www.pen.go.kr

2017학년도

수리논술 나침반 IX

부산광역시교육청
BUSAN METROPOLITAN CITY OFFICE OF EDUCATION

일러두기

- 본 수리논술나침반 9은 수리논술나침반 시리즈의 9번째 책으로 대입 수리논술을 준비하는 2017학년도 수험생 및 수학교사들을 위하여 부산수학나침반 수학교사 동아리에서 만들고 부산시교육청에서 발간하는 수리논술 관련 책자입니다.

- 본 교재는 2016년에 치러진 전국 각 대학의 모의 논술과 실제 입시에 출제된 수시 논술 기출문제 위주로 만들어진 책자입니다.

- 교재는 각 대학별 모의 수시 순으로 묶었으며, 각 대학별 모의 논술 및 수시 논술은 다음의 순서로 구성되어 있습니다.
  - 기출문제 : 2016년도 전국대학 모의 및 수시 논술 기출문제
  - 풀어보기 : 해당 대학의 논술 기출문제와 유사한 문제로서 주로 전국 모의고사나 수능에 나왔던 문제 또는 EBS에 있는 문제 위주로 발췌하여 학생들이 어려운 논술의 답안을 작성하기 전에 워밍업을 할 수 있도록 준비한 공간입니다.

- 학교에서 선생님들이 수업하실 때 편리하게 사용하시도록 대학의 해설 뿐 아니라 자체적으로 제작한 다른 풀이들을 가능한 많이 넣어 두었습니다.

차 례

contents

01 가톨릭대학교 모의[1]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음 (간호학과, 의예과제외)	수학(3문항, 6문제)	120분

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(논제1, 논제2)에 답하시오. (20점)

(ㄱ) 곡선 $y=kx^2$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,k)$에서의 접선을 l_1이라고 하고, 점 A를 지나고 접선 l_1과 수직인 직선을 l_2라고 하자. (단, $k>0$)

(ㄴ) **[두 직선의 수직 조건]** 좌표평면 위의 두 직선 $l: y=mx+n$, $l': y=m'x+n'$에 대하여 다음이 성립한다.

> 1. l과 l'이 서로 수직이면 $mm'=-1$이다.
> 2. $mm'=-1$이면 l과 l'은 서로 수직이다.

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 직선 l_1과 직선 $x=2$가 만나는 점을 P, 직선 l_2와 직선 $x=2$가 만나는 점을 Q라고 할 때, 점 P와 점 Q사이의 거리를 L이라고 하자.

(ㄹ) **[산술평균과 기하평균의 관계]** a, b가 양수일 때, 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

논제 1. (10점) 제시문 (ㄱ)의 직선 l_1과 직선 l_2의 방정식을 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (10점) 제시문 (ㄷ)에서 정의된 L의 최솟값과 그 때의 k 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

1) 가톨릭대학교 홈페이지

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제1, 논제2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x) = x^2 + 2bx - a^2 + 1$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$에 대하여 다음을 만족하는 점 (a, b) 전체를 영역 A라고 하자.

$|x| \le 1$인 모든 x에 대하여 $f(x) \ge 0$

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$에 대하여 다음을 만족하는 점 (a, b) 전체를 영역 B라고 하자.

$|x| \ge 1$인 모든 x에 대하여 $f(x) \ge 0$

논제 1. (20점) 제시문 (ㄴ)의 영역 A의 넓이를 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (20점) 제시문 (ㄷ)의 영역 B의 넓이를 구하고 그 근거를 논술하시오.

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제1, 논제2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) 1부터 n까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 n장의 카드가 들어 있는 빨간 주머니와 1부터 n까지의 구슬이 들어있는 파란 주머니가 있다. 빨간 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내고 파란 주머니에서 임의로 하나의 구슬을 꺼낼 때 나오는 두 자연수 중 작지 않은 수를 확률변수 X_n이라고 한다.

(ㄴ) 확률변수 X의 확률분포가 아래 표와 같을 때

X	x_1	x_2	x_3		$\cdots$	합계
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3		$\cdots$	1

확률변수 X의 기댓값 $E(X)$와 분산 $V(X)$는 다음과 같다.

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad V(X)=\sum_{i=1}^{n}\{x_i-E(X)\}^2 p_i$$

(ㄷ) 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

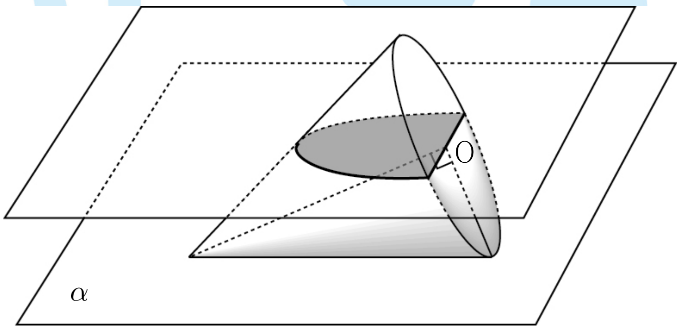
논제 1. (10점) 제시문 (ㄱ)에서 $n=4$일 때, 확률변수 X_4의 확률분포를 표로 나타내고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (30점) 제시문 (ㄱ)의 확률변수 X_n에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{E(X_n)}{\sqrt{V(X_n)}}$을 구하고 그 근거를 논술하시오.

풀어보기

문제1 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)\ln x^4$이라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e,\ -e)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e,\ -4e)$에서의 접선이 서로 수직일 때, $100f'(e)$의 값을 구하시오. (2014. 6월 모평)

문제2 반지름의 길이가 1, 중심이 O인 원을 밑면으로 하고 높이가 $2\sqrt{2}$인 원뿔이 평면 α 위에 놓여있다.(단, 원뿔의 한 모선이 평면 α에 포함된다.)
그림과 같이 원뿔을 평면 α와 평행하고 원뿔의 밑면의 중심 O를 지나는 평면으로 자를 때 생기는 단면의 일부분은 포물선이다. 이때 단면의 넓이는? (2013. 전국연합)



① $\frac{13}{8}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{15}{8}$ ④ 2 ⑤ $\frac{17}{8}$

예시답안

풀어보기(문제1) 정답 50

$g(x)=f(x)\ln x^4=4f(x)\ln x$

두 접선 $x=e$ 에서 수직이므로

$$f'(e)\times g'(e)=-1$$

$$g'(x)=4f'(x)\ln x+4f(x)\frac{1}{x}$$

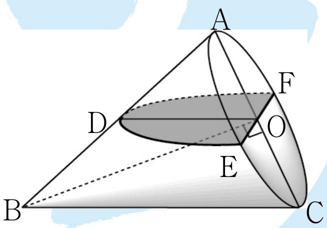
$$g'(e)=4f'(e)\ln e+4f(e)\frac{1}{e}=4f'(e)-4$$

$$f'(e)\times g'(e)=f'(e)(4f'(e)-4)=-1$$

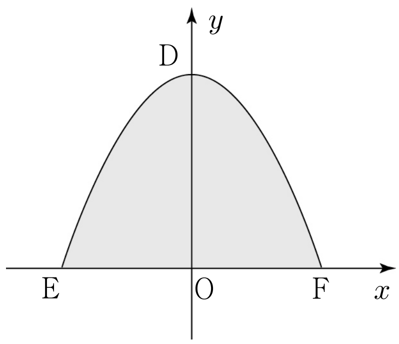
$$\{2f'(e)-1\}^2=0\ ,\ f'(e)=\frac{1}{2}$$

따라서 $100f'(e)=50$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 ②



삼각형 ABC에 대하여 $\overline{\mathrm{BC}}=3$이고 $\overline{\mathrm{BC}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{DO}}$, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OC}}$이므로 삼각형의 중점연결정리에 의하여 $\overline{\mathrm{DO}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}=\frac{3}{2}$. 좌표평면에 포물선을 나타내면



이 포물선은 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$을 꼭짓점으로 하고 $(1,0)$을 지나므로, 포물선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}$. 따라서 구하고자 하는 단면의 넓이는 $S=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)dx=2$

[문항1] 대학발표 예시답안

논제 1.

함수 $f(x)$를 $f(x)=kx^2$이라고 정의할 때, $f'(1)=2k$이다. 따라서 곡선 $y=kx^2$위의 점 $\mathrm{A}(1,k)$를 지나는 접선의 방정식은 $l_1 : y=2k(x-1)+k$이다. 점 $(1,k)$에서 접선 l_1에 수직하는 직선의 기울기는 제시문 (ㄴ)에 의해서, $-\dfrac{1}{2k}$임을 알 수 있다. 따라서 접선 l_1에 수직하고 $f(x)$위의 한 점 $(1,k)$를 지나는 직선의 방정식은 $l_2 : y=-\dfrac{1}{2k}(x-1)+k$이다.

논제 2.

제시문 (ㄷ)에서 주어진 점 P와 점 Q의 y좌표는 각각 $2k+k=3k$, $-\dfrac{1}{2k}+k$이다. 따라서 두 점 사이의 길이 L은 $3k+\dfrac{1}{2k}-k=2k+\dfrac{1}{2k}$이다. 제시문(ㄹ)에 제시된 산술·기하평균 관계식을 이용하면 $L=2k+\dfrac{1}{2k}\geq 2\sqrt{1}=2$이고 등호는 $2k=\dfrac{1}{2k}$일 때, 성립한다. 따라서 길이 L의 최솟값은 2이고 이 때의 k값은 $k=\dfrac{1}{2}$이다.

[문항2] 대학발표 예시답안

논제 1.

함수 $f(x)$는 다음을 만족한다.

$$f(x)=(x+b)^2-b^2-a^2+1 \cdots\cdots (*)$$

1) $-1\leq b\leq 1$인 경우

함수 $f(x)$는 $x=-b$일 때 최솟값 $-b^2-a^2+1$을 갖는다. 따라서 점 $(a,\ b)$가 $-b^2-a^2+1\geq 0$ 즉, $a^2+b^2\leq 1$을 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $|x|\leq 1$인 모든 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 된다.

2) $b>1$인 경우

함수 $f(x)$는 $|x|\leq 1$인 모든 x에 대해 $f(x)\geq f(-1)=-2b-a^2+2$를 만족한다. 따라서 점 $(a,\ b)$가 $2b+a^2\leq 2$를 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $|x|\leq 1$인 모든 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 된다. 하지만 $b>1$인 경우 $2<2b+a^2$이 되어 발생한다. 따라서 $b>1$인 경우 $|x|\leq 1$인 모든 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 되도록 하는 점 $(a,\ b)$는 존재하지 않는다.

3) $b<-1$인 경우

$b>1$인 경우와 마찬가지로 $|x|\leq 1$인 모든 x에 대하여 $f(x)\geq 0$ 이 되도록 하는 점(a,b)는 존재하지 않는다. 1), 2), 3) 에 의해서 영역 A는 중심이 원점이고 반지름이1인 원과 그 내부 점들의 모임이다. 따라서 A의 넓이는 π이다.

논제 2.

1) $|b|>1$인 경우

식 (*)에 의해서 함수 $f(x)$는 $|x|\geq 1$인 모든 x에 대하여 $f(x)\geq f(-b)=-b^2-a^2+1$을 만족한다. 따라서 점 $(a,\ b)$가 $-b^2-a^2+1\geq 0$ 즉, $a^2+b^2\leq 1$을 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $|x|\geq 1$인 모든 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 된다. 하지만 $|b|>1$인 경우, $1<a^2+b^2$이 되어 모순이 발생한다. 따라서 $|b|>1$인 경우 $|x|\geq 1$인 모든 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 되도록 하는 점 $(a,\ b)$는 존재하지 않는다.

2) $0\leq b\leq 1$인 경우

식 (*)에 의해서 함수 $f(x)$는 $|x|\geq 1$인 모든 x에 대하여 $f(x)\geq f(-1)=-2b^2-a^2+2$을 만족한다. 따라서 점 $(a,\ b)$가 $-2b^2-a^2+2\geq 0$ $(0\leq b\leq 1)$, 즉 $b\leq -\frac{1}{2}a^2+1$ $(0\leq b\leq 1)$을 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $|x|\geq 1$인 모든 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 된다.

3) $-1<b<0$인 경우

$0\leq b\leq 1$인 경우와 마찬가지로 $b\geq \frac{1}{2}a^2-1\,(-1<b<0)$을 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $|x|\geq 1$인 모든 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 된다.

1), 2), 3) 에 의해서 영역 B는 곡선 $b\geq \frac{1}{2}a^2-1$와 $b\leq -\frac{1}{2}a^2+1$로 둘러싸인 도형이 된다. 따라서 B의 넓이는

$$4\int_0^{\sqrt{2}}\left(-\frac{a^2}{2}+1\right)da=4\left[-\frac{a3}{6}+a\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

이다.

[문항3] 대학발표 예시답안

논제 1.

확률변수 X_4가 가질 수 있는 값은 $1,2,3,4$이고 확률실험의 모든 경우의 수는 16가지이다. 또한 $X_4=k$ $(k=1,2,3,4)$이기 위한 시행의 결과는 아래와 같다.

$X_4=k$	결과
1	(1, 1)
2	(1, 2) (2, 1) (2, 2)
3	(1, 3) (2, 3) (3, 3) (3, 2) (3, 1)
4	(1, 4) (2, 4) (3, 4) (4, 4) (4, 3) (4, 2) (4, 1)

따라서 X_4의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X_4	1	2	3	4	합계
$P(X_4=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

논제 2.

확률변수 X_n 이 가질 수 있는 값은 $1, 2, \cdots, n$ 이고 이 시행의 모든 경우의 수는 n^2 가지이다. 또한 $X_n = k$ 이기 위해서는 꺼낸 카드의 숫자가 $(1, k), (2, k), \cdots, (k, k), (k, k-1), \cdots, (k, 1)$ 의 $(2k-1)$ 가지 이므로 $P(X_n = k) = \dfrac{2k-1}{n}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots, n)$ 이다. 따라서

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} k P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{2k-1}{n^2} = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$$

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{2k-1}{n^2} = \frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n}$$

$$V(X_n) = E(X_n^2) - \{E(X_n)\}^2 = \frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n} - \left\{\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}\right\}^2$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}{36n^2}$$

이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(X_n)}{\sqrt{V(X_n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)(4n-1)}{6n}}{\sqrt{\dfrac{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}{36n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(4n-1)}{\sqrt{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}}$$

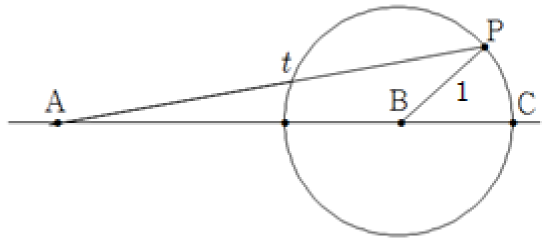
$$= \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

02 건국대학교 모의(자연계열)[2)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형(반영 점수는 600점이며, 절대평가임)	없음	수학 (2문항, 5문제)	100분 (과학 1과목 포함)

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 평면의 두 점 A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=m:n\,(m>0, n>0, m\neq n)$인 점 P가 그리는 도형을 아폴로니오스의 원이라고 한다.



(나) 좌표평면의 세 점 $\mathrm{A}(-2,0)$, $\mathrm{B}(2,0)$, $\mathrm{C}(4,0)$이 있다. 양의 실수 t에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=t:1$을 만족하는 점 P가 그리는 도형을 S_t라 하고 $\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{PC}}=1:1$인 점 P가 그리는 도형을 L이라 하자. 그러면 t의 값에 따라 S_t와 L은 한 점 또는 두 점에서 만나거나 서로 만나지 않는다.

[문제 1-1] (단답형) S_t와 L이 만나지 않도록 하는 양의 실수 t의 범위를 구하여 답만 쓰시오.

[문제 1-2] (서술형) t가 1보다 클 때, 직선 $\dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{5\sqrt{2}}=1$을 접선으로 갖는 아폴로니오스 원 S_t의 넓이를 구하되 풀이 과정도 함께 쓰시오.

2) 건국대학교 홈페이지

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 고차방정식의 해를 구하는 가장 기본적인 방법은 인수분해를 하는 것이다. 하지만 인수분해가 어려울 때, 근의 대략적인 위치를 알아내는 좋은 수단 중의 하나가 사잇값 정리(또는 중간값의 정리)이다. 예를 들어 삼차방정식 $x^3-3x-1=0$의 한 실근은 열린 구간 $(0,1)$에 있음을 사잇값 정리를 이용하면 보일 수 있다. 또한 구간 $[0,1]$을 이등분하여 얻은 두 구간 중 한 구간인 $\left[\frac{1}{2},1\right]$에 사잇값 정리를 적용하면, 이 실근이 열린 구간 $\left(\frac{1}{2},1\right)$에 있음을 알 수 있다. 이와 같은 과정을 반복하여서 이 실근의 근삿값을 구할 수 있다.

(나) 사인함수가 구간 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$에서 구간 $[-1,1]$로의 일대일 대응이므로 구간 $[-1,1]$에 있는 각 실수는 $\sin\theta$꼴로 표시할 수 있다. 제시문 (가)의 삼차방정식 $x^3-3x-1=0$에 대하여 중간값의 정리를 이용하여 근의 존재 범위를 잘 찾으면 실근의 정확한 값을 $a\sin\theta$꼴로 표시할 수 있다.

[문제 2-1] (단답형) 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$의 실근 중 가장 큰 것을 α라 할 때, α를 넘지 않는 가장 큰 정수를 구하여 답만 쓰시오.

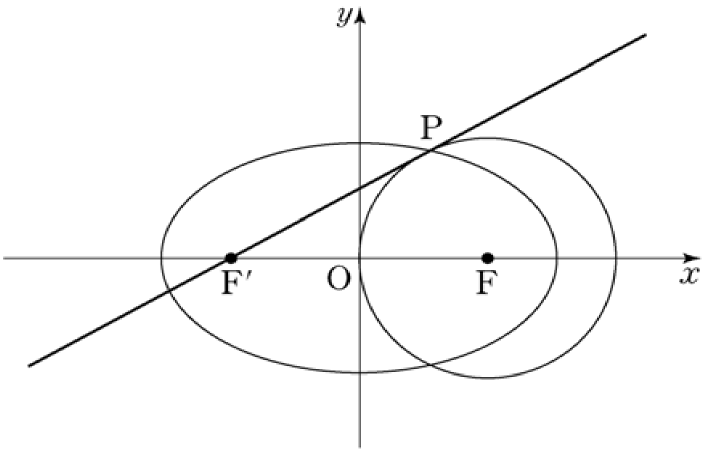
[문제 2-2] (서술형) 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$의 실근을 모두 $a\sin\theta$꼴로 표시하고 풀이 과정도 함께 쓰시오.

[문제 2-3] (서술형) 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$의 양의 실근 중 가장 작은 것의 값을 소수점 아래 첫 번째 자리까지 구하고 그 이유를 쓰시오.

풀어보기

문제1

그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 4인 타원이 있다. 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 c 인 원이 타원과 점 P에서 만난다. 점 P에서 원에 접하는 직선의 점 F′을 지날 때, c 의 값은? (2015. 6월 모평)



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{10}-\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{6}-1$
④ $2\sqrt{3}-2$ ⑤ $\sqrt{14}-\sqrt{5}$

문제2

닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (-2 \le x \le 0) \\ -x+2 & (0 < x \le 2) \end{cases}$$

이다. 좌표평면에서 $k>1$인 실수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 타원 $\dfrac{x^2}{k^2}+y^2=1$이 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(k)$라 하자. 함수 $g(k)$가 불연속이 되는 모든 k의 값들의 제곱의 합은? (2016. 4월 학평)

① 6 ② $\dfrac{25}{4}$ ③ $\dfrac{13}{2}$ ④ $\dfrac{27}{4}$ ⑤ 7

문제3

삼차방정식 $x^3+3x^2-9x+4-k=0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k 의 개수는? (2015. 7월 학평)

① 28　② 31　③ 34　④ 37　⑤ 40

문제4

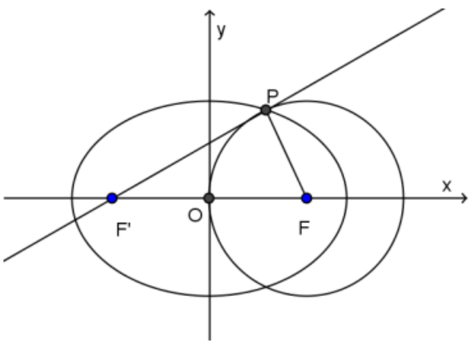
다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하자. Mm 의 값은?(2016년 대수능, 2015년 시행)

(가) 함수 $\lvert f(x)\rvert$ 는 $x=-1$ 에서만 미분가능하지 않다. (나) 방정식 $f(x)=0$ 은 닫힌구간 $[3,\ 5]$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① $\dfrac{1}{15}$　② $\dfrac{1}{10}$　③ $\dfrac{2}{15}$　④ $\dfrac{1}{6}$　⑤ $\dfrac{1}{5}$

예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ④



타원의 성질에 의해 $\overline{\mathrm{PF}'}+\overline{\mathrm{PF}}=4$ 이고, $\overline{\mathrm{PF}}=c$ 이므로 $\overline{\mathrm{PF}'}=4-c$ 이다. 한편 원의 접선성질에 의해 $\triangle \mathrm{F'FP}$는 $\angle \mathrm{P}$ 가 직각인 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{FF}'}=2c$ 이므로

$(4-c)^2+c^2=(2c)^2$ 이다. 정리하면 $c^2+4c-8=0$ 이고 따라서 방정식을 만족하는 양수 c는 $2\sqrt{3}-2$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 ⑤

타원 $\dfrac{x^2}{k^2}+y^2=1$은 네 점 $(k, 0)$, $(-k, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$을 네 꼭짓점으로 하는 타원이다.

타원 $\dfrac{x^2}{k^2}+y^2=1$과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 접할 때 k의 값을 구하자.

$\dfrac{x^2}{k^2}+y^2=1$ 위의 점 $(x_1, y_1)(x_1>0)$에서의 접선의 방정식을 구하면

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{k^2y}$ 이므로 접선의 기울기는 $-\dfrac{x_1}{k^2y_1}$ 이고 접선의 방정식은

$$y-y_1=-\frac{x_1}{k^2y_1}(x-x_1)\,(y_1\neq 0)$$

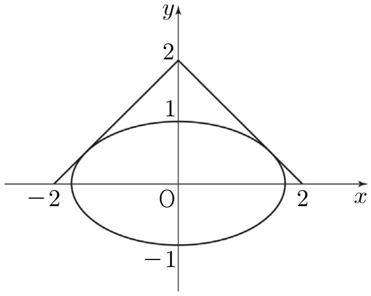
$$y=-\frac{x_1}{k^2y_1}x+\frac{1}{y_1}$$

타원이 직선 $y=-x+2$에 접하므로

$\dfrac{x_1}{k^2y_1}=1$, $\dfrac{1}{y_1}=2$, $\therefore\ x_1=\dfrac{k^2}{2}$, $y_1=\dfrac{1}{2}$

점 (x_1, y_1)은 $y=-x+2$ 위의 점이므로

$k^2=3\ \therefore\ k=\sqrt{3}\ (\because\ k>1)$



타원 $\dfrac{x^2}{k^2}+y^2=1$ 이 점 $(2,\,0)$을 지날 때, $k=2$

그러므로 함수 $g(k)$가 불연속이 되는 모든 k의 값들의 제곱의 합은 $(\sqrt{3})^2+2^2=7$ 이다.

풀어보기(문제3) 정답 ②

$f(x)=x^3+3x^2-9x+4-k$ 라 하면 $f'(x)=3(x+3)(x-1)$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$31-k$ (극댓값)	$\searrow$	$-1-k$ (극솟값)	$\nearrow$

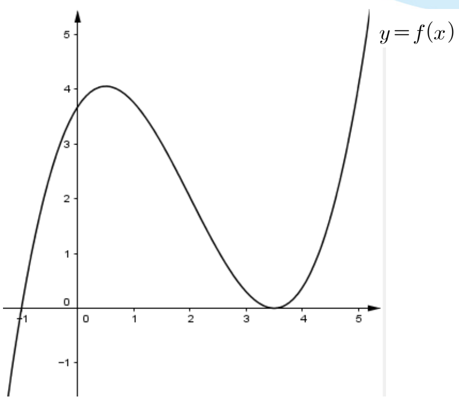
삼차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(-3)f(1)<0$ 이어야 하므로

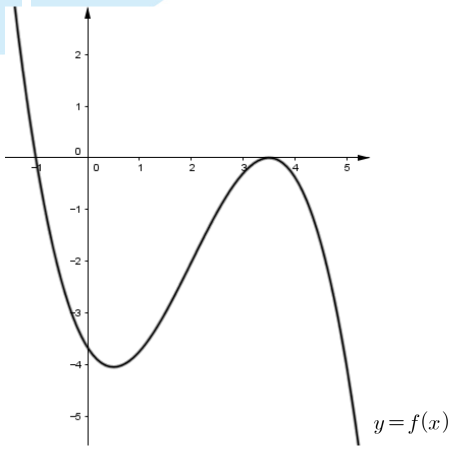
$(31-k)(-1-k)<0$, $-1<k<31$

따라서 모든 정수 k의 개수는 31

풀어보기(문제4) 정답 ⑤

주어진 조건을 만족시키기 위한 함수 $f(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.





즉 $f(-1)=0$ 이고 함수 $f(x)$ 의 그래프는 닫힌 구간 $[3,\,5]$ 에서 x축과 접한다.

그러므로 함수 $f(x)$ 를 $f(x)=k(x+1)(x-\alpha)^2$ $(k\neq 0,\ 3\le\alpha\le 5)$ 라 하면

$f'(x)=k(x-\alpha)^2+2k(x+1)(x-\alpha)$ 이므로

$$\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{k\alpha^2-2k\alpha}{k\alpha^2}=1-\frac{2}{\alpha}$$

그런데 $3\le\alpha\le5$ 이므로 $\alpha=3$ 일 때, 최솟값 $m=\frac{1}{3}$, $\alpha=5$ 일 때, 최댓값 $M=\frac{3}{5}$

따라서 $Mm=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$

[문제 1-1] 대학발표 예시답안

(1) 답 $0<t<1$ 또는 $t>5$

L은 선분 BC의 수직이등분선이므로 방정식이 $x=3$인 직선이다.

또, $t\neq1$이면, S_t는 두 점 A, B를 $t:1$로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝으로 하는 원이다.

ⅰ) $t>1$일 때 두 점 A, B를 $t:1$로 외분하는 점의 x좌표가 $\frac{2t+2}{t-1}$이므로 S_t와 L이 만나지 않으려면 $\frac{2t+2}{t-1}<3$이어야 한다. 이 부등식을 풀면 $t>5$이다.

ⅱ) $0<t<1$일 때 두 점 A, B를 $t:1$로 내분하는 점의 x좌표가 $\frac{2t-2}{t+1}$이므로 S_t와 L이 만나지 않으려면 $\frac{2t-2}{t+1}<3$이어야 한다. 이 부등식을 풀면 $t>-5$이므로 $0<t<1$이다.

(나침반 다른풀이)

$\overline{PB}:\overline{PC}=1:1$이므로 $\overline{PB}=\overline{PC}$이다. 따라서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이다.

구하고자 하는 점 P를 $P(x,y)$라 두면 $(x-2)^2+y^2=(x-4)^2+y^2$이다.

이 식을 정리하면 L은 $x=3$이다.…①

$\overline{PA}:\overline{PB}=t:1$이므로 $\overline{PA}=t\overline{PB}$이다. 따라서 $\overline{PA}^2=t^2\,\overline{PB}^2$이다.

구하고자 하는 점 P를 $P(x,y)$라 두면 $(x+2)^2+y^2=t^2\{(x-4)^2+y^2\}$이다.

$(1-t^2)x^2+4(1+t^2)x+(1-t^2)y^2+4(1-t^2)=0$

S_t는 $\left(x-2\frac{1+t^2}{t^2-1}\right)+y^2=\left(\frac{4t}{t^2-1}\right)^2$ 이다. …②

②와 ①이 만나지 않으려면 ②의 중심에서 ①까지의 거리가 ②의 반지름보다 커야 한다.

$$\left|2\frac{t^2+1}{t^2-1}-3\right|>\left|\frac{4t}{t^2-1}\right|,\quad \left|\frac{t^2-5}{t^2-1}\right|>\left|\frac{4t}{t^2-1}\right|,\quad |t^2-5|>|4t|$$

ⅰ) $0<t<1$ 또는 $1<t<\sqrt{5}$ 일 때

$$-(t^2-5)>4t,\ t^2+4t-5<0,\ (t+5)(t-1)<0,\ -5<t<1$$

조건을 만족하는 실수 t의 범위는 $0<t<1$이다.

ⅱ) $t\ge\sqrt{5}$일 때

$$(t^2-5)>4t,\ t^2-4t-5<0,\ (t+1)(t-5)>0,\ t<-1 \text{ 또는 } t>5$$

조건을 만족하는 실수 t의 범위는 $t>5$이다.
ⅰ), ⅱ)에 의해서 조건을 만족하는 t 범위는 $0<t<1$ 또는 $t>5$이다.

[문제 1-2] 대학발표 예시답안

선분 AB를 $t:1$로 내분하는 점과 외분하는 점이 각각 $\left(\frac{2t-2}{t+1}, 0\right), \left(\frac{2t+2}{t-1}, 0\right)$이므로 아폴로니오스 원 S_t의 중심의 좌표와 반지름의 길이는 각각 $\left(\frac{2(t^2+1)}{t^2-1}, 0\right), \frac{4t}{t^2-1}$이다.

그러므로 주어진 직선이 원 S_t의 접선이 되기 위해서는 이 원의 중심에서 직선까지의 거리와 이 원의 반지름의 길이가 같아야 한다. 이 조건으로부터 이차방정식 $2t^2-\sqrt{3}t-3=0$을 얻는다. 이 이차방정식을 풀면, $t=\sqrt{3}$ 또는 $t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. $t>0$이므로 $t=\sqrt{3}$이다. 따라서 $S_{\sqrt{3}}$의 넓이는 $\pi\left(\frac{4\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-1}\right)^2=12\pi$이다.

(나침반 다른풀이)

S_t는 $\left(x-2\frac{1+t^2}{t^2-1}\right)+y^2=\left(\frac{4t}{t^2-1}\right)^2$이다. 또한, 원의 중심 $\left(\frac{2(1+t^2)}{t^2-1}, 0\right)$에서 직선 $\frac{x}{10}+\frac{y}{5\sqrt{2}}=1(x+\sqrt{2}y-10=0)$까지의 거리는 반지름 $\frac{4t}{t^2-1}$이다.

$$\frac{\left|\frac{2(1+t^2)}{t^2-1}-10\right|}{\sqrt{3}}=\frac{4t}{t^2-1}$$

위 식을 정리하면 $2t^2-\sqrt{3}t-3=0$을 얻는다. 이 이차방정식을 풀면, $t=\sqrt{3}$ 또는 $t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. $t>0$이므로 $t=\sqrt{3}$이다. 따라서 $S_{\sqrt{3}}$의 넓이는 $\pi\left(\frac{4\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-1}\right)^2=12\pi$이다.

[문제 2-1] 대학발표 예시답안

$f(x)=x^3-3x+1$라 했을 때, f가 연속함수이고 $f(-2)=-1<0$, $f(0)=1>0$, $f(1)=-1<0$, $f(2)=3>0$이므로 사잇값 정리에 따르면 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$은 서로 다른 세 실근을 가질 뿐만 아니라 세 실근을 크기 순서로 α, β, γ라 하면 $1<\alpha<2$, $0<\beta<1$, $-2<\gamma<0$이다. 따라서 α를 넘지 않는 가장 큰 정수는 1이다.

[문제 2-2] 대학발표 예시답안

삼차방정식 $x^3-3x+1=0$의 세 실근이 모두 -2와 2사이에 있으므로 각 실근은 $2\sin\theta$ 꼴로 표시할 수 있다. 이를 방정식에 대입하면 $8\sin^3\theta-6\sin\theta+1=0$을 얻는다. 사인의 3

배각 공식 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$를 이용하면 이 식은 $-2\sin 3\theta + 1 = 0$이 된다. 그러므로 $\sin 3\theta = \frac{1}{2}$이 되어 $3\theta = -\frac{7\pi}{6},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}$이다. 따라서 주어진 삼차방정식의 세 실근은 $-2\sin\frac{7\pi}{18},\ 2\sin\frac{\pi}{18},\ 2\sin\frac{5\pi}{18}$이다.(※ 3배각 공식은 교육과정 밖이다.)

[문제 2-3] 대학발표 예시답안

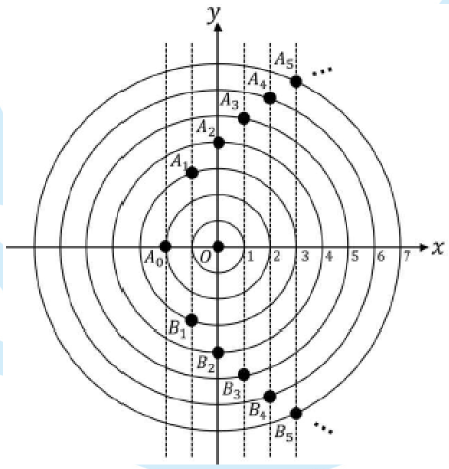
삼차방정식 $x^3 - 3x + 1 = 0$의 양의 실근 중 가장 작은 것 β는 0과 1사이에 있다. 차례로 $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0,\ f\left(\frac{1}{4}\right) > 0,\ f\left(\frac{3}{8}\right) < 0,\ f\left(\frac{5}{16}\right) > 0$을 확인하면 $\frac{5}{16} < \beta < \frac{3}{8}$임을 알 수 있다. 따라서 β의 값을 소수점 아래 첫 번째 자리까지 구하면 0.3이다.

03 건국대학교 수시

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
수학1문항 : 수리가형 수능 범위와 동일 수학2문항 : 미적분, 벡터 등 심화문제	없음	수학(2문항, 5문제) 과학(2문항, 2문제)	100분

<제시문 1>

[그림 1]은 좌표평면에서 각 자연수 n마다 중심이 원점 O이고 반지름이 $n+1$인 원과 직선 $x=n-3$의 교점을 구하여 점 $\mathrm{A_0, A_1, B_1, A_2, B_2}, \cdots$으로 나타낸 것이다. 이들 모든 점을 지나는 포물선이 존재한다. 이 포물선을 C라 하자.



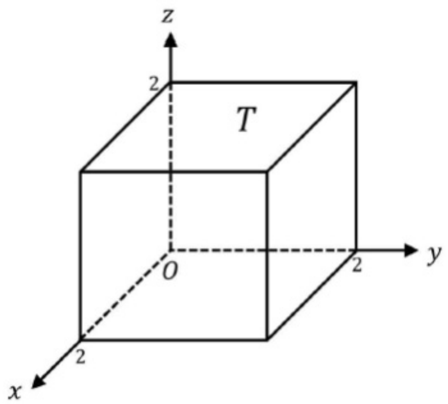
[문제 1-1] (단답형) 포물선 C 위의 점 P에서 접선을 l이라 하자. $\overline{\mathrm{OP}}=a$일 때, 점 O에서 l까지 거리를 a에 관한 식으로 답만 쓰시오.

[문제 1-2] (서술형) 점 Q와 R는 각각 [그림 1]의 $\mathrm{A_0, A_1, B_1, A_2, B_2}, \cdots$의 하나이다. 점 Q에서 포물선 C의 접선과 점 R에서 포물선 C의 접선이 수직으로 만날 때, $\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{OR}}$의 값을 모두 구하고 풀이과정을 쓰시오.

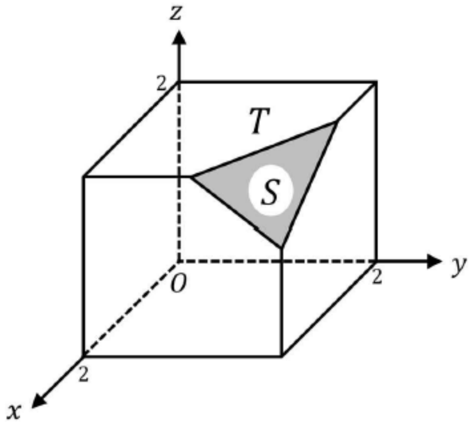
<제시문 2>

(가) 공간에서 두 직선 사이의 거리는 두 직선의 점을 연결하는 선분 중에서 가장 짧은 것의 길이로 정의한다. 따라서 꼬인 위치에 있는 두 직선 사이의 거리는 두 직선에 모두 수직인 선분의 길이와 같다.

(나) [그림 2]와 같이 정육면체 T가 있다. T는 $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$를 만족하는 점 (x,y,z) 의 모임이다. 정육면체 T를 평면으로 자르면 그 단면은 점, 선, 면 등이 된다. [그림 3]의 S는 어떤 단면의 한 예이다.



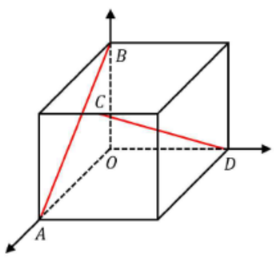
[그림 2]



[그림 3]

[문제 2-1] (단답형) T에서 $\sin(x+y+z)\pi = 0$ 을 만족하는 영역의 넓이를 구하여 답만 쓰시오.

[문제 2-2] (서술형) T의 두 점 $\mathrm{A}(2,0,0)$ 과 $\mathrm{B}(0,0,2)$를 지나는 직선을 l, 두 점 $\mathrm{C}(2,1,2)$와 $\mathrm{D}(0,0,2)$를 지나는 직선을 m이라 한다. l과 m사이의 거리를 구하고 풀이과정을 쓰시오.



[문제 2-3] (서술형) T를 평면 $x+y+z=t$ $(2 \le t \le 4)$ 로 잘랐을 때 생기는 단면의 넓이를 t에 관한 식으로 표현하고 풀이과정을 쓰시오.

풀어보기

문제1

두 양수 k, p에 대하여 점 $\mathrm{A}(-k,\ 0)$에서 포물선 $y^2=4px$에 그은 두 접선이 y축과 만나는 두 점을 각각 F, F$'$, 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 할 때, $\angle \mathrm{PAQ}=\dfrac{\pi}{3}$ 이다. 두 점 F, F$'$을 초점으로 하고 두 점 P, Q를 지나는 타원의 장축의 길이가 $4\sqrt{3}+12$ 일 때, $k+p$의 값은? (2016년 11월 시행 수능)

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

문제2

두 양수 m, p에 대하여 포물선 $y^2=4px$와 직선 $y=m(x-4)$가 만나는 두 점 중 제1사분면 위의 점을 A, 포물선의 준선과 x축이 만나는 점을 B, 직선 $y=m(x-4)$와 y축이 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 무게중심이 포물선의 초점 F와 일치할 때, $\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}$의 값을 구하시오. (2016년 7월 전국연합 가형)

문제3

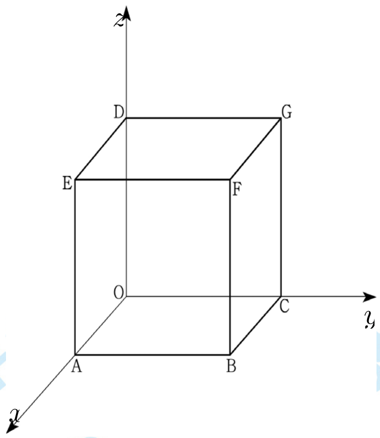
점 $\mathrm{A}(5,\ 3,\ -2)$를 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{u_1}=(2,\ 2,\ 1)$인 직선을 l, 두 점 $\mathrm{B}(4,\ -1,\ -1)$, $\mathrm{C}(2,\ 0,\ 1)$을 지나는 직선을 m이라 하자. 두 직선 l, m 사이의 거리는? (2016수능연계 수능특강 기하와 벡터, 직선의 방정식 기본연습문제 4번)

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

문제4

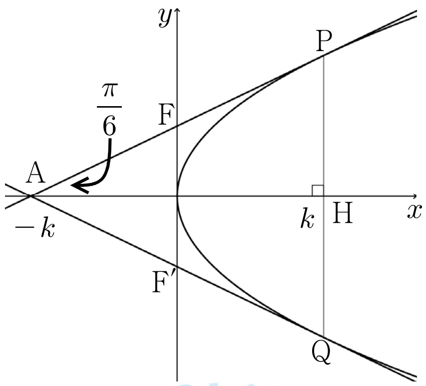
그림과 같이 좌표공간에 있는 정육면체 OABC$-$DEFG에서 A$(4,\ 0,\ 0)$, C$(0,\ 4,\ 0)$, D$(0,\ 0,\ 4)$이다. 이 정육면체가 평면 $x+y+2z=6$에 의하여 잘린 단면의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

(2012년 10월 시행 전국연합)



예시답안

풀어보기(문제1)



포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 x절편이 $-x_1$이므로 점 P의 좌표는 $(k,\ \sqrt{4pk})$이다.

선분 PQ와 x축과의 교점을 H라 두면 $\angle PAH=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{AH}:\overline{PH}=2k:\sqrt{4pk}=\sqrt{3}:1$이다.

따라서 $4k^2=12pk$ 즉, $k=3p$이다.

그러므로 $P(3p,\ 2\sqrt{3}p)$, $F(0,\ \sqrt{3}p)$, $F'(0,\ -\sqrt{3}p)$ 이다.

따라서 $\overline{PF}=\sqrt{(3p)^2+(\sqrt{3}p)^2}=2\sqrt{3}p$, $\overline{PF'}=\sqrt{(3p)^2+(3\sqrt{3}p)^2}=6p$ 이다.

또 F, F′을 초점으로 하고 점 P를 지나는 타원의 장축의 길이가 $4\sqrt{3}+12$이다. 즉, $\overline{PF}+\overline{PF'}=2\sqrt{3}p+6p=4\sqrt{3}+12$에서 $p=2,\ k=3p=6$

따라서 $k+p=8$이다.

풀어보기(문제2)

포물선의 초점을 $F(p,\ 0)$, 점 $A(\alpha,\ m(\alpha-4))$ $(\alpha>0)$라 하면, 점 $B(-p,\ 0)$, 점 $C(0,\ -4m)$ 이다. 삼각형 ABC의 무게중심이 점 F(p,0) 이므로

$\left(\frac{\alpha-p}{3},\ \frac{m\alpha-4m-4m}{3}\right)$에서 $\frac{\alpha-p}{3}=p$, $\frac{m\alpha-4m-4m}{3}=0$이다.

따라서 $\alpha=4p$, $(\alpha-8)m=0$

$m>0$이므로 $\alpha=8$, $p=2$

점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 A′라 하면, 포물선의 정의에 의하여 $\overline{AF}=\overline{AA'}=10$이다. 따라서 $\overline{AF}+\overline{BF}=14$

풀어보기(문제3)

직선 l 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$는

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{u_1}=(2s+5,\ 2s+3,\ s-2)$ (단, s는 실수)

직선 m 위의 점 $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$는

$$\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-0}{-1-0}=\frac{z-1}{-1-1}$$

에서 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(2t+2,\ -t,\ -2t+1)$ (단, t는 실수)

그런데 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(2t-2s-3,\ -t-2s-3,\ -2t-s+3)$이고 두 직선 l, m의 방향벡터는 각각 $\overrightarrow{u_1}=(2,\ 2,\ 1)$, $\overrightarrow{u_2}=(2,\ -1,\ -2)$

$\overline{\mathrm{PQ}}$가 최소가 되기 위해서는 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$가 두 직선 l, m과 각각 수직이 되어야 하므로

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{u_1}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{u_2}=0$

$2(2t-2s-3)+2(-t-2s-3)+(-2t-s+3)=0$

$2(2t-2s-3)-(-t-2s-3)-2(-2t-s+3)=0$

$-9s-9=0,\ 9t-9=0$

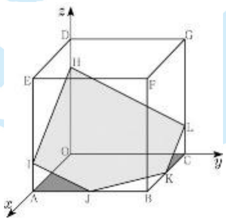
$\therefore\ s=-1,\ t=1$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1,\ -2,\ 2)$이므로 두 직선 l, m 사이의 거리, 즉 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은

$\overline{\mathrm{PQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$

풀어보기(문제4)

평면 $x+y+2z=6$에 의하여 정육면체가 잘린 단면은 그림과 같다.



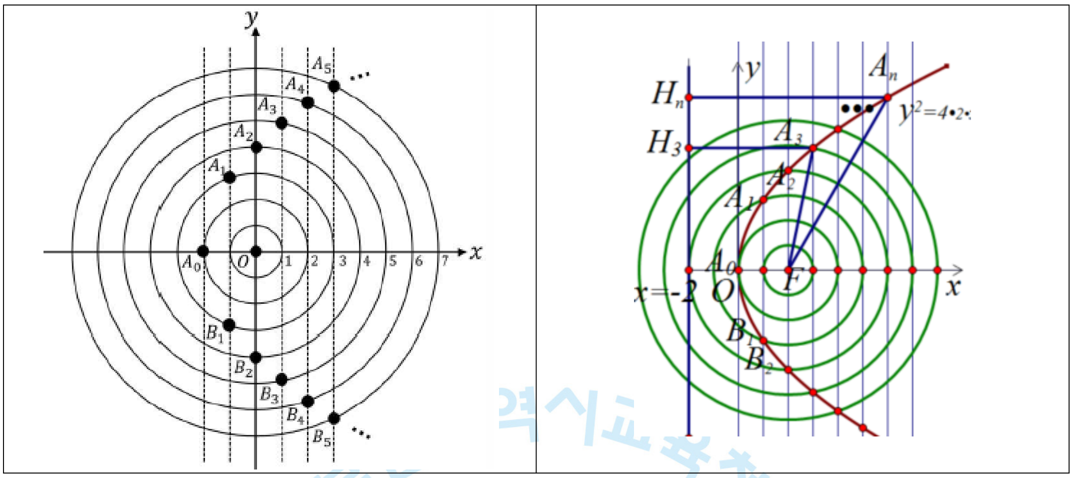
두 평면 $x+y+2z=6,\ z=0$의 법선벡터가 각각 $(1,\ 1,\ 2),\ (0,\ 0,\ 1)$이므로 두 평면이 이루는 각 θ에 대하여 $\sqrt{6}\cdot 1\cdot\cos\theta=2,\ \cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

오각형 HIJKL의 정사영이 오각형 OAJKC이므로

$S\cos\theta=14$ 따라서 $S=7\sqrt{6}$ 이므로 $S^2=294$

예시답안

[문제 1-1] 단답형 $\sqrt{2a}$



위의 표에서 두 번째 그림과 같이 A_0를 원점으로 생각하고 원점을 $\mathrm{F}(2,0)$으로 생각하자. 이제 임의의 점 A_n에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H_n이라고 생각하면 $\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{A}_n}=n+2$이고 $\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{F}}=n+2$이다. 따라서 포물선 C는 초점의 좌표가 $(2,0)$이므로 포물선 C의 방정식은 $y^2=8x$이다.

포물선 위의 점을 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$라고 하자. 점 P에서 점 F(O)까지 거리가 a이므로 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=x_1+2=a$이다.

따라서 $x_1=a-2$이고 $y_1^2=8x_1$이므로 $y_1=\pm\sqrt{8(a-2)}$

그런데, 포물선 $y^2=8x$은 x축에 대하여 대칭이므로 $y_1>0$으로 생각해도 일반성을 잃지 않는다.

포물선 위의 점((x_1,y_1)에서 접선의 식은 $y_1y=2p(x+x_1)$이므로

위의 식에 $x_1=a-2$, $y_1=\sqrt{8(a-2)}$ 을 대입하면

$\sqrt{8(a-2)}\,y=4(x+a-2)$, 즉, $4x-\sqrt{8(a-2)}\,y+4(a-2)=0$이다.

이제 점과 직선 사이의 거리공식을 사용하여 $\mathrm{F}(2,0)$에서 접선까지의 거리 d를 구하면

$$d=\frac{\left|4\times2+\sqrt{8(a-2)}\times0+4(a-2)\right|}{\sqrt{4^2+\left(\sqrt{8(a-2)^2}\right)}}=\frac{4a}{2\sqrt{2a}}=\sqrt{2a}$$

다른 풀이)

포물선 C가 원점을 초점으로 갖고 점 $(-2,0)$을 꼭짓점으로 가지므로 C의 방정식은 $y^2=8(x+2)$이다.

점 P의 좌표를 (p,q)라 하자. 점 P는 원점을 중심으로 하고 반지름이 a인 원과 직선 $x=a-4$의 교점이므로 $p=a-4$이다.

$q^2=8(p+2)$ 이므로 $q=\pm\sqrt{8(a-2)}$ 이고 따라서 $(p,q)=(a-4,\ \pm\sqrt{8(a-2)})$ 이다.
위 두 점의 각 점에서 얻는 C의 접선에서 원점까지의 거리는 같으므로, $(p,q)=(a-4,\ \sqrt{8(a-2)})$ 인 경우만 계산해도 충분하다.
점 P가 점 $(-2,0)$이 아닌 경우 (즉, $a\neq 2$), $y^2=8(x+2)$에 음함수 미분을 하면 $2y\dfrac{dy}{dx}=8$ 이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{y}$ 이다.

이때 점 P에서 C의 접선의 기울기는 $\dfrac{4}{\sqrt{8(a-2)}}=\sqrt{\dfrac{2}{a-2}}$ 이고, 접선의 방정식은

$y-\sqrt{8(a-2)}=\sqrt{\dfrac{2}{a-2}}\,(x-(a-4))$ 이다. 정리하면, $2x-\sqrt{2(a-2)}\,y+2a=0$ 이고 원점에서

이 직선까지의 거리는 $\dfrac{2a}{\sqrt{2^2+2(a-2)}}=\sqrt{2a}$ 이다.
점 P가 점 $(-2,0)$인 경우, 접선의 방정식은 $x=-2$이고, 이때 원점에서 이 접선까지의 거리는 4이고 $a=2$이므로 이 경우도 원점에서 접선까지의 거리는 $\sqrt{2a}$ 이다.

[문제 1-2]

[문제1-1]과 같이 생각하면 포물선의 방정식은 $y^2=8x$ 이고 점 O는 F(2,0) 이다.

기울기가 m 이고 포물선 $y^2=4px$ 에 접하는 접선의 방정식은 $y=mx+\dfrac{p}{m}$ 이다.

따라서 $y^2=8x$ 에 접하고 기울기가 m인 직선은 $y=mx+\dfrac{2}{m}$ …① 이다.

①에 수직이고 $y^2=8x$ 에 접하는 직선은 $y=-\dfrac{1}{m}x-2m$ …② 이다.

①과 ②를 연립하여 계산하면 $x=-2$ 에서 두 직선은 만난다.
이제 위의 포물선과 ①을 연립하면

$\left(mx+\dfrac{2}{m}\right)^2=8x$ 이고, 이것을 간단히 하면

$m^2x^2-4x+\left(\dfrac{2}{m}\right)^2=\left(mx-\dfrac{2}{m}\right)^2=0$, 즉 $x=\dfrac{2}{m^2}$ … ③

같은 방법으로 포물선과 ②식을 연립하여 계산하면 $x=2m^2$ … ④이다.

그런데 Q, R의 x좌표는 자연수이므로 가능한 m값은 $\pm1, \pm\sqrt{2}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 뿐이다.

$m=\pm1$ 인 경우 $(2,4)$, $(2,-4)$ 가 Q,R 의 좌표이다.

$$\overline{\mathrm{O(F)Q}}+\overline{\mathrm{O(F)R}}=2+2+2+2=8 \text{ 이다.}$$

$m=\pm\sqrt{2}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 인 경우 Q,R 의 좌표는 $(1,2\sqrt{2})$, $(4,-4\sqrt{2})$ 또는 $(4,4\sqrt{2})$, $(1,-2\sqrt{2})$

이다. 이 경우, $\overline{\mathrm{O(F)Q}}+\overline{\mathrm{O(F)R}}=1+2+4+2=9$ 이다.
따라서 $\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{OR}}=8$ 또는 9 이다.

다른 풀이)

점 $(-2, 0)$에서 C의 접선은 y축에 평행하므로 이 접선과 수직으로 만나는 포물선의 접선은 존재하지 않는다. 따라서 $\overline{OQ} \neq 2$, $\overline{OR} \neq 2$ 이다.

$\overline{OQ} = a$, $\overline{OR} = b$라 하자. 점 Q 와 R 에서 포물선 C의 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2 라 하자. Q 가 x축 위에 있는 점이고 R 이 x축 아래에 있는 점이라 하면, 문제1-1에서 구한 계산에 의하여 $m_1 = \sqrt{\dfrac{2}{a-2}}$, $m_2 = -\sqrt{\dfrac{2}{b-2}}$ 이다.

두 접선이 수직으로 만나므로, $m_1 \cdot m_2 = -1$ 에서 $\dfrac{-2}{\sqrt{(a-2)(b-2)}} = -1$ 이다.

정리하면 $(a-2)(b-2) = 4$ 이다.

a, b는 자연수이므로 $a=3, b=6$, 또는 $a=4, b=4$, 또는 $a=6, b=3$이다.

따라서 $\overline{OQ} + \overline{OR} = a+b = 8$ 또는 9 이다.

[문제 2-1] 답답형 $8\sqrt{3}$

$0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$이므로 $0 \le x+y+z \le 6$이다.

