를 제공함으로써 답안 작성에 많은 도움이 되었을 것이다. 또한, (3-2) 문제에 수학적 귀납법을 활용하라는 문구를 통해 제시문의 수학적 귀납법을 활용할 수 있도록 답안 작성의 방향성을 잘 제시하였다.
문항 난이도의 적절성	- (3-1)과 (3-2) 문제는 주어진 조건과 제시문을 활용하여 증명하라는 표현이 명료했다. 또한, 제시문의 수학적 귀납법도 모든 교과서에서 표현하는 방식 그대로를 제시하여 가독성을 높였다. - 수학 과목의 집합 단원과 수학Ⅰ 과목의 수학적 귀납법 단원을 충실히 학습한 일반 고등학생들이라면 충분히 해결할 수 있는 적절한 난도였다. - 수학적귀납법은 교과서에서도 비중 있게 다루는 부분이며 교과서에 다양한 예가 제공되어 있으나 일반 고등학생들은 수학의 증명 과정을 학습하는데 있어 어려움을 느끼는 것이 사실이다. 그럼에도 불구하고 수학의

항목	의견 요약
	증명 과정은 학생의 논리적 사고력을 향상시킬 수 있는 좋은 재료이기때문에 지속적으로 권장되어야 한다. 특히 (3-2) 문항을 해결할 때에 유형을 분류하여 접근하는 방식을 학습하면 일반적인 수능 문제를 해결하는데도 많은 도움이 된다.

② 논술우수자 자연계(오후)

문항카드 6

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 오전 ■ 오후 ■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	이차방정식의 근과 판별식, 도함수의 활용, 함수의 증가와 감소	
예상 소요 시간	30분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

> **(이차방정식의 근의 판별)** 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라고 할 때
> (1) $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
> (2) $D=0$이면 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.
> (3) $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(1-1) 이차함수 $y=(x-p)^2+p^2+2$의 그래프가 점 $(1,7)$을 지나도록 하는 실수 p의 값을 모두 구하시오. (5점)

(1-2) 점 (a,b)에 대하여, 곡선 $y=(x-p)^2+p^2+2$가 점 (a,b)를 지나도록 하는 실수 p가 존재할 때, a,b가 만족하는 조건을 구하시오. (10점)

(1-3) 점 $(-12, -1)$로부터 곡선 $y=(x-p)^2+p^2+2$ 위의 점까지의 거리 중 최솟값을 $f(p)$ 라고 하자.
함수 $f(p)$의 최솟값을 구하시오. (15점)

3. 출제 의도

이 문항는 포물선이 한 점을 지날 조건을 이차방정식이 실근을 가질 조건으로 연결시킬 수 있음을 평가하고자 하였다. 그리고 다항함수의 도함수를 분석하여 다항함수의 최솟값을 구하는 능력을 평가하고자 하였다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"** ■ 수학 □ 수학 I ■ 수학 II □ 미적분 □ 확률과 통계		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학)
	전체	성취기준1	[수학] - (1) 문자와 식 - ④ 복소수와 이차방정식 [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.
	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학II)
	전체	성취기준1	[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학	황선욱 외	미래N	2020	59쪽	(가)	
수학	류희찬 외	천재교과서	2020	56쪽	(가)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 - 해당사항 없음

5. 문항 해설

(1-1) 주어진 점을 대입하여 얻은 이차방정식을 간단한 인수분해를 통하여 근을 구할 수 있다.

(1-2) 포물선이 한 점을 지날 조건은 한 점이 함수 $y=(x-p)^2+p^2+2$에 의해 주어지는 방정식을 만족한다는 것이다. 즉, p가 실수로서 존재해야 하므로 이는 p를 변수로 하는 이차방정식이 근을 가질 조건이다. 따라서 판별식이 0보다 크거나 같을 조건을 통해서 구할 수 있다.

(1-3) (1-2)에서 구한 모든 (a,b)와 $(-12,-1)$사이의 거리의 최솟값을 구하면 된다. 피타고라스 정리와 (1-2)의 부등식을 이용하면 최솟값이 될 함수 $\sqrt{(a+12)^2+((a^2+4)/2+1)^2}$를 찾을 수 있다. 여기서 얻어진 함수의 제곱은 다항함수가 된다. 이 다항함수의 도함수를 분석해보면 한 개의 0를 갖고 도함수의 부호가 음수에서 양수로 변하므로 함수의 증감에 의해 도함수가 0이 되는 점에서 거리의 최솟값을 갖는다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(1-1)	점을 대입하여 이차방정식을 구함	2점
	인수분해를 통하여 실수 p값을 모두 구함	3점
(1-2)	(a,b)를 함수에 대입하여 (a,b)가 만족하는 방정식을 인지함	5점
	방정식을 p에 대한 방정식으로 인지하여 판별식을 적용하여 조건을 구함	5점
(1-3)	(1-2)의 부등식을 이용하여 거리의 최솟값이 될 함수를 찾음	4점
	도함수를 이용하여 도함수가 0이 되는 점을 찾음.	4점
	도함수의 부호를 통하여 도함수가 0이 되는 점에서 최솟값을 가짐을 인지	4점
	거리가 최소가 되는 점을 대입하여 거리를 구함	3점

7. 예시 답안

(1-1) 점 $(1,7)$을 이차함수에 대입하여 얻은 방정식 $7=(1-p)^2+p^2+2$의 해를 구하면 된다. $p=2$ 또는 $p=-1$이 되어 $(-1,3),(2,6)$이 구하고자 하는 점이다.

(1-2) 이차함수 $y=(x-p)^2+p^2+2$의 그래프가 점 (a,b)를 지나면 $b=(a-p)^2+p^2+2$을 만족하는 실수 p가 존재한다. 방정식을 p에 대해서 정리하면 $2p^2-2ap+a^2-b+2=0$. 실근이 존재하기 위해서는 제시문에 의해 $D=a^2-2(a^2-b+2)\geq 0$가 된다. 따라서 $b\geq (a^2+4)/2$.

(1-3) 구하고자 하는 최솟값은 점 (a,b)를 지나는 이차함수 $y=(x-p)^2+p^2+2$의 그래프가 존재하는 모든 점 (a,b)에 대해서 $(-12,\ -1)$로부터의 거리 $\sqrt{(a+12)^2+(b+1)^2}$ 중 최솟값을 구하면 된다. 이를 만족하는 a,b의 조건은 문제 (1-2)에서와 같이 $b \ge (a^2+4)/2$를 만족한다. 따라서 $b+1 \ge (a^2+4)/2+1>0$ 이므로

$$\sqrt{(a+12)^2+(b+1)^2} \ge \sqrt{(a+12)^2+((a^2+4)/2+1)^2}$$

가 성립하고 따라서 $\sqrt{(a+12)^2+((a^2+4)/2+1)^2}$의 최솟값을 구하면 된다. 함수 $f(a)=(a+12)^2+((a^2+4)/2+1)^2$의 도함수는 $f'(a)=a^3+8a+24=(a^2-2a+12)(a+2)$이고 $a^2-2a+12=(a-1)^2+11>0$이므로 $a<-2$에서는 $f'(a)<0$이고 $a>-2$에서는 $f'(a)>0$이므로 $a=-2$에서 최솟값을 갖는다. 그러므로 구하고자 하는 거리는 $(10^2+25)^{1/2}=\sqrt{125}$가 된다.

별해 (1-3) 구하고자 하는 최솟값은 점 (a,b)를 지나는 이차함수 $y=(x-p)^2+p^2+2$의 그래프가 존재하는 모든 점 (a,b)에 대해서 $(-12,\ -1)$로부터의 거리 $\sqrt{(a+12)^2+(b+1)^2}$ 중 최솟값을 구하면 된다. 이를 만족하는 a,b의 조건은 문제 (1-2)에서와 같이 $b \ge (a^2+4)/2$를 만족한다. 따라서 $b+1 \ge (a^2+4)/2+1>0$ 이므로

$$\sqrt{(a+12)^2+(b+1)^2} \ge \sqrt{(a+12)^2+((a^2+4)/2+1)^2}$$

가 된다. 따라서 $b=(a^2+4)/2$를 만족하는 $(a,\ b)$에서 $(-12,-1)$까지의 거리 중 최솟값을 구하면 된다. $y=(x^2+4)/2$ 위의 한 점 $(a,\ b)$에서의 법선의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{a}(x-a)+\dfrac{a^2+4}{2}$가 된다. 거리가 최소가 될 때는 이 법선이 $(-12,-1)$을 지날 때이므로 대입하여 방정식을 정리하면 $(a+2)(a^2-2a+12)=0$이 되어 $a=-2$일 때 $(-12,-1)$과의 거리가 최소가 된다. 이 때 거리는 $\sqrt{125}$가 된다.