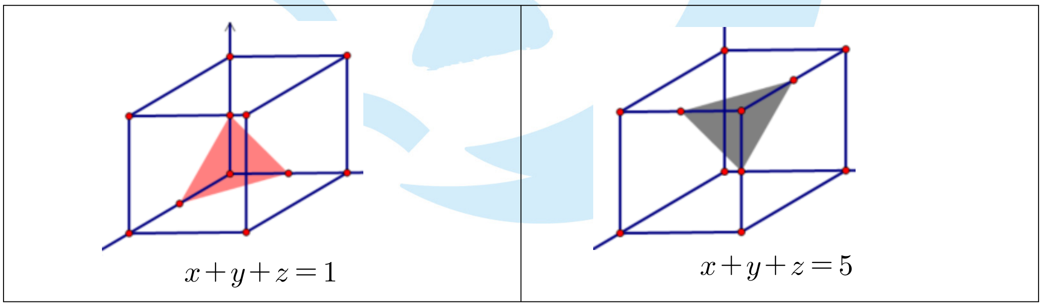
$x+y+z=k$라 하면, $\sin(x+y+z)\pi = 0$ 을 만족하는 k값은 $k=1,2,3,4,5,6$ 이다.

첫째, $x+y+z=0$, $x+y+z=6$인 경우,

평면과 정육면체는 한 점 $(0, 0, 0)$, $(2,2,2)$ 에서 만나므로

넓이는 영역의 넓이는 0이다.

둘째, $x+y+z=1$, $x+y+z=5$인 경우,



(1) 평면 $x+y+z=1$과 정육면체가 만나는 영역은

꼭짓점이 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$인 삼각형이다.

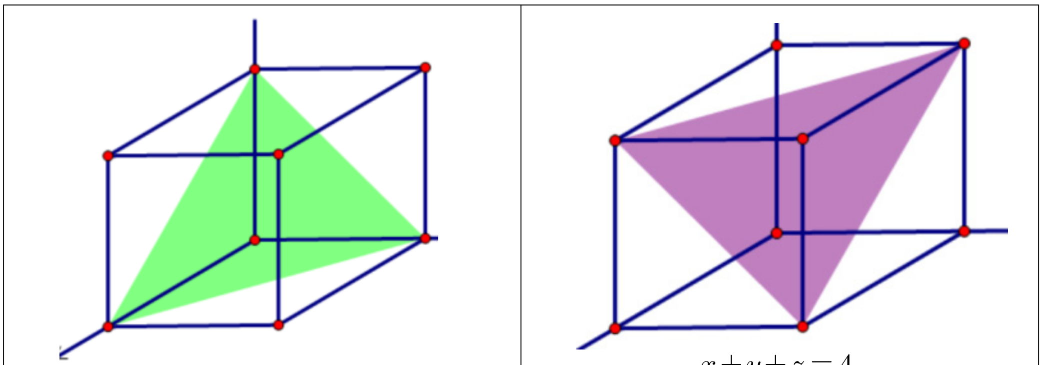
이 삼각형은 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 정삼각형이고 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

(2) 평면 $x+y+z=5$ 와 정육면체가 만나는 영역은

꼭짓점이 $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$, $(1, 2, 2)$인 삼각형이다.

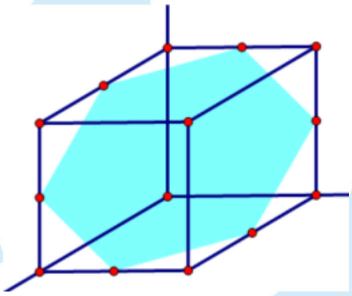
이 삼각형은 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 정삼각형이고 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

셋째, $x+y+z=2$, $x+y+z=4$인 경우,



$x+y+z=2$ $x+y+z=4$

(1) 평면 $x+y+z=2$과 정육면체가 만나는 영역은
꼭짓점이 $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$인 삼각형이다.
이 삼각형은 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 정삼각형이고 넓이는 $2\sqrt{3}$ 이다.
(2) 평면 $x+y+z=4$ 와 정육면체가 만나는 영역은
꼭짓점이 $(2, 9, 2)$, $(2, 2, 0)$, $(0, 2, 2)$인 삼각형이다.
이 삼각형은 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 정삼각형이고 넓이는 $2\sqrt{3}$ 이다.
넷째, $x+y+z=3$인 경우,



평면과 정육면체가 만나는 영역은 꼭짓점이 $(1, 0, 2)$, $(2, 0, 1)$, $(2, 1, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 2, 1)$, $(0, 1, 2)$인 정육각형이다. 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정육각형의 넓이는 $6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ 이다.

따라서 전체 넓이는 $2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{3}\right)+3\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ 이다.

[문제 2-2]

직선 l이 $A(2, 0, 0)$을 지나고 방향벡터 $\overrightarrow{AB}=(-2, 0, 2)$를 가지므로 방정식
$(x, y, z)=(-2t+2, 0, 2t)$를 만족한다.
직선 m은 점 $C(2, 1, 2)$를 지나고 방향벡터 $\overrightarrow{CD}=(-2, 1, -2)$를 가지므로 방정식
$(x, y, z)=(-2s+2, s+1, -2x+2)$를 만족한다.
l 위의 점 $P(-2t+2, 0, 2t)$와 m 위의 점 $Q(-2s+2, s+1, -2s+2)$를 지나는 직선은
방향벡터 $\overrightarrow{PQ}=(-2s+2t, s+1, -2s-2t+2)$를 갖는다.
$\overline{PQ}$가 최솟값을 가진다고 하자. 선분 PQ가 l, m에 모두 수직이므로, s와 t는

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = (-2s+2t,\ s+1,\ -2s-2t+2) \cdot (-2,\ 0,\ 2) = 0$
$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CD} = (-2s+2t,\ s+1,\ -2s-2t+2) \cdot (-2,\ 1,\ -2) = 0$
을 만족한다. 두 식을 정리하면 $-8t+4=0$, $9s-3=0$이다.

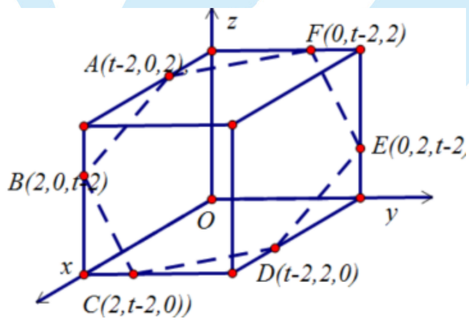
따라서, $t=\frac{1}{2}$, $s=\frac{1}{3}$ 이다.

이때 점 P는 $(1, 0, 1)$이고 점 Q는 $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$이다.

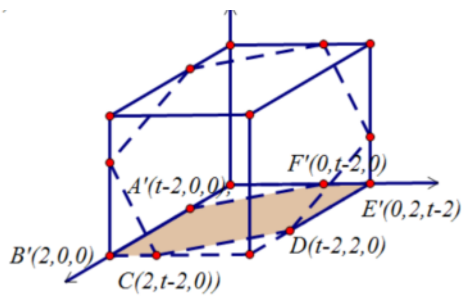
구하는 거리는 $\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{2}$ 이다.

다른 풀이)
$\overrightarrow{PQ} = (-2s+2t,\ s+1,\ -2s-2t+2)$에서 $|\overleftrightarrow{PQ}|$ 최솟값은 거리이므로
$|\overleftrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-2s+2t)^2 + (s+1)^2 + (-2s-2t+2)^2}$ 이 최솟값을 가지면 된다.
$\sqrt{(-2s+2t)^2 + (s+1)^2 + (-2s-2t+2)^2} = \sqrt{(3s-1)^2 + 8(t-1)^2 + 2}$ 이므로
$s=\frac{1}{3}, t=\frac{1}{2}$ 일 때, $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2}$ 가 두 직선 l, m 사이의 거리이다

[문제 2-3]
$2<t<4$일 때, 정육면체의 각 모서리와 평면 $x+y+z=t$의 교점이 단면의 꼭짓점이 된다. 따라서 단면은 아래 그림과 같이 꼭짓점이 $\mathrm{A}(t-2, 0, 2)$, $\mathrm{B}(2, 0, t-2)$, $\mathrm{C}(2, t-2, 0)$, $\mathrm{D}(t-2, 2, 0)$, $\mathrm{E}(0, 2, t-2)$, $\mathrm{F}(0, t-2, 2)$ 인 육각형이다.



이 단면의 xy 평면 위로의 정사영은 아래 그림과 같이 꼭짓점이 $\mathrm{A}'(t-2, 0,0)$, $\mathrm{B}'(2, 0,0)$, $\mathrm{C}(2, t-2,0)$, $\mathrm{D}(t-2, 2,0)$, $\mathrm{E}'(0, 2,0)$, $\mathrm{F}'(0, t-2, 0)$인 육각형이다.



위의 그림에서 정사영의 넓이 S'은 한 변의 길이가 2인 정사각형의 넓이에서 두 직각이등변삼각형의 넓이를 뺀 것과 같다.

$S'=2\cdot 2-\frac{1}{2}(t-2)^2-\frac{1}{2}(2-(t-2))^2=-t^2+6t-6$ 이다.

xy평면과 평면 $x+y+z=t$가 이루는 이면각을 θ라 하면,

$\cos\theta=\dfrac{(0,0,1)\cdot(1,1,1)}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 단면의 넓이를 S라 하면 $S'=S\cos\theta$이므로

$S=\dfrac{1}{\cos\theta}S'=\sqrt{3}(-t^2+6t-6)$

참고로 $t=2,4$일 때는 문제2-1에서와 같이 육각형은 정삼각형으로 퇴화되어 단면이 넓이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형이다. 따라서 단면의 넓이에 대한 위의 식은 $t=2,4$일 때도 성립한다.

04 경희대학교 오프라인 모의(의학계)[3]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 벗어나지 않는 논술형 (반영 점수 비율은 학생부 30, 논술 70이며, 논술 점수는 수학 60, 과학 40입니다.)	없음	수학(1문항, 4문제) 필수, 과학 1과목 선택	120분

Ⅰ. 다음 제시문과 그림을 참조하여 논제에 답하시오.

[가] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) < f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 하며, $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) > f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능할 때, 그 구간의 모든 x에 대하여

(i) $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.

(ii) $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

[나] $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \beta$ (α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 x에 대하여 $f(x) \le g(x)$이면 $\alpha \le \beta$이다. 여기에서 $f(x) < g(x)$일 때, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$인 경우가 있다. 즉 $\alpha \le \beta$이다.

[다] 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \ne f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k에 대하여 직선 $y = k$와 함수 $y = f(x)$의 그래프는 적어도 한 점에서 만나게 된다. 따라서 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c) = k$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

이상을 정리하면 다음과 같은 "사이값 정리"가 성립한다.

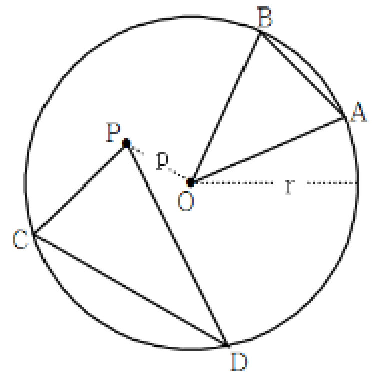
사이값 정리
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \ne f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c) = k$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

[라] 좌표평면 위의 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리 d는

$d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 이다.

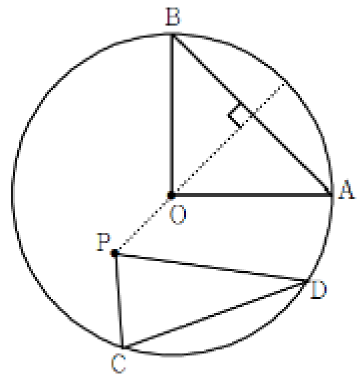
3) 경희대학교 홈페이지

[논제 Ⅰ] 반지름이 r인 원이 주어져 있을 때, 그 원의 중심을 O라고 하고, 점 A, 점 B, 점 C, 점 D는 원주 위에서 움직이는 점이라고 하자.



[논제 Ⅰ-1] 위의 그림과 같이 원 내부의 한 점을 P라고 하고, 이 점 P와 중심 O와의 거리를 p라고 하자. 삼각형 OAB와 삼각형 PCD의 넓이가 각각 최대일 때, 삼각형 OAB의 최대넓이를 r로, 삼각형 PCD의 최대넓이를 r과 p로 표현하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

[논제 Ⅰ-2] 시간 t가 증가함에 따라 반지름 r은 $r=f(t)$로 변화하고, 중심 O와의 거리 p가 $p=g(t)$로 변화하는 점 P가 원 내부에서 움직인다고 하자. 일정한 시간 t에 대해서 [논제 Ⅰ-1]에서 구한 삼각형 OAB의 최대넓이를 $S_1(t)$, 삼각형 PCD의 최대넓이를 $S_2(t)$라고 하고, 시간이 무한히 증가한다고 할 때, 그 비 $\dfrac{S_2(t)}{S_1(t)}$가 수렴한다고 가정하자. 이 때 수렴하는 가능한 극한값의 범위를 구하고, 그 범위 안의 임의의 값을 극한값으로 갖게 하는 두 함수 $f(t)$와 $g(t)$가 존재함을 증명하고, 그 때의 두 함수의 형태를 논술하시오. 단, 두 함수 $f(t)$와 $g(t)$는 t에 대한 연속함수이고, 함수 $f(t)$와 $g(t)$도 모두 상수함수가 아니다. (15점)



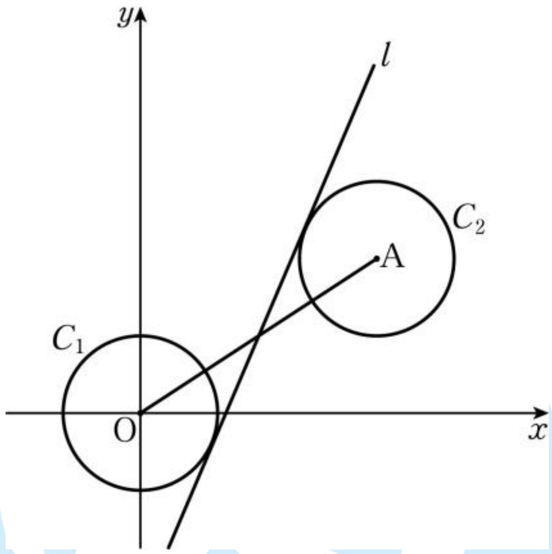
[논제 Ⅰ-3] 위의 그림에서 삼각형 OAB는 [논제 Ⅰ-1]에서 구한 최대넓이를 갖는 삼각형이라고 하자. 점 P는 원 내부의 점으로 중심 O와의 거리가 p이면서 선분 AB의 수직이등분선 상에 있는 점이라고 하고, 삼각형 OAB와 삼각형 PCD는 서로 겹치지 않는다고 가정하자(한 점에서 만나는 것은 허용한다). 이 때 삼각형 PCD의 최대넓이를 r과 p로 표현하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

[논제 Ⅰ-4] 점 P와 중심 O와의 거리인 p가 일정한 상수라고 가정하자. [논제 Ⅰ-1]에서 구한 삼각형 PCD의 최대넓이를 S_2라고 하고, [논제 Ⅰ-3]의 상황에서 구한 삼각형 PCD의 최대넓이를 S_3이라고 하면, 반지름이 무한히 증가한다고 할 때, 그 비 $\dfrac{S_3}{S_2}$이 수렴하는지 혹은 발산하는지를 설명하고, 수렴한다면 그 극한값을 계산하시오. (15점)

풀어보기

문제1

좌표평면에 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 3인 원 C_1과 중심이 점 $\mathrm{A}(t, 6)$이고 반지름의 길이가 3인 원 C_2가 있다. 그림과 같이 기울기가 양수인 직선 l이 선분 OA와 만나고, 두 원 C_1, C_2에 각각 접할 때, 다음은 직선 l의 기울기를 t에 대한 식으로 나타내는 과정이다. (단, $t>6$)



직선 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α,
점 O를 지나고 직선 l에 평행한 직선 m이 직선 OA와
이루는 예각의 크기를 β라 하면

$$\tan\alpha = \frac{6}{t}$$

$$\tan\beta = \boxed{\text{(가)}}$$

이다.

직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\theta = \alpha + \beta$$

이므로

$$\tan\theta = \boxed{\text{(나)}}$$

이다.

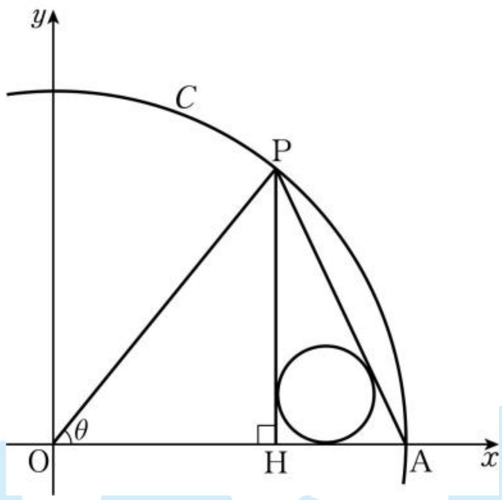
따라서 직선 l의 기울기는 $\boxed{\text{(나)}}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때, $\dfrac{g(8)}{f(7)}$의 값을 구하시오.

(2016. 3월 전국연합)

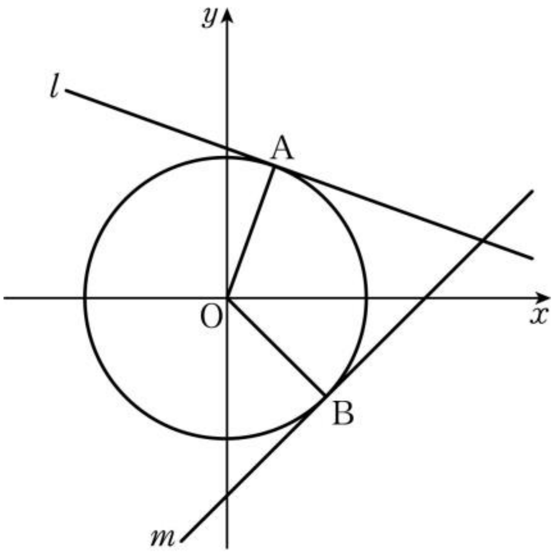
문제2

그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원 C가 x축의 양의 방향과 만나는 점을 A, 원 C 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, $\angle\mathrm{POA}=\theta$라 하자. 삼각형 APH에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{r(\theta)}{\theta^2}$의 값을 구하시오. (2016. 3월 전국연합)



문제3

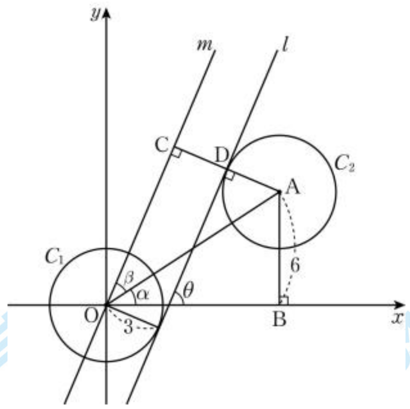
그림과 같이 기울기가 $-\dfrac{1}{3}$인 직선 l이 원 $x^2+y^2=1$과 점 A에서 접하고, 기울기가 1인 직선 m이 원 $x^2+y^2=1$과 점 B에서 접한다. $100\cos^2(\angle\mathrm{AOB})$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) (2016. 3월 전국연합)



예시답안

풀어보기(문제1)

직선 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α, 점 O를 지나고 직선 l에 평행한 직선 m이 직선 OA와 이루는 각의 크기를 β라 하자. 점 A에서 x축과 직선 m에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하고, 선분 AC가 원 C_2와 만나는 점을 D라 하자.



직각삼각형 OAC에서 $\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{DC}=3+3=6$이므로 직각삼각형 AOB와 직각삼각형 AOC에서 $\angle OBA=\angle OCA=90^\circ$, $\overline{AB}=\overline{AC}=6$, 선분 OA는 공통이므로 $\triangle AOB\equiv\triangle AOC$이다. 또한 $\angle AOB=\angle AOC$이므로 $\alpha=\beta$이다. 따라서 $\tan\alpha=\tan\beta=\dfrac{6}{t}$이다.

직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, 두 직선 l, m이 평행하므로

$$\theta=\alpha+\beta,\ \tan\theta=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{6}{t}+\frac{6}{t}}{1-\frac{6}{t}\times\frac{6}{t}}=\frac{12t}{t^2-36}$$

따라서 $f(t)=\dfrac{6}{t}$, $g(t)=\dfrac{12t}{t^2-36}$이므로

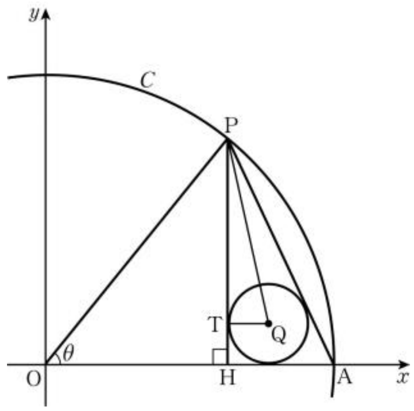
$$\frac{g(8)}{f(7)}=\frac{\frac{12\times8}{64-36}}{\frac{6}{7}}=\frac{\frac{96}{28}}{\frac{6}{7}}=4$$

풀어보기(문제2)

삼각형 OAP가 이등변삼각형이므로 $\angle OAP=\angle OPA=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$이고 삼각형 APH에서

$\angle APH+\angle PAH=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\angle APH=\dfrac{\theta}{2}$이다.

내접원의 중심을 Q라 하고, 내접원과 선분 PH의 교점을 T라 하면 $\angle QPT=\dfrac{\theta}{4}$이다.



$\overline{\mathrm{PH}}=\sin\theta$이므로 삼각형 QPT에서 $\tan\frac{\theta}{4}=\frac{\overline{\mathrm{QT}}}{\overline{\mathrm{PT}}}=\frac{r(\theta)}{\sin\theta-r(\theta)}$,

$\left(1+\tan\frac{\theta}{4}\right)r(\theta)=\sin\theta\tan\frac{\theta}{4}$ 이므로 $r(\theta)=\dfrac{\sin\theta\tan\frac{\theta}{4}}{1+\tan\frac{\theta}{4}}$ 이다. 따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\tan\frac{\theta}{4}}{\theta^2\left(1+\tan\frac{\theta}{4}\right)}=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\tan\frac{\theta}{4}}{\frac{\theta}{4}}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{\left(1+\tan\frac{\theta}{4}\right)}\right\}$$

$$=1\times1\times\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{4}$$

[다른풀이]

내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하면

$\triangle\mathrm{APH}=\frac{1}{2}\times(\triangle\mathrm{APH}$의 둘레의 길이$)\times r(\theta)$

$\triangle\mathrm{APH}=\frac{1}{2}r(\theta)\left(\overline{\mathrm{PH}}+\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{AP}}\right)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\overline{\mathrm{PH}}$

따라서

$$\frac{\sin\theta+(1-\cos\theta)+2\sin\frac{\theta}{2}}{2}\times r(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta\times(1-\cos\theta)$$

$$\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\right)r(\theta)=\frac{1}{2}\times2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(1-\cos\theta)$$

따라서 $\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}+1\right)r(\theta)=(1-\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}$, $r(\theta)=\dfrac{(1-\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}}{1+\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}$ 이므로

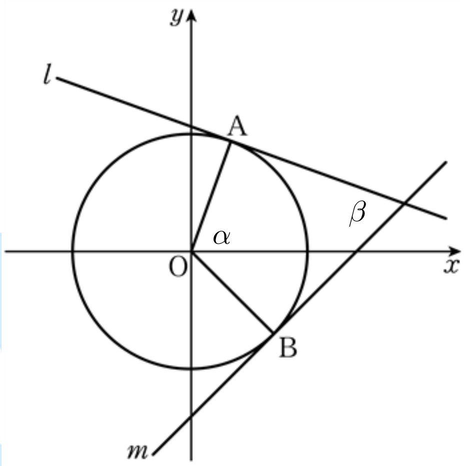
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}}{\theta^2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{1+\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{1}{1+\cos\theta}\right\}$$

$$=\frac{1}{1+1+0}\times 1^2\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{4}$$

풀어보기(문제3)

$\angle\mathrm{AOB}$ 의 크기를 α, 두 직선 l과 m이 이루는 각 중에서 원의 중심 쪽 방향의 크기를 β라 두면 α는 두 직선이 이루는 또 하나의 각이 된다. 즉, $\alpha=\pi-\beta$이므로 β가 예각이면 α는 둔각, β가 둔각이면 α는 예각이다.



β를 예각이라 두면 삼각함수의 덧셈정리에 의해

$$\tan\beta=\left|\frac{-\frac{1}{3}-1}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)\times 1}\right|=2$$

이다. α는 둔각이고 $\tan\alpha=-2$, $\cos\alpha=\cos(\angle\mathrm{AOB})=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ 이다.

똑같은 방법으로 β를 둔각이라 두면 $\tan\alpha=2$, $\cos\alpha=\cos(\angle\mathrm{AOB})=\frac{1}{\sqrt{5}}$ 이다

그러므로 $100\cos^2(\angle\mathrm{AOB})=100\times\frac{1}{5}=20$이다.

[논제 Ⅰ-1]

삼각형 OAB 에서 $\angle AOB$ 의 크기가 $\theta\,(0 \le \theta \le \pi)$일 때, 삼각형 OAB 의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2 \sin\theta$ 이므로 삼각형 OAB 의 최대넓이는 $\frac{1}{2}r^2$ 이다.

만들어 질 수 있는 삼각형 PCD 에서 변 CD 의 길이가 고정되어 있을 때는 반직선 PO 와 변 CD 가 수직으로 만날 때 삼각형 PCD 의 넓이가 최대가 된다. 왜냐하면 아래 그림 ($\overline{C'D'} = \overline{CD}$, 점 M, M′은 각각 $\overline{CD}$, $\overline{C'D'}$ 의 중점이고 점 E, F 는 각각 점 C′와 점 D′에서 직선 PM′에 내린 수선의 발이다.)에서 보듯이

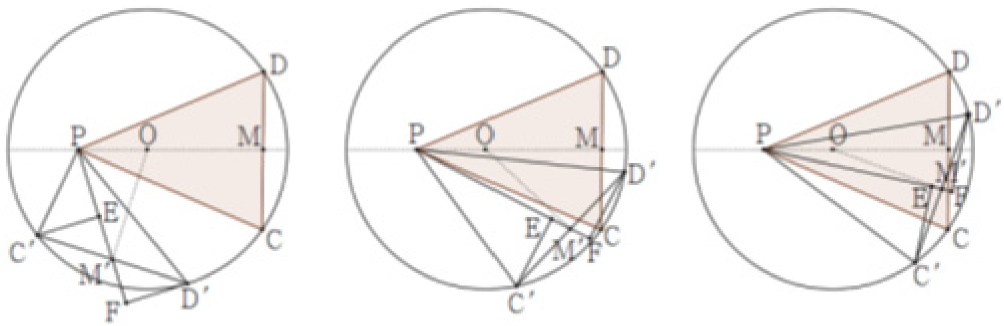
$$\overline{PM'} \le \overline{PO} + \overline{OM'} = \overline{PM},$$

$$\overline{C'E} + \overline{D'F} \le \overline{C'M'} + \overline{D'M'} = \overline{C'D'} = \overline{CD}$$

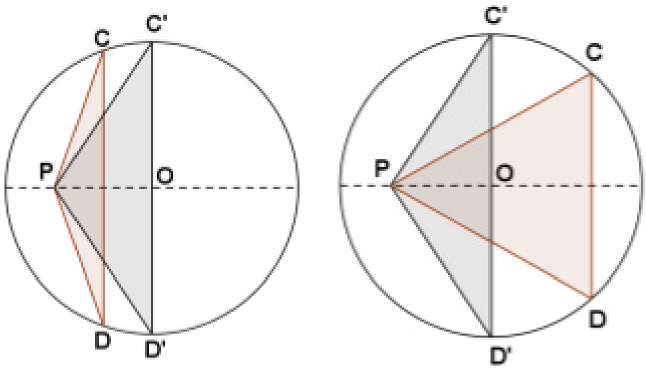
이므로

$$\triangle PC'D' = \frac{1}{2} \times \overline{PM'} \times (\overline{C'E} + \overline{D'F}) \le \frac{1}{2} \times \overline{PM} \times \overline{CD} = \triangle PCD$$

이기 때문이다.



이제 반직선 PO 와 변 CD 가 수직으로 만나는 삼각형 PCD 로 한정하여 알아보자. 일단 다음 그림의 첫 번째에서 $\triangle PCD < \triangle PC'D'$ 이므로 다음 그림의 두 번째 형태일 때만 생각하면 된다.



$\angle COD$ 의 크기가 $\theta\,(0 \le \theta \le \pi)$일 때 삼각형 PCD 의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2}r^2 \sin\theta + pr\sin\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right), \quad \frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{2}r^2\cos\theta + \frac{1}{2}pr\cos\frac{\theta}{2}$$

이고 $\frac{dS}{d\theta}=0$ 에서

$$\frac{1}{2}r^2\cos\theta+\frac{1}{2}pr\cos\frac{\theta}{2}=0,\ r\cos\theta+p\cos\frac{\theta}{2}=0,\ r\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)+p\cos\frac{\theta}{2}=0,$$

$$2r\cos^2\frac{\theta}{2}+p\cos\frac{\theta}{2}-r=0,\ \cos\frac{\theta}{2}=\frac{-p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4r}\ (\because\ 0\le\theta\le\pi)$$

이다. $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{-p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4r}$ 인 θ 를 θ_0 라고 두자.

그러면 $0\le\theta\le\theta_0$ 일 때는 $\cos\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\theta_0}{2}=\frac{-p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4r}$ 이므로 $\frac{dS}{d\theta}>0$ 이고

$\theta_0\le\theta\le\pi$ 일 때는 $\cos\frac{\theta}{2}<\cos\frac{\theta_0}{2}=\frac{-p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4r}$ 이므로 $\frac{dS}{d\theta}<0$ 이다.

그러므로 $\theta=\theta_0$ 일 때 S 가 최댓값을 가진다. S 의 최댓값을 구해보면

$$\cos\frac{\theta_0}{2}=\frac{-p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4r},\ \sin\frac{\theta_0}{2}=\frac{\sqrt{8r^2-2p^2+2p\sqrt{p^2+8r^2}}}{4r},$$

$$S=\frac{1}{2}r^2\sin\theta_0+pr\sin\frac{\theta_0}{2}=r^2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}+pr\sin\frac{\theta_0}{2}=r\sin\frac{\theta_0}{2}\left(r\cos\frac{\theta_0}{2}+p\right)$$

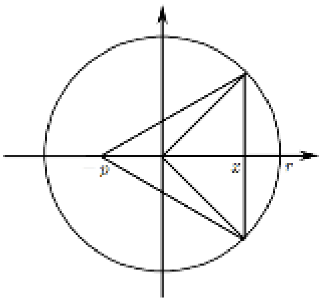
$$=\frac{\sqrt{8r^2-2p^2+2p\sqrt{p^2+8r^2}}}{4}\left(\frac{3p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4}\right)$$

$$=\frac{3p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4}\sqrt{\frac{r^2}{2}-\frac{p^2}{8}+\frac{p}{8}\sqrt{p^2+8r^2}}$$

이다. 따라서 삼각형 PCD 의 최대넓이는

$$\frac{3p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4}\sqrt{\frac{r^2}{2}-\frac{p^2}{8}+\frac{p}{8}\sqrt{p^2+8r^2}}$$

대학발표 예시답안



삼각형 OAB에서 점 A와 점 B는 원주에 있는 점들이므로, 중심 O와 두 점의 중점을 지나는 직선을 x축으로 하는 xy 좌표를 왼쪽 그림과 같이 생각할 수 있다. 중심 O와 선분 AB와의 거리를 x라고 하면, 삼각형 OAB의 넓이는 $x\sqrt{r^2-x^2}$이다. 이 때, 삼각형을 이루는 x의 범위는 $0<x<r$이다. 이 넓이를 x에 대하여 미분하면, $\frac{r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$이고, $x<\frac{r}{\sqrt{2}}$이면 양, $x>\frac{r}{\sqrt{2}}$이면 음이므로, $x=\frac{r}{\sqrt{2}}$일 때 , 최대가 되고 삼각형 OAB의 최대넓이는 $\frac{r^2}{2}$이 된다. 삼각형 PCD의 최대넓이를 구하는 데에 있어서, 동일한 길이의 선분 CD가 주어져 있을 때, 가장 큰 넓이를 가지게 되려면, 점 P와 선분 CD와의 거리가 가장 크게 되기 위하여 위의 그림처럼 삼각형 PCD가 이등변삼각형이 되어야 한다. 따라서, 위의 그림에서와 같이 점 P의 좌표를 $(-p, 0)$이라고 하고, 삼각형 OAB의 최대넓이를 구하는 경우와 동일한 방법으로 이등변삼각형 PCD의 최대넓이를 구하는 것으로 충분하다.

이 때, 삼각형 PCD의 넓이는 $(x+p)\sqrt{r^2-x^2}$이고, $-r<x<0$인 경우에는 넓이가 더 큰 경우가 존재하므로, x의 범위를 $0\le x<r$로 하면 된다. 이 넓이를 x에 대하여 미분하면, $\frac{r^2-2x^2-px}{\sqrt{r^2-x^2}}$이고, $x<\frac{-p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4}$이면 양, $x>\frac{-p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4}$이면 음이므로, $x=\frac{-p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4}$일 때, 최대가 되고 삼각형 PCD의 최대넓이는

$\frac{3p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4}\sqrt{\frac{r^2}{2}-\frac{p^2}{8}+\frac{p}{8}\sqrt{p^2+8r^2}}$ 이 된다.

[논제 1-2] 대학발표 예시답안

$$\frac{S_2(t)}{S_1(t)}=\frac{1}{2}\left(3\frac{g(t)}{f(t)}+\sqrt{\left\{\frac{g(t)}{f(t)}\right\}^2+8}\right)\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\left\{\frac{g(t)}{f(t)}\right\}^2+\frac{1}{8}\frac{g(t)}{f(t)}\sqrt{\left\{\frac{g(t)}{f(t)}\right\}^2+8}}$$ 이다.

$0\le\frac{g(t)}{f(t)}<1$이므로, $0\le\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{f(t)}\le 1$이다. 함수 $F(x)$를

$$F(x)=\frac{3x+\sqrt{x^2+8}}{2}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x}{8}\sqrt{x^2+8}}$$

으로 $0\le x\le 1$에서 정의하자. $G(x)=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x}{8}\sqrt{x^2+8}$이라 하면,

$G'(x) = \dfrac{(x-\sqrt{x^2+8}\,)^2}{8\sqrt{x^2+8}} > 0$ 이므로, $F(x)$는 증가함수인 $\dfrac{3x+\sqrt{x^2+8}}{2}$과 $\sqrt{G(x)}$의 곱이므로, $0 \le x \le 1$에서 증가함수이다. 그러므로,

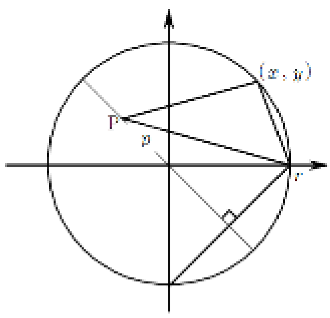
$$1 = F(0) \le F\left(\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{f(t)}\right) \le F(1) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

가 되고, 함수 $F(x)$는 연속함수이므로, 사이값 정리에 의해서, 임의의 $1 < k < \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$에 대하여, $F(c) = k$인 $0 < c < 1$가 존재한다. 따라서, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{f(t)} = c$인 두 함수 $f(t)$와 $g(t)$를 선택하면 원하는 결과를 얻게 된다. 예를 들면, 연속 함수 $f(t)$에 대해서, 함수 $g(t)$를 $g(t) = cf(t)$ 라고 놓으면 된다.

[논제 1-3] 대학발표 예시답안

[논제 Ⅰ-1]의 답안으로부터 최대넓이를 갖는 삼각형 OAB는 직각이등변 삼각형이 됨을 알 수 있다. 그러므로 아래 그림과 같이 그 삼각형을 제4사분면에 위치하도록 그릴 수 있다. 그러면 점 P의 좌표는 $\left(-\dfrac{p}{\sqrt{2}}, \dfrac{p}{\sqrt{2}}\right)$가 된다. 그러면, 최대 넓이를 갖는 삼각형 PCD는 선분 CD가 선분 OP와 교차하는 경우와 그렇지 않은 경우의 2가지 경우로 나누어 생각해 볼 수 있다.

먼저, 선분 CD가 선분 OP와 교차하는 경우에, 최대 넓이를 갖는 삼각형 PCD는 [논제 Ⅰ-1]에서와 같이 이등변 삼각형으로 선분 CD가 선분 OP에 수직이면서 중점 O를 지나는 원의 지름이 되는 삼각형이 됨을 알 수 있다. 그 때의 넓이는 rp가 된다.



두 번째 경우에서는, 선분 CD의 길이가 동일할 때, 그 선분과 점 P와의 거리가 가장 큰 경우는 점 C 또는 점 D가 삼각형 OAB의 한 꼭짓점과 만날 때이므로, 그 점을 왼쪽 그림과 같이 $(r, 0)$으로 가정해도 무방하다. 그러므로 삼각형 PCD의 넓이가 최대가 되도록 점 (x, y)만을 정하면 된다. (물론, 여기에서 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ 이다.)
세 점의 좌표가 모두 있으므로, 점과 직선과의 거리를 이용하여 삼각형 PCD의 넓이를 구하면, $\dfrac{1}{2}\left| ry + \dfrac{p}{\sqrt{2}}(x+y-r)\right|$이 된다. 선분 CD가 선분 OP와 교차하지 않을 때까지, 즉 $-\dfrac{r^2 p\sqrt{2} + r^3}{r^2 + p^2 + \sqrt{2}\,rp} < x < r$인 경우,

$ry + \dfrac{p}{\sqrt{2}}(x+y-r) > 0$이므로, 삼각형 PCD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\left(r\sqrt{r^2-x^2}+\frac{p}{\sqrt{2}}\left(x+\sqrt{r^2-x^2}-r\right)\right)$$

이고, x에 대하여 미분하면,

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{rx}{\sqrt{r^2-x^2}}+\frac{p}{\sqrt{2}}-\frac{p}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)=\frac{p\sqrt{r^2-x^2}-(\sqrt{2}r+p)x}{2\sqrt{2}\sqrt{r^2-x^2}}$$

이 된다. x가 음수이면 미분한 값이 양수이므로 넓이는 항상 증가하므로, $x\geq 0$에 대해서만 고려하면 된다.

x가 $\frac{rp}{\sqrt{2r^2+2\sqrt{2}rp+2p^2}}$을 기준으로 작으면 양, 크면 음이므로,

$x=\frac{rp}{\sqrt{2r^2+2\sqrt{2}rp+2p^2}}$일 때 최대가 되고, 이 때 삼각형 PCD의 최대넓이는

$\frac{r}{2}\sqrt{r^2+\sqrt{2}rp+p^2}-\frac{rp}{2\sqrt{2}}$이 된다.

두 경우를 종합하면, $\lambda=\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}$이라고 할 때, $0\leq p\leq\frac{r}{\lambda}$이면 최대넓이는

$\frac{r}{2}\sqrt{r^2+\sqrt{2}rp+p^2}-\frac{rp}{2\sqrt{2}}$이고, $\frac{r}{\lambda}<p<r$이면 rp가 됨을 알 수 있다.

[논제 1-4] 대학발표 예시답안

p가 상수이므로, 반지름 r이 충분히 크다고 하면, p는 부등식 $0\leq p\leq\frac{r}{\lambda}$을 만족할 수 밖에 없다. 따라서 충분히 큰 반지름 r에 대하여,

$S_2=\frac{3p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4}\sqrt{\frac{r^2}{2}-\frac{p^2}{8}+\frac{p}{8}\sqrt{p^2+8r^2}}$ 이고 $S_3=\frac{r}{2}\sqrt{r^2+\sqrt{2}rp+p^2}-\frac{rp}{2\sqrt{2}}$ 이다.

따라서 $\lim_{r\to\infty}\frac{S_3}{S_2}=\lim_{r\to\infty}\frac{\frac{r}{2}\sqrt{r^2+\sqrt{2}rp+p^2}-\frac{rp}{2\sqrt{2}}}{\frac{3p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4}\sqrt{\frac{r^2}{2}-\frac{p^2}{8}+\frac{p}{8}\sqrt{p^2+8r^2}}}$를 계산하면 된다.

$\lim_{r\to\infty}\frac{p}{r}=0$이므로, $\lim_{r\to\infty}\frac{S_3}{S_2}$는 수렴하고, 그 극한값은 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}}=1$이다.

05 경희대학교 오프라인 모의(자연계)4)

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 벗어나지 않는 논술형 (반영 점수 비율은 학생부 30, 논술 70이며, 논술 점수는 수학 60, 과학 40입니다.)	없음	수학(1문항, 4문제) 필수, 과학 1과목 선택	120분

Ⅰ. 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.(60점)

[가]

실수는 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$와 같이 정수의 비로 나타낼 수 있는 유리수와 $\sqrt{2}$, e, π와 같이 정수의 비로 나타낼 수 없는 무리수로 분류된다. 유리수 전체의 집합은 덧셈, 뺄셈, 곱셈에 대하여 닫혀 있고, 0으로 나누는 것을 제외하면 나눗셈에 대하여도 닫혀 있다.

탄젠트 함수는 유리수와 무리수에 대한 흥미로운 성질을 가지고 있다. 1761년 람베르트(Lambert)는 x가 0이 아닌 유리수일 때, $\tan x$는 무리수가 된다는 것을 증명하였다.

[나]

유클리드 평면에서 원은 크기와 관계없이 언제나 닮은 도형이다. 따라서 원의 지름에 대한 둘레의 비는 언제나 일정하며, 이를 원주율(π)이라 한다. 고대의 여러 문화에서 원주율의 값으로 3이 쓰였다. 고대 메소포타미아에서도 원주율을 3으로 계산하였고, 고대 중국의 수학책인 '구장산술'에서도 원주율로 3을 제시하였다.

한편 기원전 3세기 고대 그리스 수학자 아르키메데스는 매우 많은 변을 갖는 다각형이 임의의 원에 내접하는 경우와 외접하는 경우를 비교하여 원주율을 계산하였다. 즉, 임의의 원의 둘레는 그것에 외접하는 다각형의 둘레보다 짧고 내접하는 다각형보다 길다. 이때 다각형의 변이 많아질수록 외접하는 경우와 내접하는 경우의 둘레 차는 작아지므로 원의 둘레에 근사하게 된다. 아르키메데스는 정96각형을 이용하여 π의 값을 계산하였다.

또한 중국의 삼국시대 위나라의 수학자 유휘는 '구장산술'의 내용에 증명을 추가하고 삼각비의 기초 개념을 추가하여 '해도산경'이란 책을 만들었다. 또한 유휘는 원에 정192각형을 내접시켜서 삼각비를 이용하여 π의 근삿값으로 $\pi \fallingdotseq 3.141024$를 계산하였다.

4) 경희대학교 홈페이지

[다]

원주율의 계산은 아르키메데스가 원을 내접/외접 다각형으로 근사한 이후 약 2천 년간 그와 유사한 기하학적 방법의 개선을 통하여 발전하였다. 16세기말 비에트(Viete)는 정육각형의 변을 16회 거듭 분할하여 π의 값으로 $3.1415926535 < \pi < 3.1415926537$을 얻었다. 아르키메데스가 정육각형에서 $3 < \pi < 3.464$를 얻고 이를 4회 거듭 분할하여 만든 정96각형에서 $3.14084 < \pi < 3.14286$을 얻은 것과 비교할 때 π의 정밀도를 높이기 위하여 많은 계산이 필요함을 알 수 있다.

원주율을 계산하는 효율적인 방법은 이후 미적분학과 삼각함수의 등장에 힘입은 바가 크다. 18세기 초 마친(Machin)은 탄젠트 함수의 성질을 이용하여 $\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\times 5^3} + \frac{1}{5\times 5^5} - \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\times 239^3} + \frac{1}{5\times 239^5} - \cdots\right)$를 얻고 이를 이용하여 π의 값을 소수점 이하 100자리까지 계산할 수 있었다.

<논제 Ⅰ> 제시문 [가], [나], [다]를 읽고 다음 질문에 답하시오. [60점]

(1) 제시문 [가]의 탄젠트 함수의 성질을 이용하여 π가 무리수임을 보이고 그 근거를 서술하시오. (10점)

(2) $y = \sqrt{1-x^2}$, $y=0$, $x=0$으로 둘러싸인 부채꼴이 있다. 이때 부채꼴의 중심을 $\mathrm{O}(0,0)$, 양 끝점을 $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}(0,1)$라 하자. 그리고 호AB에 두 점 $\mathrm{C}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$와 D가 있어 오각형 OACDB를 만든다. 오각형 OACDB의 넓이를 부채꼴 OAB의 넓이인 $\frac{\pi}{4}$의 근삿값이라고 할 수 있다. 오각형 넓이의 4배를 π_1이라 할 때, π_1이 π에 가장 가까울 때의 D의 좌표를 구하고 그 과정을 논술하시오. (15점)

(3) 호AB에 두 점 E(cos$a$, sin$a$)와 F가 있어 오각형 OAEFB를 만든다. (2)와 마찬가지로 오각형 OAEFB의 넓이를 이용하여 π의 근삿값을 구할 수 있다. F의 위치에 따라 오각형의 넓이가 변할 때, 이 오각형 넓이의 최댓값을 a의 식으로 표현하시오. 그리고 이 식의 4배를 π_2라 할 때, π_2가 π에 가장 가까울 때의 a와 π_2 값을 구하고 그 과정을 논술하시오. (15점)

(4) 호 AB에 두 점 G, H가 있어 오각형 OAGHB를 만든다. 이때 점 G와 H는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 점 $\mathrm{C}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, G, H에서의 접선을 각각 l_{C}, l_{G}, l_{H}라고 하자. 직선 l_{C}, l_{G}, l_{H}와 $x=0$, $y=0$로 둘러싸인 오각형의 넓이는 부채꼴 넓이의 근삿값이 될 수 있다. 이 오각형 넓이의 4배를 π_3라 하자. l_{C}와 l_{G}의 교점을 M이라 하고 각 GOM을 b라 하면 π_3를 b의 식으로 나타낼 수 있다. π에 가장 가까운 π_3값을 구하고 그 과정을 논술하시오. 그리고 π_2와 π_3 중 π에 더 가까운 값을 찾고 그 근거를 서술하시오. (단, $\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$, $\sqrt{3} \fallingdotseq 1.73$, $\sqrt{5} \fallingdotseq 2.24$) (20점)

풀어보기

문제1

함수 $f(x)=\sin x+a\cos x$ 에 대하여 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)-1}{x-\dfrac{\pi}{2}}=3$ 일 때, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) (2016. 3월 평가원)

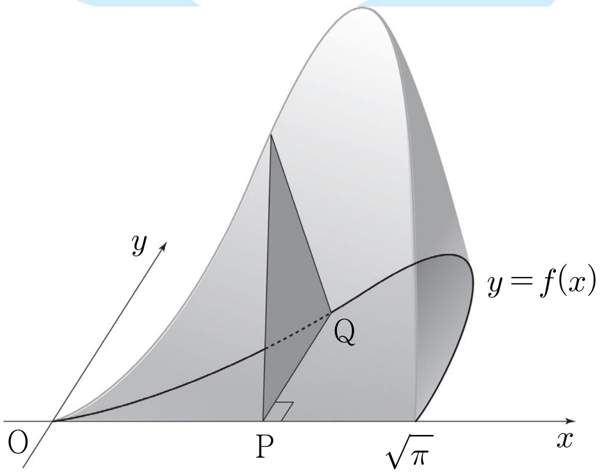
문제2

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)=(x^2+2ax+11)e^x$ 이 증가하도록 하는 자연수 a의 최댓값을 구하시오. (2016. 3월 평가원)

문제3

그림과 같이 함수 $f(x)=\sqrt{x(x^2+1)\sin(x^2)}$ $(0\le x\le\sqrt{\pi})$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 두 점 $\mathrm{P}(x, 0)$, $\mathrm{Q}(x, f(x))$를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면이 선분 PQ를 한 변으로 하는 정삼각형이다. 이 입체도형의 부피를 구하시오.

(2016. 4월 전국연합)



예시답안

풀어보기(문제1)

$f(x)=\sin x+a\cos x$ 에서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+a\cos\frac{\pi}{2}=1$ 이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

이다. $f'(x)=\cos x-a\sin x$ 에서 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-a\sin\frac{\pi}{2}=-a=3$ 이다.

따라서 $a=-3$ 이므로 $f(x)=\sin x-3\cos x$ 이고

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}-3\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$$

풀어보기(문제2)

$$f'(x)=(2x+2a)e^x+(x^2+2ax+11)e^x$$
$$=\{x^2+2(a+1)x+2a+11\}e^x$$

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 가 증가하므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x)=\{x^2+2(a+1)x+2a+11\}e^x\geq 0$$

$e^x>0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2+2(a+1)x+2a+11\geq 0$$

이차방정식 $x^2+2(a+1)x+2a+11=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+1)^2-(2a+11)=a^2-10\leq 0$$

따라서 구하는 자연수 a 의 최댓값은 3 이다.

풀어보기(문제3)

선분 PQ를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이 $S(x)$는

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\sqrt{x(x^2+1)\sin(x^2)}\right\}^2$$

입체도형의 부피 V는

$$V=\int_0^{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{3}}{4}x(x^2+1)\sin(x^2)dx$$

$x^2=t$라 하면 $2x\frac{dx}{dt}=1$ 이고 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{\pi}$일 때 $t=\pi$ 이므로

$$V=\frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^{\pi}(t+1)\sin t\,dt$$

($u(t)=t+1$, $v'(t)=\sin t$, $u'(t)=1$, $v(t)=-\cos t$)

$$V=\frac{\sqrt{3}}{8}\times\Big[-(t+1)\cos t\Big]_0^{\pi}-\frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^{\pi}(-\cos t)dt=\frac{\sqrt{3}(\pi+2)}{8}$$

[논제 Ⅰ-1] 대학발표 예시답안

명제의 대우를 이용하면, $\tan\dfrac{\pi}{4}=1$은 유리수이므로 제시문 [가]의 탄젠트 함수의 성질에 의하여 $\dfrac{\pi}{4}$는 무리수이다. 만약 π가 유리수이면 유리수 집합은 곱셈에 대하여 닫혀 있으므로 $\dfrac{1}{4}\times\pi$도 유리수이다. 이것은 $\dfrac{\pi}{4}$는 무리수라는 사실에 모순이므로 π는 무리수이다.

[논제 Ⅰ-2] 대학발표 예시답안

π_1이 π에 가장 가깝게 되려면 오각형의 넓이가 최대가 되어야 한다. 그러면 오각형의 넓이는 삼각형 OAC, 삼각형 OCB, 삼각형 BCD의 넓이의 합이다. 삼각형 OAC, 삼각형 OCB의 넓이는 각각 $\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$이다. 삼각형 BCD의 넓이가 최대가 되는 경우는 변 BC에서 D까지의 길이인 높이가 최대가 될 때이다. 이는 직선 OD가 각 BOC를 이등분하는 경우이므로 D의 좌표는

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

이다.

[논제 Ⅰ-3] 대학발표 예시답안

오각형의 넓이는 삼각형 OAE, 삼각형 OEB, 삼각형 BEF의 넓이의 합이다. [논제 1-2]에서와 마찬가지로 각 BOF와 각 FOE가 같은 경우 넓이가 최대가 된다. 따라서 각 BOF, 각 FOE는 모두 $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)$이다. 그러면 넓이의 최댓값은

$$A(a)=\frac{1}{2}\sin a+2\times\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\frac{1}{2}\sin a+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)$$

이고

$$\pi_2(a)=4A(a)=2\sin a+4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)$$

이다. π_2가 π에 가장 가까울 때는 $A(a)$가 최대가 될 때이다.

$$A'(a)=\frac{1}{2}\cos a-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right),\quad A''(a)=-\frac{1}{2}\sin a-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)$$

이고 $0<a<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $A''(a)<0$이다. 따라서 $A'(a)=0$인 $a=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{a}{2}$, 즉 $a=\dfrac{\pi}{6}$일 때 최대가 된다. $A\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{4}$이므로 π에 가장 가까운 π_2는 3이다.

[논제Ⅰ-4] 대학발표 예시답안

$y=0$과 l_G의 교점을 N이라고 하면, 삼각형 COM과 삼각형 GOM은 합동이므로 각 COM과 각GOM은 b이고, 각GON은 $\frac{\pi}{4}-2b$이다. 오각형의 넓이는 사각형 ONMC의 넓이의 2배이고, 사각형 ONMC의 넓이는 삼각형 COM, 삼각형 GOM, 삼각형 GON 넓이의 합이다. 그러면 넓이는

$$B(b)=2\left(2\times\frac{1}{2}\tan b+\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-2b\right)\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-2b\right)+2\tan b$$

마찬가지로 $\pi_3(b)=4B(b)$이고 이 오각형은 부채꼴을 포함하고 있으므로 오각형의 넓이가 최소가 되는 경우 π_3가 π에 가장 가깝게 된다.

$$\begin{aligned}B'(b)&=\sec^2\left(\frac{\pi}{4}-2b\right)(-2)+2\sec^2 b=-2\sec^2\left(\frac{\pi}{4}-2b\right)+2\sec^2 b\\&=2\left(\sec b-\sec\left(\frac{\pi}{4}-2b\right)\right)\left(\sec b+\sec\left(\frac{\pi}{4}-2b\right)\right)\end{aligned}$$

따라서 $b=\frac{\pi}{4}-2b$, 즉 $b=\frac{\pi}{12}$일때 극값을 갖는다.