8. 대입전형 선행학습 자체영향평가위원회 의견

항목	의견 요약
고교 교육과정 수준 준수여부	- 수학 과목의 이차방정식과 이차함수의 관계와 수학Ⅱ 과목의 도함수를 활용한 최솟값을 구하는 방법을 풀이에 적용하는 문제로 함수의 기본이 되는 고등학교 교육과정 내용을 잘 반영하였다.
문항 유형의 적절성	- (1-1) 문제를 통해 확인한 사실을 (1-2) 문제를 풀면서 일반화하는 과정을 통해 이해 및 분석능력을 평가할 수 있었을 것이다. 또한, (1-3) 문제를 해결하는 과정에서 (1-2) 문제의 결과와 도함수의 부호에 따른 원함수의 그래프 개형을 확인하여 최솟값을 유추하는 과정을 통해 논리적 사고력과 종합적 사고력을 평가할 수 있었을 것이다. - 제시문의 이차방정식의 근의 판별은 (1-2) 문제를 해결하는 방향성을 명확히 제시해 주고 있다. (1-3) 문제 또한 (1-2) 문제의 결과를 바탕으로 해결할 수 있으므로 제시문이 중요한 역할을 담당하였다.
문항 난이도의 적절성	- 수학 과목의 이차방정식과 이차함수의 관계에서 평소 학생들이 많이 다뤄보았을 표현으로 문제를 제시하여 학생들에게 명료하게 느껴졌을 것이

항목	의견 요약
	다. 또한, 제시문도 모든 교과서에서 사용하는 표현을 그대로 옮겨놓아 학생들 입장에서 가독성이 좋았을 것이다. - 문제에서 다루는 단원들의 내신 준비를 열심히 한 일반 고등학생들이었다면 무난히 해결할 수 있는 적절한 난도였다. 오히려 (1-1) 문제는 논술을 열심히 준비한 학생들에게는 쉬웠을 것이다.

문항카드 7

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 오전 ■ 오후
			□ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	연속함수, 사잇값 정리, 접선의 방정식, 삼각함수의 미분	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

> **(사잇값 정리)** 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(2-1) $0 \le t \le 2\pi$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=2\sin x$와 직선 $y=x-t$의 교점이 1개가 되도록 하는 t의 값의 범위를 구하시오. (10점)

(2-2) 양수 α에 대하여 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족한다.

> (i) $g(t)$는 구간 $[0,2\pi)$에서 연속이다.
> (ii) $0 \le t < 2\pi$인 모든 실수 t에 대하여, $2\sin(g(t)) = g(t) - \alpha t$이다.

(a) $\alpha=1$일 때, $k \le g(0) < k+1$을 만족하는 정수 k의 값을 구하시오. (10점)

(b) 위 조건을 만족하는 함수 $g(t)$가 존재하도록 하는 α의 값 중에서 가장 큰 값을 구하시오. (15점)

3. 출제 의도

삼각함수의 그래프의 개형과 접선의 방정식을 이해하고 있는지 평가하고, 사잇값 정리를 이용하여 연속함수의 성질을 파악할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td colspan="3">□ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정“
□ 수학 □ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ ■ 미적분 □ 확률과 통계</td></tr>
<tr><td rowspan="6">관련
성취기준</td><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (수학 Ⅱ)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">전체</td><td>성취기준 1</td><td>[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속
[12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용
[12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (미적분)</td></tr>
<tr><td>전체</td><td>성취기준 1</td><td>[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분
[12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학 Ⅱ	홍성복 외	지학사	2020	36-40	(사잇값 정리)	
수학 Ⅱ	류희찬 외	천재교과서	2020	34-39	(사잇값 정리)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 - 해당사항 없음

5. 문항 해설

(2-1) 문항은 삼각함수의 개형을 그릴 수 있고 주어진 조건이 $y=2\sin x$에서 기울기가 1인 접선과 관계가 있다는 것을 파악할 수 있는지 평가한다.

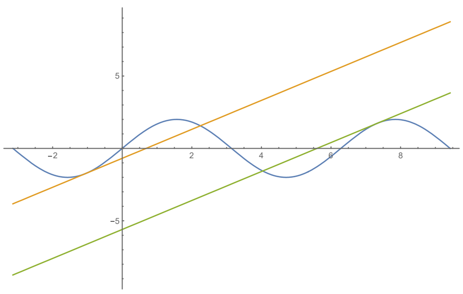
(2-2) 문항은 주어진 조건을 (2-1)과 같이 직선과 $y=2\sin x$의 교점의 x좌표로 해석해 내고, 사잇값 정리를 이용해서 교점의 위치를 파악하고 연속함수 여부를 판단할 수 있는지 평가한다. 실제로 (2-2)문항의 발문 형태는 올해 본교의 모의논술과 매우 유사하게 출제하여서 모의논술을 참고해서 시험준비를 한 수험생들이 익숙한 느낌을 가질 수 있도록 하였다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(2-1)	직선 $y=x-t$가 곡선 $y=2\sin x$와 접하는 조건을 구하면	5
	실제로 t의 범위를 정확히 계산하면	5
(2-2) (a)	$g(t)$가 직선 $y=2\sin x$와 $y=x-t$의 교점의 x좌표임을 파악하면	2
	$g(t)$가 연속함수라는 사실과 사잇값 정리를 이용해서 $g(0)$이 양수여야 한다는 사실을 파악하면	4
	실제로 $g(0)$의 정수부분을 사잇값 정리를 이용해서 정확히 구하면	4
(2-2) (b)	그래프의 개형을 이용하여 α가 $y=x-2\pi\alpha$가 $y-2\sin x$에서 $x=\frac{5\pi}{3}$에서 접하게 하는 값 또는 이보다 작은 값에서는 $g(x)$가 $[0,2\pi)$에서 연속이고, 이보다 큰 값에서는 $g(x)$가 $[0,2\pi)$에서 연속함수가 될 수 없음을 설명하면 (단, 엄밀한 증명은 제시하지 않아도 되고, 직관적으로 그래프의 개형을 이용해서 개략적인 설명을 하면 충분함.)	10
	- 조건을 만족하는 α의 값을 정확히 계산하면	5

7. 예시 답안

(2-1) $y=2\sin x$ 함수의 그래프의 개형으로부터 구하려는 t는 직선 $y=x-t$가 곡선 $y=2\sin x$와 $-\pi<x<0$에서 접할 때와 $2\pi<x<3\pi$에서 접할 때의 사이에 있는 경우이다.



함수 $y=2\sin x$의 도함수는 $y'=2\cos x$이므로, 구하려는 접하는 점은 $(-\frac{\pi}{3}, -\sqrt{3})$과

$(\frac{7\pi}{3}, \sqrt{3})$이다. 따라서 구하려는 t의 범위는 $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}< t < \frac{7\pi}{3}-\sqrt{3}$이다.

(2-2) (a) $0 \le t \le 2\pi$일 때 $(g(t),2\sin g(t))$는 두 곡선 $y=2\sin x$와 $y=x-t$의 교점이다.
$g(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $2\sin x = x$인 x의 값으로 각각 음수, 0, 양수인 세 개의 실수이다. 그런데, (2-1)의 결과에서 $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}< t < \frac{7\pi}{3}-\sqrt{3}$일 때, 그래프의 개형을 보면 $g(t)$는 $\frac{\pi}{2}$보다 큰 양수 값을 가져야 한다.

만일 $g(0) \le 0$이었다면 사잇값 정리로부터 예를 들어 $g(t)=\frac{\pi}{2}$인 t의 값이 존재해야 하는데, $t>0$인 범위에서 직선 $y=x-t$와 곡선 $y=2\sin x$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{2}$가 될 수는 없다.
따라서 $g(0)$은 양수 이어야한다.
이때 $2\sin(\frac{\pi}{2})=2>\frac{\pi}{2}$이고 $2\sin(2)<2$이므로, $1<\frac{\pi}{2}<g(0)<2$이고, 따라서 $k=1$이다.
(다른 방법: $2\sin(\frac{5\pi}{8})=\sqrt{2-2\cos(\frac{5\pi}{4})}=\sqrt{2+\sqrt{2}}<\frac{15}{8}$이다. 마지막 부등식은 양변을 제곱하면
$2+\sqrt{2}<\frac{225}{64}$ 즉 $\sqrt{2}<\frac{97}{64}$임을 보이면 되는데, $1.5=\frac{96}{64}<\frac{97}{64}$이고, $2<1.5^2=2.25$이므로 성립한다.
따라서 $2\sin(\frac{5\pi}{8})<\frac{5\pi}{8}$이므로, $g(0)<\frac{5\pi}{8}<2$이다.)