$0<b<\frac{\pi}{12}$에서 $B'(b)<0$이고, $\frac{\pi}{12}<b<\frac{\pi}{4}$에서 $B'(b)>0$이므로 $b=\frac{\pi}{12}$에서 최소가 된다.

$$B\left(\frac{\pi}{12}\right)=3\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=3\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}}=3\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=3(2-\sqrt{3})$$

이므로 π에 가장 가까운 π_3는 $12(2-\sqrt{3})\fallingdotseq 12(2-1.73)=3.24$이다. 따라서 π_3가 $\pi_2=3$보다 π에 더 가깝게 된다.

06 경희대학교 논술(의학계열)5)

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정 내에서 지원 계열의 교과 영역을 충실히 이수한 학생이라면, 큰 어려움 없이 문제를 풀 수 있도록 교육과정 내에서 논술 출제	국어 수학(가) 영어 과탐(1) 중 3개 영역 등급합 4이내 한국사 5이내	수학 (1문항, 4문제)	120분

Ⅰ. 다음 제시문과 그림을 참조하여 논제에 답하시오.(60점)

[가]

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 이다. 특히, 원점 O 와 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ 이다.

[나]

함수 $f(x)$ 에서 $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x)\le f(a)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대가 된다고 하고, 그때의 함숫값 $f(a)$ 를 극댓값이라고 한다. 또 $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x)\ge f(a)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소가 된다고 하고, 그때의 함숫값 $f(a)$ 를 극솟값이라고 한다. 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

[다]

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하고 $x=a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$ 이다.
미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(a)=0$ 일 때, $x=a$ 의 좌우에서
(1) $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대이다.
(2) $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이다.

5) 경희대학교 홈페이지

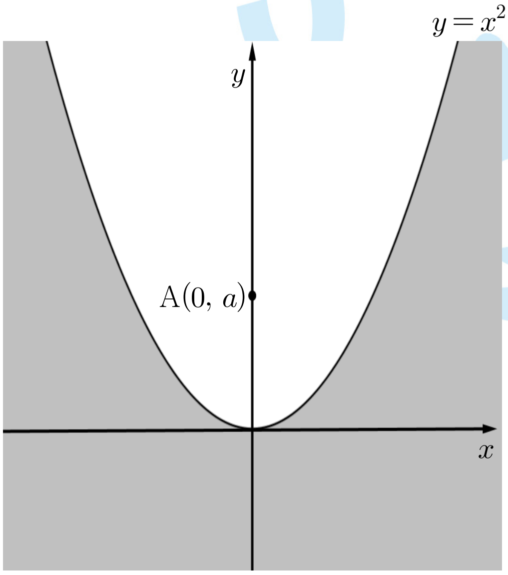
[라]
방정식 $f(x)=0$ 의 실근은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표이다. 또, 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근은 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표이다. 따라서 함수의 그래프를 이용하면 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구할 수 있다.

[마]
방정식 $e^x=kx$ 의 서로 다른 실근의 개수는 실수 k 의 값에 따라 다르다. 이는 함수 $y=\frac{e^x}{x}$ 와 $y=k$ 의 그래프를 이용하여 조사할 수 있다.

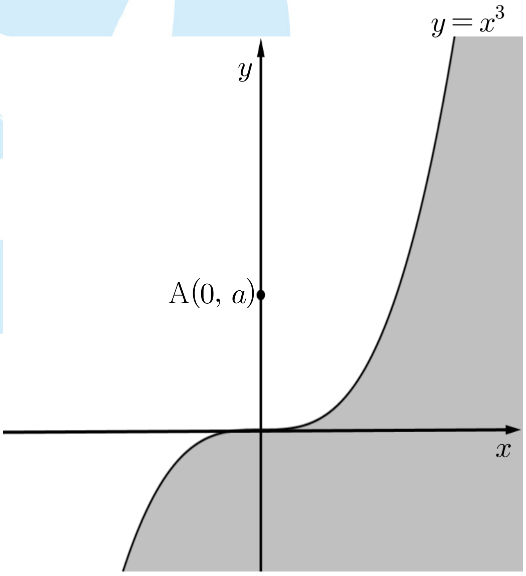
[바]
두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

이다.



[그림 1] $S(x)=x^2$



[그림 2] $S(x)=x^3$

[논제 Ⅰ] 제시문 [가] ~ [바]를 읽고 다음 질문에 답하시오.

모든 실수 x 에 대해서 정의되고 원점을 지나는 함수 $y=S(x)$ 의 그래프 모양인 해안선이 있다. 이때 $y \le S(x)$ 인 영역이 육지이고, $y > S(x)$ 인 영역이 바다라고 하자. 점 $\mathrm{A}(0,\ a)$ $(a>0)$ 에 위치한 경희가 최단거리로 수영하여 육지로 오려고 한다.

[논제 Ⅰ-1] [그림 1]에서처럼 $S(x)=x^2$ 이라 하자. 점 $\mathrm{A}(0,\ a)$ 로부터 최단거리가 되는 해안선 위의 점의 x 좌표를 b 라 할 때(단, $b \ge 0$), b를 a 에 관한 식으로 표현하고, 그 근거를 논술하시오. (20점)

[논제 Ⅰ-2] [그림 2]에서처럼 $S(x)=x^3$ 이라 하자. 점 $\mathrm{A}(0,\ a)$ 로부터 해안선 위의 점 $\mathrm{C}(t,\ t^3)$ 까지의 거리의 제곱을 t 에 관한 함수 $f(t)$ 로 나타내고, 제시문 [다], [라], [마]를 참조하여 함수 $f(t)$ 의 극값의 개수가 한 개일 때의 a 의 범위와 세 개일 때의 a 의 범위를 각각 구하시오. 그리고 그 근거를 논술하시오. (20점)

[논제 Ⅰ-3] [그림 2]에서처럼 $S(x)=x^3$ 일 때, 점 $\mathrm{A}(0,\ a)$ 로부터 최단거리가 되는 해안선 위의 점이 두 개 존재하는 경우가 있다. 이때 a 값을 a_0 이라 하고, 해안선 위의 두 점을 $\mathrm{C}_1(c_1,\ c_1^3)$, $\mathrm{C}_2(c_2,\ c_2^3)$ 라 하자. (단, $c_1 < c_2$) $a_0,\ c_1,\ c_2$ 를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

[논제 Ⅰ-4] [논제 Ⅰ-3]에서 구한 세 점 $\mathrm{A}(0,\ a_0)$, $\mathrm{C}_1(c_1,\ c_1^3)$, $\mathrm{C}_2(c_2,\ c_2^3)$ 에 대하여 두 선분 AC_1, AC_2 와 해안선 $y=x^3$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

풀어보기

문제1

다음은 모든 실수 x 에 대하여 $2x-1 \geq ke^{x^2}$ 을 성립시키는 실수 k 의 최댓값을 구하는 과정이다.

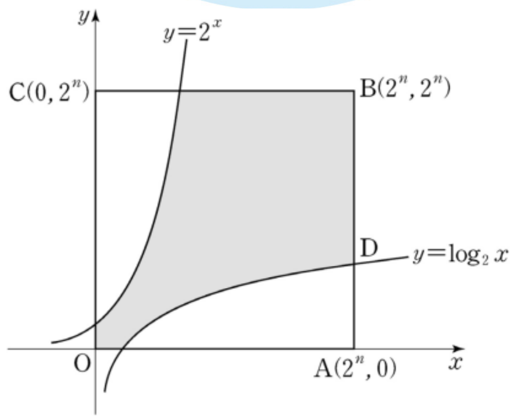
> $f(x)=(2x-1)e^{-x^2}$ 이라 하자.
>
> $f'(x)=\left(\boxed{\text{(가)}}\right)\times e^{-x^2}$
>
> $f'(x)=0$ 에서 $x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$
>
> 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 조사하면 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.
>
> 또한 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 그리면 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.
>
> 따라서 $2x-1 \geq ke^{x^2}$ 을 성립시키는 실수 k 의 최댓값은 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $g(x)$, (나)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $g(2)\times p$ 의 값은? (2016년 4월 전국연합)

① $\dfrac{10}{e}$　② $\dfrac{15}{e}$　③ $\dfrac{20}{\sqrt[4]{e}}$　④ $\dfrac{25}{\sqrt[4]{e}}$　⑤ $\dfrac{30}{\sqrt[4]{e}}$

문제2

좌표평면에서 꼭짓점의 좌표가 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(2^n, 0)$, $\mathrm{B}(2^n, 2^n)$, $\mathrm{C}(0, 2^n)$ 인 정사각형 OABC 와 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 에 대하여 물음에 답하시오. (단, n 은 자연수이다.)



정사각형 OABC 와 그 내부는 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 에 의하여 세 부분으로 나뉜다. $n=3$ 일 때 이 세 부분 중 색칠된 부분의 넓이는? (2013년 9월 모평)

① $14+\dfrac{12}{\ln 2}$　② $16+\dfrac{14}{\ln 2}$　③ $18+\dfrac{16}{\ln 2}$　④ $20+\dfrac{18}{\ln 2}$　⑤ $22+\dfrac{20}{\ln 2}$

예시답안

풀어보기(문제1)

$f(x)=(2x-1)e^{-x^2}$ 이라 하자.

$f'(x)=\left(\boxed{-4x^2+2x+2}\right)\times e^{-x^2}=-2(2x+1)(x-1)e^{-x^2}$

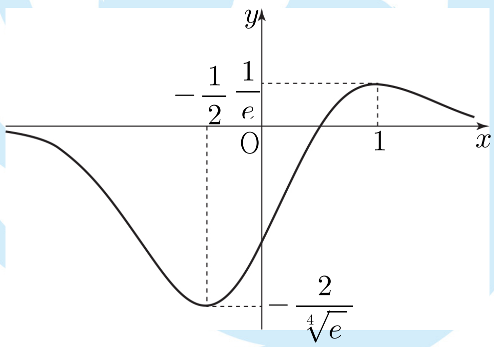
$f'(x)=0$ 에서 $x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

이므로 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $\boxed{-\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}}$ 이다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 그리면



이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $\boxed{-\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}}$ 이다.

$(2x-1)e^{-x^2}\geq -\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}$ 이므로 $k\leq -\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}$

따라서 $2x-1\geq ke^{x^2}$ 을 성립시키는 실수 k 의 최댓값은 $\boxed{-\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}}$ 이다.

$\therefore\ g(x)=-4x^2+2x+2,\ p=-\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}$

따라서 $g(2)\times p=\dfrac{20}{\sqrt[4]{e}}$

풀어보기(문제2)

색칠된 부분의 넓이는

$$S=2\left(\frac{1}{2}\times8\times8-\int_1^8\log_2x\,dx\right)=64-2\left\{\left[x\log_2x\right]_1^8-\int_1^8\frac{1}{\ln2}dx\right\}=16+\frac{14}{\ln2}$$

[논제Ⅰ-1] 대학발표 예시답안

A$(0, a)$ 에서 해안선 위의 점 (t, t^2) 까지 거리의 제곱을 t 에 관한 함수로 표현하면 $f(t)=t^2+(t^2-a)^2$ 이다.

$f'(t)=2t+4t(t^2-a)=2t(2t^2+1-2a)=0$ 에서

$0<a\le\frac{1}{2}$ 일 때는 도함수 $f'(t)$ 는 하나의 실근 0을 갖고,

$a>\frac{1}{2}$ 일 때는 서로 다른 세 개의 실근 $0, \pm\sqrt{a-\frac{1}{2}}$ 을 갖는다.

(1) $0<a\le\frac{1}{2}$ 일 때 : 함수의 증가, 감소 표를 구하면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	a^2	$\nearrow$

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t=0$ 일 때 최소가 되므로 $b=0$ 이다.

(2) $a>\frac{1}{2}$ 일 때 : 함수의 증가, 감소 표를 구하면 다음과 같다.

t	$\cdots$	$-\sqrt{a-\frac{1}{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{a-\frac{1}{2}}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$a-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	a^2	$\searrow$	$a-\frac{1}{4}$	$\nearrow$

그러므로 $f(t)$ 는 $t=\pm\sqrt{a-\frac{1}{2}}$ 에서 최소가 되기 때문에 $b=\sqrt{a-\frac{1}{2}}$ ($b\ge0$ 이므로) 가 된다.

따라서

$$b=\begin{cases} 0 & \left(0<a\le\frac{1}{2}\right) \\ \sqrt{a-\frac{1}{2}} & \left(a>\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

이다.

(다른 풀이)

A$(0,\ a)$ 에서 해안선 위의 점 $(t,\ t^2)$ 까지 거리의 제곱을 t 에 관한 함수로 표현하면 $f(t)=t^2+(t^2-a)^2\ (-\infty<t<\infty)$ 이다.

$t^2=s$ 라고 두면

$f(s)=s+(s-a)^2=s^2-(2a-1)s+a^2=\left(s-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right)^2+a-\frac{1}{4}\ (0\le s<\infty)$ 이고

(1) $0<a\le\frac{1}{2}$ 일 때, $s=0$ 에서 최솟값 $f(0)=a^2$ 을 가지고

(2) $a>\frac{1}{2}$ 일 때, $s=a-\frac{1}{2}$ 에서 최솟값 $f\left(a-\frac{1}{2}\right)=a-\frac{1}{4}$ 을 가진다.

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t=0$ 또는 $t=\pm\sqrt{a-\frac{1}{2}}$ 에서 최솟값을 가진다.

그러므로

$$b=\begin{cases}0 & \left(0<a\le\frac{1}{2}\right)\\ \sqrt{a-\frac{1}{2}} & \left(a>\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

이다.

[논제 Ⅰ-2] 대학발표 예시답안

점 A$(0,\ a)$ 에서 점 C$(t,\ t^3)$ 까지의 거리의 제곱에 대한 함수는 $f(t)=t^2+(t^3-a)^2$ 이다.
$f'(t)=2t\{1+3t(t^3-a)\}=0$ 으로부터 $f'(t)$ 의 부호가 $t=0$ 의 좌우에서 음에서 양으로 바뀌기 때문에, $f(t)$ 는 $t=0$ 에서 하나의 극값을 가짐을 알 수 있다.

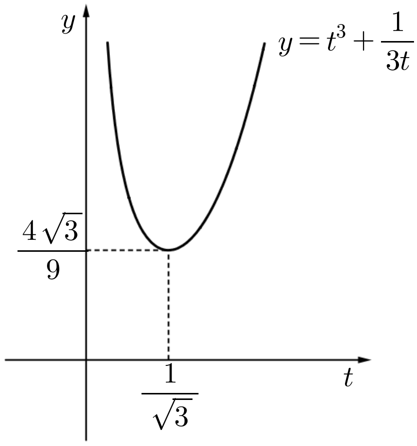
나머지 극값을 찾기 위해 $1+3t(t^3-a)=0$ 의 해와 $1+3t(t^3-a)$ 의 부호에 대해서 알아보자. $1+3t(t^3-a)=0$ 은 $\frac{1}{3t}+t^3-a=0$ 과 동일한 해를 갖는다는 사실과 제시문 [라]를 이용해서, 두 곡선 $y=g(t)=\frac{1}{3t}+t^3$ 과 $y=a$ 의 그래프의 교점의 개수를 조사하면 된다.

특히 a 가 양수이므로 $t>0$ 에서의 $g(t)=\frac{1}{3t}+t^3$ 의 그래프와의 $y=a$ 의 교점의 개수를 찾는다.

$g'(t)=3t^2-\frac{1}{3t^2}=0$ 에서 $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 을 얻을 수 있고, 함수의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$

$t>0$ 인 t 에 대해서, $f'(t)=6t^2(g(t)-a)$ 이므로 아래 그림에서



(1) $0<a\le\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ 일 때

$g(t)$ 의 최솟값이 $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ 이기 때문에 $g(t)-a\ge 0$ 이어서 $f'(t)\ge 0$ 이고,

따라서 $f(t)$ 는 하나의 극값($t=0$ 일 때)만 갖는다.

(2) $a>\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ 일 때

방정식 $g(t)-a=0$ 는 서로 다른 두 개의 실근을 갖고, 그 두 점의 좌우에서 $g(t)-a$ 는 부호가 양에서 음으로 또는 음에서 양으로 바뀐다. 그러므로 $f(t)$ 는 세 개의 극값을 갖는다.

따라서 $f(t)$ 가 하나의 극값을 갖기 위한 a 의 범위는 $0<a\le\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ 이고,

$f(t)$ 가 세 개의 극값을 갖기 위한 a 의 범위는 $a>\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ 이다.

[논제 Ⅰ-3] 대학발표 예시답안

[논제 Ⅰ-2]로부터 함수 $f(t)$ 는 극값이 하나이거나 세 개인 경우 밖에 없음을 알 수 있다. 점 $A(0,a)$ 로부터 해안선까지의 최단경로가 두 개인 경우는 $f(t)$ 가 세 개의 극값을 갖는 경우, 즉 $a>\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ 인 경우에 나타난다.

이 때, $f'(t)=2t\left(1+3t\left(t^3-a\right)\right)=0$ 의 해는 $t=0$ 에서 한 개,

그리고 $1+3t\left(t^3-a\right)=0$ 에서 두 개가 주어진다.

[논제 Ⅰ-2]의 함수 $g(t)$ 의 그래프로부터 $f'(t)=0$ 의 0 이 아닌 하나의 해는 $0<t<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 에서 나타나고(이 때의 해를 t_1), 나머지 한 해는 $t>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 에서 나타남(이 때의 해를 t_2) 을 알 수 있다.

이를 바탕으로 함수 $f(t)$ 의 증가, 감소 표를 그리면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	t_1	$\cdots$	t_2	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(t_1)$	$\searrow$	$f(t_2)$	$\nearrow$

그러므로 함수 $f(t)$ 는 $t=0$ 에서와 $t=t_2$ 에서 극솟값을 갖고, 이 때 $f(0)=f(t_2)$ 인 경우 두 개의 최단경로가 나타나게 된다.

또한, t_2 가 $g(t)=a$ 의 해이므로, $a=t_2^3+\dfrac{1}{3t_2}$ 을 만족하게 되어

$$t_2^6+\frac{2}{3}t_2^2+\frac{1}{9t_2^2}=f(0)=f(t_2)=t_2^2+\frac{1}{9t_2^2}$$

로부터 $t_2=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ 임을 알 수 있다. 따라서

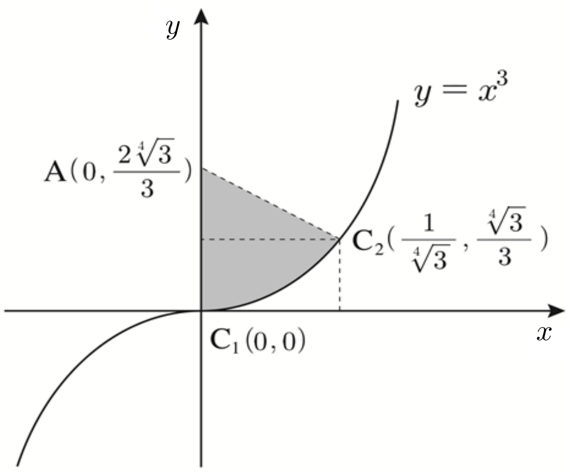
$$a_0=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^3+\frac{\sqrt[4]{3}}{3}=\frac{2\sqrt[4]{3}}{3} \text{ 이고 } c_1=0,\ c_2=\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \text{ 이다.}$$

[논제 I -4] 대학발표 예시답안

영역의 넓이는 아래 그림처럼 사다리꼴의 넓이에서 곡선 $y=x^3$ 의 아래의 넓이의 차로 구할 수 있으므로

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt[4]{3}}{3}+\frac{\sqrt[4]{3}}{3}\right)\frac{1}{\sqrt[4]{3}}-\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}}x^3\,dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

이다.



07 경희대학교 논술(자연계열 I)[6]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정의 범위와 수준 내에서 출제, 고등학교 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면 쉽게 접근할 수 있는 수준, 단순 암기나 전문 지식이 아닌 논리적인 사고력을 평가	국어 수학(가) 영어 과탐(1) 중 2개 영역 등급합 5이내 한국사 5이내	수학 (1문항, 4문제)	120분

Ⅰ. 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.(60점)

[가] 각 $\frac{\pi}{2}\pm\theta$ 에 대한 사인과 코사인의 성질은 다음과 같다.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

두 각 α 와 β 의 삼각함수를 이용하여 각 $\alpha\pm\beta$ 의 삼각함수를 나타내는 사인과 코사인의 덧셈정리는 다음과 같다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

[나] 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 θ 일 때, $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 를 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 내적이라 하고, 기호로 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 와 같이 나타낸다. 즉 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 이다.
$\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$ 일 때에는 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 으로 정한다.

또한 두 평면벡터의 내적을 성분을 이용하여 나타내어 보자. 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ 에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ 임을 알 수 있다. 이 식은 $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$ 일 때도 성립한다.

6) 경희대학교 홈페이지

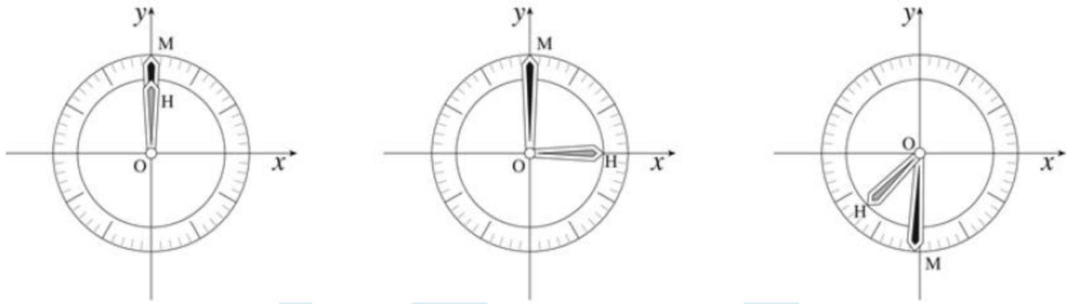
[다] 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 에 대하여 선분 AB 를 $m:n$ $(m>0, n>0)$ 으로 내분하는 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$ 이고, $m:n$ $(m>0, n>0, m\neq n)$ 으로 외분하는 점 $\mathrm{Q}(x, y)$ 의 좌표는 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}, \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$ 이다.

[라] 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 위치를 (x, y) 라고 하면, x, y 는 t 의 함수이므로 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 로 나타낼 수 있다. 이때 점 P 에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라고 하면, 점 P 가 움직일 때 점 Q 는 x축 위를 움직이고 점 R 은 y축 위를 움직인다. 따라서 시각 t 에서 두 점 Q 와 R 의 속도를 각각 v_x 와 v_y 라고 하면 $v_x=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$, $v_y=\dfrac{dy}{dt}=g'(t)$ 이고, 이들을 성분으로 하는 벡터 $\vec{v}=(v_x, v_y)=\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)=(f'(t), g'(t))$ 를 시각 t 에서 점 P 의 속도라고 한다.

속도 $\vec{v}$ 의 크기는 $|\vec{v}|=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$ 이고, 이것을 점 P 의 속력이라고 한다.

[논제 Ⅰ] 제시문 [가] ~ [라]를 읽고 다음 질문에 답하시오.

아래 그림과 같이 중심이 원점에 있고 3 시 방향이 x 축의 양의 방향, 12 시 방향이 y 축의 양의 방향인 시계가 있다. 시침의 끝점을 H, 분침의 끝점을 M 이라 하자. 시침 OH 의 길이는 3 이고 분침 OM 의 길이는 4 이다.(즉, $\overline{\mathrm{OH}}=3$, $\overline{\mathrm{OM}}=4$) t 는 0 시부터 12시 이전까지 시계의 시각을 분 단위로 나타낸 것이다. 따라서 t 의 범위는 $0 \le t < 720$ 이다. 예를 들어 [그림 1]은 0 시이므로 $t=0$ 인 경우, [그림 2]는 3 시이므로 $t=180$ 인 경우, [그림 3]은 7 시 30 분 30 초이므로 $t=450.5$ 인 경우이다.



[그림 1] $t=0$ (0 시)

[그림 2] $t=180$ (3 시)

[그림 3] $t=450.5$ (7 시 30 분 30 초)

[논제 Ⅰ-1] 시초선을 x 축의 양의 방향으로 잡을 때, 시각 t $(0 \le t < 720)$ 에서 동경 OM 이 나타내는 각은 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{180}\cdot 6t=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{30}t$ 이다. 여기서 각의 단위는 라디안이다. 마찬가지로 시각 t 에서 동경 OH 가 나타내는 각도 구할 수 있다. 이를 이용하여 점 $\mathrm{H}(x_1, y_1)$ 와 $\mathrm{M}(x_2, y_2)$ 의 시각 t 에서의 위치를 각각 t 의 함수로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (12점)

[논제 Ⅰ-2] 점 M 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 M$'$ 이라고 하자. 선분 HM$'$ 을 3:4 로 내분하는 점을 A, 3:4 로 외분하는 점을 B 라고 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ 임을 보이고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

[논제 Ⅰ-3] 시각 t $(0 \le t < 720)$ 에서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ 의 내적을 $p(t)$ 라고 하자. 즉 $p(t) = \overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ 이다. 내적 $p(t)$ 에 대하여 집합 S 를

$$S = \{t \mid p(t) \ge 6\sqrt{3},\ 0 \le t \le 120,\ t \text{ 는 정수}\}$$

라고 하자. 이때, 내적 $p(t)$ 와 집합 S 의 원소의 개수를 구하고, 그 과정을 서술하시오.

(18점)

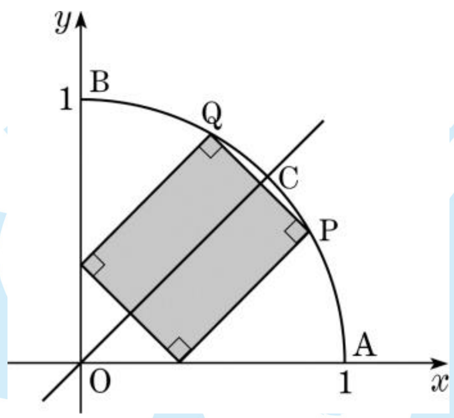
[논제 Ⅰ-4] 선분 HM 의 중점을 C 라고 하면, 점 C 는 좌표평면 위를 움직이는 점이다. $180 \le t \le 240$ 일 때, 점 C 의 속력이 최대가 되는 시각 t 를 구하고, 그 과정을 서술하시오.

(15점)

풀어보기

문제1

그림과 같이 좌표평면 위의 반지름의 길이가 1 인 사분원 OAB 에 대하여 각 AOB 를 이등분하는 직선이 사분원과 만나는 점을 C 라 하자. 두 점 P, Q 는 점 C 에서 동시에 출발하여 사분원의 둘레를 따라 각각 시계 방향, 시계 반대 방향으로 매초 $\frac{\pi}{36}$ 의 일정한 속력으로 움직인다. 두 점 P, Q 가 점 C 에서 출발하여 t 초 $(0<t<9)$ 가 되는 순간, 선분 PQ 를 한 변으로 하고 사분원 OAB 에 내접하는 직사각형의 넓이를 $S(t)$ 라 하자. 출발한 지 6 초가 되는 순간, 넓이 $S(t)$ 의 시간(초)에 대한 변화율은?



① $\frac{1-\sqrt{3}}{36}\pi$　② $\frac{1-\sqrt{3}}{72}\pi$　③ $\frac{\sqrt{3}-1}{72}\pi$

④ $\frac{\sqrt{3}-1}{36}\pi$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{36}\pi$

문제2

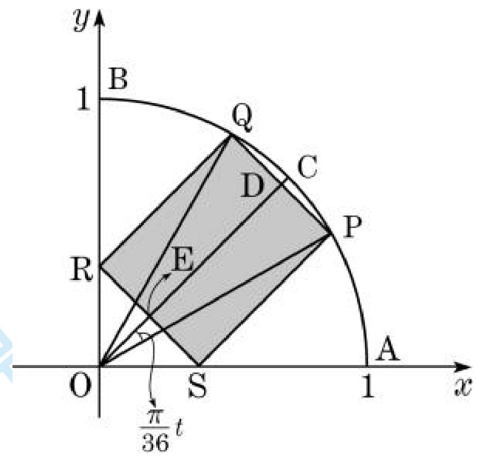
다음 중 $\tan 10° + \frac{1}{\tan 20°}$ 의 값과 같은 것은? (2012년 3월 전국연합)

① $\sin 10°$　② $\cos 20°$　③ $\frac{1}{\sin 20°}$　④ $\frac{1}{\cos 10°}$　⑤ $\frac{1}{\tan 10°}$

예시답안

풀어보기(문제1)

내접하는 사각형의 x축, y축 위의 두 꼭짓점을 각각 S, R 라 하고 선분 OC와 선분 PQ, 선분 RS의 교점을 각각 D, E 라 하자.



삼각형 DOP 에서

$\overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{OP}}\sin\frac{\pi}{36}t=\sin\frac{\pi}{36}t,\ \overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OP}}\cos\frac{\pi}{36}t=\cos\frac{\pi}{36}t$

$\angle\mathrm{EOS}=\frac{\pi}{4}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OE}}=\overline{\mathrm{ES}}(=\overline{\mathrm{DP}})$ 이다. 그러므로 □PQRS 의 넓이 $S(t)$ 는

$$S(t)=\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{PS}}=2\overline{\mathrm{DP}}\cdot(\overline{\mathrm{OD}}-\overline{\mathrm{OE}})=2\sin\frac{\pi}{36}t\left(\cos\frac{\pi}{36}t-\sin\frac{\pi}{36}t\right)$$

$$=2\sin\frac{\pi}{36}t\cos\frac{\pi}{36}t-2\sin^2\frac{\pi}{36}t=\sin\frac{\pi}{18}t-2\sin^2\frac{\pi}{36}t$$

$$S'(t)=\frac{\pi}{18}\left(\cos\frac{\pi}{18}t-2\sin\frac{\pi}{36}t\cos\frac{\pi}{36}t\right)=\frac{\pi}{18}\left(\cos\frac{\pi}{18}t-\sin\frac{\pi}{18}t\right)$$

$$S'(6)=\frac{\pi}{18}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{36}\pi$$

풀어보기(문제2)

$$\tan10^\circ+\frac{1}{\tan20^\circ}=\frac{\sin10^\circ}{\cos10^\circ}+\frac{\cos20^\circ}{\sin20^\circ}=\frac{\sin10^\circ\sin20^\circ+\cos10^\circ\cos20^\circ}{\cos10^\circ\sin20^\circ}$$

$$=\frac{\cos(20^\circ-10^\circ)}{\cos10^\circ\sin20^\circ}=\frac{\cos10^\circ}{\cos10^\circ\sin20^\circ}=\frac{1}{\sin20^\circ}$$

[논제 I -1] 대학발표 예시답안

시침은 60 분에 30 도, 즉 $\frac{\pi}{180}\times 30=\frac{\pi}{6}$ 씩 시계방향으로 움직이므로 1 분에 $\frac{\pi}{360}$ 씩 움직인다.

$t=0$ 에서 시침의 각도는 $\frac{\pi}{2}$ 이므로 시각 t 에서 동경 OH 가 나타내는 각은 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{360}t$ 이다.

시각 t 에서 동경 OM 이 나타내는 각은 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{30}t$, $\overline{\mathrm{OH}}=3$, $\overline{\mathrm{OM}}=4$ 이므로

$$\mathrm{H}(x_1,\, y_1)=\left(3\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{360}t\right),\, 3\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{360}t\right)\right)$$

$$=\left(3\sin\frac{\pi}{360}t,\, 3\cos\frac{\pi}{360}t\right)$$

$$\mathrm{M}(x_2,\, y_2)=\left(4\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{30}t\right),\, 4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{30}t\right)\right)$$

$$=\left(4\sin\frac{\pi}{30}t,\, 4\cos\frac{\pi}{30}t\right)$$

이다.

[논제 I -2] 대학발표 예시답안

M′ 은 M 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이므로

$\mathrm{M}'=\left(4\cos\frac{\pi}{30}t,\, 4\sin\frac{\pi}{30}t\right)$ 이다.

제시문 [다]의 내분점, 외분점 공식을 이용하면

$$\mathrm{A}(a_1,\, a_2)=\left(\frac{3\times 4\cos\frac{\pi}{30}t+4\times 3\sin\frac{\pi}{360}t}{3+4},\, \frac{3\times 4\sin\frac{\pi}{30}t+4\times 3\cos\frac{\pi}{360}t}{3+4}\right)$$

$$=\frac{12}{7}\left(\cos\frac{\pi}{30}t+\sin\frac{\pi}{360}t,\, \sin\frac{\pi}{30}t+\cos\frac{\pi}{360}t\right)$$

이고,

$$\mathrm{B}(b_1,\, b_2)=\left(\frac{3\times 4\cos\frac{\pi}{30}t-4\times 3\sin\frac{\pi}{360}t}{3-4},\, \frac{3\times 4\sin\frac{\pi}{30}t-4\times 3\cos\frac{\pi}{360}t}{3-4}\right)$$

$$=12\left(-\cos\frac{\pi}{30}t+\sin\frac{\pi}{360}t,\, -\sin\frac{\pi}{30}t+\cos\frac{\pi}{360}t\right)$$

제시문 [나]를 이용하면

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=a_1b_1+a_2b_2=\frac{12^2}{7}\left(\sin^2\frac{\pi}{360}t-\cos^2\frac{\pi}{30}t+\cos^2\frac{\pi}{360}t-\sin^2\frac{\pi}{30}t\right)$$

$$=0$$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ 이다.

[논제 Ⅰ-3] 대학발표 예시답안

제시문 [가]와 [나]를 이용하면

$$p(t)=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(3\sin\frac{\pi}{360}t,\ 3\cos\frac{\pi}{360}t\right)\cdot\left(4\sin\frac{\pi}{30}t,\ 4\cos\frac{\pi}{30}t\right)$$

$$=12\left(\sin\frac{\pi}{360}t\cdot\sin\frac{\pi}{30}t+\cos\frac{\pi}{360}t\cdot\cos\frac{\pi}{30}t\right)$$

$$=12\cos\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{360}t\right)$$

$$=12\cos\frac{11\pi}{360}t$$

이다.

$0\le t\le 120$ 이므로 $0\le\frac{11\pi}{360}t\le\frac{11\pi}{3}=4\pi-\frac{\pi}{3}$ 이다.

$p(t)=12\cos\frac{11\pi}{360}t\ge 6\sqrt{3}$ 는 $\cos\frac{11\pi}{360}t\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$0\le\frac{11\pi}{360}t\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{11\pi}{6}\le\frac{11\pi}{360}t\le\frac{13\pi}{6}$ 이고

$0\le t\le\frac{60}{11}=5+\frac{5}{11}$ 또는 $60\le t\le\frac{780}{11}=70+\frac{10}{11}$ 이다.

$S=\{0,1,2,3,4,5,60,61,62,\cdots,70\}$

따라서 S의 원소의 개수는 $6+11=17$ 개

[논제 I -4] 대학발표 예시답안

C 는 선분 HM 의 중점이므로 시각 t 에서 C 의 위치는

$$(x,\ y)=\left(\frac{3\sin\frac{\pi}{360}t+4\sin\frac{\pi}{30}t}{2},\ \frac{3\cos\frac{\pi}{360}t+4\cos\frac{\pi}{30}t}{2}\right)$$ 이다.

제시문 [라]를 이용하면 속도 벡터는

$$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{\pi}{240}\cos\frac{\pi}{360}t+\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{30}t,\ -\frac{\pi}{240}\sin\frac{\pi}{360}t-\frac{\pi}{15}\sin\frac{\pi}{30}t\right)$$

이다.

따라서

$$\left|\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)\right|^2=\left(\frac{\pi}{240}\cos\frac{\pi}{360}t+\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{30}t\right)^2+\left(-\frac{\pi}{240}\sin\frac{\pi}{360}t-\frac{\pi}{15}\sin\frac{\pi}{30}t\right)^2$$

$$=\left(\frac{\pi}{240}\right)^2\left(\cos^2\frac{\pi}{360}t+\sin^2\frac{\pi}{360}t\right)+\left(\frac{\pi}{15}\right)^2\left(\cos^2\frac{\pi}{30}t+\sin^2\frac{\pi}{30}t\right)$$

$$+\frac{\pi}{240}\frac{\pi}{15}\left(2\cos\frac{\pi}{360}t\cdot\cos\frac{\pi}{30}t+2\sin\frac{\pi}{360}t\cdot\sin\frac{\pi}{30}t\right)$$

$$=\left(\frac{\pi}{240}\right)^2+\left(\frac{\pi}{15}\right)^2+\frac{\pi^2}{1800}\cos\frac{11\pi}{360}t$$

이다.

그러므로 $\cos\frac{11\pi}{360}t$ 이 최대인 경우에 속력이 최대가 된다.

$180\le t\le 240$ 이므로 $\frac{11\pi}{2}=6\pi-\frac{\pi}{2}\le\frac{11\pi}{360}t\le\frac{22\pi}{3}=6\pi+\frac{4\pi}{3}$ 이다.

$\cos\frac{11\pi}{360}t$ 는 $\frac{11\pi}{360}t=6\pi$ 일 때 최댓값 1 을 가지므로,

속력이 최대가 되는 t 는 $t=6\times\frac{360}{11}=\frac{2160}{11}$ 이다.

08 경희대학교 논술(자연계열Ⅱ)[7]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정의 범위와 수준 내에서 출제, 고등학교 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면 쉽게 접근할 수 있는 수준, 단순 암기나 전문 지식이 아닌 논리적인 사고력을 평가	국어 수학(가) 영어 과탐(1) 중 2개 영역 등급합 5이내 한국사 5이내	수학 (1문항, 4문제)	120분

Ⅰ. 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.(60점)

[가] 좌표평면 위에서 x 축의 양의 방향을 시초선으로 잡았을 때, 동경 OP 가 나타내는 각의 크기 중 하나를 θ 라 하자. 중심이 원점 O 이고 반지름의 길이가 r 인 원과 동경 OP 의 교점을 $\mathrm{P}(x, y)$ 라 하면, $\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$ 의 값은 θ 의 값에 따라 각각 하나로 정해진다. 따라서 $\theta \to \frac{y}{r}, \theta \to \frac{x}{r}, \theta \to \frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$ 와 같은 대응은 각각 θ 의 함수이다. 이들을 차례대로 θ 의 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라 하고, 기호로 각각 $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ 와 같이 나타낸다.

[나] 함수 $f(x)$ 가 어떤 열린 구간에서 미분가능할 때, 그 구간의 모든 x 에 대하여
(1) $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 증가한다.
(2) $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 감소한다.
 함수 $y = f(x)$ 의 정의역과 치역, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 연속성 등은 함수의 특징이라 할 수 있고, 이러한 특징을 알면 그 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

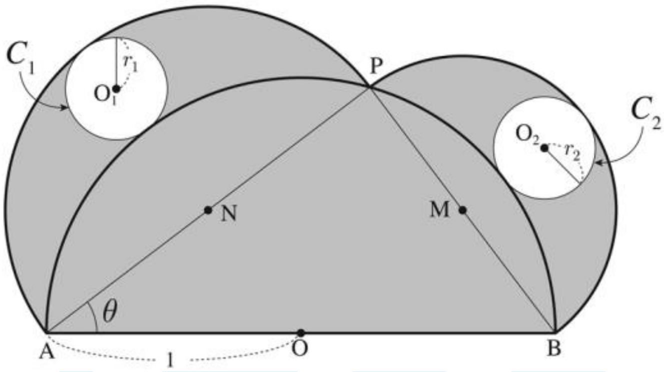
[다] 두 함수 $y = f(u), u = g(x)$ 가 미분가능할 때, 합성함수 $y = f(g(x))$ 도 미분가능하며 그 도함수는 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ 또는 $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$ 이다.

[라] 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 의 시각 t 에서의 위치가 $x = f(t), y = g(t)$ 로 나타내어질 때, 시각 $t = a$ 에서 시각 $t = b$ 까지 점 P 가 그리는 곡선의 길이 s 는 $s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$ 이다.

7) 경희대학교 홈페이지

[논제 Ⅰ] 제시문 [가] ~ [라]를 읽고 다음 질문에 답하시오.

반지름의 길이가 1 이고 점 O 를 중심으로 하는 반원 위의 한 점 P 와 이 반원의 지름의 양 끝점 A, B 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 APB 가 아래 그림과 같이 주어졌다고 하자. 점 N 과 M 은 각각 선분 AP 와 선분 PB 의 중점이다. 이때, 아래 그림과 같이 선분 AP 와 선분 PB 를 지름으로 하는 각 반원에 내접하며, 선분 AB 를 지름으로 하는 반원에 외접하는 두 원을 C_1 과 C_2 라 하자. 원 C_1 과 C_2 의 중심을 각각 점 O_1 과 O_2 라 할 때, 세 점 O, N, O_1 이 일직선 위에 있고, 세 점 O, M, O_2 가 일직선 위에 있다. 원 C_1 과 C_2 의 반지름의 길이는 각각 r_1 과 r_2 이다. 그리고 각 PAB 의 크기를 θ 라 하자.



[논제 Ⅰ-1] $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 일 때, r_1 과 r_2 를 θ 의 함수로 나타내고 그 근거를 논술하시오.

(15점)

[논제 Ⅰ-2] $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 일 때, 선분 PB 의 중점 M 과 점 O_2 사이의 거리를 $l(\theta)$ 라 하자. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} l(\theta)\,d\theta$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (15점)

[논제 Ⅰ-3] 원 C_1 의 넓이를 S_1, 원 C_2 의 넓이를 S_2 라 하면 S_1 과 S_2 는 각각 θ 의 함수이다. $S(\theta)=S_1(\theta)+S_2(\theta)$ 라 하자. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $S(\theta)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내고, $S(\theta)$ 가 최대가 되는 θ 의 값을 구하시오. 그리고 그 근거를 논술하시오. (15점)

[논제 Ⅰ-4] 원 C_2 와 선분 PB 를 지름으로 하는 반원의 접점을 Q 라 하자. $\theta=\frac{\pi}{6}$ 에서 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 까지 변할 때, 점 Q 가 그리는 곡선의 길이를 구하고 그 과정을 서술하시오. (15점)

풀어보기

문제1

닫힌 구간 $[0, 2\pi]$ 에서 x 에 대한 방정식 $\sin x - x\cos x - k = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 정수 k 의 값의 합은? (2016년 7월 전국연합)

① -6　② -3　③ 0　④ 3　⑤ 6

문제2

함수 $f(x)$ 가 $f(\cos x) = \sin 2x + \tan x$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ 를 만족시킬 때, $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 의 값은? (2013년 4월 전국연합)

① $-2\sqrt{3}$　② $-\sqrt{3}$　③ 0　④ $\sqrt{3}$　⑤ $2\sqrt{3}$

문제3

좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 의 시각 t 에서의 위치가

$$x = 9\cos t - \cos 9t,\ y = 9\sin t - \sin 9t$$

로 나타내어지는 곡선이 있다. 점 P 가 $t=0$ 에서 $t = \dfrac{\pi}{8}$ 까지 움직인 거리를 s 라 할 때, $2s$ 의 값을 구하시오.(2010년 이전)

예시답안

풀어보기(문제1)

함수 $f(x)=\sin x-x\cos x$ 라 하면 $f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	π	$\searrow$	-2π

방정식 $f(x)=k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2 가 되려면 $0\le k<\pi$

따라서 정수 k는 0, 1, 2, 3이므로 합은 6

풀어보기(문제2)

$f(\cos x)=\sin 2x+\tan x$ 의 양변을 미분하면 $-\sin x\cdot f'(\cos x)=2\cos 2x+\sec^2 x$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ 일 때, $\cos x=\dfrac{1}{2}$ 이므로 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\left(-\dfrac{1}{2}\right)+4$

$\therefore f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2\sqrt{3}$

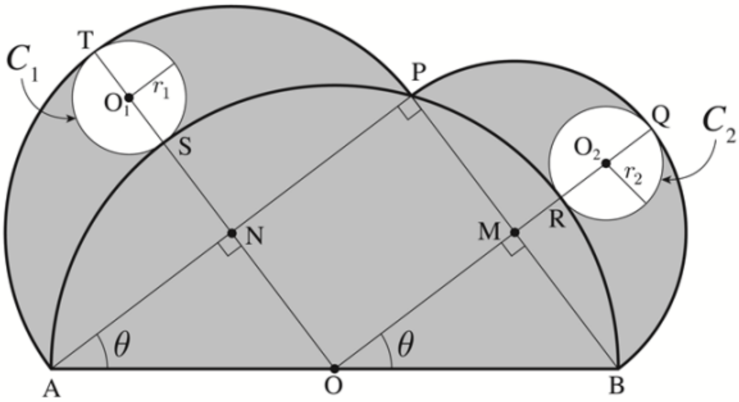
풀어보기(문제3)

$\dfrac{dx}{dt}=-9\sin t+9\sin 9t$, $\dfrac{dy}{dt}=9\cos t-9\cos 9t$ 이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=18\sqrt{\frac{1-\cos 8t}{2}}=18\,|\sin 4t|$$

따라서 $s=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}}18\sin 4t\,dt=\frac{9}{2}$, $\therefore\ 2a=9$

[문제 Ⅰ-1] 대학발표 예시답안



원의 중심과 현의 중점을 이은 선분은 현을 수직 이등분하므로, $\overline{OM} \perp \overline{BP}$ 이다.

$\angle APB$ 는 반원에 대한 원주각이므로 직각이다.

$\angle APB = \angle OMB$ 이므로 선분 AP 와 선분 OM 은 평행이다.

따라서 $\angle ROB = \angle PAB = \theta$ 이다.

원 C_2 와 중심이 O 인 반원과의 접점을 R , 원 C_2 와 선분 PM 이 지름인 반원의 접점을 Q 라 하자. R 에서의 접선은 선분 O_2R 과 선분 OR 과 수직이다.

따라서 접점 R 은 두 점 O, O_2 를 지나는 직선 위에 있다.

마찬가지로 접점 Q 는 두 점 M, O_2 를 지나는 직선 위에 있다.

세 점 O, M, O_2 가 일직선 위에 있으므로 접점 R 과 Q 도 세 점 O, M, O_2 와 같은 직선 위에 있다.

따라서 $\overline{OR} + 2r_2 = \overline{OM} + \overline{MQ} = \overline{OM} + \overline{BM}$ 이며 마찬가지로 $\overline{OS} + 2r_1 = \overline{ON} + \overline{AN}$ 을 얻는다.

이때, $\overline{AN} = \overline{OM} = \cos\theta$, $\overline{ON} = \overline{BM} = \sin\theta$ 이므로,

$r_1(\theta) = r_2(\theta) = \dfrac{1}{2}(\cos\theta + \sin\theta - 1)\ \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ 이다.

[문제 Ⅰ-2] 대학발표 예시답안

그림에서 원 C_2 와 중심이 O 인 반원과의 접점을 R 이라 하면, O, R, O_2 는 일직선 위에 있고, O, M, O_2 가 일직선 위에 있으므로, M, R, O_2 도 일직선 위에 있다. 이를 이용하면

$\overline{O_2M} = \overline{QM} - r_2 = \overline{BM} - r_2$ 이다.

$\overline{BM} = \sin\theta$ 와 [논제 Ⅰ-1]에서 구한 $r_2(\theta)$ 를 대입해서 정리하면

$l(\theta) = \overline{O_2M} = \dfrac{1}{2}(\sin\theta - \cos\theta + 1)$ 이다.

따라서 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} l(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin\theta - \cos\theta + 1)d\theta = \frac{1}{2}\left[-\cos\theta - \sin\theta + \theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12}$ 이다.

[문제 Ⅰ-3] 대학발표 예시답안

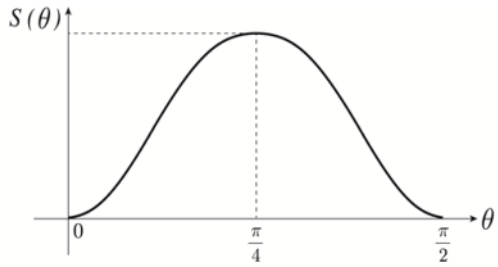
[논제 Ⅰ-1]의 결과를 이용하면, $r_1(\theta)=r_2(\theta)=\frac{1}{2}(\cos\theta+\sin\theta-1)\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 이고

$S(\theta)=S_1(\theta)+S_2(\theta)=\frac{\pi}{2}(\cos\theta+\sin\theta-1)^2$ 이다.

합성함수의 미분법을 적용하면,
$S'(\theta)=\pi(\cos\theta+\sin\theta-1)(\cos\theta-\sin\theta)=2\pi r_1(\theta)(\cos\theta-\sin\theta)$ 이다.

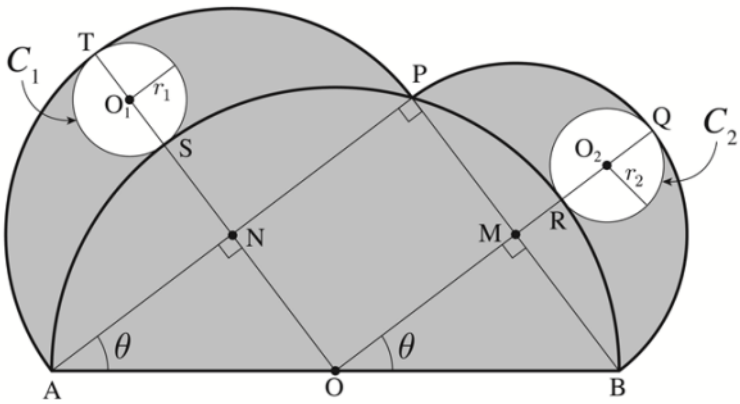
이때, $r_1(\theta)>0$ 이고, $\cos\theta-\sin\theta>0\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\theta-\sin\theta<0\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 이므로 함수 $S(\theta)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}\pi$	$\searrow$	



따라서 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으며 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 일 때 $S(\theta)$ 가 최댓값을 갖는다.

[문제 Ⅰ-4] 대학발표 예시답안



점 O 의 좌표를 $(0, 0)$ 이라 하면
원 C_2 와 선분 PB 를 지름으로 하는 반원과의 접점 Q 의 좌표는
$Q=((\cos\theta+\sin\theta)\cos\theta, (\cos\theta+\sin\theta)\sin\theta)$ 이다.
점 Q 가 그리는 곡선의 길이를 구하기 위해 Q 의 x 좌표를 $x(\theta)$, y 좌표를 $y(\theta)$ 라 하면
$x'(\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$,
$y'(\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$ 이다.

$X=\cos^2\theta-\sin^2\theta$, $Y=2\sin\theta\cos\theta$ 로 치환하여 계산하면

$(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2=2(X^2+Y^2)=2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2=2$ 이다.

따라서 곡선의 길이는

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2}\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{2}\,d\theta=\left[\sqrt{2}\,\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$$

09 고려대학교

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정내 출제	국어, 수학가, 영어, 과탐 4개영역중 2개 영역 이상 2등급이내 및 한국사 4등급이내 (수학 가 또는 과탐 영역 반드시 포함) (의과대학 별도)	수학(1문항, 5문제) 과학 택1(1문항, 2문제)	전체 시간 100분 중 50분

[제시문] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=kx\sin x\ (0\le x\le \pi)\ \text{이다.}$$

(나) 원 $x^2+(y-6)^2=32$를 C라 한다. 자연수 n에 대하여 중심이 (x_n, y_n)이고 반지름의 길이가 n인 원 C_n이 다음 조건을 만족한다.

- 원 C_n은 원점 O를 지나고 원 C와 접한다.
- $x_n<0$이고 $y_n<0$이다.

(다) 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 좌표 (x, y)를 매개변수 t의 함수로 나타내면

$$\begin{cases} x=2\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}\quad (0\le t<2\pi)$$

이다. 직선 $y=\frac{3}{2}x-3$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 한다. 선분 PA와 AB를 두 변으로 갖는 평행사변형의 넓이가 자연수 n이 되는 t의 값들의 합을 a_n이라 한다. (단, $0\le t<2\pi$이다.)

(라) a, b는 다음 조건을 만족하는 양의 실수이다.

- 좌표평면 위의 점 $(0, b)$에서 곡선 $y=xe^{-ax}$에 그을 수 있는 접선이 오직 두 개다.

(마) $p(x)$는 다음 두 가지 성질을 만족하는 가장 낮은 차수의 다항함수이다.

- $p(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
- $|\sin(\pi x)|p(x)$는 구간 $(-n, 0)$에서 미분 가능하다.

(단, n은 2이상의 자연수이다.)

1. 제시문 (가)에서 상수 k의 값과 확률 $\mathrm{P}\left(0 \leq X \leq \frac{\pi}{6}\right)$를 구하시오.

2. 제시문 (나)에서 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$을 구하시오.