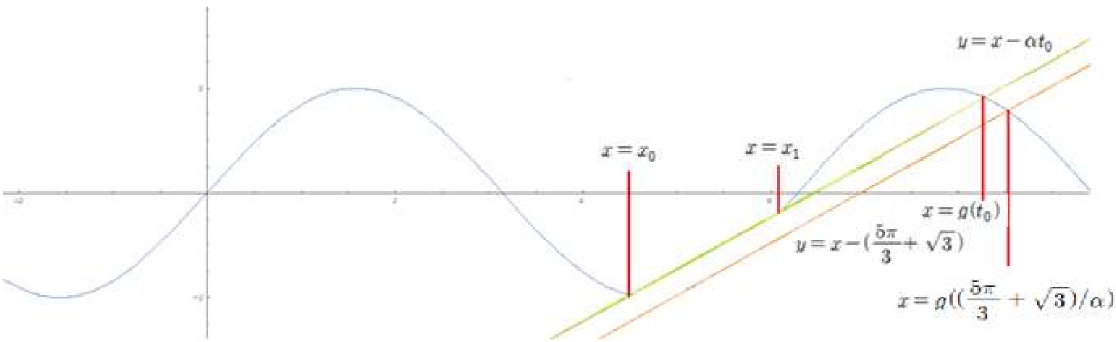
(b) $(g(t),2\sin g(t))$는 두 곡선 $y=2\sin x$와 $y=x-\alpha t$의 교점이다.
$0 \le t < 2\pi$이면, $0 \le \alpha t < 2\pi\alpha$이다.
$2\pi\alpha$가 직선 $y=x-2\pi\alpha$가 곡선 $y=2\sin(x)$에서 $x=\frac{5\pi}{3}$에서 접하게 하는 $2\pi\alpha$의 값인 $\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3}$보다 작거나 같으면, 즉 $\alpha \le \frac{5}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$이면 $g(t)$는 $\frac{\pi}{2}<g(t)<\frac{5}{3}\pi$ 범위에서 연속함수로 정의할 수 있다. 이는 그래프의 개형으로부터 직관적으로 설명된다.
$\alpha>\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$이라면, 그래프의 개형과 사잇값 정리로부터 $\alpha t<\frac{7\pi}{3}-\sqrt{3}$인 경우 $g(t)<2\pi$이고 $\alpha t>\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3}$인 경우 $g(t)>2\pi$이어야 하는데, $g(t)$가 $y=2\sin x$와 $y=x-\alpha t$의 교점의 x좌표가 되도록 연속적으로 만들 방법이 없다. 그러므로 조건을 만족하는 α의 최댓값은 $\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$이다.

[참고1] 실제로 $\alpha=\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$, $g(t)$는 $0 \le t < 2\pi$일 때, $\frac{\pi}{2}<g(t)<\frac{5}{3}\pi$이고
$2\sin(g(t))=g(t)-\alpha t$가 되도록 잡았을 때 $g(t)$가 주어진 구간에서 연속이라는 사실은 다음과 같이 엄밀하게 증명할 수 있다.

a와 t를 $0 \le a, t < 2\pi$인 임의의 두 실수 (단, $t \ne a$)라고 하면,
$2\sin g(t) = g(t) - \alpha t$, $2\sin g(a) = g(a) - \alpha a$이므로
$g(t) - g(a) - 2(\sin g(t) - \sin g(a)) = \alpha(t-a)$이고
평균값의 정리에 의해 $2\sin g(t) - 2\sin g(a) = 2\cos x\ ((g(t) - g(a))$인 x (x는 $g(a), g(t)$)사이의 실수)가 존재한다. $\cos x < \frac{1}{2}$이므로, $g(t) = g(a) + \frac{\alpha}{1+2\cos x}(t-a)$ (x는 $g(a), g(t)$)사이의 실수)이다. 따라서 $\lim_{t\to a} g(t) = g(a) + \frac{\alpha}{1+2\cos a}\lim_{t\to a}(t-a) = g(a)$ 이다.

[참고2]

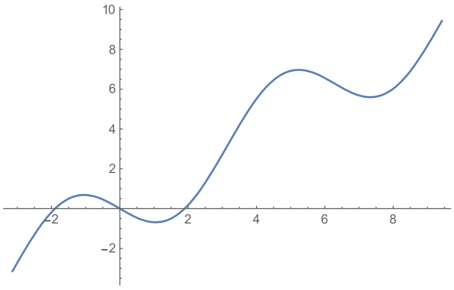
$\alpha > \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$이라면, $g((\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3})/\alpha)$은 두 곡선 $y = 2\sin x$와 $y = x - (\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3})$의 교점의 x좌표이고, 각각 2π보다 작거나 큰 두 개의 실수 값 중의 하나이다. (a)에서와 같은 방법으로 사잇값 정리에 의하여 $g((\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3})/\alpha) < 2\pi$인 경우 모순이므로 $g((\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3})/\alpha) > 2\pi$이다. $g(t)$의 연속성에 의해
$t_0 < (\frac{5\pi}{6} + \sqrt{3})/\alpha$이고, t가 구간 $[t_0, (\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi})/\alpha]$에 속할 때 $g(t) > 2\pi$인 t_0값이 존재한다.