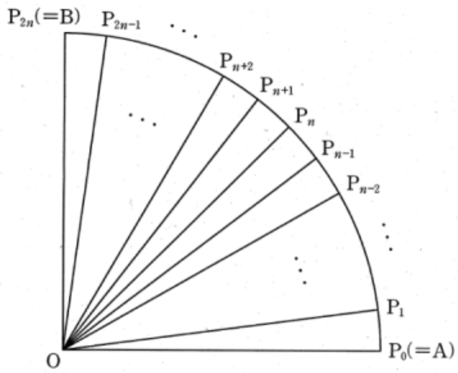
3. 제시문 (다)에서 무한급수의 합 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$을 구하시오. (단, 평행사변형의 넓이가 자연수 n이 되는 t가 존재하지 않을 경우에는 $a_n=0$으로 정의한다.)

4. 제시문 (라)에서 $2a^2+b^2$의 최솟값을 구하시오.

5. 제시문 (마)에서 $a_n=\int_0^1 \ln p(x)dx$라 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(a_n-\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right)$를 구하시오.

풀어보기

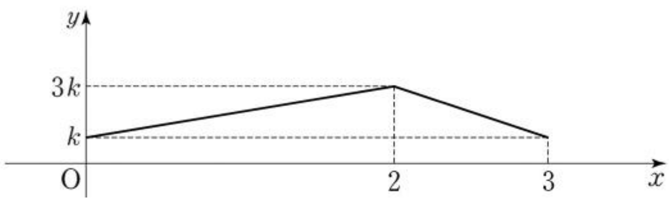
문제1 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1 이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB 가 있다. 자연수 n에 대하여 호 AB 를 $2n$ 등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $P_0(=A)$, P_1, P_2, $\cdots$, P_{2n-1}, $P_{2n}(=B)$라 하자.



주어진 자연수 n에 대하여 $S_k(1 \le k \le n)$을 삼각형 $OP_{n-k}P_{n+k}$의 넓이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$의 값은? (2015대입 9월 평가원)

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{13}{12\pi}$ ③ $\frac{7}{6\pi}$ ④ $\frac{5}{4\pi}$ ⑤ $\frac{4}{3\pi}$

문제2 구간 $[0, 3]$의 모든 실수 값을 가지는 연속확률변수 X에 대하여 X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.



$P(0 \le X \le 2) = \frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (2014대입. 대수능)

문제3 자연수 n에 대하여 포물선 $y^2=\frac{x}{n}$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=1$이고 $\overline{\mathrm{FQ}}=a_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}$의 값은?

(2013. 대수능)

① 210 ② 205 ③ 200 ④ 195 ⑤ 190

문제4 함수 $f(x)=x+\cos x+\frac{\pi}{4}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=|f(x)-k| \quad (k\text{는 } 0<k<6\pi\text{인 상수})$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 k의 값의 합을 $\frac{q}{p}\pi$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

(2013. 전국연합)

예시답안

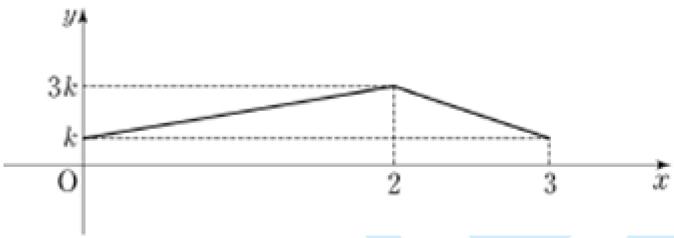
풀어보기(문제1) 정답 ①

$$S_k = \frac{1}{2}\times 1^2 \times \sin\frac{2k\pi}{4n} = \frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}\times\frac{1}{2n}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}}\sin\pi x\,dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}$$

풀어보기(문제2) 정답 5



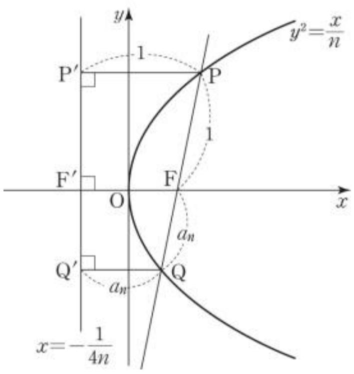
구간 $[0, 3]$에서 확률밀도함수의 그래프의 넓이는 1이다.

위 그림에서 $\mathrm{P}(0\le X\le 3)=1$이고 $2k+2k+k+k=6k=1$ 이므로 $k=\frac{1}{6}$ 이다.

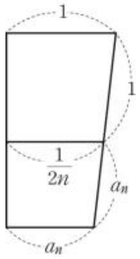
$\mathrm{P}(0\le X\le 2)=2k+2k=4k=4\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

따라서 $2+3=5$이다.

풀어보기(문제3) 정답 ①



포물선 $y^2=\frac{x}{n}$의 초점은 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{4n},\ 0\right)$이다. 세 점 P, F, Q에서 준선 $x=-\frac{1}{4n}$에 내린 수선의 발을 각각 P′, F′, Q′이라 하면 $\overline{\mathrm{FF'}}=\frac{1}{2n}$이고,



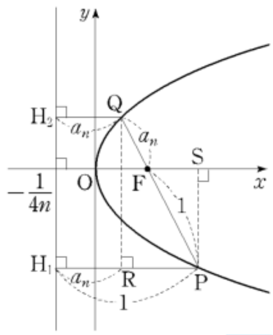
포물선의 정의에 의해 $\overline{PP'}=1$, $\overline{QQ'}=a_n$

$\frac{1}{2n}=\frac{1\cdot a_n+1\cdot a_n}{1+a_n}$, $\frac{1}{2n}=\frac{2a_n}{1+a_n}$, $4na_n=1+a_n$, $a_n(4n-1)=1$

$\therefore a_n=\frac{1}{4n-1}$

$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)=4\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-10=210$

[다른 풀이]



P에서 준선에 내린 수선의 발을 H_1, Q에서 준선에 내린 수선의 발을 H_2, Q에서 PH_1에 내린 수선의 발을 R, P에서 x축에 내린 수선의 발을 S라 하면

$\overline{PF}=1=\overline{PH_1}$, $\overline{FS}=1-\frac{1}{2n}$, $\overline{QF}=a_n=\overline{QH_2}$

$\triangle PQR \sim \triangle FPS$

$\overline{PQ}:\overline{PR}=\overline{FP}:\overline{FS}$이고

$(1+a_n):(1-a_n)=1:\left(1-\frac{1}{2n}\right)$

$1-a_n=\left(1-\frac{1}{2n}\right)(1+a_n)=1-\frac{1}{2n}+\left(1-\frac{1}{2n}\right)a_n$

$\frac{1}{2n}=\left(2-\frac{1}{2n}\right)a_n$, $a_n=\frac{1}{4n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)=4\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-10=220-10=210$

풀어보기(문제4) 정답 37

$f'(x)=1-\sin x \geq 0$이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $f(x)=k$인 x에서 $f'(x)=0$이어야 한다.

$f'(x)=0$의 해가 $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$(n은 정수)이므로

$k=f\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\frac{3}{4}\pi$

$0<k<6\pi$이므로 $k=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $k=\frac{11}{4}\pi$ 또는 $k=\frac{19}{4}\pi$

$\therefore$ k의 값의 합은 $\frac{33}{4}\pi$이므로 $p=4,\ q=33$

따라서 $p+q=37$

[논술 문제 해설]

1. $\int_0^{\pi} kx\sin x\,dx=[-kx\cos x]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}k\cos x dx=k\pi=1$에서 $k=\frac{1}{\pi}$이므로

$f(x)=\frac{1}{\pi}x\sin x$ 이다. 그러므로

$$\mathrm{P}\left(0\leq X\leq\frac{\pi}{6}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\pi}x\sin x\,dx=\left[-\frac{1}{\pi}x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\pi}\cos x dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\pi}[\sin x]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2\pi}-\frac{\sqrt{3}}{12}$$

이다.

2. 원 C_n은 중심이 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$이고 반지름의 길이가 n이며 원점을 지나므로

$$x_n^2+y_n^2=n^2$$

이다. 또한 원 C와 외접하므로

$$(x_n-0)^2+(y_n-6)^2=(n+\sqrt{32})^2$$

이다. 전개하면

$$x_n^2+y_n^2-12y_n+36=n^2+2\sqrt{32}\,n+32$$

이고, 정리하면 $y_n=\frac{1-2\sqrt{2}\,n}{3}$ 이다. 따라서

$$x_n^2=n^2-y_n^2=n^2-\frac{1-4\sqrt{2}\,n+8n^2}{9}=\frac{1}{9}(n^2+4\sqrt{2}\,n-1)$$

이고, $x_n<0$이므로

$$x_n=-\frac{1}{3}\sqrt{n^2+4\sqrt{2}\,n-1}$$

이다. 그러므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=-\frac{1}{3}$ 이다.

3. 선분 $\mathrm{AB}=\sqrt{13}$ 이다. 점 P 에서 직선 $3x-2y-6=0$까지의 거리를 d라 두면

$$d=\frac{|6\cos t-6\sin t-6|}{\sqrt{13}}$$

이다. 따라서 평행사변형의 넓이 S는

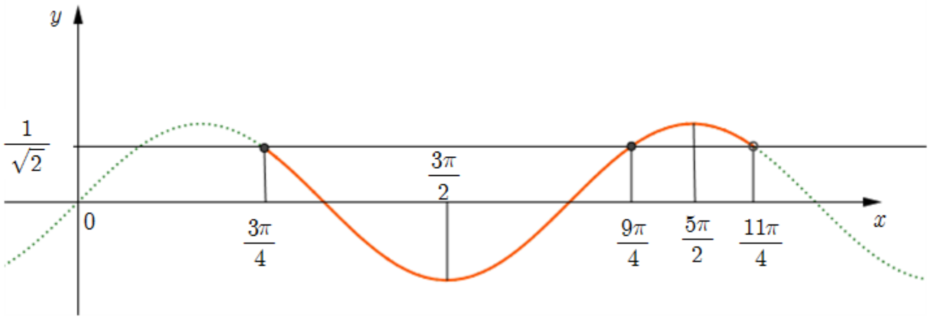
$$S=\frac{|6\cos t-6\sin t-6|}{\sqrt{13}}\times\sqrt{13}=6|\cos t-\sin t-1|=6\left|\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)-1\right|$$

이다.

① $S=1$일 때, $6\left|\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)-1\right|=1$이므로

$$\sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{7}{6\sqrt{2}} \text{ 또는 } \sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{5}{6\sqrt{2}}$$

이다. $t+\frac{3\pi}{4}=\theta$라 두면 $\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{11\pi}{4}$ 이므로 $y=\sin\theta$의 그래프는 다음과 같다.



(i) $\sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{7}{6\sqrt{2}}$ 의 두 근을 t_1, t_2라 하면 $\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{7}{6\sqrt{2}}<1$이므로

$\left(t_1+\frac{3\pi}{4}\right)+\left(t_2+\frac{3\pi}{4}\right)=5\pi$이다. 즉, $t_1+t_2=\frac{7\pi}{2}$이다.

(ii) $\sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{5}{6\sqrt{2}}$ 의 두 근을 t_3, t_4라 하면 $0<\frac{5}{6\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로

$\left(t_3+\frac{3\pi}{4}\right)+\left(t_4+\frac{3\pi}{4}\right)=3\pi$이다. 즉, $t_3+t_4=\frac{3\pi}{2}$이다.

그러므로 $a_1=\frac{7\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}=5\pi$

② $S=2$일 경우는 $6\left|\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)-1\right|=2$이므로

$$\sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{4}{3\sqrt{2}} \text{ 또는 } \sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{2}{3\sqrt{2}}$$

이다. 이때 $\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{4}{3\sqrt{2}}<1$, $0<\frac{2}{3\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 ①의 결과와 같다.

그러므로 $a_2=\frac{7\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}=5\pi$

③ $S=3$ 일 경우는 $6\left|\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)-1\right|=3$이므로

$$\sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3}{2\sqrt{2}} \quad \text{또는} \quad \sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

이다. 이때 $\frac{3}{2\sqrt{2}}>1$이므로 해가 없고, $0<\frac{1}{2\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로 두 근의 합은 $\frac{3\pi}{2}$이다.

그러므로 $a_3=\frac{3\pi}{2}$이다.

같은 방식으로 하면 $a_4=a_5=a_6=a_7=a_8=a_9=a_{10}=a_{11}=a_{12}=a_{13}=a_{14}=\frac{3\pi}{2}$이다.

하지만 $S=15$일 경우는 $\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)-1=-\frac{15}{6}$이고 $\sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{3}{2\sqrt{2}}<-1$이므로 해가 없다. $n>15$일 때 모두 해가 없다. 따라서 $a_{15}=a_{16}=\cdots=0$이다.

그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5\pi+5\pi+\frac{3\pi}{2}\times 12=28\pi$이다.

(다른 풀이)

직선 AB와 평행한 직선을 $y=\frac{3}{2}x+k$라 두면 타원과 접하는 순간 $k=\pm 3\sqrt{2}$이다. 또한 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{13}$이고 평행사변형의 높이 h는 $(2,0)$에서 직선 $3x-2y+2k=0$ 까지의 거리이므로

$$h=\frac{\sqrt{6+2k}}{\sqrt{13}}$$

이다. 따라서 평행사변형의 넓이는

$$S=\frac{|6+2k|}{\sqrt{13}}\times\sqrt{13}=|6+2k|$$

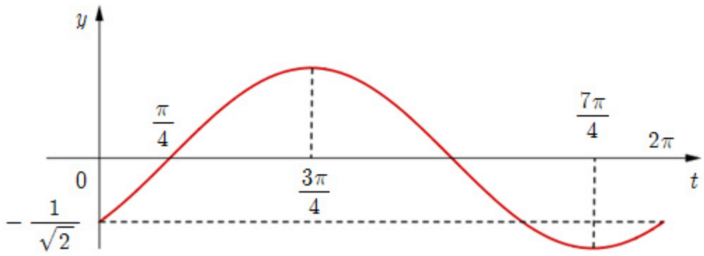
이다. 또한 $-3\sqrt{2}\le k\le 3\sqrt{2}$이므로 $S=|2k+6|\le 6\sqrt{2}+6 ≒ 14.4$이다. 따라서 평행사변형의 넓이가 되는 자연수는 $1, 2, 3, \cdots, 14$이다.

$\mathrm{P}(2\cos t, 3\sin t)$는 $2y-3x=2k$위의 점이므로

$$6(\sin t-\cos t)=2k \Leftrightarrow \sin t-\cos t=\frac{2k}{3} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{k}{3}$$

$$\therefore \sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{k}{3\sqrt{2}} \cdots\cdots ㉠$$

을 만족한다. $y=\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 다음과 같다.



① $|2k+6|=1$ 인 경우: $k=-\frac{5}{2}$ 또는 $k=-\frac{7}{2}$ 이고 ㉠에 대입한다.

(ⅰ) $k=-\frac{5}{2}$ 인 경우

$\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{5}{6\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}<-\frac{5}{6\sqrt{2}}<1$ 이므로 t의 합은 $\frac{3\pi}{2}$

(ⅱ) $k=-\frac{7}{2}$ 인 경우

$\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{7}{6\sqrt{2}}$, $-1<-\frac{7}{6\sqrt{2}}<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 t의 합은 $\frac{7\pi}{2}$

그러므로 $a_1=5\pi$ 이다.

② $|2k+6|=2$ 인 경우: $k=-2$ 또는 $k=-4$

$\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{2}{3\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}<-\frac{2}{3\sqrt{2}}<1$ 이므로 t의 합은 $\frac{3\pi}{2}$

$\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4}{3\sqrt{2}}$, $-1<-\frac{4}{3\sqrt{2}}<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 t의 합은 $\frac{7\pi}{2}$

그러므로 $a_2=5\pi$ 이다.

③ $|2k+6|=3$ 인 경우: $k=-\frac{3}{2}$ 또는 $k=-\frac{9}{2}$

$\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}<-\frac{1}{2\sqrt{2}}<1$ 이므로 t의 합은 $\frac{3\pi}{2}$

$\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{2\sqrt{2}}$, $-\frac{3}{2\sqrt{2}}<-1$ 이므로 해가 없다.

그러므로 $a_3=\frac{3\pi}{2}$ 이다.

같은 방식으로 하면 $a_4=a_5=a_6=a_7=a_8=a_9=a_{10}=a_{11}=a_{12}=a_{13}=a_{14}=\frac{3\pi}{2}$ 이다.

하지만 $|2k+6|=15$ 일 경우는 $k=\frac{9}{2}$ 또는 $k=-\frac{21}{2}$ 이고

$\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2\sqrt{2}}$, $\frac{3}{2\sqrt{2}}>1$ 이므로 해가 없다.

$\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{7}{2\sqrt{2}}$, $-\dfrac{7}{2\sqrt{2}}< -1$이므로 해가 없다.

마찬가지로 $n>15$일 때 모두 해가 없다. 따라서 $a_{15}=a_{16}=\cdots=0$이다.

그러므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5\pi+5\pi+\frac{3\pi}{2}\times 12=28\pi$이다.

4. $y=xe^{-ax}$를 미분하면 $y'=e^{-ax}(1-ax)$이다.

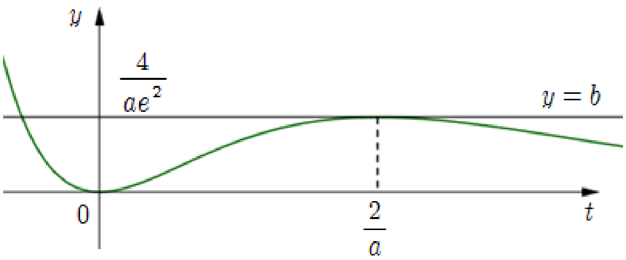
곡선 $y=xe^{-ax}$ 위의 점 (t, te^{-at})에서 접선의 방정식은

$$y=e^{-at}(1-at)(x-t)+te^{-at}$$

이고, 이 직선이 $(0, b)$를 지나므로

$$b=e^{-at}(1-at)(0-t)+te^{-at}=at^2e^{-at}$$

이다. 접선이 오직 2개 이므로 곡선 $y=at^2e^{-at}$와 직선 $y=b$가 두 점에서 만나야 한다. $y'=e^{-at}at(2-at)$이므로 $t=\dfrac{2}{a}$일 때 극댓값은 $\dfrac{4}{ae^2}$이다. 즉, $b=\dfrac{4}{ae^2}$일 때 오직 접선이 두 개다.



따라서 $2a^2+b^2$의 최솟값은

$$2a^2+b^2=2a^2+\frac{16}{a^2e^4}\geq 2\sqrt{2\times\frac{16}{e^4}}=\frac{8\sqrt{2}}{e^2}$$

이므로 $\dfrac{8\sqrt{2}}{e^2}$이다.

(다른 풀이) 접선의 방정식이 두 개 가 될 경우는 접선이 $y=xe^{-ax}$의 변곡점을 지날 경우이다. $y'=e^{-ax}(1-ax)$, $y''=e^{-ax}(a^2x-2a)=0$에서 변곡점은 $\left(\dfrac{2}{a}, \dfrac{2}{ae^2}\right)$이다. 또한 $x=\dfrac{2}{a}$에서 접선의 기울기는 $y'=e^{-a\cdot\frac{2}{a}}\left(1-a\cdot\dfrac{2}{a}\right)=-\dfrac{1}{e^2}$이므로 변곡점 $\left(\dfrac{2}{a}, \dfrac{2}{ae^2}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{e^2}\left(x-\frac{2}{a}\right)+\frac{2}{ae^2}$$

이다. 이 접선이 $(0, b)$를 지나므로

$$b=\frac{2}{ae^2}+\frac{2}{ae^2}=\frac{4}{ae^2}$$

이다. 따라서 $2a^2+b^2$의 최솟값은

$$2a^2+b^2=2a^2+\frac{16}{a^2e^4}\ \geq\ 2\sqrt{2\times\frac{16}{e^4}}=\frac{8\sqrt{2}}{e^2}$$

이므로 $\dfrac{8\sqrt{2}}{e^2}$ 이다.

5. $p(x)$의 최고차항의 계수는 1이고, 함수 $|\sin(\pi x)|p(x)$는 2이상의 자연수 n에 대하여 구간 $(-n,0)$에서 미분 가능한 최소다항식이므로

$$p(x)=(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n-1)$$

이다. 또한

$$\begin{aligned}
a_n&=\int_0^1 \ln p(x)dx=\int_0^1 \ln(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n-1)dx\\
&=\int_0^1 \ln(x+1)dx+\int_0^1 \ln(x+2)dx+\cdots+\int_0^1 \ln(x+n-1)dx\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1 \ln(x+k)dx=\sum_{k=1}^{n-1}\left[(x+k)\ln(x+k)-(x+k)\right]_0^1\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}\{(1+k)\ln(1+k)-k\ln k-1\}=n\ln n-(n-1)
\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(a_n-\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{n\ln n-(n-1)-\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right\}\cdots ㉠$$

이고, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)=\sum_{k=1}^{n}\ln n\left(1+\frac{k}{n}\right)=n\ln n+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$ 이므로 ㉠은 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{n\ln n-(n-1)-n\ln n-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{-(n-1)-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}$$

한편,

(ⅰ) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{-(n-1)}{n}=-1$

(ⅲ) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}=\int_1^2 \ln x\,dx=2\ln 2-1$

이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(a_n-\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right)=-2\ln 2$$

이다.

10 서울과학기술대학교 모의(자연계열)[8)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형(반영 점수는 700점이며, 절대평가임)	없음	수학 (3문항, 13문제)	100분

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (34점)

(가) 함수의 극한값 계산

극한 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 이 존재하고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$ 이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$ 이다.

(나) 인수정리

x에 대한 다항식 $P(x)$에 대하여 $x-a$가 $P(x)$의 인수일 필요충분조건은 $P(a)=0$이다.

(다) 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

[1.1] 다음 조건을 모두 만족하는 다항식 $f(x)$ 중에서 차수가 가장 낮은 것을 구하시오. (12점)

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x(x-1)}=1$ 이고 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x(x-1)}$ 이 존재한다.

(2) $f(-1)=4$

(3) 최고차항의 계수는 1이다.

(4) $f'(-1)=-20$

8) 서울과학기술대학교 홈페이지

[1.2] n차 방정식 $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=0$의 근이 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$일 때 $\alpha_1+1, \cdots, \alpha_n+1$을 근으로 갖는 n차 방정식을 구하시오. (8점)

[1.3] n차 방정식 $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=0$(단, $a_0 \neq 0$)의 근이 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$일 때 $\dfrac{1}{\alpha_1}, \cdots, \dfrac{1}{\alpha_n}$을 근으로 갖는 n차 방정식을 구하시오. (8점)

[1.4] 위의 [1.1]에서 구한 $f(x)$가 n차 다항식이고 $f(x)=0$의 근이 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$일 때, [1.2]와 [1.3]을 이용하여 다음 값을 구하시오. (6점)

$$\frac{1}{\alpha_1+1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n+1}$$

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (33점)

(가) 정적분과 넓이

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 할 때, 구간 $[a, b]$에서 $f(x) \geq 0$이면

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

(나) 정적분의 치환적분법

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여, 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 연속이고, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

[2.1] 다음 정적분을 구하시오. (8점)

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

[2.2] 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (8점)

$$\sum_{k=1}^{2017} \frac{8068}{2017^2+k^2} < \pi$$

[2.3] 실수 전체에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 성질을 만족한다.

(1) $f'(x)$는 연속함수이다.

(2) $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

이 때, 다음 등식이 성립함을 보이시오. (9점)

$$\int_0^\pi \frac{xf'(x)}{1+\{f(x)\}^2}dx=\int_0^\pi \frac{(\pi-t)f'(t)}{1+\{f(t)\}^2}dt$$

[2.4] 위의 [2.3]의 조건을 만족하는 함수 $f(x)$가 $f(0)=-1$, $f(\pi)=1$인 증가함수 일 때, 다음 정적분을 구하시오. (8점)

$$\int_0^\pi \frac{xf'(x)}{1+\{f(x)\}^2}dx$$

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (33점)

(가) 일대일 함수

함수 $f : X \to Y$의 정의역 X의 임의의 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$가 성립할 때, 함수 f를 일대일함수라고 한다.

(나) 합성함수

두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$에 대하여 X의 각 원소 x에 Z의 원소 $g(f(x))$를 대응시키면 이 대응은 X에서 Z로의 함수이다. 이를 f와 g의 합성함수라고 하고 $g \circ f$로 나타낸다.

(다) 순열과 조합

ㄱ. 서로 다른 n개에서 r개를 택해서 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라고 하고, 그 수는 ${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0 \leq r \leq n$)이다.

ㄴ. 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택해서 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 중복순열이라고 하고, 그 수는 ${}_n\Pi_r = n^r$이다.

ㄷ. 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라고 하고, 그 수는 ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ (단, $0 \leq r \leq n$)이다.

ㄹ. 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 n개에서 r개를 택하는 중복조합이라고 하고, 그 수는 ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$이다.

$X=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$ (단, k, n은 자연수이고 $k<n$)일 때, f는 X에서 Y로의 함수이고, g는 Y에서 X로의 함수이다.

[3-1] $f(1)=1$을 만족하는 함수 f와 합성함수 $g \circ f$의 개수를 구하시오. (8점)

[3-2] 모든 $i,\ j \in X$에 대하여, $i<j$이면 $(g \circ f)(i)<(g \circ f)(j)$를 만족하는 합성함수 $g \circ f$의 개수를 구하시오. (6점)

[3-3] 모든 $i,\ j \in X$에 대하여, $i<j$이면 $(g \circ f)(i) \leq (g \circ f)(j)$를 만족하는 합성함수 $g \circ f$의 개수를 구하시오. (6점)

[3-4] 합성함수 $g \circ f$가 일대일함수일 때, 함수 f의 개수를 구하시오. (6점)

[3-5] 주어진 일대일함수 f에 대하여, 합성함수 $g \circ f$가 일대일함수가 되도록 하는 함수 g의 개수를 구하시오. (7점)

풀어보기

문제1

세 정수 a, b, c에 대하여

$$1 \le |a| \le |b| \le |c| \le 5$$

를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는? (2015. 대수능)

① 360 ② 320 ③ 280 ④ 240 ⑤ 200

문제2

집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에서 A로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. (2010. 전국연합)

(가) f는 일대일대응이다.
(나) $|f(1)-f(2)|=|f(2)-f(3)|$

문제3

두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가 $g(e^x)=\begin{cases} f(x) & (0 \le x < 1) \\ g(e^{x-1})+5 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$를 만족시키고,

$\int_1^{e^2} g(x)dx = 6e^2+4$ 이다. $\int_1^{e} f(\ln x)dx = ae+b$ 일 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.) (2013. 9월 평가원)

문제4

연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x)=f(x)$
(나) $f(x+2)=f(x)$
(다) $\int_{-1}^{1}(x+2)^2 f(x)\,dx=50$, $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx=2$

$\int_{-3}^{3} x^2 f(x)dx$ 의 값을 구하시오. (2014. 전국연합)

예시답안

풀어보기(문제1)

주어진 조건을 만족시키는 세 자연수 $|a|, |b|, |c|$ 의 순서쌍 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수는 5이하의 자연수 중에서 중복을 허락하여 3를 택하는 중복조합의 수와 같다.

이때, a, b, c는 각각 양의 정수와 음의 정수의 값을 가질 수 있으므로 a, b, c는 각각 2가지씩의 경우를 가질 수 있다. 따라서

$$ {}_5\mathrm{H}_3 \times 2 \times 2 \times 2 = {}_7\mathrm{C}_3 \times 8 = 35 \times 8 = 280 $$

이다.

풀어보기(문제2)

① $|f(2)-f(1)| = |f(3)-f(2)| = 1$ 일 때, $2\times5\times4!$

② $|f(2)-f(1)| = |f(3)-f(2)| = 2$ 일 때, $2\times3\times4!$

③ $|f(2)-f(1)| = |f(3)-f(2)| = 3$ 일 때, $2\times1\times4!$

이므로 $240+144+48=432$이다.

풀어보기(문제3)

$e^x = t$로 치환하면 $g(t) = \begin{cases} f(\ln t) & (1 \le t \le e) \\ g\left(\dfrac{t}{e}\right)+5 & (e \le t \le e^2) \end{cases}$ 이므로

$$ \int_1^{e^2} g(x)\,dx = \int_1^e f(\ln x)\,dx + \int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+5\right\}dx \quad \cdots\cdots ① $$

이다. 우변의 두 번째 적분식에서 $\dfrac{x}{e} = u$로 치환하면 $dx = e\,du$ 이므로

$$ \int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+5\right\}dx = e\int_1^e \{g(u)+5\}du = e\int_1^e f(\ln x)\,dx + 5e(e-1 $$

이다. 따라서 ①에서

$$ \begin{aligned} (e+1)\int_1^e f(\ln x1)\,dx &= \int_1^{e^2} g(x)dx - 5e(e-1) \\ &= 6e^2+4-5e^2+5e \\ &= e^2+5e+4 \\ &= (e+1)(e+4) \end{aligned} $$

이므로 $\displaystyle\int_1^e f(\ln x)\,dx = e+4$ 이다. 따라서 $a=1, b=4$ 이고 $a^2+b^2=17$ 이다.

풀어보기(문제4)

$$\int_{-3}^{3} x^2 f(x)dx$$
$$= \int_{-3}^{-1} x^2 f(x)dx + \int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx + \int_{1}^{3} x^2 f(x)dx$$
$$= 2\int_{1}^{3} x^2 f(x)dx + 2$$
$$= 2\int_{-1}^{1} (x+2)^2 f(x+2)dx + 2$$
$$= 2\int_{-1}^{1} (x+2)^2 f(x)dx + 2 = 102$$

[문제 1]

[1-1] 대학발표 예시답안

(1)에 따라서 $f(0)=f(1)=0$ 이므로 $f(x)=x(x-1)g(x)$ 이고 $g(0)=1$ 이다. (2)에 따라서 $f(-1)=2g(-1)=4$ 이므로 $g(-1)=2$ 이고 (3)에 따라서

$$g(x)=(x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} + \cdots + a_1(x+1)+2$$

이다. 또 $f'(x)=(x-1)g(x)+xg(x)+x(x-1)g'(x)$ 이므로 (4)에 의하여

$$f'(-1)=-3g(-1)+2g'(-1)=-6+2g'(-1)=-20$$

즉, $g'(-1)=-7$ 이다. 그런데

$$g'(x)=n(x+1)^{n-1}+\cdots+2a_2(x+1)+a_1$$

이므로 $g'(-1)=a_1=-7$ 이다. 마지막으로

$$g(0)=1+a_{n-1}+\cdots+a_2-7+2=1$$

이므로

$$a_{n-1}+\cdots+a_2=5$$

이다. 따라서 차수가 가장 낮은 경우는 $n=3$ 이고 $a_2=5$, 즉

$$f(x)=x(x-1)\left[(x+1)^3+5(x+1)^2-7(x+1)+2\right]$$

이다.

[1-2] 대학발표 예시답안

$Q(x)=P(x-1)$ 이라 하면 $Q(\alpha_i+1)=P(\alpha_i)=0$ 이므로 α_i+1 은 $Q(x)=0$ 의 근이다. 따라서 구하는 방정식은

$$a_n(x-1)^n+\cdots+a_1(x-1)+a_0=0$$

이다.

[1-3] 대학발표 예시답안

$R(x)=P\left(\frac{1}{x}\right)$ 이라 하면 $R\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)=P(\alpha_i)=0$ 이므로 $\frac{1}{\alpha_i}$ 은

$$R(x)=a_n\frac{1}{x^n}+a_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{1}{x}+a_0=0$$

의 근이다. 따라서 구하는 n차 방정식은

$$x^nR(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

이다.

[1-4] 대학발표 예시답안

$f(0)=f(1)=0$ 이므로 $\alpha_1=0,\ \alpha_2=1$ 이고 $\alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5$ 는

$$g(x)=(x+1)^3+5(x+1)^2-7(x+1)+2=0$$

의 근이다. [1.2]에 따라서 $\alpha_3+1,\ \alpha_4+1,\ \alpha_5+1$ 이 근이 되는 삼차방정식은

$$h(x)=g(x-1)=x^3+5x^2-7x+2=0$$

이고, [1.3]에 따라서 $\frac{1}{\alpha_3+1},\ \frac{1}{\alpha_4+1},\ \frac{1}{\alpha_5+1}$ 이 근이 되는 삼차방정식은

$$x^3h\left(\frac{1}{x}\right)=2x^3-7x^2+5x+1=0$$

이다. 따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 따라서

$$\frac{1}{\alpha_3+1}+\frac{1}{\alpha_4+1}+\frac{1}{\alpha_5+1}=\frac{7}{2}$$

이므로

$$\frac{1}{\alpha_1+1}+\frac{1}{\alpha_2+1}+\frac{1}{\alpha_3+1}+\frac{1}{\alpha_4+1}+\frac{1}{\alpha_5+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=5$$

이다.

[문제 2]

[2-1] 대학발표 예시답안

$x=\tan\theta$ 로 치환하면, $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ 이고, $\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$ 이므로,

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1d\theta=\frac{\pi}{4}$$

이다.

[2-2] 대학발표 예시답안

주어진 급수에서 분모와 분자를 2017^2으로 나누면

$$\sum_{k=1}^{2017}\frac{8068}{2017^2+k^2}=4\sum_{k=1}^{2017}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{2017}\right)^2}\frac{1}{2017}$$

이 된다. 이제 곡선 $y=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$를 생각하자. 구간 $[0,\ 1]$을 2017등분한 후, k번째 구간에서 높이가 $f\left(\frac{k}{2017}\right)$인 직사각형을 생각하자. $y=\frac{1}{1+x^2}$이 구간 $[0,\ 1]$에서 감소함수이므로, 직사각형들의 넓이의 합은 곡선 $y=\frac{1}{1+x^2}$과 구간 $[0,\ 1]$ 사이의 영역의 넓이보다 작다. 즉,

$$\sum_{k=1}^{2017}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{2017}\right)^2}\frac{1}{2017}<\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

가 성립한다. 이제 [2.1]번에서

$$\sum_{k=1}^{2017}\frac{8068}{2017^2+k^2}<4\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\pi$$

가 성립한다.

[2-3] 대학발표 예시답안

조건 (2)에 따라서 $f(\pi-x)=-f(x)$를 얻는다. 이 식의 양변을 x로 미분하면 $-f'(\pi-x)=-f'(x)$이므로 $f'(\pi-x)=f'(x)$가 성립한다. 정적분 $\int_0^\pi\frac{xf'(x)}{1+\{f(x)\}^2}dx$에서 $x=\pi-t$로 치환하면

$$\int_0^\pi\frac{xf'(x)}{1+\{f(x)\}^2}dx=\int_\pi^0\frac{(\pi-t)f'(\pi-t)}{1+\{f(\pi-t)\}^2}(-dt)=\int_0^\pi\frac{(\pi-t)f'(t)}{1+\{f(t)\}^2}dt$$

이다.

[2-4] 대학발표 예시답안

[2.3]번의 풀이에서

$$\int_0^\pi\frac{xf'(x)}{1+\{f(x)\}^2}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{f'(x)}{1+\{f(x)\}^2}dx$$

이다. 여기서 $u=f(x)$로 치환하여

$$\frac{\pi}{2}\int_{-1}^1\frac{1}{1+u^2}du=\pi\int_0^1\frac{1}{1+u^2}du=\frac{\pi^2}{4}$$ 을 얻는다.

[문제 3]

[3-1] 대학발표 예시답안

① $f(1)=1$ 이므로 함수 f 의 개수는 $\{2,\ 3,\ \cdots,\ k\}$ 에서 Y로의 함수의 개수와 같다. 그러므로 n개에서 중복을 허락하여 $k-1$개를 택하여 일렬로 나열하는 수 ${}_{n}\Pi_{k-1}=n^{k-1}$ 이다.

② 합성함수 $g\circ f$ 는 X에서 X로의 함수이므로 k개에서 중복을 허락하여 k개를 택하여 일렬로 나열하는 수 ${}_{k}\Pi_{\mathrm{k}}=k^{k}$ 이다.

[3-2] 대학발표 예시답안

합성함수 $g\circ f$ 는 항등함수이므로 1가지이다.

[3-3] 대학발표 예시답안

조건을 만족하는 합성함수 $g\circ f$ 는 X의 k개의 수 $1,\ 2,\ \cdots,\ k$ 에서 중복을 허락하여 k개를 택한 후, 그 k개의 수를 작은 것부터 크기순으로 일렬로 나열하고 차례로 $(g\circ f)(1),\ (g\circ f)(2),\ \cdots,\ (g\circ f)(k)$ 에 대응시키면 된다. 따라서 합성함수 $g\circ f$ 의 개수는 k개에서 중복을 허락하여 k개를 택하는 조합인 중복조합의 수 ${}_{k}\mathrm{H}_{k}$ $\left(\text{또는 } {}_{2k-1}\mathrm{C}_{k}=\dfrac{(2k-1)!}{(k-1)!\,k!}\right)$ 이다.

[3-4] 대학발표 예시답안

f 는 일대일 함수이어야 한다. 일대일함수 f 의 개수는 n개에서 k개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수 ${}_{n}\mathrm{P}_{k}=\dfrac{n!}{(n-k)!}$ 이다.

[3-5] 대학발표 예시답안

함수 g는 $f(X)$ 에서 X로는 일대일로 대응되어야 하고, $Y-f(X)$ 에서 X로는 어떠한 값이라도 대응되면 된다. 함수 f 는 일대일 함수이고, $f(X)$ 의 원소의 개수는 k이므로 $f(X)$ 에서 X로의 일대일로 대응시키는 방법은 ${}_{k}\mathrm{P}_{k}=k!$ 가지이다. 또한 $Y-f(X)$ 에서 X로 함수의 조건을 만족하며 대응시키는 방법은 ${}_{k}\Pi_{n-k}=k^{n-k}$ 가지이다. 그러므로 함수 g의 개수는

$$ {}_{k}\mathrm{P}_{k}\times {}_{k}\Pi_{n-k}=k!\times k^{n-k} $$

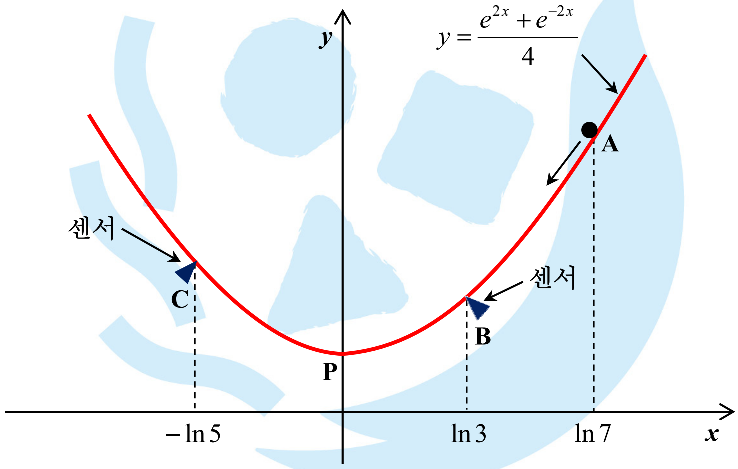
이다.

11 서울과학기술대학교 수시(오전)9)

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음	수학(3문항, 10문제)	100분

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 다음 그림은 곡선 $y=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{4}$의 형태로 설계된 레일 장치이다. 점 A를 출발한 공은 레일을 따라 운동한다. (단, 공의 크기는 무시한다.)



(나) 공은 점 A에서 최저점인 점 P ($x=0$)까지 내려온 이동거리의 $\dfrac{7}{10}$만큼 레일 왼편으로 올라간 뒤, 왼편에서 공이 내려온 이동거리의 $\dfrac{7}{10}$만큼 레일 오른편으로 올라간다. 이와 같은 방식으로 공은 레일 양쪽을 오가면서 점 P에서 멈출 때까지 계속 운동한다.

(다) 점 B와 점 C에 설치된 센서는 공이 지나갈 때 작동하며, 공의 운동에는 영향을 주지 않는다.

(라) 필요할 경우 다음 값들을 이용한다.

$$\log 2=0.30,\ \log 3=0.48,\ \log 5=0.70,\ \log 7=0.85$$

9) 서울과학기술대학교 홈페이지

[1.1] 점 A에서 점 P까지 공의 이동거리를 구하시오. (8점)

[1.2] 점 C에 있는 센서는 작동하는가? (8점)

[1.3] 점 B에 있는 센서는 몇 번 작동하는가? (12점)

[1.4] 공이 멈출 때까지 움직인 총 이동거리를 구하시오. (6점)

[문제 2] 아래의 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (총33점)

수학적 귀납법

자연수 n에 관한 명제 $p(n)$이 모든 자연수에 대하여 성립한다는 것을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

1. $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
2. $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

자연수 n에 대하여, x에 관한 함수 $f_n(x)$는 다음과 같이 정의된다.

$$f_n(x)=f_{n-1}(x)\times x^{a_n},\ f_0(x)=1$$

[2.1] $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$일 때, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$를 구하시오. (8점)

[2.2] $a_n=n+1$일 때, $f_{30}(x)$를 x에 관한 식으로 나타내시오. (8점)

[2.3] $a_n=\dfrac{1}{n}$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $f_n(x)\geq x^{\frac{2n}{n+1}}$ (단, $x>1$)임을 증명하시오. (17점)

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (33점)

(가) 기댓값(평균)

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $P(X=x_i)=p_i\,(i=1,2,\cdots,n)$일 때,

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

를 이산확률변수 X의 기댓값 또는 평균이라고 한다.

(나) 표본평균과 표본분산

어느 모집단으로부터 임의 추출한 표본을 $X_1,\ X_2,\ \cdots\ ,\ X_n$이라 할 때, 표본평균을 $\overline{X}_n$, 표본분산을 S_n^2과 같이 나타내고, 다음과 같이 정의한다.

$$\overline{X}_n=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$S_n^2=\frac{1}{n-1}\left\{(X_1-\overline{X}_n)^2+(X_2-\overline{X}_n)^2+\ \cdots\ +(X_n-\overline{X}_n)^2\right\}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2$$

1부터 9까지의 숫자가 각각 하나씩 적힌 공 9개와 숫자 7이 적힌 공 k개를 합하여 총 $k+9$개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의 추출한 한 개의 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라고 하자.

[3.1] 확률변수 X의 기댓값이 5.2일 때, 위의 모집단에서 임의로 복원 추출한 크기 2인 표본 X_1,X_2의 표본평균 $\overline{X}_2$의 값이 7보다 작을 확률 $P(\overline{X}_2<7)$을 구하시오. (15점)

[3.2] 위의 모집단에서 크기가 5인 표본 $X_1,X_2,\ \cdots\ ,X_5$를 임의로 복원 추출한 결과 다음과 같다고 한다.

$$\sum_{i=1}^{5}X_i=30,\qquad \sum_{i=1}^{5}X_i^2=200$$

이때, 추출된 자료 $X_1,X_2,\ \cdots\ ,X_5$의 표본분산 S_5^2을 구하시오. (5점)

[3.3] 위의 모집단에서 크기가 10인 표본 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$을 임의로 복원 추출한 결과 다음과 같다고 한다.

$$\overline{X}_{10}=5.4,\qquad S_{10}^2=3.6$$

여기에 추가적으로 11번째 자료 즉, $X_{11}=1$이 추출되었다. 새롭게 구성된 11개의 자료 $X_1,X_2,\ \ldots\ ,X_{10},X_{11}$의 표본평균 $\overline{X}_{11}$과 표본분산 S_{11}^2을 각각 구하시오. (13점)

풀어보기

문제1

다음은 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}<\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{n^2}\right) \qquad \cdots\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(ⅰ) $n=2$일 때,

(좌변)$=\boxed{\text{(가)}}$이고 (우변)$=\frac{11}{8}$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=m(m\geq 2)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^3}<\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{m^2}\right)$이다.

$n=m+1$일 때, $\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^3}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^3}+\boxed{\text{(나)}}<\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{m^2}\right)+\boxed{\text{(나)}}$

한편,

$$\frac{1}{2}\left\{3-\frac{1}{(m+1)^2}\right\}-\left\{\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{m^2}\right)+\boxed{\text{(나)}}\right\}=\frac{\boxed{\text{(다)}}}{2m^2(m+1)^3}>0$$

이므로

$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^3}<\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{(m+1)^2}\right)$이 성립한다.

따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

그러므로 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 a, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{g(a)}{f(1)}$의 값은? (2013. 전국연합)

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

문제2

주머니 속에 1의 숫자가 적혀 있는 공 1개, 2의 숫자가 적혀 있는 공 2개, 3의 숫자가 적혀 있는 공 5개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 2번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자. $P(\overline{X}=2)$의 값은? (2015. 대수능)

① $\frac{5}{32}$ ② $\frac{11}{64}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{13}{64}$ ⑤ $\frac{7}{32}$

예시답안

풀어보기(문제1)

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=\boxed{\dfrac{9}{8}}$이고, (우변)$=\dfrac{11}{8}$이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m(m\geq 2)$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^3}<\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{m^2}\right)\text{이다.}$$

$n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^3}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^3}+\boxed{\frac{1}{(m+1)^3}}<\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{m^2}\right)+\frac{1}{(m+1)^3}$$

한편,

$$\frac{1}{2}\left\{3-\frac{1}{(m+1)^2}\right\}-\left\{\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{m^2}\right)+\frac{1}{(m+1)^3}\right\}=\frac{\boxed{3m+1}}{2m^2(m+1)^3}>0$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^3}<\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{(m+1)^2}\right)\text{ 이 성립한다.}$$

따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

그러므로 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

$$\therefore\ a=\frac{9}{8},\ f(m)=\frac{1}{(m+1)^3},\ g(m)=3m+1$$

$$\therefore\ \frac{g(a)}{f(1)}=35$$

풀어보기(문제2)

(1, 3) 또는 (3, 1)을 꺼낼 확률은 $2\times\dfrac{1}{8}\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{5}{32}$

(2, 2)를 꺼낼 확률은 $\dfrac{2}{8}\times\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{16}$

$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}=2)=\dfrac{5}{32}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{7}{32}$

[문제 1]

[1-1] 대학발표 예시답안

점 A와 점 P 사이에서 공의 이동거리는 곡선의 길이와 같다. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$이므로, 이동거리 d는 다음과 같다.

$$d=\int_0^{\ln 7}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^{\ln 7}\sqrt{1+\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right)^2}\,dx=\int_0^{\ln 7}\sqrt{\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\ln 7}\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}dx=\frac{1}{4}\left[e^{2x}-e^{-2x}\right]_0^{\ln 7}=\frac{600}{49}$$

[1-2] 대학발표 예시답안

점 P를 지난 공은 레일의 왼편으로 $\dfrac{600}{49}\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{60}{7}$만큼 위로 올라간다. 점 P에서 센서가 있는 점 C까지 공의 이동거리는 함수 y가 좌우대칭이므로 x좌표가 0에서 $\ln 5$까지의 곡선 길이와 같다. 이를 계산하면

$$\int_0^{\ln 5}\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}dx=\frac{1}{4}\left[e^{2x}-e^{-2x}\right]_0^{\ln 5}=\frac{156}{25}$$

이 된다. 이 두 개의 값을 비교하면 $\dfrac{60}{7}>\dfrac{156}{25}$이다. 따라서 공은 센서가 있는 곳보다 더 높은 곳까지 운동하므로 센서는 작동한다.

[1-3] 대학발표 예시답안

점 P와 점 B 사이의 곡선 길이를 구하면,

$$\int_0^{\ln 3}\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}dx=\frac{1}{4}\left[e^{2x}-e^{-2x}\right]_0^{\ln 3}=\frac{20}{9}$$

이다. 공의 이동거리 $\left(\dfrac{7}{10}\right)^n d$ (n은 자연수)가 $\dfrac{20}{9}$보다 크면 점 B에 있는 센서는 작동된다. 그러므로,

$$\left(\frac{7}{10}\right)^n d\geq\frac{20}{9}\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{7}{10}\right)^n\geq\frac{20}{9}\times\frac{49}{600}=\frac{49}{270}$$

를 만족하는 n을 찾으면 된다. 여기서 양변에 로그를 취하면

$$n(\log 7-\log 10)\geq(\log 49-\log 270)$$

이다. 제시문에서 주어진 로그값을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$n(0.85-1)\geq(2\times 0.85-3\times 0.48-1)$$

즉, $0.15n\leq 0.74$이고 이를 만족하는 n 값은 1, 2, 3, 4이다.

이를 바탕으로 점 B에 있는 센서가 작동하는 경우를 구체적으로 기술하면
- A에서 점 P를 향해 내려올 때 한번 (점 A와 점 P 사이의 이동 거리: d)
- 왼편에서 점 P까지 내려온 뒤 다시 오른편으로 올라갈 때 한번 (이때 점 P에서 최고점까지 이동 거리: $(7/10)^2d$)
- 다시 점 P까지 내려올 때 한번 (이때 점 P까지 이동 거리: $(7/10)^2d$)
- 왼편에서 내려와 점 P까지 내려온 뒤 오른편으로 올라갈 때 한번 (이때 점 P에서 최고점까지 이동 거리: $(7/10)^4d$)
- 다시 점 P까지 내려올 때 한번 (이때 점 P까지 이동 거리: $(7/10)^4d$)

이렇게 점 B에 있는 센서는 5번 작동한다.

[1-4] 대학발표 예시답안

공이 움직인 총 거리 D는 다음과 같다.

$$D=d+\frac{7}{10}d+\frac{7}{10}d+\left(\frac{7}{10}\right)^2d+\left(\frac{7}{10}\right)^2d+\left(\frac{7}{10}\right)^3d+\left(\frac{7}{10}\right)^3d+\cdots$$

$$=d+2d\left\{\frac{7}{10}+\left(\frac{7}{10}\right)^2+\left(\frac{7}{10}\right)^3+\cdots\right\}=d+2d\frac{(7/10)}{1-7/10}=\frac{17}{3}d=\frac{17}{3}\times\frac{600}{49}=\frac{3400}{49}$$

[문제 2]

[2-1] 대학발표 예시답안

$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$이므로, $f_n(x)=f_{n-1}(x)\times x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$이 된다. $f_0(x)=1$이므로,

$$f_n(x)=f_{n-1}(x)\times x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}=f_{n-2}(x)\times x^{\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}}\times x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}=\ldots$$

$$=1\times x^{\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}}\times\ldots\times x^{\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}}\times x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}=x^{1-\frac{1}{n+1}}$$

이다. 그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=x$ 이다.

[2-2] 대학발표 예시답안

$a_n=n+1$이므로, $f_n(x)=f_{n-1}(x)\times x^{n+1}$이 된다. $f_0(x)=1$이므로,

$$f_{30}(x)=f_{29}(x)\times x^{31}=f_{28}(x)\times x^{30}\times x^{31}=\ldots$$

$$=1\times x^2\times\ldots\times x^{30}\times x^{31}=x^{2+\cdots+30+31}=x^{\frac{30\times33}{2}}=x^{495}$$

이다.

[2-3] 대학발표 예시답안

$f_n(x)=x^{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}$ 이므로 $x^{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}} \geq x^{\frac{2n}{n+1}}$ 을 증명하면 된다. 또한 $x>1$ 이므로

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \geq \frac{2n}{n+1}$$

을 보이면 된다.

1) $n=1$일 경우, 좌변과 우변은 모두 1이므로 식을 만족한다.

2) $n=k$일 경우, 식을 만족한다고 가정하면, $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i} \geq \frac{2k}{k+1}$이다. 양변에 $\frac{1}{k+1}$을 더하여 정리하면,

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}+\frac{1}{k+1} \geq \frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=\frac{2k+1}{k+1}$$

이다. 그런데 $\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$이므로,

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i} \geq \frac{2(k+1)}{k+2}$$

이다. 따라서 $n=k+1$에 대해서도 만족하므로 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대해 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \geq \frac{2n}{n+1}$가 성립한다.

[3-1] 대학발표 예시답안

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{k+9}$	$\frac{1}{k+9}$	$\frac{1}{k+9}$	$\frac{1}{k+9}$	$\frac{1}{k+9}$	$\frac{1}{k+9}$	$\frac{k+1}{k+9}$	$\frac{1}{k+9}$	$\frac{1}{k+9}$	1

기댓값이

$$\sum_{i=1}^{9}x_i \times P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{9}i\times\frac{1}{k+9}+7\times\frac{k}{k+9}=\frac{45}{k+9}+\frac{7k}{k+9}=\frac{7k+45}{k+9}=5.2$$

이므로, $k=1$이다.

$P(\overline{X}_2<7)$를 구하기 위하여 여사건의 확률 $P(\overline{X}_2 \geq 7)$를 이용한다.

$\overline{X}_2 \geq 7$는 $X_1+X_2 \geq 14$와 같고, 다음의 표와 같은 경우에 해당된다.

X_1	X_2	경우의 수
5	9	1×1
6	8 9	1×2
7	7 8 9	$2\times(2+2)$
8	6 7 8 9	$1\times(3+2)$
9	5 6 7 8 9	$1\times(4+2)$

전체 경우의 수는 100이고, $X_1+X_2 \geq 14$를 만족하는 경우의 수는 총 22가지이므로

$P(\overline{X}_2<7)=1-P(\overline{X}_2 \geq 7)=1-\frac{22}{100}=\frac{78}{100}=\frac{39}{50}$이다.