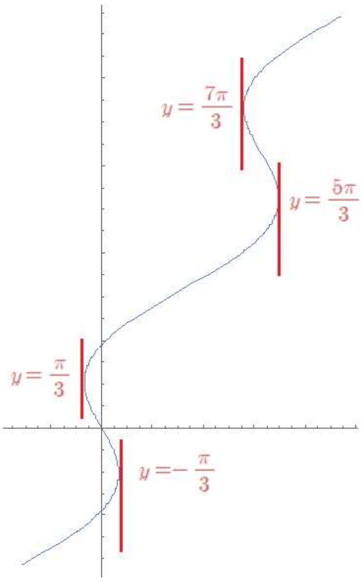
그렇게 되면, 함수 $g(t)$ $(0 \le t < 2\pi)$의 치역에서 제외되는 구간 (x_0, x_1) $(\pi < x_0 < x_1 < 2\pi)$이 존재하므로, 사잇값 정리에 의해 $g(t)$의 연속성에 모순이다.

[별해]

(2-1) $f(x) = x - 2\sin x$의 미분계수 $f'(x) = 1 - 2\cos x$가 0이 되는 점 $x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$ 중에서 $x = -\frac{\pi}{3}$와 $x = \frac{7\pi}{3}$에서의 함숫값 사이에 t가 있을 때 방정식 $t = x - 2\sin x$가 해를 1개 갖는다.
$f(-\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$, $f(\frac{7\pi}{3}) = \frac{7\pi}{3} - \sqrt{3}$이므로, 구하려는 t의 범위는 $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} < t < \frac{7\pi}{3} - \sqrt{3}$이다.

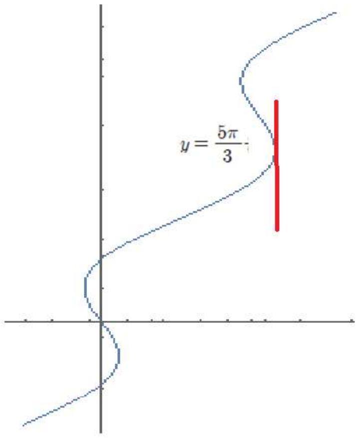


(2-2) (a) $f(x)=x-2\sin x$라고 하면 조건에서 $f(g(t))=t$이고 $g(t)$는 $[0,2\pi)$에서 연속이다.



조건의 등식이 성립할 필요충분조건은 $y=g(x)$의 그래프가 $y=f(x)$의 그래프를 $y=x$에 대칭이동시킨 곡선$x=f(y)$ (위 그림)의 부분집합이 되는 것이다. $y=g(x)$는 $[0,\pi)$에서 연속함수가 되어야 하므로, $g(0)>0$이고, 원래의 예시답안에서와 같이 사잇값 정리를 이용하여 $g(0)$의 정수부분이 1임을 확인할 수 있다.

(b) $f(x)=\dfrac{x-2\sin x}{\alpha}$라고 하면 $g(x)$는 $[0,2\pi)$에서 연속함수여야 하므로, $x=f(y)$의 그래프에 접하는 직선이 y축에 평행이 되도록 하는 y값 $y=\dfrac{5\pi}{3}$을 갖는 $x=f(y)$위의 점의 x좌표가 2π가 될 때 α가 최대가 된다.



즉, α가 최대일 때 $f(\frac{5\pi}{3})=\dfrac{\frac{5\pi}{3}-\sqrt{3}}{\alpha}=2\pi$이고, $\alpha=\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$이다.

8. 대입전형 선행학습 자체영향평가위원회 의견

항목	의견 요약
고교 교육과정 수준 준수여부	- 수학Ⅱ 과목의 접선의 방정식과 사잇값 정리를 미적분 과목의 삼각함수의 미분법에 적용한 문제로 고등학교 교육과정 내용을 충실히 반영하였다. (2-1)은 미적분 교과서의 접선의 방정식에서 많이 다루는 유형이고 (2-2)는 연립방정식의 기하적 의미와 $g(t)$의 기하적 의미를 정확히 알면 해결할 수 있기 때문에 이 문제들은 고등학교 교육과정의 내용을 잘 반영하였다.
문항 유형의 적절성	- (2-1) 문제의 상황에 맞는 그래프의 개형을 그려보는 것을 시작으로 문제를 해결하는 과정을 통해 문제의 이해 및 분석능력을 평가할 수 있었을 것이다. 또한, (2-1) 문제를 해결한 결과를 바탕으로 (2-2) 문제의 $g(t)$가 연속함수라는 사실과 사잇값 정리를 활용하는 풀이 과정을 통해 논리적 사고력을 α의 최댓값을 찾아가는 과정에서 그래프의 개형을 설명하는 과정을 통해 종합적 사고력을 평가할 수 있었을 것이다. - (2-2) 문제를 해결할 때 결정적으로 활용이 되는 사잇값 정리를 제시문으로 제공한 점은 문제의 의도를 파악하고 풀이의 방향성을 제시하는데 충분히 도움이 되었을 것이다.
문항 난이도의 적절성	- (2-1) 문제의 곡선과 직선의 교점이 1개가 되도록 하는 t의 값의 범위를 구하라는 표현은 내신과 수능 준비를 꾸준히 한 학생들은 많이 접해보았을 표현으로 학생들에게 명료하였을 것이다. (2-2) 문제에 활용되는 사잇값 정리의 제시문 또한 논술을 준비한 학생이라면 기출문제와 모의 논술 문제에서 많이 다루어 가독성이 좋았을 것이다. - 수학Ⅱ 과목 중 내신 및 수능에 가장 많이 출제되는 접선의 방정식과 미적분 과목의 삼각함수 미분법을 활용한 문제들이라 일반 고등학생 수준을 고려하였을 때 적절한 난도였다.

3. 출제 의도

정적분과 미분의 관계를 활용하여 정적분으로 주어진 함수를 미분할 수 있는지를 평가한다. 이계도함수를 계산하고 이를 이용하여 그래프의 개형을 파악할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td colspan="3">☐ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
☐ 수학 ☐ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ ■ 미적분 ☐ 확률과 통계</td></tr>
<tr><td rowspan="8">관련
성취기준</td><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (수학Ⅱ)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(가)</td><td>성취기준 1</td><td>[수학Ⅱ] - (3) 적분 - ② 정적분
[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.</td></tr>
<tr><td>성취기준2</td><td>[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속
[12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.</td></tr>
<tr><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (미적분)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(나)</td><td>성취기준 3</td><td>[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법
[12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 4</td><td>[미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용
[12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2020	125-130	(가)	
수학Ⅱ	이준열 외	천재교육	2020	121-125	(가)	
미적분	홍성복 외	지학사	2020	112-116	(나)	재구성
미적분	이준열 외	천재교육	2020	115-120	(나)	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우- 해당사항 없음

5. 문항 해설

(3-1) 정적분으로 주어진 함수를 미분할 수 있는지를 평가한다.

(3-2) 정적분과 미분의 관계, 미분의 정의를 이용하여 정적분으로 주어진 함수의 미분계수를 계산할 수 있는지를 평가한다.

(3-3) 이계도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 파악하고 주어진 부등식의 의미를 이해할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	- $g'(x)$을 계산함.	5점
	- $g''(x)=\dfrac{xf''(x)}{2}$임을 보임.	3점
(3-2)	- $f(0)\le 0$임을 보임.	5점
	- $f(0)\ge 0$임을 보임.	5점
(3-3)	- $x>0$일 때 주어진 조건을 이용하여 $f''(0)\ge 0$임을 보임.	7점
	- $x<0$일 때 주어진 조건을 이용하여 $f''(0)\le 0$임을 보임.	7점
	- $p=-1,\ q=0$임을 보이고 $f(x)=(x^2-x)e^x$이 주어진 조건을 만족함을 보임.	3점

7. 예시 답안

(3-1) 제시문 (가)의 미분과 적분과의 관계를 이용하면

$$g'(x)=\frac{f(x)+xf'(x)}{2}-f(x)=\frac{-f(x)+xf'(x)}{2}$$

이다. 그러므로 $g''(x)=\dfrac{xf''(x)}{2}$이다.

(3-2) $x>0$이면 $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt\le\frac{f(x)}{2}$이므로

$$f(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\le\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{2}=\frac{f(0)}{2}$$

이고 $f(0)\le 0$이다.

$x<0$이면 $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt\ge\frac{f(x)}{2}$이므로

$$f(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \ge \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{2}=\frac{f(0)}{2}$$

이고 $f(0)\ge 0$이다.

따라서 $f(0)=0$이다.