[3-2] 대학발표 예시답안

$\sum_{i=1}^{5} X_i = 30$이므로, $\overline{X}_5 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} X_i = \frac{30}{5} = 6$

$$S_5{}^2 = \frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5}(X_i - \overline{X}_5)^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}\left(X_i^2 - 12X_i + 36\right) = \frac{1}{4}(200 - 12\times 30 + 180) = 5$$

[3-3] 대학발표 예시답안

(1) $\overline{X}_{10} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i = 5.4$이므로 $\sum_{i=1}^{10} X_i = 54$이다.

$$\overline{X}_{11} = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} X_i = \frac{1}{11}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i + X_{11}\right) = \frac{1}{11}(54+1) = 5$$

(2) $S_{11}{}^2 = \frac{1}{11-1}\sum_{i=1}^{11}(X_i - \overline{X}_{11})^2 = \frac{1}{10}\left\{\sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X}_{11})^2 + (X_{11} - \overline{X}_{11})^2\right\}$

$$= \frac{1}{10}\left\{\sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X}_{10} + \overline{X}_{10} - \overline{X}_{11})^2 + (1-5)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{10}\left\{\sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X}_{10})^2 + 0.8\sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X}_{10}) + 1.6 + 16\right\}$$

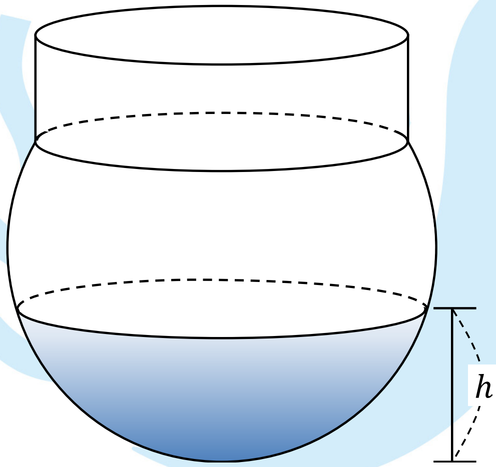
$$= \frac{1}{10}\left(9S_{10}{}^2 + 17.6\right) = 5 \qquad \left(\because \sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X}_{10}) = 0\right)$$

12 서울과학기술대학교 수시(오후)[10]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음	수학(3문항, 11문제)	100분

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (총34점)

다음 그림과 같은 항아리에 물을 가득 채운다고 하자. 이 항아리의 아랫부분은 반지름이 $20cm$인 구의 일부이고, 윗부분은 밑면의 반지름이 $10\sqrt{3}\,cm$이고 높이가 $10cm$인 원기둥으로 되어있다. (단, 항아리의 두께는 무시한다.)



[1.1] 항아리의 높이를 구하시오. (5점)

[1.2] 항아리에 물을 부어서 물의 깊이가 $h\,cm$일 때, 항아리에 담긴 물의 부피를 구하시오. (12점)

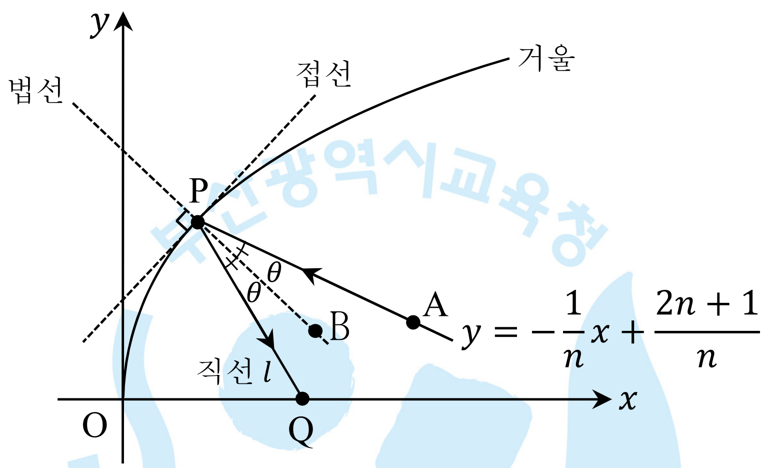
[1.3] 항아리에 물을 일정한 속도로 부으면, 물의 깊이 h는 시간 t에 따라 변한다. 물의 깊이가 가장 천천히 증가하는 때는 h가 얼마인지 예측하시오. (단답형) (4점)

10) 서울과학기술대학교 홈페이지

[1.4] 항아리에 분당 $300\pi cm^3$의 일정한 속도로 물을 부을 때, 문항 [1.3]의 예측이 맞는지 수식으로 설명하고 이때 시간 t에 따른 h의 증가율을 구하시오. (13점)

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (총33점)

다음 그림과 같이 직선 $y=-\frac{1}{n}x+\frac{2n+1}{n}$ (n은 1보다 큰 자연수)을 따라 직진하는 레이저 광선이 곡선 $y^2=4x$ $(y\geq 0)$ 모양의 거울에서 반사된다. 레이저 광선은 점 P에서 반사된 후 직선 l의 경로로 진행한다. 이때 $\angle APB=\angle BPQ=\theta$이다.



[2.1] 점 P에서 법선의 방정식을 구하시오. (12점)

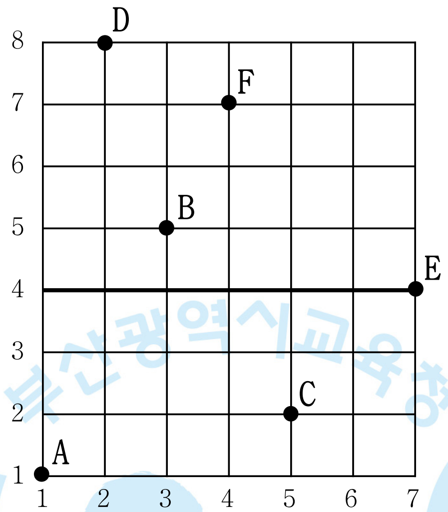
[2.2] 점 P에서의 법선과 직선 $y=-\frac{1}{n}x+\frac{2n+1}{n}$이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$를 구하시오. (8점)

[2.3] 반사된 레이저 광선의 경로를 나타내는 직선 l의 방정식을 구하시오. (9점)

[2.4] 레이저 광선의 경로 $y=-\frac{1}{n}x+\frac{2n+1}{n}$에서 자연수 n이 점점 커질 때, 반사된 레이저 광선의 경로와 x축이 만나는 점 Q는 어느 점에 가까워지는지 구하시오. (4점)

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (총33점)

여섯 개의 지점이 있는 음식점 체인이 있다. 각 지점의 위치는 A=(1,1), B=(3,5), C=(5,2), D=(2,8), E=(7,4), F=(4,7)이며, 이 도시의 도로망은 다음 그림과 같이 격자점이 가로 세로로 연결되어 있다.



각 지점에 식자재를 공급하기 위해서 다음 조건을 만족하도록 물류센터를 지으려고 한다.

1. 지점에는 물류센터를 지을 수 없다.
2. 물류센터는 도로의 교차점에 지어야 한다.
3. 물류센터에서 각 지점까지 배송차의 운행거리의 합이 최소이어야 한다.

[3.1] 물류센터에서 각 지점까지 차량 1대씩 식자재를 배송한다고 할 때, 가능한 물류센터의 위치를 모두 구하시오. (12점)

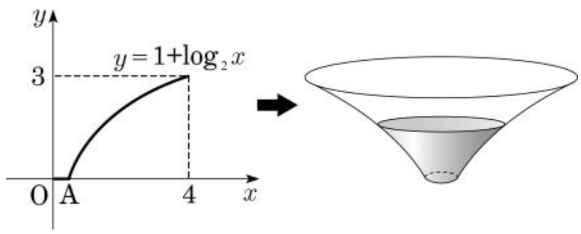
[3.2] 물류센터에서 지점 A, B, C, D 까지는 차량 1대씩 운행하고, 지점 E, F는 차량 2대씩 운행한다고 할 때, 가능한 물류센터의 위치를 모두 구하시오. (10점)

[3.3] 지점 A에서 지점 F까지 차량으로 이동하려고 한다. 도로를 따라 한 칸 이동할 때 걸리는 시간은 모두 같지만, 직선 $y=4$를 따라서 난 도로는 교통체증으로 인해 두 배의 시간이 걸린다. 지점 A에서 지점 F로 이동 할 때, 시간이 가장 적게 걸리는 경로는 모두 몇 가지인지 구하시오. (11점)

풀어보기

문제1

그림과 같이 원점 O와 점 $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$에 대하여 선분 OA와 곡선 $y=1+\log_2 x$ $\left(\frac{1}{2} \le x \le 4\right)$를 y축의 둘레로 회전시켜 만든 회전체 모양의 그릇이 있다.



이 그릇을 평평한 바닥에 놓고 매초 $12\pi\,\text{cm}^3$의 일정한 비율로 물을 넣고 있다. 수면이 상승하는 속도가 $6\,\text{cm}/$초가 되는 순간의 수면의 높이는 $a\,\text{cm}$이다. a의 값은?

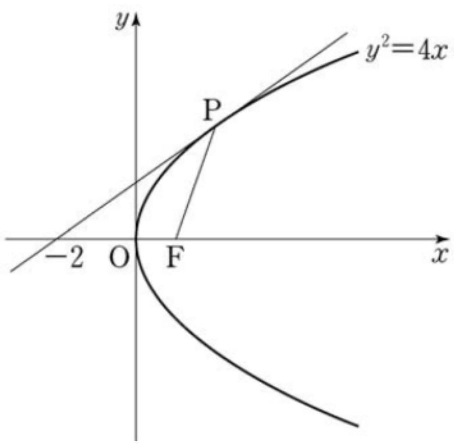
(단, 좌표축의 눈금 단위는 cm이다.) (2011. 전국연합)

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

문제2

그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=4x$ 위의 한 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2이다. $\cos(\angle \text{PFO})$의 값은?

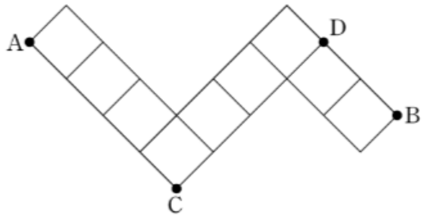
(단, O는 원점이다.) (2015. 평가원)



① $-\frac{5}{12}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{1}{4}$　④ $-\frac{1}{6}$　⑤ $-\frac{1}{12}$

문제3

그림과 같이 마름모 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 C지점을 지나지 않고, D 지점도 지나지 않으면서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? (2013. 대수능)



① 26 ② 24 ③ 22 ④ 20 ⑤ 18

예시답안

풀어보기(문제1)

수면의 높이가 h일 때 물의 부피 V는

$$V=\pi\int_0^h x^2dy=\pi\int_0^h (2^{y-1})^2dy$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}=\pi(2^{2h-2})\frac{dh}{dt}$$

이다. 따라서 수면이 상승하는 속도가 6 cm/초가 되는 순간 $\frac{dh}{dt}=6$이고 $\frac{dV}{dt}=12\pi$ 이므로

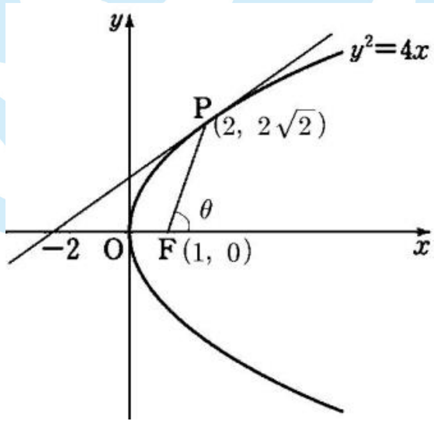
$$\pi(2^{2a-2})\cdot 6=12\pi$$

$$\therefore\ a=\frac{3}{2}$$

풀어보기(문제2)

점 $P(x_1,\ y_1)$라 하면

주어진 접선의 방정식은 $y_1y=2(x+x_1)$이고 x절편이 -2이므로 $x_1=-2$, $y_1=2\sqrt{2}$



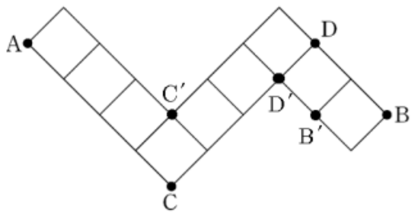
직선 PF의 기울기를 $\tan\theta$라 하면

$$\tan\theta=\frac{2\sqrt{2}-0}{2-1}=2\sqrt{2}$$

따라서 $\cos\theta=\frac{1}{3}$

$$\therefore\ \cos(\angle PFO)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-\frac{1}{3}$$

풀어보기(문제3)



A 지점에서 출발하여 C 지점을 지나지 않고, D 지점도 지나지 않으면서 B 지점까지 최단거리로 가려면 위의 그림에서 A→C′→D′→B′→B로 가야 한다.

(i) A 지점에서 C′ 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!\,1!}=4$

(ii) C′ 지점에서 D′ 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!\,1!}=3$

(iii) D′ 지점에서 B′ 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 1

(iv) B′ 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 $\frac{2!}{1!\,1!}=2$

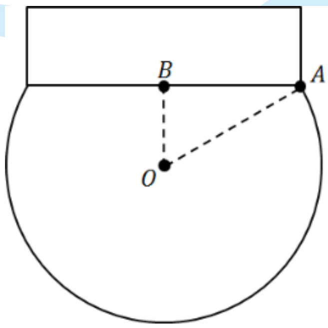
(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$4\times3\times1\times2=24$

[문제 1]

[1-1] 대학발표 예시답안

아래 그림과 같은 단면에서



원의 중심을 O, 원과 직사각형이 만나는 점을 A, 직사각형의 밑변의 중점을 B라 하면 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{OB}^2=\overline{OA}^2-\overline{AB}^2=400-300=100$$

이므로 $\overline{OB}=10$이다. 따라서 높이는 $20+10+10=40\,(cm)$이다.

[1-2] 대학발표 예시답안

수면은 항상 원이다. 먼저 $0 \le h \le 30$이라 하자. $0 \le x \le h$일 때 수면의 반지름을 r이라 하면 수면의 넓이 $S(x)$는

$$S(x) = \pi r^2 = \pi[20^2 - (20-x)^2] = \pi(40x - x^2)$$

이므로

$$V = \int_0^h \pi(40x - x^2)\,dx = \pi\left(20h^2 - \frac{1}{3}h^3\right)$$

이다. 다음으로 $30 \le h \le 40$이라 하자. $30 \le x \le h$일 때 수면의 넓이 $S(x)$는

$$S(x) = (10\sqrt{3})^2\pi = 300\pi$$

이므로

$$\begin{aligned} V(h) &= V(30) + 300\pi(h-30) \\ &= \pi\left(20 \times 30^2 - \frac{1}{3} \times 30^3\right) + 300\pi(h-30) = 300\pi h \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$V(h) = \begin{cases} \pi\left(20h^2 - \dfrac{1}{3}h^3\right) & (0 \le h < 30) \\ 300\pi h & (30 \le h \le 40) \end{cases}$$

이다.

[1-3] 대학발표 예시답안

$h = 20\,cm$일 때이다.

[1-4] 대학발표 예시답안

문항 [1-2]에서 구한 $V(h)$를 t로 미분하면

$$\frac{dV}{dt} = \begin{cases} \pi\left(40h\dfrac{dh}{dt} - h^2\dfrac{dh}{dt}\right) & (0 < h < 30) \\ 300\pi\dfrac{dh}{dt} & (30 < h < 40) \end{cases}$$

이다. 그런데 $\dfrac{dV}{dt} = 300\pi$이므로

$$\frac{dh}{dt} = \begin{cases} \dfrac{300}{40h - h^2} & (0 < h < 30) \\ 1 & (30 < h < 40) \end{cases}$$

이다. 여기서 $0 < h < 30$일 때 $40h - h^2 = -(h-20)^2 + 400$이므로 $\dfrac{dh}{dt}$의 최솟값은 $h = 20$일 때 $\dfrac{3}{4}$이고, $30 < h < 40$일 때 $\dfrac{dh}{dt}$의 값은 1이다. 따라서 $\dfrac{dh}{dt}$의 최솟값은 $h = 20$일 때이고, 이때 h의 증가율은 $\dfrac{3}{4}\,(cm/분)$이다.

[2-1] 대학발표 예시답안

거울의 방정식과 레이저 광선의 방정식을 연립하여 풀면

$$y^2+4ny-8n-4=0$$

이므로

$$(y-2)(y+4n+2)=0$$

이다. 그런데 거울은 $y\geq 0$에서만 정의되므로 교점 P의 좌표는 $(1,2)$이다. 또 $y^2=4x$를 x에 대하여 미분하면

$$y'=\frac{2}{y}$$

이므로 점 P에서 접선의 기울기는 1이고, 법선의 기울기는 -1이다. 따라서 법선의 방정식은

$$y-2=-(x-1)$$

즉, $y=-x+3$이다.

[2-2] 대학발표 예시답안

직선 $y=-\frac{1}{n}x+\frac{2n+1}{n}$의 방향벡터는 $\overrightarrow{PA}=(n,-1)$이고 법선의 방향벡터는 $\overrightarrow{PB}=(1,-1)$이므로

$$\cos\theta=\frac{(n,-1)\cdot(1,-1)}{|(n,-1)||(1,-1)|}=\frac{n+1}{\sqrt{2}\sqrt{n^2+1}}$$

이다.

[2-3] 대학발표 예시답안

직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}=(1,k)$라 하면, 법선의 방향벡터 $\overrightarrow{PB}=(1,-1)$과 $\vec{u}$ 사이의 각이 θ이므로

$$\frac{1-k}{\sqrt{2}\sqrt{1+k^2}}=\cos\theta=\frac{n+1}{\sqrt{2}\sqrt{n^2+1}}$$

이어야 한다. 이 식을 간단히 하면

$$nk^2+(n^2+1)k+n=0$$

즉,

$$(nk+1)(k+n)=0$$

이므로 $k=-\frac{1}{n}, -n$이다. 여기서 $k=-\frac{1}{n}$일 때는 주어진 직선 $y=-\frac{1}{n}x+\frac{2n+1}{n}$의 방향벡터를 나타내므로, $k=-n$이다. 즉 직선 l의 방향벡터는 $(1,-n)$이다. 따라서 직선 l의 방정식은

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-n}$$

즉, $y=-nx+n+2$이다.

[2-4] 대학발표 예시답안

직선 l이 x축과 만나는 점의 x좌표는 $\frac{n+2}{n}$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n}=1$이므로 점 Q는 점 $(1,0)$에 가까워진다.

[3-1] 대학발표 예시답안

물류센터의 위치를 (m,n)이라 하면, 가로방향의 운행거리의 합은
$f(m)=|m-1|+|m-3|+|m-5|+|m-2|+|m-7|+|m-4| \quad (m=1,2,\cdots,7)$
이므로

m	1	2	3	4	5	6	7
$f(m)$	16	12	10	10	12	16	20

이다. 따라서 $m=3,4$일 때 최솟값 10을 갖는다. 세로방향의 운행거리의 합은
$g(n)=|n-1|+|n-5|+|n-2|+|n-8|+|n-4|+|n-7| \quad (n=1,2,\cdots,8)$
이므로

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(n)$	21	17	15	13	13	15	17	21

이다. 따라서 $n=4,5$일 때 최솟값 13을 갖는다. 그런데 $(3,5)$에는 이미 지점이 있으므로 물류센터의 위치는 $(3,4)$, $(4,4)$, $(4,5)$가 가능하다.

[3-2] 대학발표 예시답안

물류센터의 위치를 (m,n)이라 하면, 지점 E, F는 2대씩 운행하므로 가로방향의 운행거리의 합은
$f(m)=|m-1|+|m-3|+|m-5|+|m-2|+2|m-7|+2|m-4| \quad (m=1,2,\cdots,7)$
이므로

m	1	2	3	4	5	6	7
$f(m)$	25	19	15	13	15	19	23

이다. 따라서 $m=4$일 때 최솟값 13을 갖는다. 세로방향의 운행거리의 합은
$g(n)=|n-1|+|n-5|+|n-2|+|n-8|+2|n-4|+2|n-7| \quad (n=1,2,\cdots,8)$
이므로

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(n)$	30	24	20	16	16	18	20	26

이다. 따라서 $n=4,5$일 때 최솟값 16을 갖는다. 따라서 물류센터의 위치는 $(4,4)$, $(4,5)$가 가능하다.

[3-3] 대학발표 예시답안

지점 A에서 출발하여 $y=4$인 위치에 도달하면 세로로 한 칸 이동하여 $y=5$인 곳으로 이동한 후 지점 F까지 가면 된다. 따라서 여덟 번의 이동 경로 중에서 가로로 세 번 이동하면 되므로

$$ {}_{8}\mathrm{C}_{3}=56 $$

가지이다.

13 단국대학교 모의(자연계열)11)

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고교 수학 교과의 기본개념, 원리를 바탕으로 추론, 서술하는 능력을 평가함(반영 점수는 600점)	없음	수학 (2문항, 6문제)	120분

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (40점)

(가) 평면에서 한 점 O를 고정하면 임의의 벡터 $\vec{p}$에 대하여 $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$인 점 P의 위치가 하나로 정해진다. 역으로 임의의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$인 벡터 $\vec{p}$가 하나로 정해진다. 이와 같이 좌표평면에서 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OP}$를 점 P에 대한 위치벡터라고 한다.

(나) 좌표평면 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 Q라 하면, $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n}$이다.

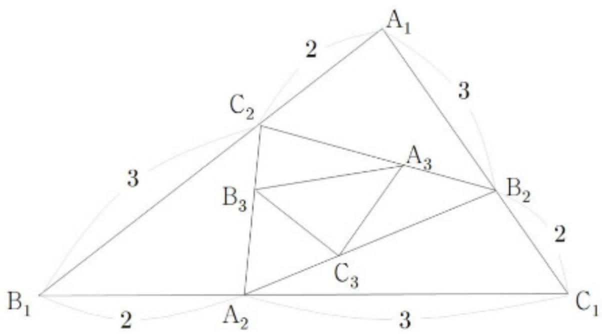
※ 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n, B_n, C_n이 다음 조건을 만족시킨다.

① 삼각형 $A_1B_1C_1$의 넓이는 625이다.

② $\overrightarrow{OA_{n+1}}=\dfrac{1}{5}\left(3\overrightarrow{OB_n}+2\overrightarrow{OC_n}\right)$

$\overrightarrow{OB_{n+1}}=\dfrac{1}{5}\left(3\overrightarrow{OC_n}+2\overrightarrow{OA_n}\right)$

$\overrightarrow{OC_{n+1}}=\dfrac{1}{5}\left(3\overrightarrow{OA_n}+2\overrightarrow{OB_n}\right)$



[1.1] $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}=a\overrightarrow{A_1B_1}+b\overrightarrow{A_1C_1}$ 을 만족시키는 실수 a, b의 값을 구하시오.(10점)

11) 단국대학교 홈페이지

[1.2] 삼각형 $A_3B_3C_3$의 넓이를 구하시오. (10점)

[1.3] 다음 조건을 만족시키는 점 P에 대하여 삼각형 PA_1B_1의 넓이를 구하시오. (20점)

$n \to \infty$일 때, 선분의 길이 $\overline{A_nP}$, $\overline{B_nP}$, $\overline{C_nP}$가 모두 0으로 수렴한다.

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (60점)

(가) 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a) \quad (a \le x \le b)$$

가 성립한다. 따라서 $a \le g(x) \le b$인 함수 $g(x)$에 대하여

$$\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = F(g(x)) - F(g(a))$$

이다. 그러므로 미분가능한 함수 $g : (c, d) \to [a, b]$에 대하여 함수

$H(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$는 구간 (c, d)에서 미분가능하고,

$$\frac{d}{dx}H(x) = f(g(x))\,g'(x)$$

이다.

(나) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x = c$에서 극값을 가지면 $f'(c) = 0$이다.

이때 x가 증가하면서 $x = c$를 지날 때 $f'(x)$의 부호가

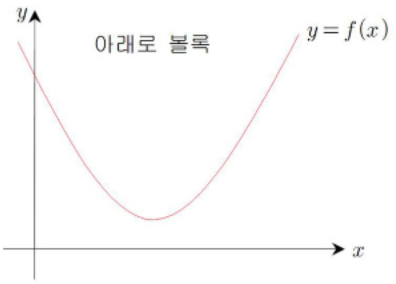
- 양에서 음으로 변하면 $f(x)$는 $x = c$에서 극댓값을 가진다.
- 음에서 양으로 변하면 $f(x)$는 $x = c$에서 극솟값을 가진다.

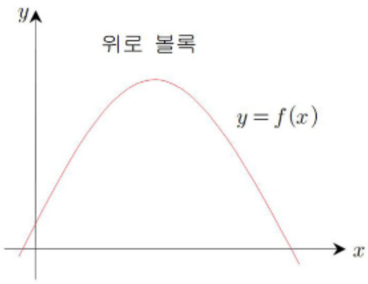
또한 이계도함수를 가지는 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(c) = 0$일 때

- $f''(c) < 0$이면 $f(x)$는 $x = c$에서 극댓값을 가진다.
- $f''(c) > 0$이면 $f(x)$는 $x = c$에서 극솟값을 가진다.

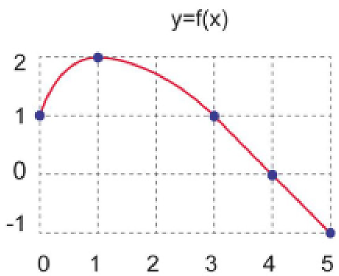
(다) 함수 $f(x)$의 정의역과 치역, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, x절편과 y절편, 연속성 등을 알면 그 그래프의 개형을 그릴 수 있다. 이계도함수를 가지는 함수 $f(x)$에 대하여

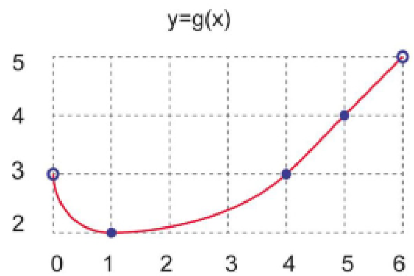
- 구간 (a, b)에서 항상 $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 (a, b)에서 아래로 볼록하다.
- 구간 (a, b)에서 항상 $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 (a, b)에서 위로 볼록하다.





[2.1] 아래 그림은 정의역이 구간 $[0, 5]$이고 치역이 구간 $[-1, 2]$인 연속함수 $f(x)$와 정의역이 구간 $(0, 6)$이고 치역이 구간 $[2, 5]$인 미분가능한 함수 $g(x)$의 그래프이다.





함수 $H(x)=\int_{a}^{g(x)} f(t)\,dt$가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 a와 b의 값을 구하시오. (단, $0 \le a \le 5$) (20점)

① $H(x)$의 극솟값은 0이다. ② $H(x)$는 $x=b$에서 극댓값을 갖는다.

[2.2] 모든 실수 x에 대하여

$$A(x)=\int_{0}^{1}\left|e^{t}-x\right|dt$$

라 할 때, 함수 $A(x)$의 최솟값을 구하고, $y=A(x)$의 그래프를 그리시오. (20점)

[2.3] 구간 $[0, 2]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

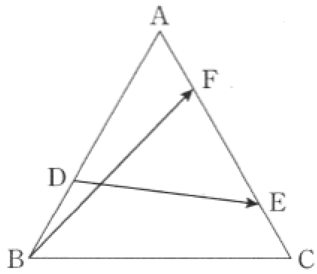
$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{x+t}}{f(x-t)}\,dt \quad (0 \le x \le 2)$$

라 하자. 함수 $F(x)$가 $x=1$에서 극값 -2를 가질 때, $f(1)$의 값을 구하시오. (단, $[0, 2]$에서 $f(x) \neq 0$이다.) (20점)

풀어보기

문제1

한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC에서 변 AB를 2:1로 내분하는 점을 D라 하고, 변 AC를 3:1과 1:3으로 내분하는 점을 각각 E, F라 할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2$의 값을 구하시오. (2013년 9월 평가원)



문제2

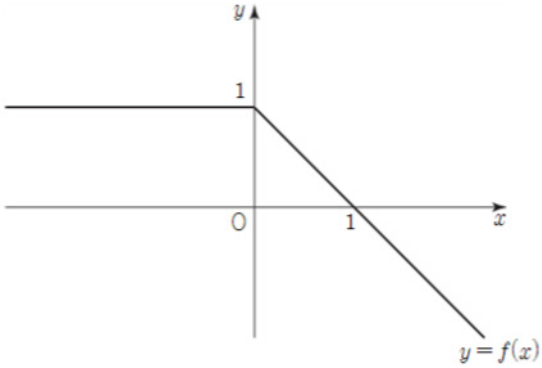
함수 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$에 대하여

$$F(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt \qquad (x\geq 0)$$

일 때, $F'(a)=\ln 10$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오. (2013년 6월 평가원)

문제3

그림은 함수 $f(x)=\begin{cases}1 & (x\leq 0)\\ -x+1 & (x>0)\end{cases}$의 그래프이다.



실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_{-1}^{x} e^t f(t)\,dt$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르시오. (2013년 전국연합)

<보기>

ㄱ. $g(0)=1-\dfrac{1}{e}$

ㄴ. 함수 $g(x)$는 극댓값 $e-\dfrac{1}{e}$을 갖는다.

ㄷ. 방정식 $g(x)=0$의 실근의 개수는 2이다.

예시답안

풀어보기(문제1)

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}$라 하면 점 F는 변 AC를 1:3으로 내분하는 점이므로 $\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\dfrac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}$, 점 D는 변 AB를 2:1로 내분하는 점이므로 $\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}$이다.

$$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$$

점 E는 변 AC를 3:1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}}{4}=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\vec{a}\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2&=\left|\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}+\frac{-\vec{a}+9\vec{b}}{12}\right|^2=\left|\frac{8\vec{a}+12\vec{b}}{12}\right|^2=\left|\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}\right|^2\\&=\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}\right)\\&=\frac{4}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{3}(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2\\&=4+\frac{4}{3}|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ+9\\&=4+\frac{4}{3}\times3\times3\times\frac{1}{2}+9=19\end{aligned}$$

풀어보기(문제2)

$x-t=s$로 놓으면 $t=x-s$, $-dt=ds$

$$F(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt=\int_x^0(x-s)f(s)(-ds)=\int_0^x(x-s)f(s)\,ds$$

이므로

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left\{x\int_0^x f(s)ds-\int_0^x sf(s)\,ds\right\}=\int_0^x f(s)\,ds$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1+s}ds=[\,\ln|1+s|\,]_0^x=\ln|1+x|$$

따라서 $F'(a)=\ln|1+a|=\ln 10$에서 $a=9$이다.

풀어보기(문제3)

ㄱ. $x\le0$일 때, $f(x)=1$이므로 $g(0)=\displaystyle\int_{-1}^0 e^t f(t)\,dt=\int_{-1}^0 e^t\,dt=[e^t]_{-1}^0=1-\frac{1}{e}$ (참)

ㄴ. $g'(x)=e^x f(x)=0$이면 $f(x)=0$이므로 $x=1$
함수 $g(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	$e-1-\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

그러므로 함수 $g(x)$는 극댓값 $e-1-\dfrac{1}{e}$을 갖는다. (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 방정식 $g(x)=0$은 많아야 2개의 실근을 갖는다.

(ⅰ) $g(-1)=0$이므로 한 실근을 갖는다.

(ⅱ) $g(1)=e-1-\dfrac{1}{e}>0$, $g(2)=-1-\dfrac{1}{e}<0$

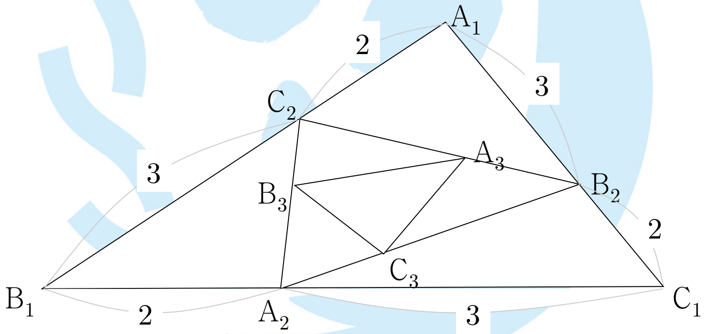
이므로 사이값 정리에 의하여 열린 구간 $(1, 2)$에서 적어도 한 실근을 갖는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 방정식 $g(x)=0$의 실근의 개수는 2이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[1-1] 대학발표 예시답안

점 A_n, B_n, C_n의 정의로부터 점 A_{n+1}은 선분 B_nC_n을 $2:3$으로 내분하는 점, 점 B_{n+1}은 선분 C_nA_n을 $2:3$으로 내분하는 점, 점 C_{n+1}은 선분 A_nB_n을 $2:3$으로 내분하는 점임을 알 수 있다.



$$\overrightarrow{A_1A_2}=\frac{1}{5}\left(3\overrightarrow{A_1B_1}+2\overrightarrow{A_1C_1}\right)$$

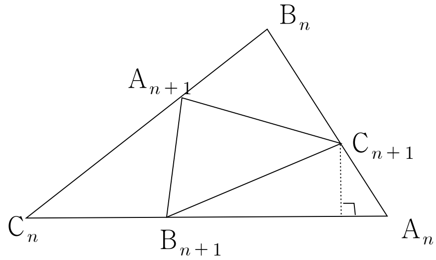
이고

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_1B_2}&=\frac{1}{5}\left(3\overrightarrow{B_1C_1}+2\overrightarrow{B_1A_1}\right)\\&=\frac{1}{5}\left\{3\left(\overrightarrow{A_1C_1}-\overrightarrow{A_1B_1}\right)-2\overrightarrow{A_1B_1}\right\}\\&=\frac{1}{5}\left(3\overrightarrow{A_1C_1}-5\overrightarrow{A_1B_1}\right)\end{aligned}$$

이므로 $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}=-\dfrac{2}{5}\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1C_1}$ 이다. 따라서 $a=-\dfrac{2}{5}$, $b=1$이다.

[1-2] 대학발표 예시답안

삼각형 ABC 의 넓이를 △ABC 로 나타내자.
그림으로부터



$$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_{n+1}} \cdot \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_{n+1}}\sin\angle\mathrm{A}_n$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}\right)\left(\frac{2}{5}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\right)\sin\angle\mathrm{A}_n$$
$$= \frac{6}{25}\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$$

이다. 같은 방법으로

$$\triangle\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} = \triangle\mathrm{C}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1} = \frac{6}{25}\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\triangle\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} = \triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n - 3\times\frac{6}{25}\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n = \frac{7}{25}\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$$

이므로

$$\triangle\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3\mathrm{C}_3 = \frac{7}{25}\triangle\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2 = \left(\frac{7}{25}\right)^2\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1 = 49$$

이다.

(다른풀이)

$\triangle\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{B}_{n+1}$ 와 $\triangle\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_n$ 에서 $\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_{n+1}} : \overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_n} = 2:3$ 이므로

$\triangle\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_n = \frac{3}{5}\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ 이다.

$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$ 와 $\triangle\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$ 에서 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_{n+1}} : \overline{\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{B}_n} = 2:3$ 이므로

$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1} = \frac{2}{5}\triangle\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} = \frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n = \frac{6}{25}\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ 이다.

같은 방법으로

$$\triangle\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} = \triangle\mathrm{C}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1} = \frac{6}{25}\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\triangle\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} = \triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n - 3\times\frac{6}{25}\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n = \frac{7}{25}\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$$

이므로

$$\triangle\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3\mathrm{C}_3 = \frac{7}{25}\triangle\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2 = \left(\frac{7}{25}\right)^2\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1 = 49$$

이다.

[1-3] 대학발표 예시답안

$\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}=(p_n, q_n)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}_n}=(r_n, s_n)$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}=(t_n, u_n)$이라 하면 주어진 조건 ②에 의하여 다음이 성립한다.

$$p_n+r_n+t_n=p_{n+1}+r_{n+1}+t_{n+1}$$
$$q_n+s_n+u_n=q_{n+1}+s_{n+1}+u_{n+1}$$

따라서 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 무게중심과 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$의 무게중심은 동일하다.

조건으로부터 $n\to\infty$일 때, 선분의 길이 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{P}}$, $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{P}}$, $\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{P}}$가 모두 0으로 수렴하므로 점 P의 좌표를 (α, β)라 하면,

$$p_n\to\alpha,\ r_n\to\alpha,\ t_n\to\alpha,\ q_n\to\beta,\ s_n\to\beta,\ u_n\to\beta$$

이다. 따라서

$$\frac{p_1+r_1+t_1}{3}=\frac{p_n+r_n+t_n}{3}\to\alpha$$
$$\frac{q_1+s_1+u_1}{3}=\frac{q_n+s_n+u_n}{3}\to\beta$$

이므로 $\alpha=\dfrac{p_1+r_1+t_1}{3}$, $\beta=\dfrac{q_1+s_1+u_1}{3}$이다. 그러므로 점 P는 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$의 무게중심이고 삼각형 $\mathrm{PA}_1\mathrm{B}_1$의 넓이는 $\dfrac{625}{3}$이다.

(다른 풀이)

삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 무게중심을 G_n이라 하면 조건 ②에 의해

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}_n}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}+\overrightarrow{\mathrm{OB}_n}+\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+1}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}_{n+1}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}_{n+1}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{OG}_{n+1}}$$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 무게중심과 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$의 무게중심은 동일하다.

조건으로부터 $n\to\infty$일 때, 선분의 길이 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{P}}$, $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{P}}$, $\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{P}}$가 모두 0으로 수렴하고

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{P}}+\overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{P}}+\overrightarrow{\mathrm{C}_n\mathrm{P}}\right|\le\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{P}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{P}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{C}_n\mathrm{P}}\right|$$

이므로 $n\to\infty$일 때 $\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{P}}+\overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{P}}+\overrightarrow{\mathrm{C}_n\mathrm{P}}$는 $\vec{0}$에 수렴한다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{P}}+\overrightarrow{\mathrm{B}_n\mathrm{P}}+\overrightarrow{\mathrm{C}_n\mathrm{P}}&=3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}+\overrightarrow{\mathrm{OB}_n}+\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}\right)\\&=3\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}_n}\right)=3\overrightarrow{\mathrm{G}_n\mathrm{P}}\end{aligned}$$

이므로 $n\to\infty$일 때 점 G_n이 점 P에 수렴한다. 그런데 모든 자연수 n에 대하여 점 G_n은 G_1으로 동일한 점이므로 점 P는 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$의 무게중심이고 삼각형 $\mathrm{PA}_1\mathrm{B}_1$의 넓이는 $\dfrac{625}{3}$이다.

[2-1] 대학발표 예시답안

함수 $H(x)$의 극값은 $H'(x)=f(g(x))g'(x)=0$을 만족시키는 x에서 갖는다.
$f(g(x))=0$으로부터 $g(x)=4$, 즉 $x=5$이다. 또한 $g'(x)=0$으로부터 $x=1$이다.
따라서 $H(x)$의 극값은 $x=1$ 또는 $x=5$에서만 가질 수 있다.
(i) $x=1$
x가 증가하면서 $x=1$을 지날 때 $f(g(x))$의 부호는 계속 양이고, $g'(x)$의 부호는 음에서 양으로 변한다. 따라서 $H'(x)$의 부호는 음에서 양으로 변하므로 $H(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
(ii) $x=5$
x가 증가하면서 $x=5$를 지날 때 $f(g(x))$의 부호는 양에서 음으로 변하고, $g'(x)$의 부호는 계속 양이다. 따라서 $H'(x)$의 부호는 양에서 음으로 변하므로 $H(x)$는 $x=5$에서 극댓값을 갖는다.

조건으로부터 $H(1)=\int_a^{g(1)} f(t)\,dt=0$이므로 $a=g(1)=2$이다. 즉 $a=2$, $b=5$이다.

[2-2] 대학발표 예시답안

$0\le t\le 1$일 때 $1-x\le e^t-x\le e-x$이므로

(i) $x<1$, (ii) $1\le x<e$, (iii) $e\le x$

의 3가지 경우로 나누어 생각한다.

(i) $x<1$인 경우

$e^t>x$이므로 $A(x)=\int_0^1 (e^t-x)\,dt=-x+e-1$이다.

(ii) $1\le x<e$인 경우

$e^t=x$로부터 $t=\ln x$를 얻는다.

$0\le t<\ln x$일 때 $e^t\le x$이고, $\ln x\le t<1$일 때, $e^t\ge x$이므로

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^{\ln x}(x-e^t)\,dt+\int_{\ln x}^1 (e^t-x)\,dt \\ &= 2x\ln x-3x+e+1 \end{aligned}$$

이다.

(iii) $e\le x$인 경우

$e^t\le x$이므로 $A(x)=\int_0^1 (x-e^t)\,dt=x-e+1$이다.

(i), (ii), (iii)으로부터

$$A(x)=\int_0^1 |e^t-x|\,dt=\begin{cases} -x+e-1 & (x<1) \\ 2x\ln x-3x+e+1 & (1\le x<e) \\ x+1-e & (x\ge e) \end{cases}$$

이다.

이제 $A(x)$의 그래프를 그리자.

① $A(x)$의 정의역

모든 실수 x에 대하여 $A(x)$가 존재하므로 함수 $A(x)$의 정의역은 실수집합이다.

② 그래프의 증가와 감소, 극댓값과 극솟값

$x \le 1$에서 $A(x)$는 감소하는 일차함수이고 $A(1)=e-2$이다.

$x \ge e$에서 $A(x)$는 증가하는 일차함수이고 $A(e)=1$이다.

$1<x<e$에서 $A'(x)=2\ln x-1$이다. $A'(x)=0$으로부터 $A(x)$는 $x=\sqrt{e}$에서 극값 $e-2\sqrt{e}+1$을 갖는다.

③ 그래프의 볼록 방향과 변곡점

$1<x<e$에서 $A''(x)=\dfrac{2}{x}>0$이므로 이 구간에서 아래로 볼록하다.

따라서 $A(\sqrt{e})=e-2\sqrt{e}+1$은 극솟값이다.

④ x축, y축의 교점, 대칭성과 주기

(ⅰ) $x<1$에서는 x절편은 없고, y절편은 $y=e-1$

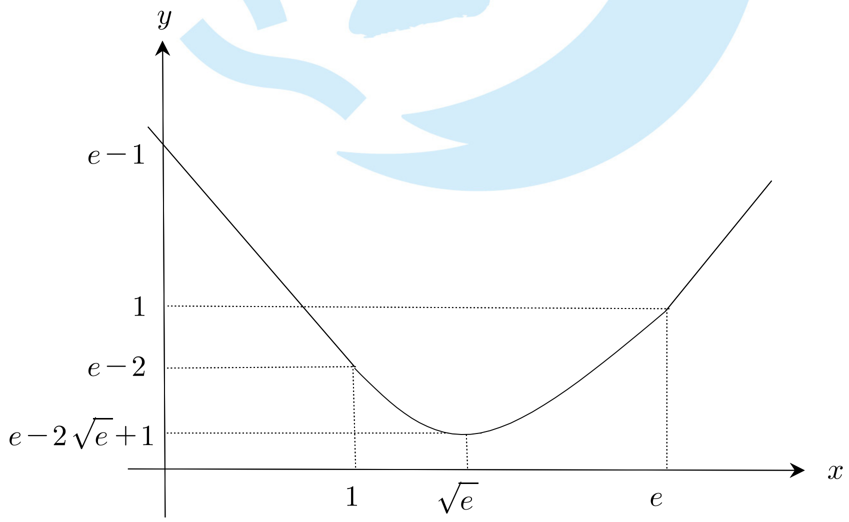
(ⅱ) $x \ge e$에서는 x, y축과 만나지 않는다.

(ⅲ) $1 \le x < e$에서는 아래로 볼록하고 극솟값이

$A(\sqrt{e})=e-2\sqrt{e}+1=(\sqrt{e}-1)^2>0$이므로 x축과 만나지 않는다.

⑤ $\lim\limits_{x\to-\infty} A(x)=\lim\limits_{x\to\infty} A(x)=\infty$이다.

따라서 $A(x)$의 최솟값은 $e-2\sqrt{e}+1$이고, $y=A(x)$의 그래프는 다음과 같다.



[2-3] 대학발표 예시답안

$x-t=s$로 치환하면 치환적분법으로부터

$$F(x)=\int_0^x \frac{e^{x+t}}{f(x-t)}\,dt=-\int_x^0 \frac{e^{2x-s}}{f(s)}\,ds=\int_0^x \frac{e^{2x-s}}{f(s)}\,ds=e^{2x}\int_0^x \frac{e^{-s}}{f(s)}\,ds$$

이 성립한다. 따라서

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2e^{2x}\int_0^x \frac{e^{-s}}{f(s)}\,ds+e^{2x}\frac{e^{-x}}{f(x)} \\ &= 2F(x)+\frac{e^x}{f(x)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (*) \end{aligned}$$

이다. 한편 $F(x)$가 $x=1$에서 극값 -2를 가지므로 $F'(1)=0$, $F(1)=-2$가 되어, $(*)$로부터 $0=2(-2)+\dfrac{e}{f(1)}$를 얻는다. 따라서 $f(1)=\dfrac{e}{4}$이다.

14 부산대학교 자연계열

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	○	수학 (3문항, 6문제)	100분

[문항1] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

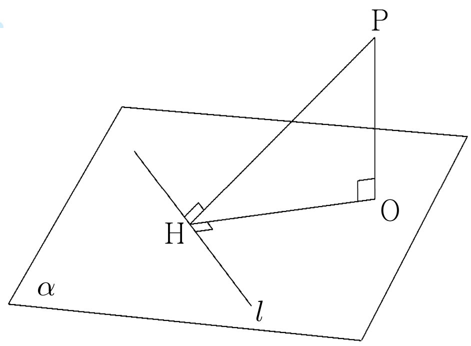
(가) (삼수선의 정리)

평면 α 위에 있지 않은 한 점 P와 평면 α 위에 있는 직선 l, 직선 l 위에 있는 한 점 H, 평면 α 위에 있으면서 직선 l 위에 있지 않은 점 O에 대하여 아래의 사실이 성립한다.

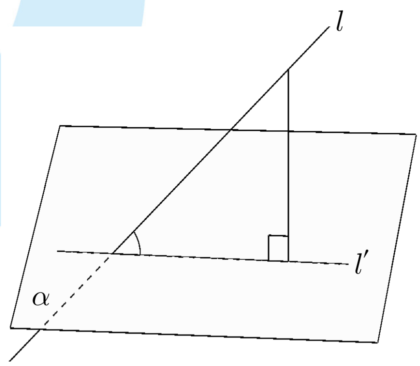
(1) $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{OH}} \perp l$이면 $\overline{\mathrm{PH}} \perp l$이다.

(2) $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{PH}} \perp l$이면 $\overline{\mathrm{OH}} \perp l$이다.

(3) $\overline{\mathrm{PH}} \perp l$, $\overline{\mathrm{OH}} \perp l$, $\overline{\mathrm{PO}} \perp \overline{\mathrm{OH}}$ 이면 $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha$이다.



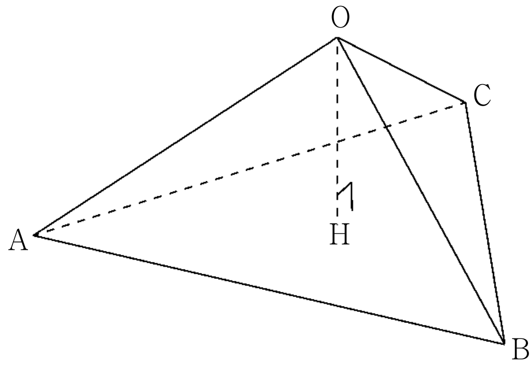
(나) 그림과 같이 직선 l과 평면 α가 한 점에서 만나고 수직이 아닐 때, 직선 l의 평면 α 위로의 정사영을 직선 l'이라고 하자. 이때 두 직선 l과 l'이 이루는 각을 직선 l과 평면 α가 이루는 각이라고 한다.



사면체 OABC에서 $\overline{\mathrm{OA}}, \overline{\mathrm{OB}}, \overline{\mathrm{OC}}$는 각각 서로 수직이며, $\overline{\mathrm{OA}}=2$, $\overline{\mathrm{OB}}=2$, $\overline{\mathrm{OC}}=1$이다. 점 O에서 밑면 ABC에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 다음 논제에 답하시오.

1-1. 점 O에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 D라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{HD}}$가 서로 수직임을 제시문을 이용하여 설명하시오. (10점)

1-2. 평면 OAB와 직선 OH가 이루는 각을 θ라 할 때, $\sin^2\theta$의 값을 구하시오. (20점)



[문항2] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

(나) (합성함수의 미분법)
미분가능한 두 함수 $y=f(z)$, $z=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$ 또는 $y'=f'(g(x))g'(x)$이다.

(다) (치환적분법)
미분가능한 함수 $g(y)$에 대하여 $x=g(y)$로 놓으면
$\int f(x)\,dx=\int f(g(y))g'(y)\,dy$ 이다.

구간 $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$에서 정의된 연속함수 $f(x)=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$에 대하여 다음 논제에 답하시오.

2-1. 구간 $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$에서 함수 $f(x)$의 값의 범위와 역함수를 구하시오. (15점)

2-2. 논제 2-1에서 구한 역함수와 제시문 (다)를 이용하여 $\int_{\frac{4}{5}}^{1} f(x)\,dx$의 값을 구하시오. (20점)

[문항3] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

> 서로 다른 n개의 원소 중에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 것을 조합이라고 한다.
> 특히, 서로 다른 n개의 원소에서 중복됨이 없이 r개를 택하는 조합의 수를 기호 ${}_nC_r$로 나타내고, ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ 이다. (단, $0 \le r \le n$)

n명의 학생이 있는 어떤 학급에서 동아리 학생을 선발하려고 한다. 한 학생이 여러 동아리에 중복하여 선발될 수 있으며 학생을 선발하는 순서는 생각하지 않는다. (단, $n \ge 6$)

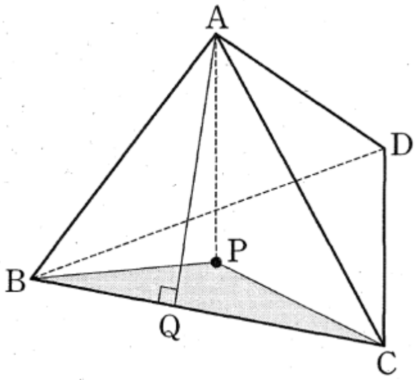
3-1. 이 학급의 학생들 중에서 수학 동아리와 과학 동아리 학생을 각각 3명씩 선발하려고 한다. 수학 동아리와 과학 동아리에 중복하여 선발되는 학생이 1명만 되도록 동아리 학생을 선발하는 경우의 수를 구하시오. (15점)

3-2. 이 학급의 학생들 중에서 여행 동아리, 미술 동아리, 음악 동아리 학생을 각각 2명씩 선발하려고 한다. 세 동아리에 선발된 학생 수의 총합이 4명이 되도록 동아리 학생을 선발하는 경우의 수를 구하시오. (20점)

풀어보기

문제1

그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{BC}=12$, $\cos(\angle ABC)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 인 사면체 ABCD에 대하여 점 A의 평면 BCD 위로의 정사영을 P라 하고 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 Q라 하자. $\cos(\angle AQP)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 일 때, 삼각형 BCP의 넓이는 k이다. k^2의 값을 구하시오. (2016년 대입 9월 평가원)



문제2

두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$g(e^x)=\begin{cases} f(x) & (0 \le x < 1) \\ g(e^{x-1})+5 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

를 만족시키고, $\displaystyle\int_1^{e^2} g(x)\,dx = 6e^2+4$ 이다. $\displaystyle\int_1^{e} f(\ln x)\,dx = ae+b$ 일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.) (2014년 대입 9월 평가원)

문제3

A, B 두 사람이 서로 다른 4개의 동아리 중에서 2개씩 가입하려고 한다. A와 B가 공통으로 가입하는 동아리가 1개 이하가 되도록 하는 경우의 수를 구하시오. (단, 가입 순서는 고려하지 않는다.) (2011년 대입 6월 평가원)

예시답안

풀어보기(문제1) 정답 162

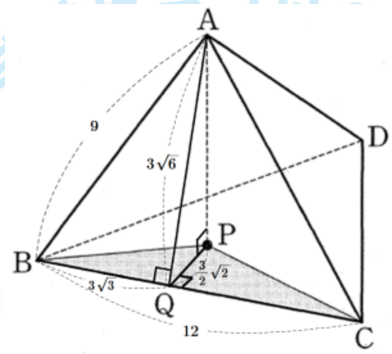
삼각형 BCP는 삼각형 ABC를 밑면에 내린 정사영이다. $\angle ABQ=\alpha$, $\angle AQP=\beta$라 하면

$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$이고, 삼각형 ABC와 BCP의 넓이를 각각 S, S'라 하면

$$\begin{aligned}S'&=S\cos\beta\\&=\frac{1}{2}\times12\times9\times\sin\alpha\times\cos\beta\\&=9\sqrt{2}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $k^2=162$ 이다.