(3-3) $f(0)=0$이므로 $q=0$이다. 그러므로

$$f'(x)=(x^2+(p+2)x+p)e^x,\ f''(x)=(x^2+(p+4)x+2p+2)e^x$$

이다.

만약 $f''(0)<0$이면 0을 포함하는 어떤 구간 (a,b)에서 $f''(x)<0$이다.
1), 2)의 결과에 의해 $g(0)=g'(0)=0$이고 구간 $(0,b)$에서 $g''(x)<0$이므로 제시문 (나)를 적용하면 구간 $(0,b)$에서 $g(x)<0$이다. 따라서 주어진 조건에 모순이다.

만약 $f''(0)>0$이면 0을 포함하는 어떤 구간 (a,b)에서 $f''(x)>0$이다.
1), 2)의 결과에 의해 $g(0)=g'(0)=0$이고 구간 $(a,0)$에서 $g''(x)<0$이므로 제시문 (나)로부터 구간 $(a,0)$에서 $g(x)<0$이다. 따라서 주어진 조건에 모순이다.

따라서 $f''(0)=0$이고 $p=-1$이다.

위에서 구한 $f(x)=(x^2-x)e^x$는 $f''(x)=(x^2+3x)e^x$을 만족한다. 그러므로 $g''(x)=\frac{1}{2}(x^3+3x^2)e^x$이고 $g'(x)=\frac{1}{2}x^3e^x$이다. 따라서 $x>0$일 때 $g'(x)>0$이고 $x<0$일 때 $g'(x)<0$이므로 $g(x)\ge g(0)=0$이다.
따라서 $f(x)$은 주어진 조건을 만족한다.
(혹은, 구간 $(0,\infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 $-g(x)$에 제시문 (나)를 적용하면 구간 $(0,\infty)$에서 $-g(x)<0$이다. $x<0$일 때 원점과 점 $(x,f(x))$를 잇는 선분은 $y=f(x)$의 그래프의 아래쪽에 있다. 즉, $x\le t\le 0$일 때 $f(t)\ge \frac{f(x)}{x}t$이다. 그러므로

$$\int_x^0 f(t)dt > \int_x^0 \frac{f(x)}{x}t\,dt=-\frac{xf(x)}{2}$$

이다. 즉, $x<0$일 때 $g(x)>0$이다. 따라서 $f(x)$은 주어진 조건을 만족한다.)

8. 대입전형 선행학습 자체영향평가위원회 의견

항목	의견 요약
고교 교육과정 수준 준수여부	- 수학Ⅱ 과목의 적분과 미분의 관계 및 함수의 연속성과 미적분 과목의 이계도함수를 활용한 그래프의 개형을 유추하는 내용의 문제로 고등학교 교육과정 중 각 과목의 기본이 되는 내용을 잘 반영하였다.
문항 유형의 적절성	- (3-2) 문제는 주어진 조건을 활용하는 것을 시작으로 해결하는 과정을 통해 문제의 이해 및 분석능력을 평가할 수 있었을 것이다. 또한, (3-2) 문제에 적용되는 함수의 연속성을 보여주는 해결과정을 통해 논리적 사

항목	의견 요약
	고력을 (3-3) 문제의 그래프 개형을 유추하는 과정에서 이계도함수의 부호와 제시문을 적용하는 과정을 통해 종합적 사고력을 평가할 수 있었을 것이다. - 제시문 (가)는 (3-1) 문제와 (3-2) 문제 해결을 위한 기본이 되는 개념을 소개하고 있어 학생들의 답안 작성에 도움을 주었을 것이다. 또한, 제시문 (나)는 (3-3) 문제를 해결하는 과정에 필요한 그래프 개형을 유추하는데 결정적인 역할을 하게 되어 문제 해결의 방향성을 잘 제시해주었다.
문항 난이도의 적절성	- 모든 문항이 제시문을 활용하면 문제 해결의 방향성에 쉽게 접근할 수 있게 설계되어 있어 문제가 명료하고 제시문의 가독성 또한 우수하다. - (3-1) 문제는 제시문 (가)의 미분과 적분의 관계를 활용하고 기본적인 미분법을 안다면 쉽게 해결할 수 있어 일반 고등학생 수준에서 적절한 난도라고 판단한다. (3-2) 문제와 (3-3) 문제 또한 제시문 (가), (나)와 함수의 연속성의 정의 및 이계도함수를 활용하여 그래프의 개형을 유추하며 문제를 해결할 수 있으므로 학교 수업에 충실히 임한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 적절한 난도이다.