[다른 풀이]



삼수선의 정리에 의하여 선분 PQ와 선분 BC는 수직이고, 주어진 조건에 의하여

$\overline{BQ}=3\sqrt{3}$, $\overline{AQ}=3\sqrt{6}$, $\overline{PQ}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$이다. 삼각형 BCP의 넓이($=k$)는

$k=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\times12\times\dfrac{3}{2}\sqrt{2}=9\sqrt{2}$ 이고 $k^2=162$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 17

$g(e^x)=\begin{cases}f(x) & (0\le x<1)\\ g(e^{x-1})+5 & (1\le x\le 2)\end{cases}$ 에서 $e^x=t$로 놓으면 $x=\ln t$이고

x가 0, 1, 2일 때, t는 각각 1, e, e^2 이므로

$$g(t)=\begin{cases}f(\ln t) & (1\le t<e)\\ g\left(\dfrac{t}{e}\right)+5 & (e\le t\le e^2)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&\int_1^{e^2}g(x)dx\\&=\int_1^e g(x)dx+\int_e^{e^2}g(x)dx\\&=\int_1^e f(\ln x)dx+\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+5\right\}dx=6e^2+4\ \cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

$\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+5\right\}dx$에서 $\frac{x}{e}=u$라 하면 $dx=e\cdot du$이고

x가 e, e^2일 때, u는 각각 1, e이므로

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+5\right\}dx &= \int_1^e \{g(u)+5\}e\,du \\ &= e\int_1^e g(u)du+5e(e-1) \\ &= e\int_1^e f(\ln u)du+5e(e-1) \\ &= e\int_1^e f(\ln x)dx+5e(e-1)\end{aligned}$$

이다. 따라서 ㉠은

$$\begin{aligned}&\int_1^e f(\ln x)dx+e\int_1^e f(\ln x)dx+5e(e-1) \\ &= (e+1)\int_1^e f(\ln x)dx+5e(e-1) \\ &= 6e^2+4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^e f(\ln x)dx &= \frac{6e^2+4-5e(e-1)}{e+1} \\ &= \frac{e^2+5e+4}{e+1} \\ &= e+4\end{aligned}$$

$\therefore\ a=1,\ b=4$

$\therefore\ a^2+b^2=17$

풀어보기(문제3) 정답 30

A와 B가 각각 2개의 동아리에 가입하는 경우의 수는 ${}_4C_2\times{}_4C_2=6\times6=36$이다. 이때 두 사람이 공통으로 가입하는 동아리가 2개인 경우의 수는 ${}_4C_2=6$이므로 구하는 경우의 수는 $36-6=30$이다.

[문항1]

1-1. (대학발표 예시답안) 주어진 문제에서 (면 ABC)$\perp\overline{OH}$이고, $\overline{AB}\perp\overline{OD}$이다. 제시문 (가)의 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HD}\perp\overline{AB}$이다.

1-2. $\overline{AC}=\sqrt{5}$, $\overline{BC}=\sqrt{5}$, $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{CD}=\sqrt{3}$이므로 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}$이다. 한편, 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times2$이므로 사면체 OABC의 부피는

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}\right)\times\overline{OH}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)\times1$$

이고 이것을 풀면 $\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 이다. $\overline{\mathrm{OD}}=\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 ODH에서

$$\cos\theta=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

(대학발표 예시답안) $\overline{\mathrm{OA}}=2$, $\overline{\mathrm{OB}}=2$, $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$ 이다.

$\overline{\mathrm{OC}}=1$, $\overline{\mathrm{OD}}=\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{3}$ 이다.

점 H에서 $\overline{\mathrm{OD}}$에 내린 수선의 발을 E라 두면 제시문 (나)에 의하여 θ는 $\angle\mathrm{HOD}$이다.

삼각형 OCD와 삼각형 HOD가 닮음이므로 $\angle\mathrm{HOD}=\angle\mathrm{OCD}$ 이다.

따라서, 삼각형 HOD에서

$$\sin^2\theta=\left(\frac{\overline{\mathrm{OD}}}{\overline{\mathrm{CD}}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{2}{3}$$

이다.

[문제2] (대학발표 예시답안)

2-1. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2-\sqrt{3}$, $f(1)=1$ 이다. …①

제시문 (나)에 의해 $f(x)$의 도함수를 구하면

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{-2}{x^3}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)>0 \text{ 이다.}$$

제시문 (가)에 의해 $f'(x)>0$ 이므로 $f(x)$는 증가함수이다. …②

그러므로 ①, ②에 의해 $2-\sqrt{3}\le f(x)\le 1$이다.

$f(x)$의 역함수

$y=f(x)$의 역함수 $x=g(y)$라 하고 구하면

$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}$ 에서

$$x=\frac{2y}{y^2+1}$$

이다. 그러므로 $g(y)=\dfrac{2y}{y^2+1}$ $(2-\sqrt{3}<y\le 1)$ 이다.

2-2. 제시문 (다)의 치환적분을 사용하면

$x=g(y)=f^{-1}(y)$에 대하여 $\int f(x)dx=\int f(g(y))g'(y)dy=\int yg'(y)dy$이다.

정적분의 치환적분법을 사용하기 위하여 적분구간을 구하면

$f(1)=1,\ f\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{2}$, 즉, $1=g(1),\ \frac{4}{5}=g\left(\frac{1}{2}\right)$이므로 $\left[\frac{4}{5},1\right]\to\left[\frac{1}{2},1\right]$이 된다.

$$\int_{\frac{4}{5}}^{1}f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}yg'(y)dy=[yg(y)]_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}g(y)dy$$

$$=g(1)-\frac{1}{2}g\left(\frac{1}{2}\right)-\int_{\frac{1}{2}}^{1}g(y)\,dy \quad \cdots\cdots \quad ①$$

이다.

논제 2-1에서 구한 역함수를 ①식에 대입하여 계산하면

$$\int_{\frac{4}{5}}^{1}f(x)\,dx=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2y}{y^2+1}dy=\frac{3}{5}+\ln\frac{5}{8}$$

이다.

[문제3] (대학발표 예시답안)

3-1. 수학 동아리 학생 3명을 먼저 선택하는 경우의 수는 ${}_nC_3$이고, 3명의 학생 중 중복해서 선택된 한명을 고르고 남아있는 $(n-3)$명의 학생 중에서 2명을 선택하는 경우의 수는 $3\times{}_{n-3}C_2$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 ${}_nC_3\times3\times{}_{n-3}C_2$ $\left(\text{또는 } \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4}\right)$이다.

3-2. n명 중에서 4명을 선택하는 경우의 수는 ${}_nC_4$이다. 4명 중에서 여행 동아리 학생 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2$이다. 동아리 학생으로 선택한 4명의 학생을 $\{a, b, c, d\}$로 나타낸다고 하자. 그 중에서 $\{a, b\}$가 여행 동아리 학생으로 선택된 경우 미술동아리와 음악동아리 학생을 선택하는 경우는 아래 표와 같이 19가지의 경우이다.

여행 동아리	미술동아리	음악동아리
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{c,d\}$
	$\{a,c\}$	$\{a,d\},\{b,d\},\{c,d\}$
	$\{a,d\}$	$\{a,c\},\{b,c\},\{c,d\}$
	$\{b,c\}$	$\{a,d\},\{b,d\},\{c,d\}$
	$\{b,d\}$	$\{a,c\},\{b,c\},\{c,d\}$
	$\{c,d\}$	$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}$

그러므로 ${}_nC_4\times{}_4C_2\times19$ $\left(\text{또는 } \frac{19n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}\right)$이다.

15 부산대학교 의학계열

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	○	수학 (3문항, 6문제)	100분

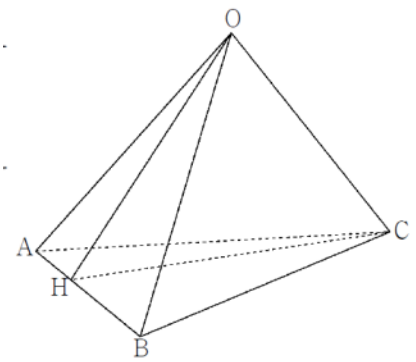
[문항1] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기가 $\theta\,(0 \le \theta \le \pi)$일 때, 두 벡터의 내적은 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$이다.

(나) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기가 $\theta\,(0 \le \theta \le \pi)$일 때, 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta$이다.

(다) (삼각함수의 덧셈정리)
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

사면체 OABC에서 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 3$, $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 3$, $\overline{AC} = 4$이다. $\overline{AB}$ 위의 점 H에 대하여 $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = t\ (0 \le t \le 1)$라 할 때, 다음 논제에 답하시오.



1-1. $\overrightarrow{OH}$를 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$와 t에 대한 식으로 나타내고 이를 이용하여 $|\overrightarrow{OH}|$를 t에 대한 식으로 나타내시오. (10점)

1-2. 삼각형 OHC의 넓이를 t에 대한 식으로 나타내고, 넓이가 최소가 되는 t의 값을 구하시오. (20점)

[문항2] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기이다.

(나) 두 함수 $f(x), g(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ 이다.

함수 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ 에 대하여 다음 논제에 답하시오.

2-1. 점 $\left(-\dfrac{11}{2}, 0\right)$을 지나고 기울기가 m인 직선과 곡선 $y=f(x)$의 교점의 개수를 실수 m의 값에 따라 구하시오. (15점)

2-2. 타원 $\dfrac{x^2}{4k}+\dfrac{y^2}{k}=1$ $(k>0)$과 곡선 $y=f(x)$의 교점이 4개일 때, 타원과 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 영역 중 원점을 포함하지 않는 영역의 넓이를 A를 사용하여 나타내시오. 여기서, $A=\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{7-x^2}\,dx$ 이다. (20점)4

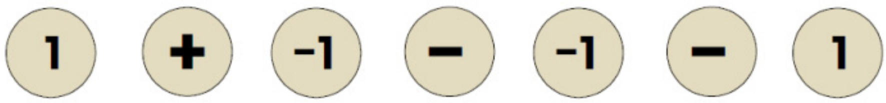
[문항3] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 자연수 n에 대하여 $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$ 이다.

(나) 서로 다른 두 종류의 공이 각각 m개와 n개로 주어졌을 때 이를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_{m+n}\mathrm{C}_m = {}_{m+n}\mathrm{C}_n$ 이다.

상자 A와 상자 B에는 각각 두 가지 종류의 공이 들어있다. 상자 A에는 숫자 1이 적힌 공과 숫자 -1이 적힌 공이 들어 있으며, 상자 B에는 덧셈 기호 $+$가 적힌 공과 뺄셈 기호 $-$가 적힌 공이 들어있다. 상자 A에서 시작하여 두 상자에서 교대로 공 한 개씩을 꺼내어 상자 A에서는 n개, 상자 B에서는 $(n-1)$개가 나오도록 한다. 꺼낸 순서대로 공을 일렬로 나열하여 만든 수식의 값을 구한다. (단, 상자에서 한 개의 공을 꺼낼 때마다 꺼낸 공과 같은 공을 그 상자에 채워 넣는다.)

(예) $n=4$일 때, 다음의 순서로 공을 꺼낼 경우 수식의 값은 $1+(-1)-(-1)-1=0$이다.



3-1. 상자 A에서 숫자 1이 적힌 공을 꺼낼 확률은 $\frac{2}{3}$, 숫자 -1이 적힌 공을 꺼낼 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 상자 B에서 기호 $+$가 적힌 공을 꺼낼 확률은 $\frac{1}{4}$ 기호 $-$가 적힌 공을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{4}$이라고 하자. $n=11$일 때, 수식의 값이 7이 될 확률을 구하시오. (15점)

3-2. 어떤 자연수 m $(9<m<20)$에 대하여 숫자 1이 적힌 공 $(21-m)$개, 숫자 -1이 적힌 공 m개, 기호 $+$가 적힌 공 $(m+1)$개, 기호 $-$가 적힌 공 $(19-m)$개가 나오는 모든 가능한 경우에 나타나는 수식의 값 중에서 최댓값을 m을 사용하여 나타내시오. 그리고 최댓값이 나오는 경우의 수를 m과 조합기호 ${}_n\mathrm{C}_r$를 사용하여 나타내시오. (20점)

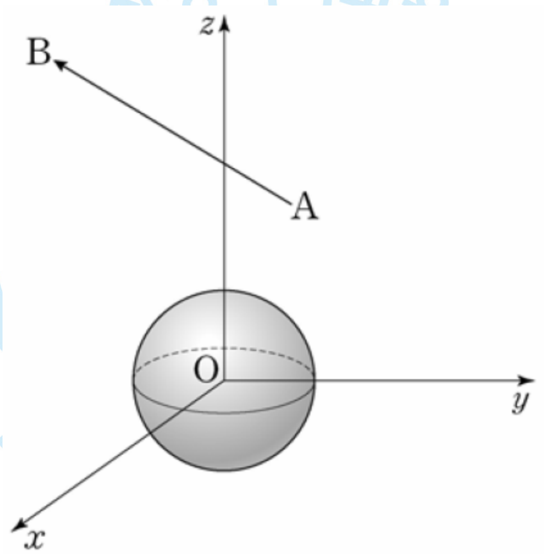
풀어보기

문제1

좌표공간의 두 점 $A(2, \sqrt{2}, \sqrt{3})$, $B(1, -\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$에 대하여 점 P는 다음 조건을 만족시킨다.

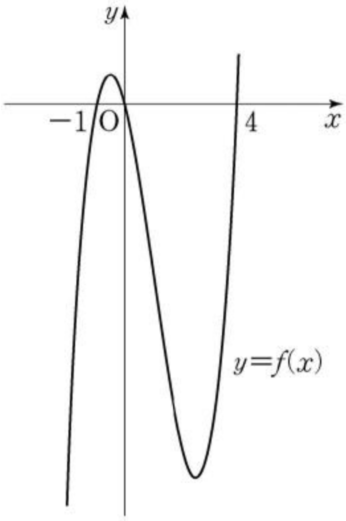
> (가) $|\overrightarrow{AP}| = 1$
>
> (나) $\overrightarrow{AP}$와 $\overrightarrow{AB}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다.

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 구 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{33}$이다. $16(a^2+b^2)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) (2016년 대입 대수능)



문제2

함수 $f(x)=x(x+1)(x-4)$가 그림과 같다.



직선 $y=5x+k$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 양수 k의 값은? (2015년 대입 대수능)

① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

문제3

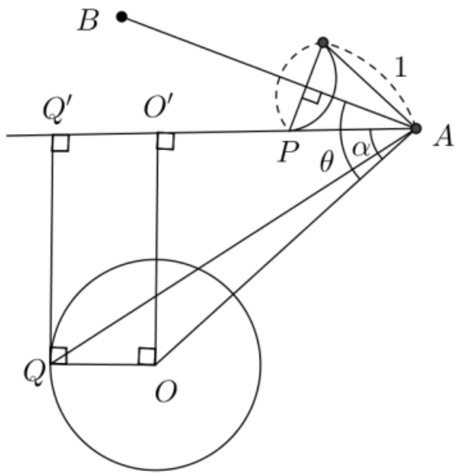
한 개의 주사위를 A는 4번 던지고 B는 3번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 각각 a, b라 하자. $a+b$의 값이 6일 확률은? (2013년 대입 9월 평가원)

① $\frac{10}{3^7}$ ② $\frac{11}{3^7}$ ③ $\frac{4}{3^6}$ ④ $\frac{13}{3^7}$ ⑤ $\frac{14}{3^7}$

예시답안

풀어보기(문제1) 정답 50

$\overline{\mathrm{AP}}=1$이고 $\angle\mathrm{BAP}=\frac{\pi}{6}$이므로 P는 직선 AB를 축으로 하는 원뿔의 밑면 위에 존재한다. $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 값이 최대가 되기 위해서는 점 P가 구와 최대한 가까워야 하므로 $\overline{\mathrm{AB}}$와 구의 중심 O를 포함하는 평면으로 구를 자른 단면 위에 점 P가 있어야 한다.



$\angle\mathrm{BAO}=\theta$, $\angle\mathrm{PAO}=\alpha$라 하면 $\alpha=\theta-\frac{\pi}{6}$이다. 원 위의 점 Q와 중심 O에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 각각 Q′, O′라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{AQ}}\cos\theta=\overline{\mathrm{AQ'}}$ 이므로 이 값이 최대가 되기 위해서는 점 Q는 직선 AP 위의 점에서 수직인 직선을 그었을 때 원과 접하는 직선과의 교점 중 A에서 먼 점이다.

$\overline{\mathrm{OA}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{AQ'}}=1+\overline{\mathrm{AO'}}=1+3\cos\alpha$이다.

한편, $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{15}$ 이므로

$$\cos\theta=\frac{9+12-15}{2\times3\times2\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

이고 $\sin\theta=\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$이다. 그래서

$$\cos\alpha=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}=\frac{3+\sqrt{33}}{12}$$

이다. 그러므로

$$\overline{\mathrm{AQ'}}=1+3\cos\alpha=\frac{9+\sqrt{33}}{4}$$

이 되고 $a=\frac{9}{4}$, $b=\frac{1}{4}$이므로

$16(a^2+b^2)=50$이다.

풀어보기(문제2) 정답 ①

직선 $y=5x+k$ 와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선 $y=5x+k$가 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 접해야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2-4x$ 에서 $f(x)=5x+k$

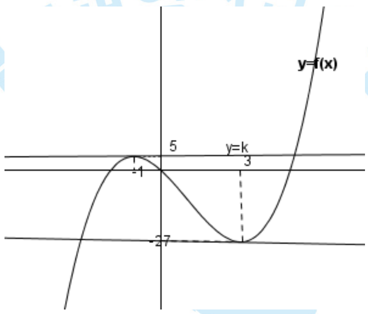
$$f(x)-5x=k$$

$f(x)-5x=g(x)$, $h(x)=k$라 두면

$g(x)=x^3-3x^2-9x$ 에서

$$g'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)$$
$$=3(x-3)(x+1)$$

에서 $x=-1$에서 극댓값 $x=3$에서 극솟값을 가진다. $g(-1)=5$, $g(3)=-27$ 이므로 $k=5$ 또는 $k=-27$일 때 직선 $y=5x+k$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만난다. k는 양수이므로 5이다.



풀어보기(문제3) 정답 ⑤

$a+b=6$인 경우는 아래와 같이 두 경우이다.

ⅰ) $a=3$, $b=3$일 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)\times{}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{3^7}$$

이다.

ⅱ) $a=4$, $b=2$일 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\times{}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{6}{3^7}$$

이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{3^7}+\frac{6}{3^7}=\frac{14}{3^7}$이다.

[문항1] 대학발표 예시답안

1-1. $\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=t\,(0\le t\le 1)$이므로 $\overrightarrow{OH}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$가 된다.

이등변삼각형 OAB에서 $\overline{OA}$와 $\overline{OB}$가 이루는 각의 크기를 α라고 하면, 덧셈정리에 의하여 $\cos\alpha=\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{7}{9}$ 임을 알 수 있다.

따라서 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=9\cos\alpha=7$ 이다.

$|\overrightarrow{OH}|^2=\{(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\}\cdot\{(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\}=4t^2-4t+9$ 이므로

$|\overrightarrow{OH}|=\sqrt{4t^2-4t+9}$ 이다.

1-2. 삼각형 OBC는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이므로 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{9}{2}$ 이다.

이등변삼각형 OAC에서 변 $\overline{OA}$와 변 $\overline{OC}$가 이루는 각의 크기를 β라고 하면 덧셈정리를 이용하여 $\cos\beta=\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\frac{1}{9}$ 이고,

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=9\cos\beta=1$, $\overrightarrow{OC}$ 와 $\overrightarrow{OH}$ 가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OC}=1+\frac{7}{2}t$ 이므로 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OH}}{|\overrightarrow{OC}|\times|\overrightarrow{OH}|}=\dfrac{2+7t}{6\sqrt{4t^2-4t+9}}$ 이 된다.

$$
\begin{aligned}
(\text{삼각형 OHC의 넓이})&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OH}||\overrightarrow{OC}|\sin\theta\\
&=\frac{1}{2}3\sqrt{4t^2-4t+9}\sqrt{1-\cos^2\theta}\\
&=\frac{1}{4}\sqrt{95t^2-172t+320}
\end{aligned}
$$

이 되고, $95t^2-172t+320=95\left(t-\frac{86}{95}\right)^2+\frac{23004}{95}$ 이므로 삼각형 OHC의 넓이가 최소가 되는 t의 값은 $\frac{86}{95}$ 이다.

[문항2] 대학발표 예시답안

2-1. 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 $f'(x)$, $f''(x)$와 점근선을 이용하여 그린다. 점 $\left(-\frac{11}{2},0\right)$에서 그은 직선과 곡선 $y=f(x)$이 접하는 순간의 접점의 좌표를 $\left(t,\frac{1}{t^2-4}\right)$라고 두고, 제시문 (가)를 이용하면 $-2t^2-11t=t^2-4$, $3t^2+11t-4=0$을 얻는다. 따라서 $t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=-4$이다. 그러면 $t=\frac{1}{3}$일 때 $m=-\frac{54}{1225}$ 이고, $t=-4$일 때 $m=\frac{1}{18}$ 이다. 따라서 정답은 아래와 같다.

i) $m=0$일 때, 교점의 개수는 0개

ii) $-\frac{54}{1225}<m<\frac{1}{18}$ 이고 $m\neq0$일 때, 교점의 개수는 1개

iii) $m=-\frac{54}{1225}$ 또는 $m=\frac{1}{18}$ 일 때, 교점의 개수는 2개

iv) $m<-\frac{54}{1225}$ 또는 $m>\frac{1}{18}$ 일 때, 교점의 개수는 3개

2-2. 타원 $\frac{x^2}{4k}+\frac{y^2}{k}=1$과 곡선 $y=f(x)$의 교점이 4개 중 2개의 교점에서 공통인 접선을 가질 때이다. 공통인 접선을 가지는 교점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{t^2-4}\right)$라고 두자. 음함수 미분법에 의하여 타원 $\frac{x^2}{4k}+\frac{y^2}{k}=1$ 위의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기는 $-\frac{x}{4y}$이다.
그러므로 제시문 (가)에 의하여 $(t^2-4)^3=8$, $t^2-4=2$를 얻는다. 따라서 $t=\pm\sqrt{6}$이다.
이 경우 $k=\frac{7}{4}$이다. 이 경우, 타원 $x^2+4y^2=7$과 곡선 $y=f(x)$의 접점 이외의 두 교점의 x좌표는 $x=\pm\sqrt{3}$이다. 따라서 제시문 (나)에 의하여 주어진 영역의 넓이를 구하면 아래와 같다.

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x^2-4}+\frac{\sqrt{7-x^2}}{2}\right)dx=\ln(2-\sqrt{3})+A$$

[문항3] 대학발표 예시답안

3-1. 수식의 값이 7이 되기 위해서는 $+1$이 9회, -1이 2회 나와야 한다. $+1$이 나오는 경우는 $(+, 1)$ 또는 $(-, -1)$이 적힌 두 개의 공이 연이어 나올 때이고, -1이 나오는 경우는 $(-, 1)$ 또는 $(+, -1)$이 적힌 두 개의 공이 연이어 나올 때이다.
첫 번째 공이 1이 적힌 공이 나오고 $+1$이 8회, -1이 2회 나올 확률은

$$\frac{2}{3}\left(\sum_{i=0}^{8}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{1}{4}\right)^{8-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{2}\left(\frac{1}{12}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{2-j}\right)$$

이다. 제시문 (가)에 의해서 이 식은 $\frac{2}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^8\left(\frac{7}{12}\right)^2$이며, $+1$이 8회, -1이 2회 나올 경우의 수는 제시문 (나)에 의해서 ${}_{10}\mathrm{C}_2=45$이다.
첫 번째 공이 -1이 적힌 공이 나오고 $+1$이 9회, -1이 1회 나올 확률은

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{i=0}^{9}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{1}{4}\right)^{9-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{1}\left(\frac{1}{12}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{1-j}\right)$$

이다. 제시문 (가)에 의해서 이 식은 $\frac{1}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^9\left(\frac{7}{12}\right)$이며, $+1$이 9회, -1이 1회 나올 경우의 수는 제시문 (나)에 의해서 ${}_{10}C_1=10$이다.
그러므로 수식의 값이 7이 될 확률은

$$45\frac{2}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^8\left(\frac{7}{12}\right)^2+10\frac{1}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^9\left(\frac{7}{12}\right)^1=\frac{595}{54}\left(\frac{5}{12}\right)^8$$

이다.

3-2. 최댓값을 갖기 위해서는 최대한 많이 $+1$이 연이어 나오거나 $-(-1)$이 연이어 나와야 한다. $m>9$이므로 $-$가 적힌 공의 수는 -1이 적힌 공의 수보다 항상 적다. 그러므로 $-(-1)$은 최대 $(19-m)$회 나오게 되며, -1이 적힌 공은 $(2m-19)$개가 남게 된다. 반면 $+$가 적힌 공의 수는 1이 적힌 공의 수보다 항상 많으므로 $+1$은 최대 $(21-m)$회 나온다. 따라서 최댓값은 $(19-m)+(21-m)-(2m-19)=59-4m$이다.
최댓값 $(59-4m)$을 갖는 경우의 수는 첫 번째 공의 결과에 따라 두 가지로 나누어진다.
첫 번째 공이 숫자 1이 적힌 공일 경우

	$+1$	$-(-1)$	$+(-1)$
횟수	$20-m$	$19-m$	$2m-19$

이를 나열하는 경우의 수는 제시문 (나)에 의해서 ${}_{20}\mathrm{C}_{m} \times {}_{m}\mathrm{C}_{19-m}$이다.
첫 번째 공이 숫자 -1이 적힌 공일 경우

	$+1$	$-(-1)$	$+(-1)$
횟수	$21-m$	$19-m$	$2m-20$

이를 나열하는 경우의 수는 제시문 (나)에 의해서 ${}_{20}C_{m-1} \times {}_{m-1}\mathrm{C}_{9-m}$이다.
따라서 최댓값을 갖는 경우의 수는

$$ {}_{20}\mathrm{C}_{m} \times {}_{m}\mathrm{C}_{19-m} + {}_{20}\mathrm{C}_{m-1} \times {}_{m-1}\mathrm{C}_{19-m} $$

이다.

16 부산대학교 모의(자연계열)12)

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 수학 교과 교육과정 내 출제 (반영 점수 700점)	수학(가)포함 2개 합 5이내	수학 (3문항, 6문제)	100분

※ 모든 서술과정의 각 단계에서 근거와 이유를 명확히 밝히시오.

[문제 1] 다음 제시문을 근거로 하여 아래 논제에 답하시오. (35점)

(가) 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능할 때, 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가하고, $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

(나) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라는 것은 $x=a$의 좌우에서 곡선의 모양이 아래로 볼록한 모양에서 위로 볼록한 모양으로 바뀌거나 위로 볼록한 모양에서 아래로 볼록한 모양으로 바뀔 때를 말한다.

(다) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 d가 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 수라고 하면, $f(c)=d$가 성립하는 점 c가 a와 b사이에 존재한다.

(라) 부정적분 $\int f(x)dx$이 존재하는 함수 $f(x)$와 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여, $x=g(t)$라고 하면

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

가 성립한다.

※ 실수 전체에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 등식

$$f'(x) = 2f(x) - f(x)^2$$

이 성립한다고 하자.

12) 부산대학교 홈페이지

[1.1] 함수 $f(x)$의 치역이 열린구간 $(0,2)$이고, $f(x)$가 모든 x에서 이계도함수를 가지면, 곡선 $y=f(x)$는 변곡점을 가진다는 것을 보이시오. (15점)

[1.2] $0<f(0)<1$이면 함수 $f(x)$는 유일하게 결정되며 모든 x에 대하여 $0<f(x)<2$이다. $f(0)=\frac{1}{3}$일 때, 함수 $f(x)$를 구하시오. (20점)

[문제 2] 다음 제시문을 근거로 하여 아래 논제에 답하시오. (30점)

(가) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np, np(1-p))$를 따른다.
(여기서, n이 충분히 크다는 것은 $np \geq 5$와 $n(1-p) \geq 5$가 성립하는 경우이다.)

(나) 확률변수 X가 평균이 $\mathrm{E}(X)$이고 분산이 $\mathrm{V}(X)$인 정규분포를 따를 때, 확률변수 $Z=\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다.

(다) 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따를 때 $\mathrm{P}(Z>5) \fallingdotseq 0.00001$이다.

(라) 크기가 n인 표본의 표본비율이 $\hat{p}$일 때, n이 충분히 크면 모비율 p의 95% 신뢰구간은

$$\left[\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

이다.

※ 전국의 고등학교 3학년 남녀 학생들을 무작위로 선출하여, 정답률이 각각 p_A, p_B인 A, B 두 문항 중 한 문항을 선택하여 풀게 하였다.

[2.1] $p_A=70\%$, $p_B=80\%$ 라고 가정하자. 200명의 학생들이 무작위로 선출되었고, 그 중 100명의 학생들은 A문항을 선택하였고, 나머지 100명의 학생들은 B문항을 선택하였다. A문항을 선택한 학생들 중에서 정답자의 수가 60명 이상일 확률과 B문항을 선택한 학생들 중에서 정답자의 수가 70명 이상일 확률 가운데서 어느 쪽이 더 큰지를 판별하시오. (15점)

[2.2] A문항을 선택한 학생들의 수는 정해진 상수로서 충분히 큰 수라고 가정하자. 이들 중 남학생의 수는 여학생의 수 보다 여학생 수의 $k\%$ 더 크고, 여학생 중 정답자의 비율은 남학생 중 정답자의 비율보다 남학생 중 정답자의 비율의 $m\%$ 더 작다고 한다. A문항의 정답률 p_A 의 95% 신뢰 구간의 길이가 최대일 때, A문항을 선택한 남학생 중 정답자의 비율을 k와 m에 관한 식으로 나타내시오. (15점)

[문제 3] 다음 제시문을 근거로 하여 아래 논제에 답하시오. (35점)

(가) 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\ \overline{\mathrm{AC}}\ \sin\angle\mathrm{A}$$

이다.

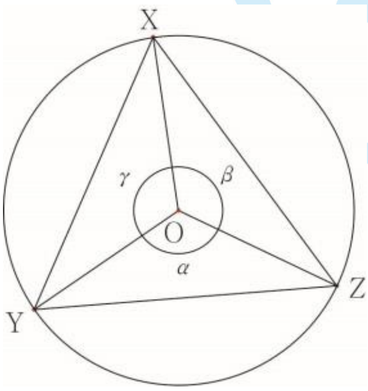
[3.1] 아래의 [그림 1]과 같이 삼각형 XYZ는 원점 O를 중심으로 하는 단위원에 내접하는 삼각형이고, 그 삼각형의 내부에 원점이 있다고 하자.

$$\angle\mathrm{YOZ} = \alpha,\quad \angle\mathrm{ZOX} = \beta,\quad \angle\mathrm{XOY} = \gamma$$

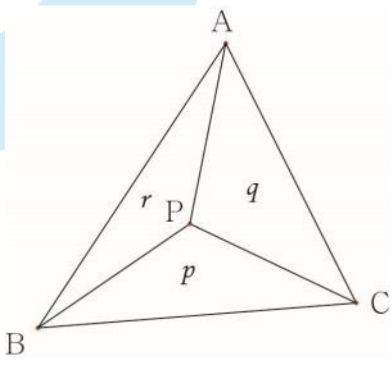
라고 할 때, 등식

$$\sin\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OX}} + \sin\beta\,\overrightarrow{\mathrm{OY}} + \sin\gamma\,\overrightarrow{\mathrm{OZ}} = \vec{0}$$

가 성립함을 보이시오. (15점)



[그림 1]



[그림 2]

[3.2] 위의 [그림 2]와 같이 임의의 삼각형 ABC의 내부의 한 점 P에 대하여 $\triangle$PBC, $\triangle$PCA, $\triangle$PAB의 넓이를 각각 p, q, r이라 할 때, 등식

$$p\,\overrightarrow{\mathrm{PA}} + q\,\overrightarrow{\mathrm{PB}} + r\,\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{0}$$

가 성립함을 보이시오. (20점)

풀어보기

문제1

구간 $(0,\ \infty)$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 함수 $F(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양수 x에 대하여 $F(x)+xf(x)=(2x+2)e^x$
(나) $F(1)=2e$

$F(3)$의 값을 구하시오. (2015년 전국연합)

문제2

다음은 어느 백화점에서 판매하고 있는 등산화에 대한 제조회사별 고객의 선호도를 조사한 표이다.

제조회사	A	B	C	D	합계
선호도(%)	20	28	25	27	100

192명의 고객이 각각 한 켤레씩 등산화를 산다고 할 때, C회사 제품을 선택할 고객이 42명 이상일 확률을 다음 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (2005년 대수능)

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

문제3

삼각형 ABC와 한 점 P는 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+3\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$를 만족시킨다. 삼각형 PAB의 넓이가 6일 때, 삼각형 PCA의 넓이를 구하시오.

예시답안

풀어보기(문제1)

조건 (가)에서 $F(x)+xf(x)=(2x+2)e^x$ 이므로 $\{xF(x)\}'=(2x+2)e^x$ 이다.

$$xF(x)=\int(2x+2)e^x dx=(2x+2)e^x-\int 2e^x dx$$

$$=(2x+2)e^x-2e^x+C=2xe^x+C \quad \cdots\cdots ㉠ \quad (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

이때, 조건 (나)에서 $F(1)=2e$ 이므로 ㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $C=0$ 이다.

따라서 $xF(x)=2xe^x$ 이므로 $F(x)=2e^x$ 이다.

풀어보기(문제2)

C 회사 제품을 선택한 고객의 수를 확률변수 X라 하면 한 고객이 C회사 제품을 선택할 확률은 $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$ 이다.

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(192,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=192\times\frac{1}{4}=48,\ \sigma(X)=\sqrt{192\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}=6$$

이때 $n=192$는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(48,\ 6^2\right)$을 따른다.

따라서 C 회사 제품을 선택할 고객이 42 명 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 42)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{42-48}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq -1)\\&=\mathrm{P}(Z\leq 1)\\&=\mathrm{P}(Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)\\&=0.5+0.3413\\&=0.8413\end{aligned}$$

풀어보기(문제3)

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+3\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$이다.

$$-\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 D라고 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{3} \quad \cdots\cdots ㉡$$

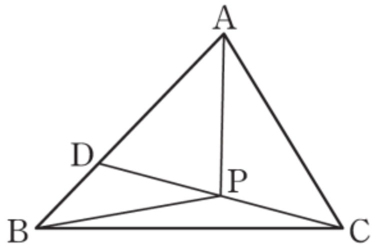
이므로 ㉠,㉡에서

$$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=-\overrightarrow{\mathrm{PC}}$$

따라서 점 P는 선분 CD의 중점이다.
삼각형 PBD의 넓이를 S라고 하면 세 삼각형
PAD, PBC, PCA의 넓이는 각각 $2S$, S, $2S$이므로
삼각형 PAB의 넓이는

$$S+2S=3S\text{이고 } 3S=6\text{에서 } S=2$$

따라서 삼각형 PCA의 넓이는 $2S=4$



[1-1] 대학발표 예시답안

함수 $f(x)$의 이계도함수를 구하면

$$\begin{aligned} f''(x) &= f'(x)(2-f(x))-f(x)f'(x) \\ &= 2f'(x)(1-f(x)) = 2f(x)(1-f(x))(2-f(x)) \end{aligned}$$

또한 함수 $f(x)$가 $0<f(x)<2$이면 $f'(x)$의 값이 양이므로 제시문 (가)에 의하여 함수 $f(x)$는 증가한다.
따라서 사이값 정리에 의하여 $f(a)=1$인 점 $\mathrm{P}(a,\ 1)$이 반드시 존재하고 $f''(a)=0$이다.
그리고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 양에서 음, 즉 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀌므로 제시문 (나) 에 의하여 $\mathrm{P}(a,\ 1)$는 곡선 $f(x)$의 변곡점이다.

[1-2] 대학발표 예시답안

모든 실수 x에 대하여 $0<f(x)<2$이므로

$$\frac{f'(x)}{f(x)(2-f(x))}=1$$

이고 양변을 x에 대하여 부정적분하면

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)(2-f(x))}dx = \int 1dx \quad \cdots\cdots ①$$

제시문 (다) 에 의하여 $y=f(x)$로 치환하면 $dy=f'(x)dx$이고

$$\begin{aligned} \int \frac{f'(x)}{f(x)(2-f(x))}dx &= \int \frac{1}{y(2-y)}dy \\ &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{2-y}\right)dy \\ &= \frac{1}{2}(\ln y-\ln(2-y)) \end{aligned}$$

① 에서

$$\frac{1}{2}(\ln y-\ln(2-y))=x+c \text{ (상수 } c) \quad \Rightarrow \quad \ln y-\ln(2-y)=\ln\frac{y}{2-y}=2x+2c$$

양변에 지수함수를 취하면

$$\frac{y}{2-y}=e^{2x}e^{2c} \quad \cdots\cdots ②$$

이고 $x=0$일 때 $f(0)=y=\frac{1}{3}$ 이므로 ②에서 $e^{2c}=\frac{1}{5}$ 이다.

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{2-y}=\frac{1}{5}e^{2x}$$

$$\therefore \quad y=f(x)=\frac{2e^{2x}}{5+e^{2x}}=\frac{2}{1+5e^{-2x}}$$

[2-1] 대학발표 예시답안

X를 A문항을 선택한 100명 중 정답자의 수라고 정의하자. 그러면 X는 이항분포 B(100, 0.7)를 따르고, 제시문 (가)에 의해 근사적으로 정규분포 N(70, 21)를 따르게 된다. 정답자의 수가 60명 이상일 확률은 $P(60\le X\le 100)$이고 제시문 (나)에 의해서

$$P(60\le X\le 100)=P(\frac{60-70}{\sqrt{21}}\le Z\le \frac{100-70}{\sqrt{21}})=P(Z\le \frac{30}{\sqrt{21}})-P(Z\le -\frac{10}{\sqrt{21}})$$

$$=1-P(Z>\frac{30}{\sqrt{21}})-P(Z\le \frac{-10}{\sqrt{21}})$$

마찬가지로 Y를 B문항을 선택한 100명 중 정답자의 수라고 정의하자. 그러면 Y는 이항분포 B(100, 0.8)을 따른다. 제시문 (가)에 의해 근사적으로 정규분포 N(80, 16)를 따르게 된다. 정답자의 수가 70명 이상일 확률은 $P(70\le Y\le 100)$이고 제시문 (나)에 의해서

$$P(70\le Y\le 100)=\mathrm{P}(\frac{70-80}{4}\le Z\le \frac{100-80}{4})=P(Z\le \frac{20}{4})-P(Z\le -\frac{10}{4})$$

$$=1-P(Z>5)-P(Z\le \frac{-10}{4})$$

제시문 (다)에 의해서 $P(Z>5)\approx 0.00001$이고 $P(Z>\frac{30}{\sqrt{21}})<P(Z>5)\approx 0.00001$이므로 두 확률 $P(Z>\frac{30}{\sqrt{21}})$ 와 $P(Z>5)$은 모두 0에 가깝다고 할 수 있다. 그리고 $P(Z\le \frac{-10}{4})<P(Z\le \frac{-10}{\sqrt{21}})$이므로, $P(60\le X\le 100)<P(70\le Y\le 100)$. 즉, 후자의 확률이 더 높다.

[2-2] 대학발표 예시답안

B문항의 정답률 p_B의 95% 신뢰구간의 길이는 제시문 (라)를 이용하면 다음과 같다.

$$2\times 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

B문항을 선택한 학생들의 수 n은 어떤 큰 값으로 고정되어 있기 때문에 신뢰구간의 길이는 표본비율 $\hat{p}$에 대한 함수이며, 이 길이가 최댓값을 가질 경우는 $\hat{p}=\frac{1}{2}$일 때 이다.

$\hat{p_1}$이 B문항을 선택한 남학생들 중 정답자의 비율이라 두고, $\hat{p_2}$를 B문항을 선택한 여학생들 중 정답자의 비율이라고 하자. 그리고 n_1과 n_2는 각각 B문항을 선택한 남학생들의 수와 자와 여학생들의 수라고 표시하자. 그러면 B문항을 선택한 학생들 중 정답자의 비율은 다음과 같다.

$$\hat{p}=\frac{\hat{p_1}n_1+\hat{p_2}n_2}{n_1+n_2}$$

그리고 주어진 문제에 의해서

$$n_1=\left(1+\frac{k}{100}\right)n_2, \qquad \hat{p_2}=\left(1-\frac{m}{100}\right)\hat{p_1}$$

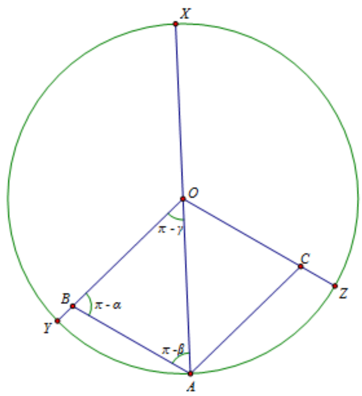
이다. 이 두 식을 위의 $\hat{p}$에 대입하면

$$\hat{p}=\frac{\left(1+\frac{k}{100}\right)+\left(1-\frac{m}{100}\right)}{\left(1+\frac{k}{100}\right)+1}\hat{p_1}$$

이고, $\hat{p}=\frac{1}{2}$이 되어야 하므로 최종적으로 $\hat{p_1}=\frac{200+k}{400+2(k-m)}$이다.

[3-1] 대학발표 예시답안

선분 OX의 연장선 위에 $\overrightarrow{XO}=\overrightarrow{OA}$가 되도록 점 A를 잡는다.
점 A를 지나고 선분 OZ와 평행한 직선이 선분 OY(또는 선분 OY의 연장선)와 만나는 점을 B라 하고, 점 A를 지나고 선분 OY와 평행한 직선이 선분 OZ(또는 선분 OZ의 연장선)와 만나는 점을 C라 하자.



그러면 $\triangle$OAB 에서

$$\overline{BO}\ \overline{BA}\sin(\pi-\alpha)=\overline{AO}\ \overline{AB}\sin(\pi-\beta)=\overline{OB}\ \overline{OA}\sin(\pi-\gamma)$$

또는

$$\overline{OB}\ \overline{AB}\sin\alpha=\overline{OA}\ \overline{AB}\sin\beta=\overline{OB}\ \overline{OA}\sin\gamma$$

이다. $\overline{OA}=1$ 이므로

$$\overline{OB}\sin\alpha=\sin\beta,\ \ \overline{AB}\sin\alpha=\sin\gamma$$

이 된다. 따라서 $\overline{OB}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ 이고 $\overline{AB}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ 이다.

$\square$OBAC 는 평행사변형이므로 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}$ 이고, $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ 이다.

$-\overrightarrow{OX}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\overrightarrow{OY}+\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\overrightarrow{OZ}$ 이므로 $\sin\alpha\overrightarrow{OX}+\sin\beta\overrightarrow{OY}+\sin\gamma\overrightarrow{OZ}=\vec{0}$

(다른 풀이)

반직선 OX 가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ $(0\le\theta\le2\pi)$라 하면

$$\overrightarrow{OX}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$$
$$\overrightarrow{OY}=(\cos(\theta+\gamma),\ \sin(\theta+\gamma))$$
$$\overrightarrow{OZ}=(\cos(\theta+\gamma+\alpha),\ \sin(\theta+\gamma+\alpha))=(\cos(\theta-\beta),\ \sin(\theta-\beta))$$

이다. 벡터 $\sin\alpha\overrightarrow{OX}+\sin\beta\overrightarrow{OY}+\sin\gamma\overrightarrow{OZ}$의 x성분은

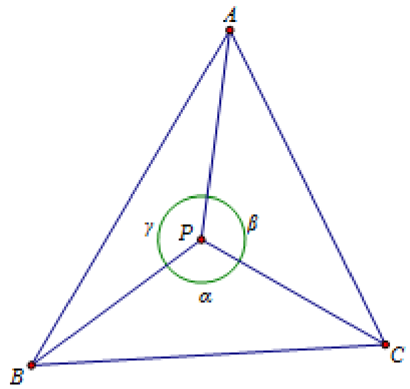
$$\begin{aligned}&\sin\alpha\cos\theta+\sin\beta\cos(\theta+\gamma)+\sin\gamma\cos(\theta-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\theta+\sin\beta(\cos\theta\cos\gamma-\sin\theta\sin\gamma)+\sin\gamma(\cos\theta\cos\beta+\sin\theta\sin\beta)\\&=\sin\alpha\cos\theta+\sin\beta\cos\theta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\theta\cos\beta\\&=\cos\theta(\sin\alpha+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\beta)\\&=\cos\theta\{\sin\alpha+\sin(\beta+\gamma)\}\\&=\cos\theta(\sin\alpha-\sin\alpha)\\&=0\end{aligned}$$

마찬가지로 벡터 $\sin\alpha\overrightarrow{OX}+\sin\beta\overrightarrow{OY}+\sin\gamma\overrightarrow{OZ}$의 y성분은

$$\begin{aligned}&\sin\alpha\sin\theta+\sin\beta\sin(\theta+\gamma)+\sin\gamma\sin(\theta-\beta)\\&=\sin\alpha\sin\theta+\sin\beta(\sin\theta\cos\gamma+\cos\theta\sin\gamma)+\sin\gamma(\sin\theta\cos\beta-\cos\theta\sin\beta)\\&=\sin\alpha\sin\theta+\sin\beta\sin\theta\cos\gamma+\sin\gamma\sin\theta\cos\beta\\&=\sin\theta(\sin\alpha+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\beta)\\&=\sin\theta\{\sin\alpha+\sin(\beta+\gamma)\}\\&=\sin\theta(\sin\alpha-\sin\alpha)\\&=0\end{aligned}$$

따라서 $\sin\alpha\overrightarrow{OX}+\sin\beta\overrightarrow{OY}+\sin\gamma\overrightarrow{OZ}=\vec{0}$ 이다.

[3-2] 대학발표 예시답안



$\angle \mathrm{BPC}=\alpha$, $\angle \mathrm{CPA}=\beta$, $\angle \mathrm{APB}=\gamma$, $\overline{\mathrm{PA}}=a$, $\overline{\mathrm{PB}}=b$, $\overline{\mathrm{PC}}=c$ 라 두면

$p=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$, $q=\frac{1}{2}ca\sin\beta$, $r=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ 이다.

$\overrightarrow{\mathrm{PX}}=\frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PY}}=\frac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{PY}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PZ}}=\frac{1}{c}\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ 라 두면

[3.1]에 의해서 $\sin\alpha\overrightarrow{\mathrm{PX}}+\sin\beta\overrightarrow{\mathrm{PY}}+\sin\gamma\overrightarrow{\mathrm{PZ}}=\vec{0}$, 또는

$\sin\alpha(\frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{PA}})+\sin\beta(\frac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{PB}})+\sin\gamma(\frac{1}{c}\overrightarrow{\mathrm{PC}})=\vec{0}$ 이다.

양변에 $\frac{1}{2}abc$를 곱하면

$\frac{1}{2}bc\sin\alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\frac{1}{2}ca\sin\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\frac{1}{2}ab\sin\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ 이고

따라서 $p\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}+q\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+r\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ 이다.

17 서울시립대학교 모의(자연계열)13)

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형(반영 점수는 600점이며, 절대평가임)	없음	수학 (4문항, 7문제)	120분

[문제 1] (100점)

자연수 n에 대하여 연립부등식

$$\begin{cases} 0 < x < 10n \\ x^2 - 14nx + 48n^2 > 0 \\ \sin\dfrac{\pi x}{4n} - \cos\dfrac{\pi x}{4n} < 1 \end{cases}$$

을 만족하는 x의 집합을 S_n이라 하고, 다음 조건을 만족하는 순서쌍 (p, q)의 개수를 a_n이라 하자.

$p,\ q,\ \dfrac{p+q}{2}$는 모두 집합 S_n에 속하는 서로 다른 자연수이다.

(a) 일반항 a_n을 구하여라. (70점)

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2-k}{a_k a_{k+1} - 2a_k - 2a_{k+1} + 4}$ 의 값을 구하여라. (30점)

[문제 2] (100점)

좌표평면 위에 타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$이 주어져 있다. 원점 O와 타원 위의 점 A에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 수직이고 원점을 지나는 직선이 주어진 타원과 만나는 점을 B, C라 하자. $k = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$라 할 때 다음 물음에 답하여라.

(a) $k=0$이 되는 점 A를 구하여라. (60점)

(b) k의 최솟값과 최댓값을 구하여라. (40점)

13) 서울시립대학교 홈페이지

[문제 3] (100점)

함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 와 $g(x) = 9x$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(a) 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = g(x)$ 가 $x = c$ $(c > 0)$ 에서 접할 때, $\left|\dfrac{b}{a+c}\right|$ 의 최솟값을 구하여라. (40점)

(b) 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = g(x)$ 으로 둘러싸인 두 영역의 넓이가 같고 교점의 x 좌표가 0, α, β $(0 < \alpha < \beta)$ 일 때 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ 의 값을 구하여라. (60점)

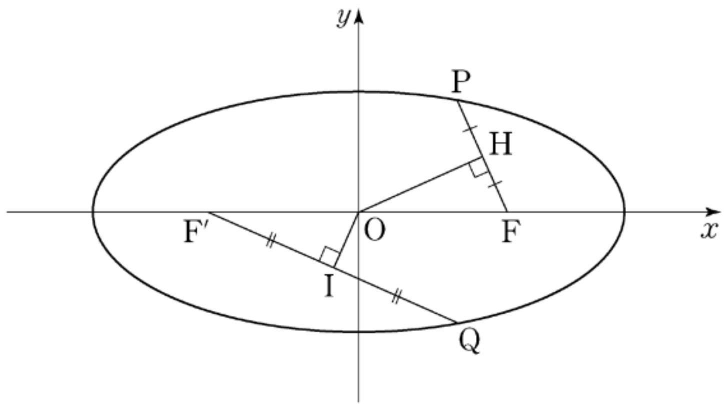
[문제 4] (100점)

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 에서 부등식 $(1+\sin x)^{1+\cos x} > (1+\cos x)^{1+\sin x}$ 을 만족하는 x 의 범위를 구하여라.

풀어보기

문제1

두 점 $\mathrm{F}(5,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-5,\ 0)$ 을 초점으로 하는 타원 위의 서로 다른 두 점 P, Q 에 대하여 원점 O 에서 선분 PF 와 선분 QF′ 에 내린 수선의 발을 각각 H 와 I 라 하자.
점 H 와 점 I 가 각각 선분 PF 와 선분 QF′ 의 중점이고, $\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{OI}}=10$ 일 때, 이 타원의 장축의 길이를 l 이라 하자. l^2 의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{OH}}\neq\overline{\mathrm{OI}}$) (2013. 모평)



문제2

다음 조건을 만족시키는 모든 사차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 항상 지나는 점들의 y 좌표의 합을 구하시오.

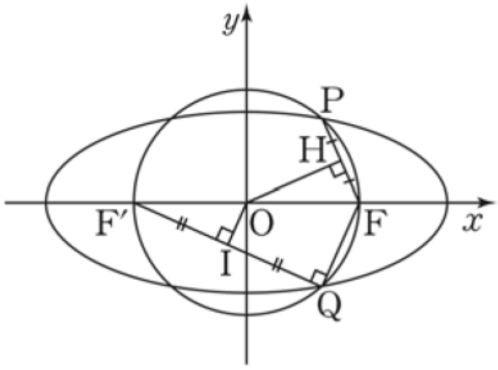
> (가) $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 1 이다.
> (나) 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(2,\ f(2))$ 에서 직선 $y=2$ 에 접한다.
> (다) $f'(0)=0$

예시답안

풀어보기(문제1)

$\triangle OHF \equiv \triangle OHP$, $\triangle OIF' = \triangle OIQ$ (각각 SAS 합동)이므로 $\overline{OP} = \overline{OF} = 5$, $\overline{OQ} = \overline{OF'} = 5$

즉, 네 점 F, F′, P, Q 는 모두 원 $x^2 + y^2 = 25$ 위의 점이다.



$$\angle FQF' = \angle FPF' = 90^\circ \cdots ㉠$$

$\overline{OI} /\!/ \overline{FQ}$ 이고 $\overline{FF'} = 2\overline{OF'}$ 이므로 $\overline{FQ} = 2 \cdot \overline{OI}$

마찬가지로 $\overline{PF'} = 2 \cdot \overline{OH} \cdots ㉡$

또, 두 도형 원과 타원은 모두 x축, y축에 대칭이므로, 두 점 P 와 Q 는 x축에 대칭이거나 y축에 대칭 또는 원점 대칭이다. $\overline{OH} \neq \overline{OI}$ 에서 P 와 Q 는 x축에 대칭이다.

($\because$ 만약 다른 경우이면 $\overline{F'Q} = \overline{FP}$ 이고, 이때 $\overline{FQ} = \overline{PF'}$ 에서 $\overline{OH} = \overline{OI}$)

$$\therefore \ \overline{PF} = \overline{QF} \cdots ㉢$$

$\overline{QF} = \alpha$, $\overline{QF'} = \beta$ 라 하면 ㉠에서 $\alpha^2 + \beta^2 = 100$

㉡, ㉢에서 $\alpha\beta = 4\overline{OI} \cdot \overline{OH} = 40$

$\therefore \ l = \alpha + \beta = \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2} = \sqrt{180}$

$\therefore \ l^2 = 180$

풀어보기(문제2)

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고 곡선 $y = f(x)$가 점 $(2, f(2))$에서 접하므로 $f(x) = (x-2)^2(x^2 + ax + b) + 2$ 로 놓을 수 있다.

$f'(x) = 2(x-2)(x^2 + ax + b) + (x-2)^2(2x + a)$ 이고 $f'(0) = 0$ 이므로 대입하면 $-4b + 4a = 0$

$\therefore \ a = b$

이 식을 대입하고 $f(x)$를 y로 놓으면 $y = (x-2)^2(x^2 + ax + a) + 2$

이 식을 a에 관하여 정리하면 $a(x+1)(x-2)^2 + (x-2)^2x^2 + 2 - y = 0$이고, 이 식은 a에 관한 항등식이므로 $(x+1)(x^2-2)^2 = 0 \quad \cdots ㉠$ 이고 $(x-2)^2x^2 + 2 - y = 0 \quad \cdots ㉡$

㉠에서 $x = -1$ 또는 $x = 2$이므로 ㉡에 대입하면 $y = 11$ 또는 $y = 2$

따라서 모든 y좌표의 합은 13

[문제 1-(a)] 대학발표 예시답안

삼각함수의 덧셈정리에 의해

$$\sin\frac{\pi x}{4n} - \cos\frac{\pi x}{4n} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{4n} - \frac{\pi}{4}\right) < 1$$

이므로 $0 < x < 10n$의 범위에서 이를 풀면 $0 < x < 2n$ 또는 $4n < x < 10n$이다.

또한 $0 < x < 10n$의 범위에서 $x^2 - 14nx + 48n^2 = (x-6n)(x-8n) > 0$의 해는

$$0 < x < 6n \text{ 또는 } 8n < x < 10n$$

이다. 따라서 $S_n = (0,\ 2n) \cup (4n,\ 6n) \cup (8n,\ 10n)$이다.

순서쌍 $(p,\ q)$가 문제의 조건을 만족하면, p와 q가 모두 홀수 혹은 모두 짝수이고, 또한 다음의 두 가지 경우 중 하나이다.

(i) p와 q가 모두 $(0,\ 2n)$ 또는 $(4n,\ 6n)$ 또는 $(8n,\ 10n)$에 포함되는 경우

(ii) $p \in (0,\ 2n)$이고 $q \in (8n,\ 10n)$ 또는 $p \in (8n,\ 10n)$이고 $q \in (0,\ 2n)$인 경우

한편 $(0,\ 2n)$, $(4n,\ 6n)$, $(8n,\ 10n)$에는 각각 n개의 홀수와 $n-1$개의 짝수가 있다.

따라서 (i)인 경우 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 각 세 집합에서 동시에 두 홀수를 선택하거나 혹은 동시에 두 짝수를 선택하는 경우의 수인데 $p < q$와 $p > q$ 두 가지 경우가 있으므로 전체 경우의 수는

$$2 \cdot 3 \cdot ({}_{n}\mathrm{C}_2 + {}_{n-1}\mathrm{C}_2)$$

이다.

(ii)인 경우 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 $p \in (0,\ 2n)$이고 $q \in (8n,\ 10n)$인 경우 동시에 홀수 혹은 짝수를 선택하는 경우의 수와 $p \in (8n,\ 10n)$이고 $q \in (0,\ 2n)$인 경우 동시에 홀수 혹은 짝수를 선택하는 경우의 수의 합이므로 전체 경우의 수는

$2 \cdot (n^2 + (n-1)^2)$

이다. 그러므로

$$a_n = 3\{n(n-1) + (n-1)(n-2)\} + 2\{n^2 + (n-1)^2\} = 10n^2 - 16n + 8$$

이다.

(다른 풀이)

$0<x<10n$ 과 $x^2-14nx+48n^2>0$ 에서

$$0<x<6n \text{ 또는 } 8n<x<10n \quad \cdots \text{ ①}$$

이다. $\dfrac{\pi x}{4n}=\theta$ 라 하면 ①에서 $0<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ 또는 $2\pi<\theta<\dfrac{5}{2}\pi$ 이다.

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 을 만족하는 순서쌍 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ 에서 $\sin\theta-\cos\theta<1$ 인 θ 의 범위는

$$0<\theta<\frac{1}{2}\pi \text{ 또는 } \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi \text{ 또는 } 2\pi<\theta<\frac{5}{2}\pi$$

이다. 따라서 x 의 범위는

$$(0,\ 2n) \text{ 또는 } (4n,\ 6n) \text{ 또는 } (8n,\ 10n)$$

이고 $S_n=(0,\ 2n)\cup(4n,\ 6n)\cup(8n,\ 10n)$ 이다.

주어진 조건을 만족하는 순서쌍 (p,q) 의 개수는

(등차수열을 이루면서 집합 S_n 에 속하는 세 수의 개수) × 2

이다.

(i) $(0,\ 2n)$ 에서 등차수열을 이루는 세 수의 개수는

$d=1$ 일 때, $(2n-3)$ 개

$d=2$ 일 때, $(2n-5)$ 개

$d=3$ 일 때, $(2n-7)$ 개

$\cdots$

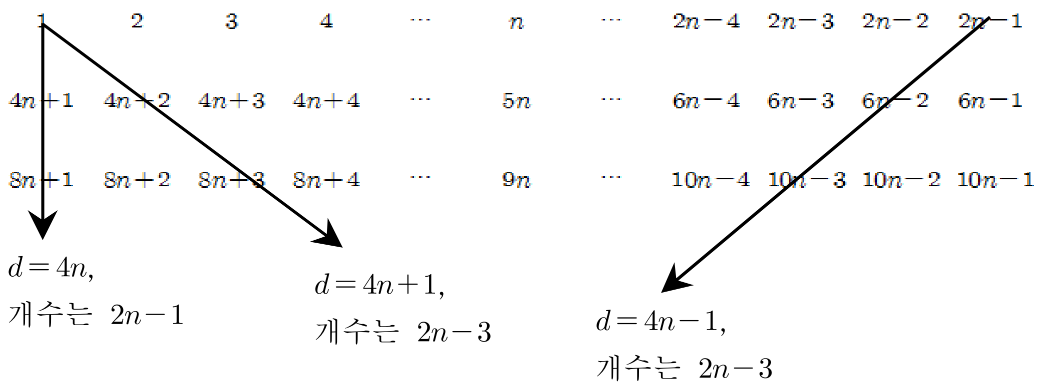
$d=n-1$ 일 때, 1 개

이므로 세 수의 총 개수는 다음과 같다.

$$1+3+\cdots+(2n-3)=\frac{(1+2n-3)(n-1)}{2}=(n-1)^2$$

이 때, $(4n,\ 6n)$ 와 $(8n,\ 10n)$ 에 속하는 등차수열의 개수도 같으므로 조건을 만족하는 순서쌍 (p,q) 의 개수는 $3\times2\times(n-1)^2$ 이다.

(ii) $p\in(0,\ 2n)$ 이고 $q\in(8n,\ 10n)$ 이면 $\dfrac{p+q}{2}\in(4n,\ 6n)$ 이므로 세 수의 개수는 다음 그림에서의 대각선들의 개수와 같다.



이런 대각선들의 총 개수를 차례대로 구하면

$$d=3n+1 \text{ 일 때, } 1\text{개}$$
$$\cdots$$
$$d=4n-2 \text{ 일 때, } (2n-5)\text{개}$$
$$d=4n-1 \text{ 일 때, } (2n-3)\text{개}$$
$$d=4n \text{ 일 때, } (2n-1)\text{개}$$
$$d=4n+1 \text{ 일 때, } (2n-3)\text{개}$$
$$d=4n+2 \text{ 일 때, } (2n-5)\text{개}$$
$$\cdots$$
$$d=5n-1 \text{ 일 때, } 1\text{개}$$

이므로 총 개수는

$$(1+3+\cdots+(2n-3))\times 2+(2n-1)=2(n-1)^2+2n-1=2n^2-2n+1$$

이다.

그러므로 조건을 만족하는 순서쌍 (p,q)의 개수는 $2\times(2n^2-2n+1)=4n^2-4n+2$이다.

따라서 (i), (ii) 에 의하여 $a_n=10n^2-16n+8$이다.

[문제 1-(b)] 대학발표 예시답안

자연수 k에 대해서 $a_k-2=2(5k-3)(k-1)$이므로

$$a_k a_{k+1}-2a_k-2a_{k+1}+4=(a_k-2)(a_{k+1}-2)=4(5k-3)(k-1)(5k+2)k$$

이다. 따라서 문제의 식은

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2-k}{a_k a_{k+1}-2a_k-2a_{k+1}+4}&=\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(5k-3)(5k+2)}\\&=\frac{1}{20}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{5k-3}-\frac{1}{5k+2}\right)\\&=\frac{1}{20}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{5n+2}\right)\\&=\frac{n-1}{28(5n+2)}\end{aligned}$$

이다.

[문제2] 대학발표 예시답안

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\\&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\\&=|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2\end{aligned}$$

이므로 $k=|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2$이다.

(a) $k=0$에서 $\overline{OA}=\overline{OB}$이므로 타원의 대칭성으로부터 점 A와 점 B는 x축 또는 y축

대칭이다. 따라서 점 A와 점 B는 x축 또는 y축 대칭이고, 직선 OA와 직선 OB가 서로 수직이므로 직선 OA와 직선 OB의 기울기 중 하나는 1이고 다른 하나는 -1이다. 그러므로 점 A는 주어진 타원과 직선 $y=x$의 교점인

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \left(-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

또는 주어진 타원과 직선 $y=-x$의 교점인

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \left(-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

이다.

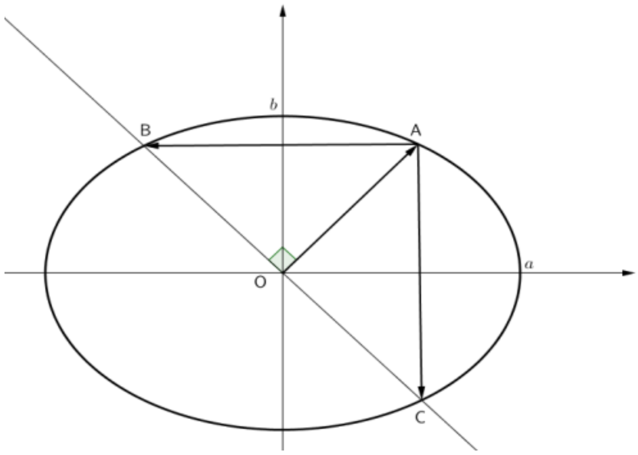
(다른 풀이)

(a) $k=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta$ 이므로 $k=0$이 되려면 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$가 이루는 각이 $\frac{\pi}{2}$가 되어야 한다. $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$가 이루는 각이 $\frac{\pi}{2}$일 때, 점 A를 구하자.

$\triangle ABO$와 $\triangle ACO$에서 $\overline{AO}$는 공통, $\angle AOB=\frac{\pi}{2}=\angle AOC$ 이고 타원의 대칭성에 의하여 $\overline{BO}=\overline{CO}$ 이므로 $\triangle ABO\equiv\triangle ACO$이다.

따라서 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 이므로 $\angle ABO=\frac{\pi}{4}=\angle ACO$이고 $\angle OAC=\frac{\pi}{4}$이다.

그러므로 $\triangle ACO$는 이등변삼각형이므로 $\overline{OA}=\overline{OC}$이다.



$\overline{OA}$의 기울기를 k라 하면 $\overline{OA}\perp\overline{OC}$이므로 $\overline{OC}$의 기울기는 $-\frac{1}{k}$이다.

한편, $\overline{OA}=\overline{OC}$가 되려면 타원의 대칭성에 의하여 점 A와 점 C는 x축 또는 y축 대칭이 되어야 하므로 $\overline{OC}$의 기울기는 $-k$이다. 그러므로 $-\frac{1}{k}=-k$에서

$$k=\pm 1$$

이 된다. 즉, 점 A는 타원과 $y=x$ 또는 $y=-x$의 교점이다.

따라서

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \left(-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\text{또는} \quad \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \left(-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

이다.

(b) k가 최대가 되려면 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$의 길이가 최대이고, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$의 길이가 최소가 되며 두 벡터가 수직이어야 한다. 점 A가 장축에 있고 점 B가 단축에 있을 때, 조건을 만족하며 최댓값 a^2-b^2을 가진다. 같은 이유로 점 A가 단축에 있고 점 B가 장축에 있을 때, 조건을 만족하며 최솟값은 b^2-a^2을 가진다.

[문제 3-(a)] 대학발표 예시답안

함수 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$$h(x)=x^3+ax^2+bx-9x=x(x^2+ax+b-9)=x(x-c)^2$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 $x=c\ (c>0)$에서 접하므로 $a=-2c$이고 $b=c^2+9$이다.

따라서 $\left|\dfrac{b}{a+c}\right|$는 다음과 같다.

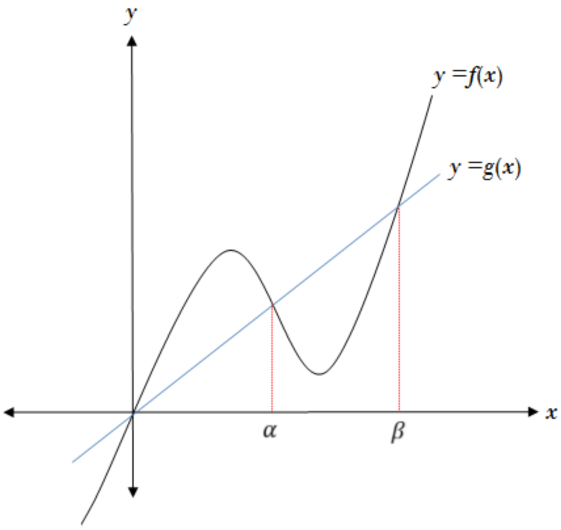
$$\left|\frac{b}{a+c}\right| = \left|\frac{c^2+9}{-2c+c}\right| = \left|c+\frac{9}{c}\right| \geq 2\sqrt{c\cdot\frac{9}{c}} = 2\sqrt{9}=6$$

따라서 구하는 최솟값은 $a=-6$, $b=18$, $c=3$일 때 6이다.

[문제 3-(b)] 대학발표 예시답안

함수 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면, $h(x)=x^3+ax^2+bx-9x=x(x-\alpha)(x-\beta)$ 이다.

삼차함수와 직선으로 둘러싸인 두 영역의 넓이가 같으므로 다음 식이 성립한다.



$$\int_0^{\alpha} h(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} -h(x)dx$$

$$\int_0^{\alpha} h(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx = \int_0^{\beta} h(x)dx = 0$$

함수 $h(x)$의 한 부정적분 함수를 $H(x)$라 하자.

$$H(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(\alpha+\beta)x^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta x^2$$

그러면 다음이 성립한다.

$$\int_0^{\beta} h(x)dx = [H(x)]_0^{\beta} = H(\beta) - H(0) = 0$$

따라서 $H(\beta) = H(0) = 0$

$$H(\beta) = \frac{1}{4}\beta^4 - \frac{1}{3}(\alpha+\beta)\beta^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta^3 = \frac{1}{12}\beta^3\{3\beta - 4(\alpha+\beta)+6\alpha\} = \frac{1}{12}\beta^3(2\alpha - \beta) = 0$$

여기서 $\frac{1}{12}\beta^3 \neq 0$이므로 $\beta = 2\alpha$이다. 따라서 $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha} = 2$이다.

(다른 풀이)

(b) $f(x)$와 $g(x)$의 교점의 x좌표는 0, α, $\beta\,(0<\alpha<\beta)$이고, $x^3+ax^2+bx=9x$의 해가 된다. 그러므로 $x^2+ax+(b-9)=0$의 해는 α, β가 된다.
따라서

$$\alpha+\beta=-a \ \cdots \ ①$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$으로 둘러싸인 두 영역의 넓이가 같으려면 직선 $y=g(x)$는 삼차함수 $y=f(x)$의 대칭점(변곡점)을 지나야 한다.

$f''(x)=6x+2a=0$인 x를 구하면 $x=-\frac{a}{3}$이므로 대칭점의 x좌표는 $-\frac{a}{3}$이다.

한편, $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 교점의 x 좌표인 0, α, β가 $0<\alpha<\beta$ 이므로

$$\alpha=-\frac{a}{3}$$

이다. ①에 의하여 $\beta=-\frac{2a}{3}$ 이고 $\frac{\beta}{\alpha}=2$가 된다.

[문제 4] 대학발표 예시답안

$X=1+\sin x$, $Y=1+\cos x$ 라고 하자. $0<x<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $1<X<2<e$ 이고 Y의 범위도 $1<Y<e$ 이다. 주어진 부등식은 $X^Y>Y^X$가 된다.

함수 $y=\ln x$ 가 증가함수이므로 이 부등식의 양변에 자연로그를 취하여도 부등호의 방향은 변하지 않는다. 그러므로 주어진 부등식은

$$Y\ln X>X\ln Y$$

와 동치이다.

$X>1$ 이고 $Y>1$ 이므로 위 부등식을 XY로 나누어도 부등호의 방향은 변하지 않는다. 그러므로 주어진 부등식은

$$\frac{\ln X}{X}>\frac{\ln Y}{Y} \qquad (1)$$

와 동치이다.

이 부등식을 풀기 위하여 다음과 같은 함수를 생각하자.

$$f(x)=\frac{\ln x}{x} \ (x>1)$$

이 때, 부등식 (1)은

$$f(X)>f(Y) \qquad (2)$$

와 같다. $f(x)$ 를 미분하면

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

이다. $1<x<e$ 에서 $f'(x)>0$ 이므로 $f(x)$ 는 $1<x<e$ 에서 증가한다.

그러므로 주어진 X, Y의 범위에서($1<X<e$, $1<Y<e$) 부등식 (2)는 $X>Y$와 동치이다. $0<x<\frac{\pi}{2}$ 에서 부등식 $X=1+\sin x>Y=1+\cos x$ 을 풀면 구하는 범위는 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ 이다.

18 성균관대학교 모의(자연계열)14)

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
수리가형 수능 범위와 동일 미적분, 벡터 등 심화문제	3개영역 합 6등급 이내	수학(2문항, 6문제) 과학(2문항, 6문제)	120분

[수학 1]

다음 <제시문 1> ~ <제시문 3>을 읽고 [수학 1-ⅰ] ~ [수학 1-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (20점)

<제시문 1>

초기항이 $a_1 = 1$이고, 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$의 처음 n개의 항의 합은

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(n+1)}{2}$$ 이다.

<제시문 2>

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 격자점 P_n과 S_n을 다음과 같이 정의한다.

$$P_n = \{(x,\, y) | 0 \le x,\, y \le n \text{이고, } x \text{ 와 } y \text{는 정수}\}$$

$$S_n = \{(x,\, y) \in P_n \,|\, x \le 3y \le 9x\}$$

<제시문 3>

자연수 k에 대하여, k차 다항식 $p(x)$와 $q(x)$의 최고차 항의 계수가 각각 a와 b라 할 때, 극한 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{p(x)}{q(x)}$의 값은 $\dfrac{a}{b}$이다.

[수학 1-ⅰ] <제시문 2>에서 $n=3$일 때, 집합 P_3과 S_3의 원소의 개수를 각각 구하고 그 이유를 논하시오.(6점)

[수학 1-ⅱ] 자연수 n이 3의 배수일 때, 집합 S_n의 원소의 개수를 n에 대한 함수로 표현하고 그 이유를 논하시오.(8점)

[수학 1-ⅲ] $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(S_n \text{의 원소의 개수})}{(P_n \text{의 원소의 개수})}$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.(6점)

14) 성균관대학교 홈페이지

[수학 2]
다음 <제시문 1> ~ <제시문 3>을 읽고 [수학 2-ⅰ] ~ [수학 2-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (20점)

<제시문 1>
좌표공간에서 중심이 원점이고 반지름이 1인 구 A의 부피는 $\frac{4}{3}\pi$이다.

<제시문 2>
닫힌 구간 $[a, b]$의 임의의 점 x에서 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$이고, 함수 $S(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 이 입체 도형의 부피는 $\int_a^b S(x)\,dx$로 주어진다.

<제시문 3>
3 이상의 자연수 n에 대하여, <제시문 1>의 구 A의 내부에 V_n이 놓여 있다. 열린 구간 $(-1, 1)$의 임의의 점 x에서 V_n을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 구 A를 자른 단면에 내접하는 정n각형이다. $x=-1$ 또는 $x=1$일 때의 단면은 각각 점 $(-1, 0, 0)$과 $(1, 0, 0)$이라고 한다.

[수학 2-ⅰ]
반지름이 r인 정n각형의 넓이를 n과 r에 관한 식으로 표현하고 그 이유를 논하시오.(6점)

[수학 2-ⅱ]
<제시문 3>의 입체 도형 V_n의 부피를 n에 관한 식으로 표현하고, 그 이유를 논하시오.(8점)

[수학 1-ⅲ]
n이 무한대로 갈 때, 입체도형 V_n의 부피의 극한값을 구하고, 그 이유를 논하시오.(6점)

풀어보기

문제1

양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. (2014년 6월 평가원 A형)

(가) $a \le b \le 20$
(나) $\log b - \log a \le f(a) - f(b)$

문제2

자연수 n에 대하여 다음과 같이 모든 자연수를 작은 것부터 n행에 n개씩 차례로 나열하였다. 이때 n행에 있는 n의 배수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_2 = 2$, $a_5 = 15$이다.

1행	1					
2행	2	3				
3행	4	5	6			
4행	7	8	9	10		
5행	11	12	13	14	15	
6행	16	17	18	19	20	21
⋮			⋮			⋱

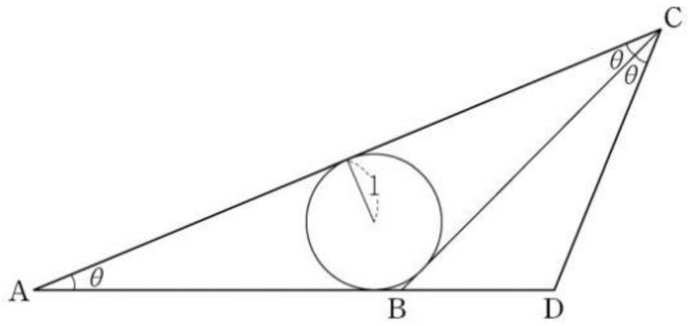
수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값은? (2014년 3월 전국연합 A형)

① 4800 ② 4820 ③ 4840 ④ 4860 ⑤ 4880

문제3

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 $\angle CAB = \angle BCA = \theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 점 A가 아닌 점 D를 $\angle DCB = \theta$가 되도록 잡는다. 삼각형 BCD의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \{\theta \times S(\theta)\}$의 값은?

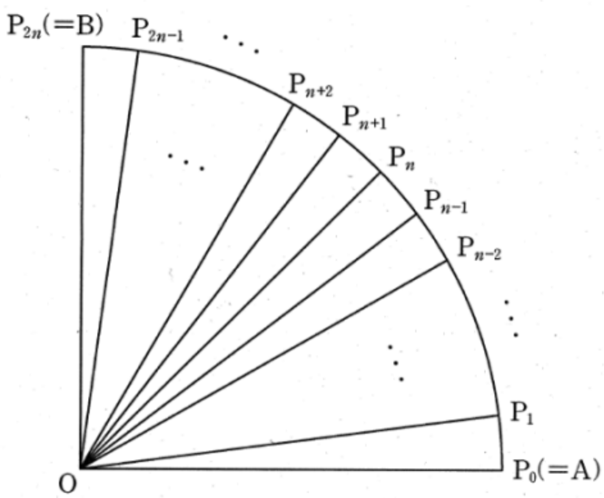
(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) (2015학년도 대수능 문제)



① $\frac{2}{3}$　　② $\frac{8}{9}$　　③ $\frac{10}{9}$　　④ $\frac{4}{3}$　　⑤ $\frac{14}{9}$

문제4

그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1 이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB 가 있다. 자연수 n에 대하여 호 AB 를 $2n$등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $P_0(=A)$, P_1, P_2, $\cdots$, P_{2n-1}, $P_{2n}(=B)$라 하자.



주어진 자연수 n에 대하여 $S_k(1 \le k \le n)$를 삼각형 $OP_{n-k}P_{n+k}$의 넓이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$의 값은? (2014년 9월 평가원 문제)

① $\frac{1}{\pi}$　　② $\frac{13}{12\pi}$　　③ $\frac{7}{6\pi}$　　④ $\frac{5}{4\pi}$　　⑤ $\frac{4}{3\pi}$

예시답안

풀어보기(문제1)

ⅰ) $a \le b \le 9$ 인 경우

$\log a = f(a)$, $\log b = f(b)$ 이므로 $\log b - \log a \le f(a) - f(b) = \log a - \log b$

$2\log b \le 2\log a \quad \therefore b \le a$ 따라서 $a = b$ 이다. 따라서 순서쌍(a, b) 의 개수는 9개.

ⅱ) $a < 10 \le b \le 20$ 인 경우

$\log a = f(a)$, $\log b = 1 + f(b)$ 이므로 $\log b - \log a \le f(a) - f(b) = \log a - (\log b - 1)$

$2\log b \le 2\log a + 1$, $\log b^2 \le \log 10a^2$, $\therefore b^2 \le 10a^2$

$a = 1, 2, 3$ 일 때는 만족하는 b 가 존재하지 않는다.

$a = 4$ 이면 $b^2 \le 160$ 이므로 $b = 10, 11, 12$

$a = 5$ 이면 $b^2 \le 250$ 이므로 $b = 10, 11, \cdots, 15$

$a = 6$ 이면 $b^2 \le 360$ 이므로 $b = 10, 11, \cdots, 18$

$a = 7$ 이면 $b^2 \le 490$ 이므로 $b = 10, 11, \cdots, 20$

$a = 8, 9$ 일 때도 $b = 10, 11, \cdots, 20$ 이다.

따라서 만족하는 순서쌍의 개수는 $3 + 6 + 9 + 11 \times 3 = 51$(개)이다.

ⅲ) $10 \le a \le b \le 20$ 인 경우

$\log a = 1 + f(a)$, $\log b = 1 + f(b)$ 이므로

$\log b - \log a \le f(a) - f(b) = (\log a - 1) - (\log b - 1)$, $2\log b \le 2\log a$, $\quad \therefore b \le a$

따라서 $a = b$ 이다. 순서쌍(a, b) 의 개수는 11개다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ) 에 의하여 순서쌍의 개수는 $9 + 51 + 11 = 71$(개)이다.

풀어보기(문제2)

$n \ge 2$일 때, 제 $n-1$행의 맨 오른쪽 끝의 수는

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

이다. 따라서 a_n은 $\frac{n(n-1)}{2}$보다 큰 수 중 가장 작은 n의 배수이다.

ⅰ) n이 홀수일 때,

$\frac{n(n-1)}{2}$ 이 n의 배수이므로

$$a_n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \therefore a_{2n-1} = \frac{(2n-1)(2n-1+1)}{2} = 2n^2 - n$$

ⅱ) n이 짝수일 때,

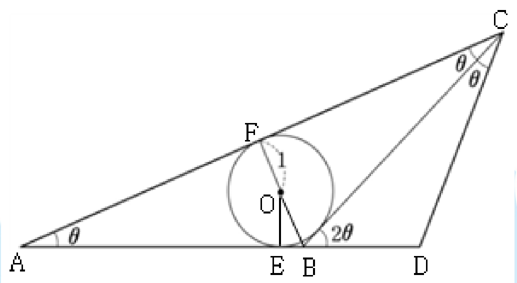
$$\frac{n(n-1)}{2}=n\times\frac{n-2}{2}+\frac{n}{2}$$ 이므로

$$a_n=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}n^2 \qquad \therefore a_{2n}=\frac{1}{2}(2n)^2=2n^2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{30}a_n=\sum_{n=1}^{15}(a_{2n-1}+a_{2n})=\sum_{n=1}^{15}(2n^2-n+2n^2)=4\sum_{n=1}^{15}n^2-\sum_{n=1}^{15}n$$

$$=4\times\frac{15\times16\times31}{6}-\frac{15\times16}{2}=4840$$

풀어보기(문제3)



내접원의 중심을 O, 점 O에서 선분 AB와 선분 AC에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자. $\angle BOE=\theta$이므로 $\overline{OB}=\frac{1}{\cos\theta}$이다.

따라서 $\overline{BF}=1+\frac{1}{\cos\theta}$이고, $\overline{BC}=\frac{1}{\sin\theta}\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)$이다.

한편 $\angle CBD=2\theta$, $\angle BDC=\pi-3\theta$, 삼각형 BDC에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{BD}}{\sin\theta}$$

이므로

$$\overline{BD}=\frac{1}{\sin3\theta}\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)$$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{BD}\times\sin2\theta=\frac{\sin2\theta}{2\sin\theta\sin3\theta}\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)^2$$

$$\lim_{\theta\to0+}\{\theta\times S(\theta)\}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\sin2\theta}{2\sin\theta\sin3\theta}\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)^2=\frac{4}{3}$$

풀어보기(문제4)

$$S_k = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin\frac{2k\pi}{4n} = \frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n} \text{ 이므로}$$

$$S = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}\times\frac{1}{2n}$$

여기서 $\left(x_k = \frac{k}{2n},\ \Delta x = \frac{1}{2n}\right.$로 놓으면$\left.\right)$

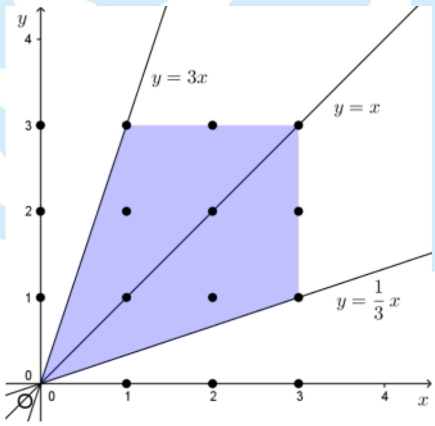
$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin\pi x\, dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}$$

예시답안

[1- i]

$P_3 = \{(x, y) \mid 0 \le x, y \le 3$이고, x와 y는 정수$\}$이므로, 이를 만족하는 정수의 순서쌍 (x, y)의 개수는 $4\times 4 = 16$이다.

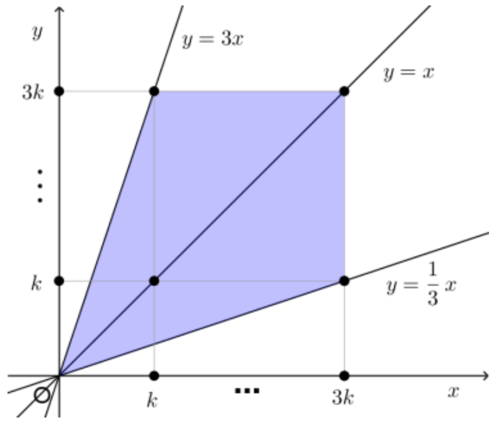
$S_3 = \{(x, y) \in P_3 \mid x \le 3y \le 9x\}$이므로, $0 \le x, y \le 3$이고, $\frac{1}{3}x \le y \le 3x$를 만족하는 정수의 순서쌍이므로, 아래의 그림에서 음영으로 표시된 영역에서 정수의 순서쌍의 개수와 같다.



S_3의 개수를 빠르게 계산하려면, P_3의 원소의 개수에서 음영이 없는 영역의 격자점의 개수를 빼는 것이 효율적이다. 따라서 $S_3 = 16 - 6 = 10$이다.

[1-ii]

n은 3의 배수이므로 $n = 3k$라고 두자. 이 때, S_n의 개수는 아래의 그림에서 음영으로 처리된 영역의 격자점의 수와 같다.



한편, $y=3x$ 와 $y=\frac{1}{3}x$ 는 서로 역함수의 관계이므로 $y>3x$ 를 만족하는 음이 아닌 정수쌍 (x, y) 의 개수와 $y<\frac{1}{3}x$ 를 만족하는 음이 아닌 정수쌍 (x, y) 의 개수는 서로 같다. 따라서 한 쪽의 개수를 구하면 나머지 한 쪽의 개수를 알 수 있다.

먼저 $y<\frac{1}{3}x$ 를 만족하는 음이 아닌 정수쌍의 개수부터 구하면 다음과 같다.

$(1, 0), (2, 0), (3, 0), \cdots, (3k, 0)$ 까지 $3k$ 개,

$(4, 1), (5, 1), (6, 1), \cdots, (3k, 1)$ 까지 $3k-3=3(k-1)$ 개,

$(7, 2), (8, 3), (9, 2), \cdots, (3k, 2)$ 까지 $3k-6=3(k-2)$ 개, $\cdots$

이제 제일 마지막 항을 생각해보면 $\frac{1}{3}(3k-3)=k-1$ 이므로 이 점을 제외한

$(3k-2, k-1), (3k-1, k-1), (3k, k-1)$ 까지 $3=3\times 1$ 개

따라서 총 개수는 $3(k+(k-1)+\cdots+1)=\frac{3k(k+1)}{2}$ 이다.

그런데 $k=\frac{1}{3}n$ 이므로 $\frac{3k(k+1)}{2}=\frac{1}{6}(n^2+3n)$ 이다.

이제 S_n 의 개수는, $y>3x$ 인 영역과, $y<\frac{1}{3}x$ 인 영역을 고려하여 P_n 의 원소의 개수에서 $2\times\frac{1}{6}(n^2+3n)$ 을 빼면 된다. 그런데 $n(P_n)=(n+1)^2$ 개이므로

$$n(S_n)=n(P_n)-2\times\frac{1}{6}(n^2+3n)=(n+1)^2-\left(\frac{1}{3}n^2+n\right)=\frac{2}{3}n^2+n+1 \text{ 이다.}$$

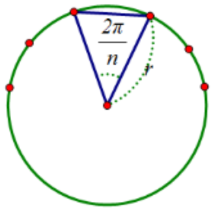
[1-iii]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(S_n \text{의 원소의 개수})}{(P_n \text{의 원소의 개수})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}n^2+n+1}{(n+1)^2}=\frac{2}{3}$$

이다. 이것은 <제시문 3>에 의하여 당연한 사실이다.

[2-ⅰ]

아래 그림과 같이 원에 내접하는 정n각형에는 n개의 이등변삼각형이 존재한다. 이때, 이등변삼각형의 반지름 사이의 각은 원의 중심각을 n등분했으므로 $\frac{2\pi}{n}$이다.



한편, 이등변삼각형 하나의 넓이는 $\frac{1}{2}r \times r \times \sin\frac{2\pi}{n}$이다. 따라서 정$n$각형의 넓이를 S라고 하면, $S = \frac{1}{2}nr^2\sin\frac{2\pi}{n}$이다.

[2-ⅱ]

<제시문 2>에 의하여 구하는 부피 $V_n = \int_{-1}^{1} S(x)\,dx$이고, 중심이 원점이고 반지름이 1인 구의 방정식은 $x^2+y^2+z^2=1$이므로, x축 위의 점 $(x, 0, 0)$을 지나고 x축에 수직으로 자른 단면의 방정식은 $y^2+z^2=1-x^2$으로 원이다. 이때, 반지름 $r=\sqrt{1-x^2}$이므로 [2-ⅰ]에 의하여 $S(x) = \frac{1}{2}n(1-x^2)\sin\frac{2\pi}{n}$이다. 따라서

$$V_n = \int_{-1}^{1} S(x)\,dx = 2 \times \frac{1}{2}n\sin\frac{2\pi}{n}\int_{0}^{1}(1-x^2)\,dx = \frac{2}{3}n\sin\frac{2\pi}{3}$$

이다.

[2-ⅲ]

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}n\sin\frac{2\pi}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot(2\pi)\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \frac{4\pi}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \frac{4\pi}{3}\cdot 1 = \frac{4\pi}{3}$$

위의 식은 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$과 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\pi}{n}\right)=0$을 고려하면 당연히 성립한다.

(대학발표 예시답안) 대학발표 예시답안은 문서로 발표된 것이 아니라 동영상으로 되어 있는데, 위의 내용과 대동소이하다.

19 성균관대학교 수시(자연계열 1교시)15)

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
수리가형 수능 범위와 동일 미적분, 벡터 등 심화문제	3개영역 합 6등급 이내	수학(2문항, 6문제) 과학(2문항, 6문제)	120분

[수학 1]
다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [수학1-i] ~ [수학1-ii]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문 1>
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

<제시문 2>
두 함수 $f(x),\ g(x)$가 모두 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,
두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

<제시문 3>
실수 전체의 집합 R에 대하여 함수 $f:R\to R$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\ge 0\text{일 때}) \\ -x^3 & (x<0\text{일 때}) \end{cases}$$

로 정의할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 B라고 하자. 점 B에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선 중 점 A를 지나지 않는 접선의 접점을 C라 하자.

[수학 1-ⅰ] <제시문3>에서 점 C의 좌표를 구하고, 그 이유를 논하시오.

[수학 1-ⅱ] <제시문3>에서 삼각형 ABC는 곡선 $y=f(x)$에 의해 두 부분으로 나누어진다. 이 중 점 $\mathrm{P}(0,\ -1)$를 포함하는 부분의 넓이를 구하고, 그 이유를 논하시오.

15) 성균관대학교 홈페이지

[수학 2]

다음 <제시문1> ~ <제시문2>를 읽고 [수학2-i] ~ [수학2-ii]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

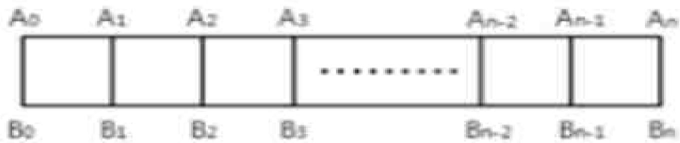
<제시문 1>

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 다음과 같다.

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n - 1)}{r-1} & (r \neq 1 \text{일 때}) \\ na & (r = 1 \text{일 때}) \end{cases}$$

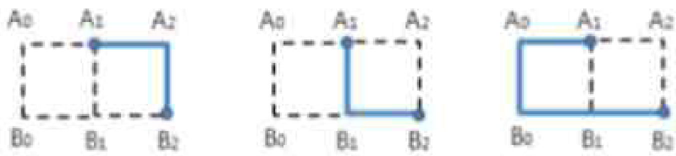
<제시문 2>

자연수 n에 대하여 아래 그림과 같은 도로망이 있다.



단, 이 도로망 위를 이동할 때 한 번 지나간 지점은 다시 지날 수 없다.

예를 들어, $n=2$ 일 때, A_1 지점으로부터 B_2 지점까지 가는 방법은 다음과 같이 3가지이다.



여기서, 이동 거리는 최단 거리일 필요는 없으며, 출발 지점은 한 번 지나간 지점으로 간주한다.

[수학 2- i]

<제시문2>의 도로망에서 $n=100$일 때, A_0지점으로부터 B_{100}지점까지 가는 방법은 몇 가지인지 구하고, 그 이유를 논하시오.

[수학 2- ii]

<제시문2>의 도로망에서 $n=100$일 때, 도로망 위쪽의 A_0, A_1, A_2, $\cdots$, A_{100} 각각의 지점에서 출발하여 B_{100}지점까지 가는 방법의 수의 총합을 구하고, 그 이유를 논하시오. 예를 들어, $n=2$일 때 A_0, A_1, A_2지점 중 하나에서 출발하여 B_2지점까지 가는 방법의 수의 총합은 10가지이다.

풀어보기

문제1

$0<t<41$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=t$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t), t)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t), t)$라 하자. $h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$라 할 때, $h'(5)$의 값을 구하시오. (2015년 11월 대수능)

문제2

함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |\sin x|-\sin x & \left(-\dfrac{7}{2}\pi\le x\le 0\right) \\ \sin x-|\sin x| & \left(0\le x\le \dfrac{7}{2}\pi\right) \end{cases}$$

라 하자. 닫힌 구간 $\left[-\dfrac{7}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt\ge 0$이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값을 구하시오. (단, $-\dfrac{7}{2}\pi\le\alpha\le\dfrac{7}{2}\pi$) (2015년 9월 평가원)

문제3

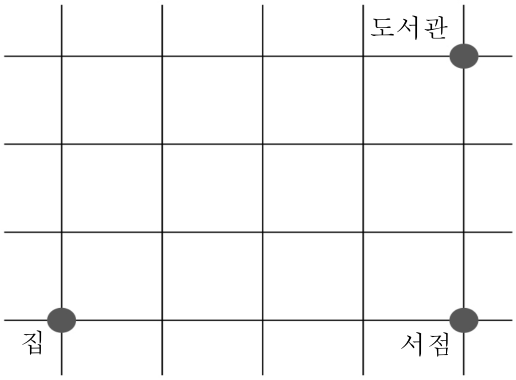
1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 공을 한 개씩 모두 꺼낼 때, i번째 $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$ 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a_i라 하자. $1<p<q<9$인 두 자연수 p, q에 대하여 a_i가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $1\le i<p$이면 $a_i<a_{i+1}$이다.
(나) $p\le i<q$이면 $a_i>a_{i+1}$이다.
(다) $q\le i<9$이면 $a_i<a_{i+1}$이다.

$a_1=2$, $a_p=8$인 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)
(2016년 10월 전국연합)

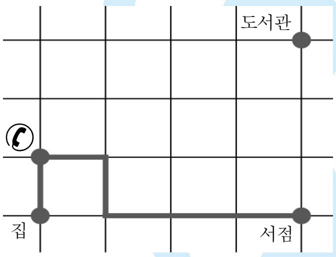
문제4

그림과 같이 이웃한 두 교차로 사이의 거리가 모두 같은 도로망이 있다.

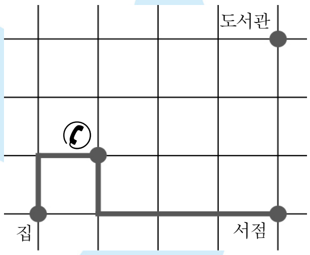


철수가 집에서 도로를 따라 최단거리로 약속장소인 도서관으로 가다가 어떤 교차로에서 약속장소가 서점으로 바뀌었다는 연락을 받고 곧바로 도로를 따라 최단거리로 서점으로 갔다. 집에서 서점까지 지나 온 길이 같은 경우 하나의 경로로 간주한다.

예를 들어, [그림1]과 [그림2]는 연락받은 위치는 다르나, 같은 경로이다.



[그림1]



[그림2]

철수가 집에서 서점까지 갈 수 있는 모든 경로의 수를 구하시오. (단, 철수가 도서관에 도착한 후에 서점으로 가는 경우도 포함한다.) (2012년 7월 전국연합)

예시답안

풀어보기(문제1)

$h(t)=t\{f(t)-g(t)\}$ 이므로 $h'(t)=\{f(t)-g(t)\}+t\times\{f'(t)-g'(t)\}$ 이다.

한편, 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$ 와 직선 $y=5$ 가 만나는 교점을 구해보면

$$x^3+2x^2-15x+5=5$$

$$x(x+5)(x-3)=0$$

$$x=-5,\ 0,\ 3$$

따라서 $f(5)=3,\ g(5)=-5$ 이다. 한편 $f(t)^3+2f(t)^2-15f(t)+5=t$ 에서

t 에 관해 양변을 미분하여 정리하면 $f'(t)=\dfrac{1}{3f(t)^2+4f(t)-15}$ 이므로

$$f'(5)=\frac{1}{3\times3^2+4\times3-15}=\frac{1}{24}$$

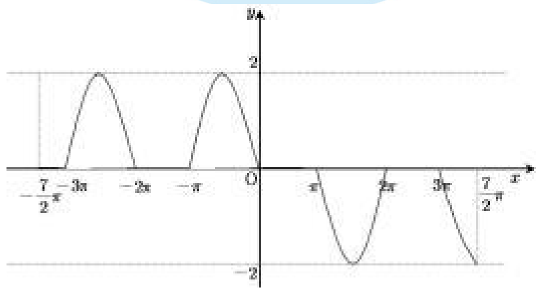
$$g'(5)=\frac{1}{3\times(-5)^2+4\times(-5)-15}=\frac{1}{40}$$

이다. 따라서 $h'(5)=\{3-(-5)\}+5\left(\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{40}\right)=8+\dfrac{1}{12}=\dfrac{97}{12}$

풀어보기(문제2)

$$f(x)=\begin{cases}-2\sin x & (\pi\le x\le 2\pi,\ 3\pi\le x\le \frac{7\pi}{2})\\ 2\sin x & (-3\pi\le x\le -2\pi,\ -\pi\le x\le 0)\\ 0 & (\text{그 외})\end{cases}$$

이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 모든 실수 x에 대하여 실수 a가 $-\dfrac{7}{2}\pi\le a\le -3\pi$ 일 때만 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt\ge 0$ 이 항상 성립한다. 그러므로 실수 a의 최솟값과 최댓값은 각각 $-\dfrac{7}{2}\pi,\ -3\pi$ 이다. 따라서

$\beta-\alpha=-3\pi-\left(-\dfrac{7}{2}\pi\right)=\dfrac{1}{2}\pi$ 이다.

[참고] $-3\pi < a \leq -\frac{5}{2}\pi$인 경우

$x > a$이면 $\int_a^x f(t)dt \geq 0$가 항상 성립하지만

$x < a$이면 $\int_a^x f(t)dt \geq 0$가 성립하지 않는다.

풀어보기(문제3)

a_{p+1}부터 a_9까지의 $(9-p)$개의 수 중에서 최솟값은 a_q, 즉 $a_q=1$, 9는 $a_p=8$보다 큰 수이므로 최댓값은 $a_9=9$이다.

ⅰ) 첫 번째와 p번째 사이의 공을 꺼내는 경우의 수는 $a_1=2$, $a_p=8$, $a_q=1$, $a_9=9$가 적힌 공을 제외한 5개의 공 중에서 $(p-2)$개의 공을 꺼내는 조합의 수이므로 ${}_5\mathrm{C}_{p-2}$이다.

ⅱ) ⅰ)에서 남아 있는 공 중 p번째와 q번째 사이의 공을 꺼내는 경우의 수는 $a_q=1$, $a_9=9$가 적힌 공을 제외한 $(9-p-2)=(7-p)$개의 공 중에서 $(q-p-1)$개의 공을 꺼내는 조합의 수이므로 ${}_{7-p}\mathrm{C}_{q-p-1}$이다.

ⅲ) ⅰ)과 ⅱ)의 과정을 거치면 q번째와 9번째 사이의 공은 정해진다.

이때, p가 정해지면 q가 취할 수 있는 값은 $p+1$부터 8까지이므로 ⅱ)에 의해

$$\sum_{q=p+1}^{8} {}_{7-p}\mathrm{C}_{q-p-1}$$

$q-p-1=k$로 놓으면 $q=p+1$일 때 $k=0$이고, $q=8$일 때 $k=7-p$이므로

$$\sum_{q=p+1}^{8} {}_{7-p}\mathrm{C}_{q-p-1} = \sum_{k=0}^{7-p} {}_{7-p}\mathrm{C}_k = (1+1)^{7-p} = 2^{7-p}$$

p의 값은 2부터 7까지 취할 수 있다.

그러므로 구하는 값은 ⅰ)에 의해 $\sum_{p=2}^{7} {}_5\mathrm{C}_{p-2}2^{7-p}$이다. 따라서 $p-2=r$로 놓으면

$p=2$일 때 $r=0$이고, $p=7$일 때 $r=5$이므로

$$\sum_{p=2}^{7} {}_5\mathrm{C}_{p-2}2^{7-p} = \sum_{r=0}^{5} {}_5\mathrm{C}_r 2^{5-r} = (2+1)^5 = 243$$

[다른 풀이]

구하는 경우의 수는 $a_1=2$, $a_p=8$, $a_q=1$, $a_9=9$가 적힌 4개의 공을 제외한 5개의 공을 첫 번째와 p번째 사이, p번째와 q번째 사이, q번째와 9번째 사이로 나누는 경우의 수와 같다. 그러므로

${}_5\mathrm{C}_0 \times ({}_5\mathrm{C}_0 \cdot {}_5\mathrm{C}_5 + {}_5\mathrm{C}_1 \cdot {}_4\mathrm{C}_4 + {}_5\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_3 \cdot {}_2\mathrm{C}_2 + {}_5\mathrm{C}_4 \cdot {}_1\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_5 \cdot 1)$

$+{}_5\mathrm{C}_1 \times ({}_4\mathrm{C}_0 \cdot {}_4\mathrm{C}_4 + {}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_3 + {}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_2\mathrm{C}_2 + {}_4\mathrm{C}_3 \cdot {}_1\mathrm{C}_1 + {}_4\mathrm{C}_4 \cdot 1)$

$+{}_5\mathrm{C}_2 \times ({}_3\mathrm{C}_0 \cdot {}_3\mathrm{C}_3 + {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_1\mathrm{C}_1 + {}_3\mathrm{C}_3 \cdot 1)$

$+{}_5\mathrm{C}_3 \times ({}_2\mathrm{C}_0 \cdot {}_2\mathrm{C}_2 + {}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_1\mathrm{C}_1 + {}_2\mathrm{C}_2 \cdot 1)$

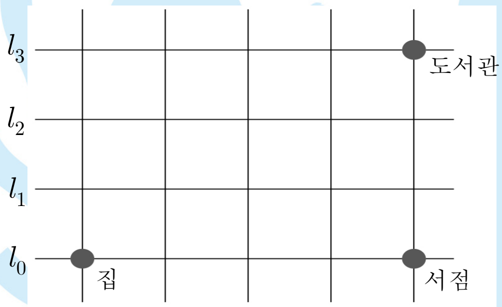
$+{}_5\mathrm{C}_4 \times ({}_1\mathrm{C}_0 \cdot {}_1\mathrm{C}_1 + {}_1\mathrm{C}_1 \cdot 1)$

$+{}_5\mathrm{C}_5 \times (1 \cdot 1) = 243$

[다른 풀이]

a_{p+1}부터 a_9까지의 $(9-p)$개의 수 중에서 최솟값은 a_q, 즉 $a_q=1$, 9는 $a_p=8$보다 큰 수이므로 최댓값은 $a_9=9$이다. 3이 적힌 공을 꺼내는 경우는 첫 번째와 p번째 사이, p번째와 q번째 사이, q번째와 9번째 사이 중 하나이므로 그 경우의 수는 3이다. 4, 5, 6, 7이 적힌 공을 꺼내는 경우의 수도 같은 방법으로 생각하면 각각 3이다. 따라서 구하는 경우의 수는 $3^5=243$이다.

풀어보기(문제4)



i) 연락 받은 교차로가 l_0에 있는 경우: 1

ii) 연락 받은 교차로가 l_1에 있는 경우: $\dfrac{6!}{4!\,2!}$

iii) 연락 받은 교차로가 l_2에 있는 경우: $\dfrac{8!}{4!\,4!}$

iv) 연락 받은 교차로가 l_3에 있는 경우: $\dfrac{10!}{4!\,6!}$

$\therefore\ 1+15+70+210 = 296$

예시답안

[1-ⅰ] (대학발표 예시답안)

함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=\begin{cases} 2x & (x \geq 0\text{일 때}) \\ -3x^2 & (x \leq 0\text{일 때}) \end{cases}$이다. 따라서 점 $A(-1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $y-1=-3(x+1)$, 즉 $y=-3x-2$이고 점 B의 좌표는 $(0,\ -2)$이다. 점 B를 지나는 직선의 방정식은 $y=mx-2$이므로, $x^2=mx-2$는 중근을 가져야 한다. 따라서 $m^2=8$이 되고, $m=\sqrt{2}$이다. 이 때, 중근은 $\sqrt{2}$ 이 되므로, 점 C의 좌표는 $\left(\sqrt{2},\ 2\right)$이다.

[1-ⅱ]ㅣ (대학발표 예시답안)

문제의 넓이는 $\displaystyle\int_{-1}^{0}(-x^3+3x+2)dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}(x^2-2\sqrt{2}x+2)dx$이 되고, 이는

$$\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^3}{2}+2x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-\sqrt{2}x^2+2x\right]_{0}^{\sqrt{2}}=\frac{3}{4}+\frac{2\sqrt{2}}{3}$$ 이다.

[2-ⅰ] (대학발표 예시답안)

A_0지점에서 B_{100}지점으로 이동하기 위해서는 위쪽 도로와 아래쪽 도로 중에서 100개를 선택하면서 오른쪽 방향으로 이동해야 한다. 즉, 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 100개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수이므로, 중복순열의 수 ${}_2\Pi_{100}=2^{100}$이다.

[2-ⅱ] (대학발표 예시답안)

$k \leq 99$에 대해, A_k 지점에서 출발하여 최초에 오른쪽 혹은 아래쪽으로 이동하여 B_{100}지점에 도달하는 방법의 수는 2^{100-k}이다. A_k 지점에서 출발하여 최초 왼쪽으로 이동할 경우, B_{k+1}지점에 도달해야 하고 B_{k+1}지점까지 이동하는 방법의 수는 k이다. 이제 B_{k+1}지점으로부터 B_{100}지점까지 이동하는 방법의 수는 2^{99-k}이다. 이를 종합하면,

- ■ A_0지점에서 출발하여 B_{100}에 가는 방법의 수는 2^{100},
- ■ A_1지점에서 출발하여 B_{100}에 가는 방법의 수는 $2^{99}+1\times2^{98}$,
- ■ A_2지점에서 출발하여 B_{100}에 가는 방법의 수는 $2^{98}+2\times2^{97}$,
- ■ … …
- ■ A_{99}지점에서 출발하여 B_{100}에 가는 방법의 수는 $2^1+99\times2^0$,
- ■ A_{100}지점에서 출발하여 B_{100}에 가는 방법의 수는 101가지이다.

따라서 각각의 이동 방법의 수의 합은

$$\begin{aligned}
&2^{100}+(2^{99}+1\times2^{98})+(2^{98}+2\times2^{97})+\cdots+(2^1+99\times2^0)+101 \\
&=(2^{100}+2^{99}+\cdots+2^1+1)+(2^{98}+2^{97}+\cdots+2^1+1)+\cdots+(2+1)+101 \\
&=(2^{101}-1)+(2^{99}-1)+\cdots+(2^1-1)+100=2^{101}+(2^{99}+2^{98}+\cdots+2^1+1)-1 \\
&=2^{101}+2^{100}-2
\end{aligned}$$

이다.

20 성균관대학교 수시(자연계열 2교시)[16]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
수리가형 수능 범위와 동일 미적분, 벡터 등 심화문제	3개영역 합 6등급 이내	수학(2문항, 6문제) 과학(2문항, 6문제)	120분

[수학 1]
다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [수학1-i] ~ [수학1-ii]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문 1>

(1) 아래 그림과 같이 $\overline{OA_1}=2$, $\overline{A_1B_1}=1$이 주어져 있다.

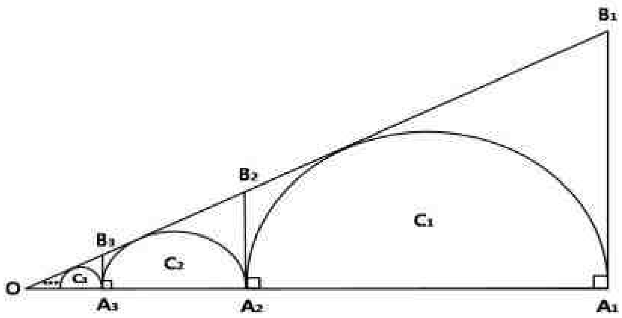
(2) 중심이 선분 OA_1 위에 위치하고 점 A_1을 선분 OB_1에 접하는 반원을 C_1이라 하고 그 반지름을 r_1이라 한다.

(3) 반원 C_1 과 선분 OA_1이 만나는 점 중 A_1이 아닌 점을 A_2라 하고, A_2를 지나고 선분 OA_1 에 수직인 직선이 선분 OB_1과 만나는 점을 B_2 라 한다. 직각삼각형 OA_2B_2에서 중심이 선분 OA_2 위에 위치하고 점 A_2를 지나며 선분 OB_2에 접하는 반원을 C_2라 하고 그 반지름을 r_2라 한다.

(4) 반원 C_2와 선분 OA_2가 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 A_3라 하고, A_3을 지나고 선분 OA_2에 수직인 직선이 선분 OB_2와 만나는 점을 B_3이라 한다. 직각삼각형 OA_3B_3에서 중심이 선분 OA_3위에 위치하고 점 A_3을 지나며 선분 OB_3에 접하는 반원을 C_3이라 하고 그 반지름을 r_3이라 한다.

(5) 이와 같은 방법으로 반원 C_1, C_2, C_3, $\cdots$ 을 계속하여 그려 나갈 때 n번째에 그려지는 반원 C_n의 넓이를 S_n이라고 한다.

16) 성균관대학교 홈페이지



<제시문 2>

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \ (a \neq 0)$ 은 $-1 < r < 1$ 일 때 수렴하고 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$ 이다.

[수학 1-i] S_1 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[수학 1-ii] 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 합을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 2]

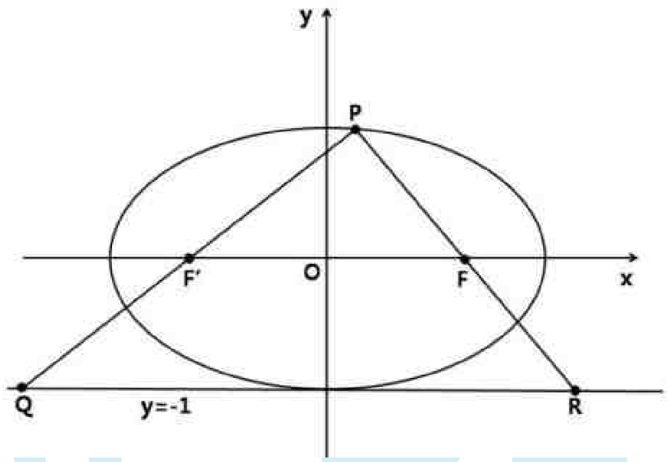
다음 <제시문>을 읽고 [수학2-i] ~ [수학2-ii]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문 1>

아래 그림과 같이 타원 E : $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$

(단, $-1 \le a \le 1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \le b \le 1$)를 잡고, 점 P와 타원 E의 두 초점 $\mathrm{F}',\ \mathrm{F}$를

연결한 직선이 직선 $y=-1$과 만나는 점을 각각 Q, R이라 한다.



[수학 2 - i] 선분 QR의 길이를 a에 대한 식으로 나타내고, 그 이유를 논하시오.

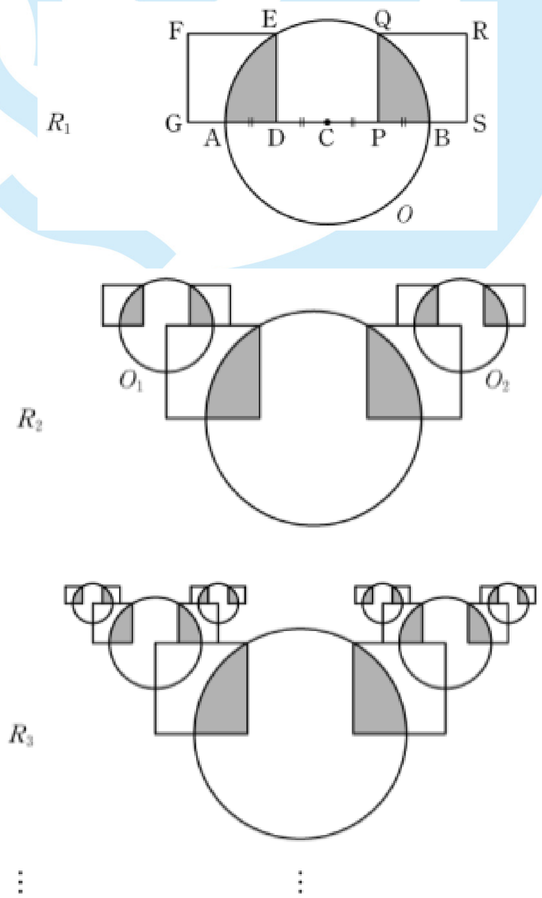
[수학 2 - ii] 삼각형 PQR의 넓이를 b에 대한 식으로 나타내고, 그 이유를 논하시오.

[수학 2 - iii] 삼각형 PQR의 넓이의 최솟값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

풀어보기

문제1

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원의 중심을 C라고 하고, 선분 AC의 중점과 선분 BC의 중점을 각각 D, P라 하자. 선분 AC의 수직이등분선과 선분 BC의 수직이등분선이 원 O의 위쪽 반원과 만나는 점을 각각 E, Q 라 하자. 선분 DE를 한 변으로 하고 원 O와 점 A에서 만나며 선분 DF가 대각선인 정사각형 DEFG 를 그리고, 선분 PQ를 한 변으로 하고 원 O와 점 B에서 만나며 선분 PR가 대각선인 정사각형 PQRS를 그린다. 원 O의 내부와 정사각형 DEFG의 내부의 공통부분인 모양의 도형과 원 O의 내부와 정사각형 PQRS의 내부의 골통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}}$ 인 원 O_1, 점 R을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}$ 인 원 O_2를 그린다. 두 원 O_1, O_2에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 2개의 도형과 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하시오. (2016년 11월 대수능)



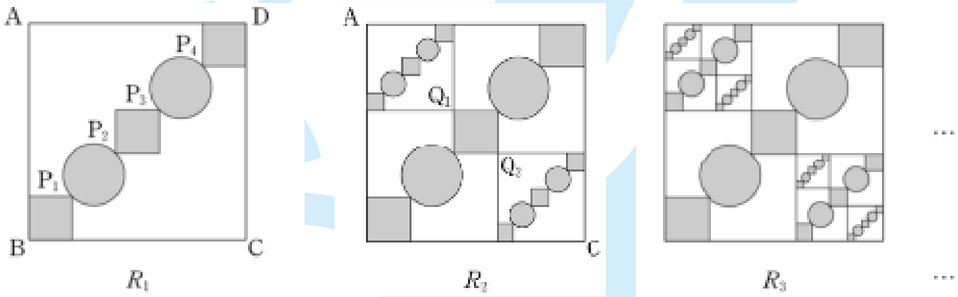
문제2

그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD의 대각선 BD의 5등분점을 점 B에서 가까운 순서대로 각각 P_1, P_2, P_3, P_4라 하고, 선분 BP_1, P_2P_3, P_4D를 각각 대각선으로 하는 정사각형과 선분 P_1P_2, P_2P_3를 각각 지름으로 하는 원을 그린 후, 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 P_2P_3을 대각선으로 하는 정사각형의 꼭짓점 중 점 A와 가장 가까운 점을 Q_1, 점 C와 가장 가까운 점을 Q_2라 하자. 선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 CQ_2를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 2개의 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

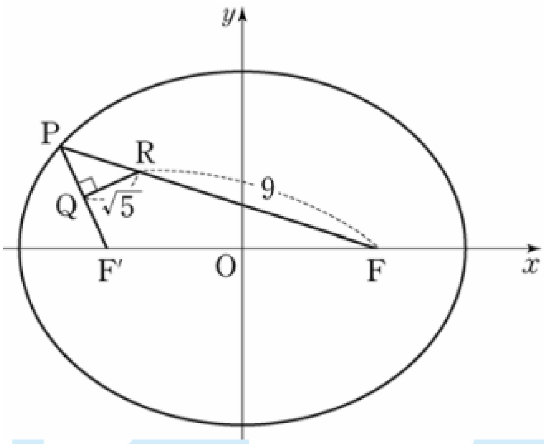
그림 R_2에서 선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 CQ_2를 대각선으로 하는 정사각형에 그림 R_1에서 그림 R_2를 얻는 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하시오. (2015년 11월 대수능)



문제3

그림과 같이 두 초점이 F$(c,\ 0)$, F$'(-c,\ 0)$인 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 타원 위에 있고 제2사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 PF$'$의 중점을 Q, 선분 PF를 $1:3$으로 내분하는 점을 R라 하자. $\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{RF}}=9$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 양수이다.) (2015년 11월 대수능)



문제4

포물선 $y^2=nx$의 초점과 포물선 위의 점 $(n,\ n)$에서의 접선 사이의 거리를 d라 하자. $d^2\geq 40$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. (2011년 11월 대수능)

예시답안

풀어보기(문제1)

R_1에서 색칠한 도형의 넓이를 A_1, R_2에서 새로 색칠한 도형의 넓이를 A_2, 이러한 과정을 반복할 때, R_n에서 새로 색칠한 도형의 넓이를 A_n이라 하자.

점 C와 점 E를 연결하여 만들어진 삼각형 CDE는 직각삼각형이고, $\overline{\mathrm{CE}}=2$, $\overline{\mathrm{CD}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=\sqrt{3}$이고, $\angle\mathrm{ECD}=60^\circ$이다.

주어진 원 O의 반지름의 길이는 2이고, 원 O_1의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DE}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

원 O와 원 O_1의 닮음비는 $2:\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 넓이의 비는 $16:3$이다. 원 O_1과 원 O_2의 내부의 색칠되는 도형의 넓이는 같으므로 $A_1:A_2=16:6$이다. 그러므로 수열 $\{A_n\}$은 공비가 $\frac{3}{8}$인 등비수열이다.

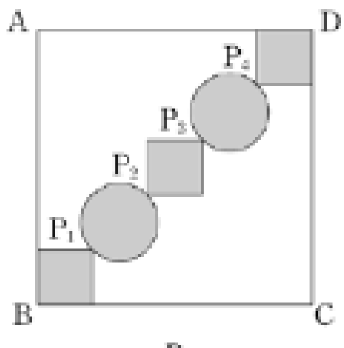
$A_1=2\times\{(\triangledown\ \mathrm{ECA}\text{의 넓이})-(\triangle\mathrm{ECD}\text{의 넓이})\}$

$(\triangledown\mathrm{ECA}$의 넓이$)=4\pi\times\frac{1}{6}$

$(\triangle\mathrm{ECD}$의 넓이$)=1\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}$이므로 $A_1=2\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{3}$이다.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}A_n$이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{3}{8}}=\frac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$이다.

풀어보기(문제2)



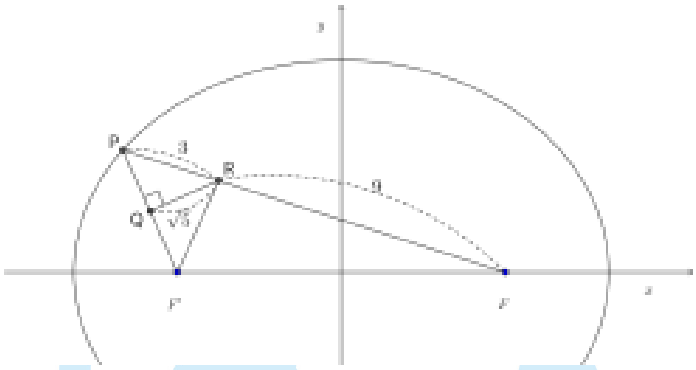
R_1

그림 R_1에 그려진 정사각형의 한 변의 길이는 1이고 원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$S_1=3\times1+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\pi=3+\pi$이다.

그림 R_1에서 모양을 포함하는 정사각형의 한 변의 길이와 그림 R_2에서 새롭게 생긴 모양을 포함하는 정사각형의 한 변의 길이 사이의 비는 $5:2$이므로 넓이비는 $25:4$이다. 그런데 정사각형의 개수가 2배씩 늘어나므로 무한등비급수의 공비는 $\frac{4}{25}\times 2=\frac{8}{25}$이다. 그러므로 $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{3+\pi}{1-\frac{8}{25}}=\frac{25}{17}(\pi+3)$

풀어보기(문제3)



$\overline{\mathrm{PR}}=3$이고 $\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{5}$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=2$, $\overline{\mathrm{PF'}}=4$이다. 타원의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$이므로 $a=8$이다. 한편 $\angle\mathrm{RPF'}=\theta$라 하면 $\triangle\mathrm{PQR}$에서 $\cos\theta=\frac{2}{3}$이고

$\triangle\mathrm{FPF'}$에서 $\cos\theta=\frac{16+144-4c^2}{2\times4\times12}$이므로 $\frac{16+144-4c^2}{2\times4\times12}=\frac{2}{3}$이다. 정리하면 $c^2=24$이고 $b^2=a^2-c^2=40$이다. 그러므로 $a^2+b^2=104$이다.

풀어보기(문제4)

$y^2=nx=4\cdot\frac{n}{4}\cdot x$에서 포물선의 초점을 F라 하면 초점의 좌표는 $\mathrm{F}\left(\frac{n}{4},\ 0\right)$이다.

포물선 $y^2=nx$ 위의 점 $(n,\ n)$에서의 접선 방정식은 $ny=\frac{n}{2}(x+n)$ 즉, $x-2y+n=0$ $(\because\ n\neq0)$

직선 $x-2y+n=0$과 포물선의 초점 $\left(\frac{n}{4},\ 0\right)$사이의 거리 d는

$$d=\frac{\left|1\times\frac{n}{4}-2\times0+n\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{\frac{5}{4}n}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{4}n$$

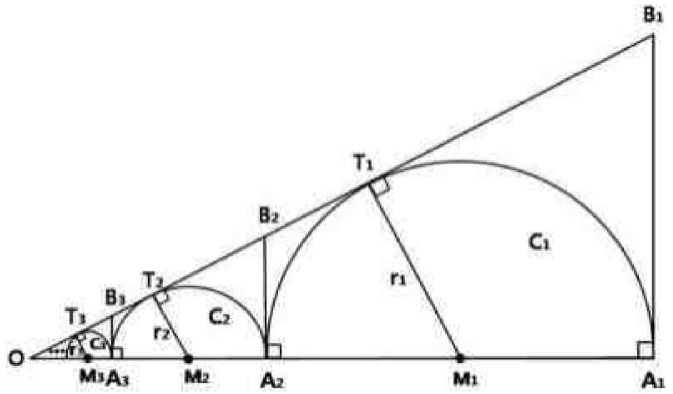
$d^2\geq40$에서 $\frac{5n^2}{16}\geq40$, $n^2\geq128$

따라서 $11^2=121$, $12^2=144$이므로 $d^2\geq40$을 만족하는 자연수 n의 최솟값은 12이다.

예시답안

[1- i] (대학발표 예시답안)

아래 그림과 같이 C_n의 중심을 M_n, C_n이 선분 OB_n과 접하는 접점을 T_n라 하자.



$\overline{\mathrm{B_1T_1}}=\overline{\mathrm{B_1A_1}}$이므로 $\overline{\mathrm{OT_1}}=\sqrt{5}-1$이고 $\overline{\mathrm{OM_1}}=2-r_1$이다.

삼각형 $\mathrm{OA_1B_1}$과 삼각형 $\mathrm{OT_1M_1}$의 닮음을 이용하여 $\overline{\mathrm{OB_1}}$: $\overline{\mathrm{A_1B_1}}$ $=\overline{\mathrm{OM_1}}$: $\overline{\mathrm{M_1T_1}}$ 이다.

즉 $\sqrt{5}-1 : 1=2-r_1 : r_1$를 얻고 이를 풀면 $r_1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$를 얻는다.

따라서 $S_1=\dfrac{1}{2}\times\pi\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}\right)\pi$

[다른 풀이] (대학발표 예시답안)

O를 원점으로 하고 $\overline{\mathrm{OA_1}}$를 x축으로 가지는 좌표 평원을 생각하자. 반원 C_n의 중심을 $(a_n,\ 0)$라 하면 반원 C_1 과 직선 $\overline{\mathrm{OB_1}}$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다

$$C_1 : (x-a)^2+y^2=r_1^2$$

$$\overline{\mathrm{OB_1}} : y=\frac{1}{2}x$$

C_1이 점 $\mathrm{A_1}(2,\ 0)$을 지나므로 $(2-a_1)^2+0^2=r_1^2$를 얻는다. 그런데 $0<a_1<2$이므로

$2-a_1=r_1$ $\cdots(1)$

한편 C_1는 $\overline{\mathrm{OB}}$에 접하므로 $\dfrac{|a_1-2\times 0|}{\sqrt{1+2^2}}=r_1$를 얻고, $0<a_1<2$이므로

$a_1=\sqrt{5}r$ $\cdots$ (2)가 된다.

(1), (2)를 풀면 $r_1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $a_1=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$ 을 얻는다.

따라서 $S_1=\dfrac{1}{2}\times\pi\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}\right)\pi$

[1-ii] | (대학발표 예시답안)

$\overline{\mathrm{B_1T_1}}=\overline{\mathrm{B_1A_1}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OT_1}}=\sqrt{5}-1$이고 $\overline{\mathrm{OM_1}}=2-r_1$이다.

삼각형 $\mathrm{OT_1M_1}$과 삼각형 $\mathrm{OT_2M_2}$의 닮음을 이용하여

$r_1 : r_2 = \overline{\mathrm{OM_1}} : \overline{\mathrm{OM_2}} = 2-r_1 : 2-2r_1-r_2$ 이다.

즉 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} : r_2 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} : 3-\sqrt{5}-r_2$를 얻고 이를 풀면 $r_2=\sqrt{5}-2$가 됨을 알 수 있다. 따라서 $\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{\sqrt{5}-2}{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$가 된다.

이 비율은 r_3, r_4, r_5, $\cdots$ 에서도 마찬가지로 유지되므로 수열 $\{r_n\}$은 초항 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$이고 공비가 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$인 등비수열임을 알 수 있다.

따라서 $r_n=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ 이고

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}\pi r_n^2\\&=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\left\{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}^{n-1}\\&=\pi\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

가 된다.

따라서 제시문 2에 의해서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\pi\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}}{1-\left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)}=\frac{\pi}{2\sqrt{5}}=\frac{\pi\sqrt{5}}{10}$

[다른 풀이] (대학발표 예시답안)

(1-i)로부터 $\mathrm{A_2}(3-\sqrt{5},\ 0)$임을 알 수 있다. 이제 C_2의 중점을 $(a_2,\ 0)$라 두고 (1-i)의 경우와 같은 방법으로 $3-\sqrt{5}-a_2=r_2$, $\dfrac{a_2}{\sqrt{5}}=r_2$를 얻고 이를 풀면, $r_2=\sqrt{5}-2$가 됨을 알 수 있다.

따라서 $\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{\sqrt{5}-2}{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 가 된다.

이 비율은 $r_3,\ r_4,\ r_5,\ \cdots$ 에서도 마찬가지로 유지되므로 수열 $\{r_n\}$은 초항 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 이고 공비가 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 인 등비수열임을 알 수 있다.

따라서 $r_n=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ 이고

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\pi r_n^2 \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\left\{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}^{n-1} \\ &= \pi\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

가 된다.

따라서 제시문 2에 의해서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\pi\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}}{1-\left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)}=\frac{\pi}{2\sqrt{5}}=\frac{\pi\sqrt{5}}{10}$

[2- i] (대학발표 예시답안)

점 P에서 직선 $y=-1$에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 x축과의 교점을 G라 하자.

삼각형의 닮음에 의해 $\overline{\mathrm{PG}}:\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{F'F}}:\overline{\mathrm{QR}}$

즉 $\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}:1+\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}=2:\overline{\mathrm{QR}}$가 성립한다.

이를 풀면 $\overline{\mathrm{QR}}=2\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}}\right)$

[다른 풀이] (대학발표 예시답안)

$\mathrm{P}\left(a,\ \sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}\right)$, $\mathrm{F}'(-1,\ 0)$, $\mathrm{F}(1,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{PF}'}$의 방정식은

$$y=\frac{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}-0}{a+1}(x+1)-0=\frac{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}}{a+1}(x+1)$$

이를 $y=-1$과 연립하면 Q의 x좌표는 $-1-\dfrac{a+1}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}}$ 임을 알 수 있다.

마찬가지로 하면 R 의 x 좌표는 $1-\dfrac{a-1}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}}$

따라서 $\overline{\mathrm{QR}}=1-\dfrac{a-1}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}}-\left(-1-\dfrac{a+1}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}}\right)$

$$=2+\frac{2}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}}$$

[2-ii] (대학발표 예시답안)

$b=\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}$ 이므로 [2-ii]에 의해 $\overline{\mathrm{QR}}=2=\dfrac{2}{b}$ 가 된다.

또한, $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PG}}+\overline{\mathrm{GH}}=b+1$ 이므로 삼각형 PQR 의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PH}}\times\overline{\mathrm{QR}}$$
$$=\frac{1}{2}(1+b)\times 2\left(1+\frac{1}{b}\right)$$
$$=2+b+\frac{1}{b}$$

[2-iii] (대학발표 예시답안)

산술 기하 평균에 의해

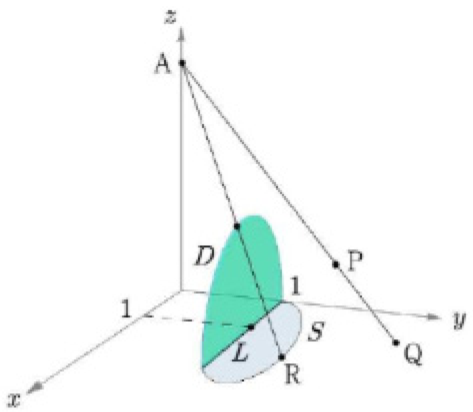
$S=2+b+\dfrac{1}{b}\geq 2+2\sqrt{b\times\dfrac{1}{b}}=4$ 이 됨을 알 수 있고 우변의 등호는 $b=\dfrac{1}{b}$ 일 때, 즉 $=1$ 일 때 성립하며 이때 P 의 좌표는 P$(0,\ 1)$가 되어 문제의 조건을 만족한다.

21 세종대학교 모의(자연계열)17)

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고교 교육과정에서 제시된 여러 단원의 개념에 대한 이해도 및 개념을 융합적으로 사고할 수 있는지 등을 종합적으로 평가(반영 점수는 600점)	국어, 수학(가), 영어, 과학탐구(2과목 평균) 중 2개 영역 등급합 6이내 (한국사 필수)	수학 (3문항, 10문제)	120분

[문제1] 좌표공간의 xz평면에 중심이 원점이고 반지름이 1인 원으로 둘러싸인 영역을 x축, y축 방향으로 각각 1만큼 평행이동한 후 $z \geq 0$인 부분만을 택하여 만든 영역을 D라 하자. 즉 D는

$$D = \{ (x, y, z) \mid (x-1)^2 + z^2 \leq 1, y = 1, z \geq 0 \}$$



점 A에서 빛을 쏘고 있을 때, 다음 물음에 답하시오.

(1-1) 점 A$(0, 0, d)$에서 나온 빛이 좌표공간의 한 점 P(a, b, c)를 지나 xy평면과 만나는 점을 Q라 할 때, 점 Q의 좌표를 a, b, c, d의 식으로 나타내시오.(단, $0 \leq c < d$이다.) (20점)

17) 세종대학교 홈페이지

(1-2) 점 A의 좌표가 $(0, 0, 3)$일 때, 점 A에서 나온 빛이 D를 비출 때 xy평면에 그림자가 생긴다. 그림자의 경계는 선분 L과 곡선 S로 이루어진다. 곡선 S를 나타내는 방정식을 x와 y의 식으로 나타내시오. (20점)

(1-3) 위 문제 [2]의 곡선 S위의 점 $\mathrm{R}(x, y)$중에서 y의 값이 최대가 될 때 점 R의 좌표를 구하시오. (20점)

[문제2] 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$\int_0^x (x-t)\{f(t)\}^2\,dt + \int_0^x t\{f(x-t)\}^2\,dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\sin^2 x$$

다음 물음에 각각 답하시오.

(2-1) 실수 x에 대하여 $g(x) = \int_0^x t\{f(x-t)\}^2\,dt$라 정의할 때, $g(\pi)$를 구하시오. (20점)

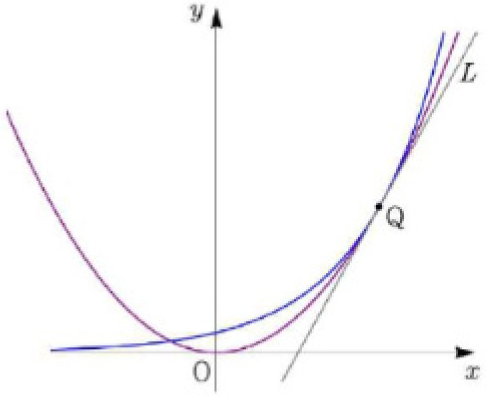
(2-2) $\int_0^{100\pi} f(x)\,dx$의 값으로 가능한 것을 모두 구하시오. (20점)

(2-3) 닫힌 구간 $[0, 100\pi]$에서 $p(x) = kf(x)$를 확률밀도함수로 갖는 연속확률변수를 X라 하자. $p(x)$와 $\int_0^{100\pi} xp(x)\,dx$의 값을 각각 구하시오. (단, k는 양의 상수이다.) (20점)

[문제3] 다음 물음에 각각 답하시오.

(3-1) 곡선 $y=e^{ax}$ 위의 점 $\mathrm{P}(c,\, e^{ac})$에서의 접선의 방정식을 구하시오. (단, a와 c는 모두 상수이고, $a>0$이다.) (20점)

(3-2) 아래 그림과 같이 곡선 $y=e^{ax}$과 포물선 $y=x^2$에 한 교점 Q에서 공통접선을 L이라고 한다. 양의 상수 a의 값과 점 Q의 좌표를 각각 구하시오. (20점)



(3-3) 실수 전체의 집합에서 정의되는 함수 $f(x)=\left|e^{x/3}-x^2\right|$에 대하여 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수를 구하시오. (20점)

(3-4) 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를 실수 전체의 집합에서 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\sum_{k=1}^{n}\left|e^{ax}-x^k\right|$$

$a=\dfrac{11}{2e}$일 때 $g(x)$의 미분가능하지 않은 점의 개수가 17이 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하시오. (20점)

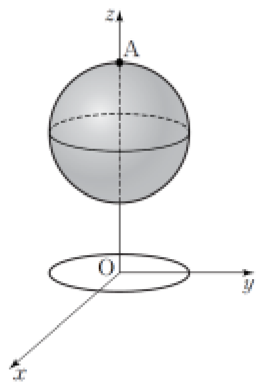
풀어보기

문제1

좌표공간에서 xy평면 위의 원 $x^2+y^2=1$을 C라 하고, 원 C 위의 점 P와 점 A$(0,\ 0,\ 3)$을 잇는 선분이 구

$$x^2+y^2+(z-2)^2=1$$

과 만나는 점을 Q라 하자. 점 P가 원 C 위를 한 바퀴 돌 때, 점 Q가 나타내는 도형 전체의 길이는 $\frac{b}{a}\pi$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, 점 Q는 점 A가 아니고, a, b는 서로소인 자연수이다.) [2015학년도 수능특강 기하와 벡터]



문제2

열린 구간 $(-2,\ 2)$에서 정의된 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt=\int_1^x (x-t)g(t)\,dt+e^2(x-1)$
(나) $\displaystyle\int_1^x \frac{g(t)}{f(t)}\,dt=1-\tan\frac{\pi}{4}x$

$e\times\dfrac{g(1)}{g(0)}$의 값을 구하시오. (단, $f(x)>0$) [2017학년도 수능완성 실전편 2회 30번]

문제3

두 곡선 $y=a\ln x$, $y=4x^2$이 점 $\mathrm{P}(b,\ 4b^2)$을 지나고 이 점에서의 기울기가 서로 같을 때, $a+b^2$의 값은? (단, a, b는 양수이다.) [2017학년도 수능특강 미적분Ⅱ]

① $8e$　② $9e$　③ $4e^2$
④ $12e$　⑤ $8e^2$

예시답안

풀어보기(문제1)

원 C 위의 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ 0)$이라 하면 $x_1{}^2+y_1{}^2=1$이다.

두 점 A, P를 지나는 직선 AP의 방정식은

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z-3}{-3}\ (\text{단, } x_1 y_1 \neq 0)$$

이다.

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z-3}{-3}=t\ (t\text{는 실수})$$

로 놓으면 직선 AP 위의 점 Q는 $\mathrm{Q}(x_1 t,\ y_1 t,\ -3t+3)$으로 나타낼 수 있다. 이 직선과 구의 교점의 좌표를 구하면

$$(x_1 t)^2+(y_1 t)^2+(-3t+1)^2=(x_1{}^2+y_1{}^2+9)t^2-6t+1=1$$

$$10t^2-6t=0,\ 5t^2-3t=0,\ t(5t-3)=0$$

$$\therefore\ t=0 \text{ 또는 } t=\frac{3}{5}$$

$t=0$이면 $\mathrm{Q}(0,\ 0,\ 3)$으로 조건에 맞지 않는다. 따라서 $t=\frac{3}{5}$이고 $\mathrm{Q}\left(\frac{3}{5}x_1,\ \frac{3}{5}y_1,\ \frac{6}{5}\right)$이다.

따라서 점 Q가 나타내는 도형은

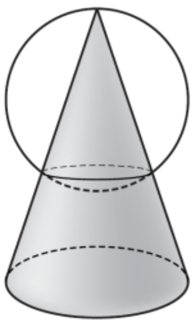
$$x^2+y^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2,\ z=\frac{6}{5}$$

을 만족시키는 원이므로 구하는 도형 전체의 길이는

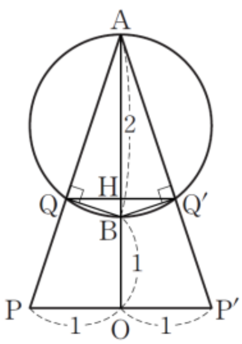
$$2\pi\times\frac{3}{5}=\frac{6}{5}\pi$$

$$\therefore\ a+b=5+6=11$$

[다른 풀이]



[그림 1]



[그림 2]

점 A와 원 C 위의 점 P를 이은 선분이 나타내는 도형은 [그림 1]과 같이 원뿔이 되므로 구하는 도형은 원뿔과 구의 교점의 집합이다.

z축을 포함하는 평면으로 [그림 2]와 같이 자른 후 점 Q의 z축에 대하여 대칭인 점을 Q′, 선분 QQ′의 중점을 H, z축과 구의 교점 중 점 A가 아닌 점을 B라 하면 점 Q가 나타내는 도형은 점 H로부터 거리가 일정하고 $\overline{QQ'}\perp\overline{AH}$인 원이다.

$\overline{AP}=\sqrt{10}$ 이므로

$$\overline{AQ}=2\times\cos(\angle BAQ)=2\times\cos(\angle PAO)=\frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore\ \overline{QH}=\overline{AQ}\sin(\angle PAO)=\frac{6}{\sqrt{10}}\times\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{3}{5}$$

따라서 점 Q가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\frac{3}{5}$인 원이므로 구하는 도형 전체의 길이는

$$2\pi\times\frac{3}{5}=\frac{6}{5}\pi$$

$$\therefore\ a+b=5+6=11$$

풀어보기(문제2)

조건 (가)에서

$$\int_1^x f(t)dt=x\int_1^x g(t)dt-\int_1^x tg(t)dt+e^2(x-1)$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=\int_1^x g(t)dt+xg(x)-xg(x)+e^2$$

$$f(x)=\int_1^x g(t)dt+e^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x=1$을 대입하면

$$f(1)=e^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=g(x)$

조건 (나)에 $g(t)=f'(t)$를 대입하면

$$\int_1^x \frac{f'(t)}{f(t)}dt=1-\tan\frac{\pi}{4}x \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡을 ㉢에 대입하면 $\ln f(x)=3-\tan\frac{\pi}{4}x$

따라서 $f(x)=e^{3-\tan\frac{\pi}{4}x}$

$$g(x)=f'(x)=e^{3-\tan\frac{\pi}{4}x}\times\left(-\frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi}{4}x\right)$$

$$g(0)=e^3\times\left(-\frac{\pi}{4}\right),\ g(1)=e^2\times\left(-\frac{\pi}{4}\times2\right)$$

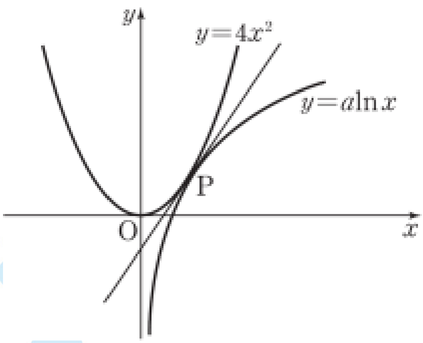
$$e\times\frac{g(1)}{g(0)}=e\times\frac{e^2\times\left(-\frac{\pi}{4}\times 2\right)}{e^3\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=2$$

풀어보기(문제3)

$f(x)=a\ln x$, $g(x)=4x^2$ 이라 하면

$$f'(x)=\frac{a}{x},\ g'(x)=8x$$

$x=b$일 때 두 곡선의 접선의 기울기가 서로 같으므로



$f'(b)=g'(b)$

즉, $\frac{a}{b}=8b$이므로 $a=8b^2$ ……㉠

$\mathrm{P}(b,\ 4b^2)$이 곡선 $y=a\ln x$ 위의 점이므로

$a\ln b=4b^2$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$8b^2\ln b=4b^2$

$\ln b=\frac{1}{2}$ $(b>0)$이므로 $b=\sqrt{e}$

㉠에서 $a=8e$이다. 따라서 $a+b^2=8e+e=9e$

[문제1-1] 대학발표 예시답안

점 $\mathrm{A}(0,0,d)$와 $\mathrm{P}(a,b,c)$를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$$\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(a,b,c-d)$$

이므로 이 직선의 방정식을 매개변수 t를 이용하여 나타내면

$$x=at,\ y=bt,\ z=d+t(c-d)$$

이다. $z=0$이면 $t=\frac{d}{d-c}$이고 이를 직선의 식에 다시 대입하면 다음을 얻는다.

$$x=\frac{ad}{d-c},\ y=\frac{bd}{d-c}$$

[문제1-2] 대학발표 예시답안

점 $\mathrm{A}(0,0,3)$에서 나온 빛이 $\mathrm{P}(a,b,c)$를 지날 때를 생각하면 위의 풀이에서 $b=1$, $d=3$인 경우이므로

$$x=\frac{3a}{3-c},\ y=\frac{3}{3-c} \quad \cdots\cdots \quad (1.1)$$

인데 P가 D의 위쪽 경계에 위치해야 하므로

$$(a-1)^2+c^2=1\ \ (c\geq 0) \quad \cdots\cdots \quad (1.2)$$

을 만족시킨다. 식 (1.1)에서 $c=3-\dfrac{3}{y}\geq 0$이므로 $y\geq 1$이고, $x=ay$이므로 $a=\dfrac{x}{y}$이다. 이를 식 (1.2)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\left(\frac{x}{y}-1\right)^2+\left(3-\frac{3}{y}\right)^2=1 \quad (y\geq 1)$$

이 식의 양변에 y^2을 곱하여 간단히 하면 곡선 S의 방정식은 다음과 같다.

$$(x-y)^2+(3y-3)^2=y^2 \quad (y\geq 1) \qquad \cdots\cdots \quad (1.3)$$

[문제1-3] 대학발표 예시답안

식 (1.3)으로 주어진 곡선 S의 식에서 $\dfrac{dy}{dx}=0$일 때 y좌표가 최대가 됨을 알 수 있다. 따라서 y를 x의 함수로 보고 음함수 미분법을 적용하여 식 (1.3)의 양변을 변수 x에 관하여 미분하면

$$2(x-y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right)+2(3y-3)\cdot 3\frac{dy}{dx}=2y\frac{dy}{dx} \qquad \cdots\cdots \quad (1.4)$$

이므로 이 식을 이용하여 계산하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{9y-x-9}=0$$

에서

$$y=x \qquad \cdots\cdots \quad (1.5)$$

를 얻는다. 이를 식 (1.3)에 다시 대입하면

$$8y^2-18y^2+9=(2y-3)(4y-3)=0$$

이므로 $y=\dfrac{3}{2}$ 또는 $y=\dfrac{3}{4}$인데 $y\geq 1$이므로 $y=\dfrac{3}{2}$이다. 식 (1.5)에서 $x=\dfrac{3}{2}$이므로 y값이 최대가 되는 점 $\mathrm{R}(x, y)$의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$이다.

(나침반 다른풀이)

식 (1.3)을 x에 관해 정리하면

$$x^2-2xy+9y^2-18y+9=0 \quad (y\geq 1)$$

x는 실수이므로

$$D=y^2-9y^2+18y-9\geq 0$$
$$8y^2-18y+9\leq 0$$
$$(2y-3)(4y-3)\leq 0$$
$$\frac{3}{4}\leq y\leq \frac{3}{2}$$

$y\geq 1$이므로 $1\leq y\leq \dfrac{3}{2}$이다. 따라서 y의 최댓값은 $\dfrac{3}{2}$이고 이때 R의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$이다.

[문제2-1] 대학발표 예시답안

$g(x)$를 나타내는 적분식을 $u=x-t$로 두고 치환적분하여 계산하면

$$g(x)=\int_0^x t\{f(x-t)\}^2\,dt=\int_0^x (x-u)\{f(u)\}^2\,du$$

이므로, 주어진 조건식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$2g(x)=2\int_0^x (x-t)\{f(t)\}^2\,dt=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\sin^2 x$$

따라서 다음이 성립한다.

$$g(x)=\int_0^x (x-t)\{f(t)\}^2\,dt=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}\sin^2 x \qquad \cdots\cdots \quad (2.1)$$

그러므로 $g(\pi)=\dfrac{\pi^2}{4}$ 이다.

[문제2-2] 대학발표 예시답안

식 (2.1)의 적분식을 전개하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$x\int_0^x \{f(t)\}^2\,dt-\int_0^x t\{f(t)\}^2\,dt=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}\sin^2 x$$

이 식의 양변을 변수 x에 대하여 미분하면 미적분의 기본정리로부터 다음을 얻는다.

$$\int_0^x \{f(t)\}^2\,dt=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x\cos x$$

이 식의 양변을 변수 x에 대하여 다시 한 번 미분하면 다음을 얻는다.

$$\{f(x)\}^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{1}{2}\sin^2 x=\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin^2 x=\sin^2 x$$

$f(x)$는 연속함수이므로 각각의 구간 $[n\pi,\,(n+1)\pi]$ $(n=0,\,1,\,2,\,\cdots,\,99)$에서

$$f(x)=\sin x \quad \text{또는} \quad f(x)=-\sin x$$

이다. 따라서

$$\int_0^\pi \sin x\,dx=2,\quad \int_0^\pi (-\sin x)\,dx=-2$$

임을 이용하면 $\displaystyle\int_0^{100\pi} f(x)\,dx$ 의 값으로 가능한 것은 다음과 같다.

$$-200,\ -196,\ -192,\ \cdots,\ -4,\ 0,\ 4,\ \cdots,\ 192,\ 196,\ 200$$

[문제2-3] 대학발표 예시답안

닫힌 구간 $[0,\,100\pi]$에서 양수 k에 대하여 $p(x)=kf(x)$가 확률밀도함수가 되기 위해서는 $p(x)\ge 0$이어야 하므로 $f(x)=|\sin x|$이고

$$\int_0^{100\pi} p(x)\,dx=k\int_0^{100\pi} |\sin x|\,dx=200k=1$$

이므로 $k=\frac{1}{200}$ 이다. 따라서 확률밀도함수 $p(x)$는 다음과 같다.

$$p(x)=\frac{1}{200}|\sin x|$$

또한 부분적분법을 이용하여 연속확률변수 X의 평균을 계산하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_0^{100\pi} x\,p(x)\,dx \\
&= \frac{1}{200}\int_0^{100\pi} x|\sin x|\,dx \\
&= \frac{1}{200}\left\{\int_0^{\pi} x\sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\,dx + \int_{2\pi}^{3\pi} x\sin x \right. \\
&\qquad \left. - \int_{3\pi}^{4\pi} x\sin x\,dx + \cdots + \int_{98\pi}^{99\pi} x\sin x - \int_{99\pi}^{100\pi} x\sin x\,dx\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{[\sin x - x\cos x]_0^{\pi} - [\sin x - x\cos x]_{\pi}^{2\pi} + [\sin x - x\cos x]_{2\pi}^{3\pi} \right. \\
&\qquad \left. - [\sin x - x\cos x]_{3\pi}^{4\pi} + \cdots - [\sin x - x\cos x]_{99\pi}^{100\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{200}\{\pi + (2\pi+\pi) + (3\pi+2\pi) + \cdots + (99\pi+98\pi) + (100\pi+99\pi)\} \\
&= \frac{1}{200}(\pi+3\pi+5\pi+\cdots+197\pi+199\pi) \\
&= 50\pi
\end{aligned}$$

[문제3-1] 대학발표 예시답안

$y'=ae^{ax}$ 임을 이용하면 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=ae^{ac}(x-c)+e^{ac}$$

[문제3-2] 대학발표 예시답안

점 Q의 x좌표를 α라 하면 곡선 $y=e^{ax}$과 포물선 $y=x^2$의 식과 각각의 도함수로부터 다음 식을 얻는다.

$$\alpha^2=e^{a\alpha},\ 2\alpha=ae^{a\alpha}$$

이 식을 연립하여 풀면

$$\alpha=e,\ a=\frac{2}{e}$$

이고, Q의 좌표는 (e, e^2)이다.

[문제3-3] 대학발표 예시답안

곡선 $y=e^{\frac{x}{3}}$ 과 $y=x^2$ 은 제2사분면의 한 점에서 만나는데 그 점의 x좌표를 β라 하면 함수 $f(x)=|e^{\frac{x}{3}}-x^2|$ 은 $x=\beta$인 점에서 미분가능하지 않다.

(왜냐하면 $u(x)=e^{\frac{x}{3}}-x^2$ 라 할 때 $f(x)=|u(x)|$ 이고 $u(\beta)=0,\ u'(\beta)>0$ 이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(\beta+h)-f(\beta)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{u(\beta+h)-u(\beta)}{h}=u'(\beta)>0\,,$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(\beta+h)-f(\beta)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-\{u(\beta+h)-u(\beta)\}}{h}=-u'(\beta)<0$$

이기 때문이다. 일반적으로 미분가능한 함수 $v(x)$에 대하여 $v(c)=0$일 때 함수 $|v(x)|$가 $x=c$에서 미분가능하기 위해서는 $v'(c)=0$이어야 한다. 따라서 미분가능한 함수 $v_1(x)$와 $v_2(x)$에 대하여 $v_1(c)=v_2(c)$일 때 함수 $|v_1(x)-v_2(x)|$가 $x=c$에서 미분가능하기 위해서는 $v_1'(c)=v_2'(c)$이어야 한다. 즉 함수 $v_1(x)$와 $v_2(x)$는 $x=c$에서 공통 접선을 가져야 한다.)

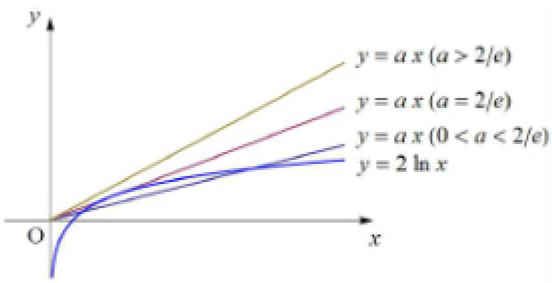
(3-2)의 풀이로부터 곡선 $y=e^{ax}$과 곡선 $y=x^2$은

(ⅰ) $a=\dfrac{2}{e}$일 때 제1사분면의 한 점에서 공통 접선을 갖고

(ⅱ) $0<a<\dfrac{2}{e}$일 때 제1사분면의 두 점에서 만나고

(ⅲ) $a>\dfrac{2}{e}$일 때 제1사분면에서는 만나지 않는다.

참고로 $x>0$일 때 방정식 $e^{ax}=x^2$의 양변에 자연로그를 취하면 $ax=2\ln x$이므로 직선 $y=ax$와 곡선 $y=2\ln x$의 위치관계를 생각하면 다음 그림으로부터 (ⅱ)와 (ⅲ)의 결과를 쉽게 확인할 수 있다.



그런데 이 문제에서 $a=\dfrac{1}{3}<\dfrac{2}{e}$이므로 곡선 $y=e^{\frac{x}{3}}$과 곡선 $y=x^2$은 제1사분면의 두 점에서 만나며 이 점들에서는 위와 같은 이유로 함수 $f(x)$는 미분가능하지 않다. 따라서 함수 $f(x)$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 3이다.

[문제3-4] 대학발표 예시답안

앞에서와 같은 방법으로 계산하면 k가 짝수일 때, 양의 실수 a에 대한 $y=e^{ax}$의 그래프와 $y=x^k$의 그래프의 개형으로부터 두 곡선은 적어도 제2사분면의 한 점에서 만나며 그 점의 x좌표를 β라 하면 $p_k(x)=|e^{ax}-x^k|$는 $x=\beta$에서 미분가능하지 않음을 알 수 있다. k가 홀수일 때는 곡선 $y=e^{ax}$와 $y=x^k$는 제2사분면에서 만나지 않는다.

제1사분면에서는 $a=\dfrac{k}{e}$일 때 $y=e^{ax}$는 x^k와 한 점에서 공통접선을 갖고, $a<\dfrac{k}{e}$이면 두 곡선은 두 점에서 만나며, $a>\dfrac{k}{e}$이면 만나지 않는다. 따라서 다음과 같은 표를 얻는다.

	$p_k(x)=\lvert e^{ax}-x^k\rvert$의 미분불가능한 점의 수	
	$a<\dfrac{k}{e}$일 때	$a\geq\dfrac{k}{e}$일 때
k가 홀수	2	0
k가 짝수	3	1

$a=\dfrac{11}{2e}$이면, $\dfrac{5}{e}\leq a<\dfrac{6}{e}$이므로 $k=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ,9, 10, 11, 12, ,13, \cdots$ 일 때 $p_k(x)=|e^{ax}-x^k|$으로 정의된 함수 $p_k(x)$의 미분가능하지 않은 점의 수는 각각

$$0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ \cdots \qquad \cdots\cdots \quad (3.1)$$

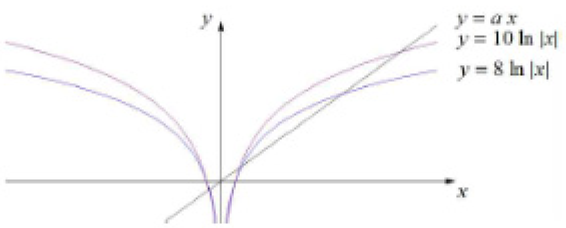
이다. $g(x)=\sum_{k=1}^{n}|e^{ax}-x^k|$의 미분가능하지 않은 점의 수는 식 (3.1)에 나타낸 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합과 같다. 이는 서로 다른 k에 대하여 $p_k(x)$의 미분가능하지 않은 점의 위치가 모두 다르기 때문이다. 왜냐하면, $e^{ax}=x^k$일 때 양변에 자연로그를 취하면 k가 홀수일 때

$$ax=k\ln x \ \ (x>0)$$

이고, k가 짝수일 때

$$ax=k\ln|x| \ \ (x\neq 0)$$

인데, 직선 $y=ax$와 이들 곡선의 교점의 위치는 k가 달라지면 모두 다르게 나타나기 때문이다. (예를 들어 아래 그림은 $k=8$일 때와 $k=10$일 때를 설명하는 그림이다.)



결국 식 (3.1)에 나타낸 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이 17이 되려면 $n=11$이다.

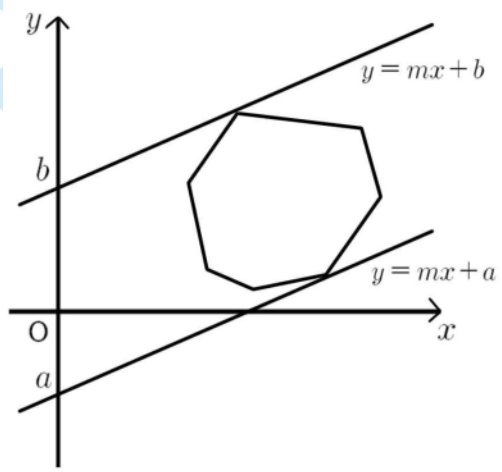
22 숙명여자대학교 모의(자연계열)18)

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고교교육과정과 연계된 범위에서 통합적 사고력을 평가할 수 있도록 출제(반영 점수는 600점)	수능 4개 영역 중 2개 영역의 등급 합 5.5등급 이내(과학2과목)	공통/계열(수학) (2문항, 4문제)	120분

<가> xy평면에 넓이가 1인 볼록다각형이 있다. 이 볼록다각형을 기울기가 m인 직선으로 넓이가 같은 두 영역으로 나눌 수 있음을 다음과 같이 증명할 수 있다.
먼저 직선 $y=mx+k$에 대하여, $f(k)$를 이 직선의 아래에 있는 볼록다각형의 영역의 넓이라고 정의하자. 이 함수는 어떤 닫힌구간 $[a, b]$에 대하여

$$f(a)=0,\ f(b)=1$$

을 만족하며, 이 구간에서 연속이다. 따라서 사잇값 정리에 의해 $f(c)=\frac{1}{2}$을 만족하는 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. 따라서 볼록다각형은 기울기가 m인 어떤 직선으로 넓이가 같은 두 영역으로 나눌 수 있다.



<나> 길이가 1인 선분을 세 부분으로 나누어 이 세 선분을 변으로 하는 삼각형을 만들려고 한다. 삼각형을 이루는 세 변에서 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 커야 하므로 다음과 같이 생각할 수 있다.
닫힌구간 $[0, 1]$에서 두 점을 선택하여 각각 x, $y(x<y)$라고 하면 세 변의 길이는 각각 x, $y-x$, $1-y$이고, x, y는 부등식

18) 숙명여자대학교 홈페이지

$$x<1-x\ (\text{즉, } x<\frac{1}{2}),\ 1-y<y\ (\text{즉, } y>\frac{1}{2})$$

$$y-x<x+(1-y)\ (\text{즉, } y<x+\frac{1}{2})$$

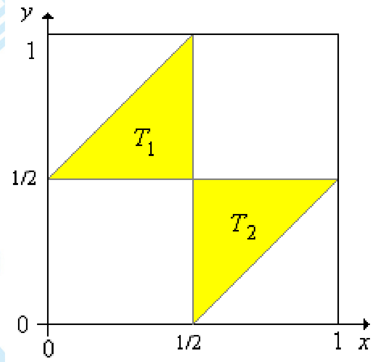
을 만족시켜야 한다. 따라서 세 선분이 삼각형을 만들 수 있는 x, y의 조건을 순서쌍 (x, y)의 집합으로 나타내면

$$T_1=\left\{(x, y)\,\middle|\,0<x<\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<y<1,\ \frac{1}{2}<y<x+\frac{1}{2}\right\}$$

이다. 또한 $x>y$의 경우도 같은 방법으로 생각하면

$$T_2=\left\{(x, y)\,\middle|\,0<y<\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<x<1,\ \frac{1}{2}<x<y+\frac{1}{2}\right\}$$

을 얻는다. 따라서 삼각형을 만드는 순서쌍 (x, y)들의 집합은 $T_1\cup T_2$이고, 이를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



[문제 2-1(a)] xy평면에 둘레의 길이가 1인 볼록다각형이 있다. 이 볼록다각형의 둘레를 기울기가 m인 직선으로 길이가 같은 두 부분으로 나눌 수 있음을 증명하시오.

[문제 2-1(b)] 원 모양의 구리선에 대하여 이 구리선 위의 점 X에서의 온도를 $f(\mathrm{X})$라 하자. 이때 $f(\mathrm{X})$는 연속함수 이다. 구리선 위의 한 점 P와 구리선의 중심에 대하여 점 P에 대칭인 점을 Q라 할 때, $f(\mathrm{P})=f(\mathrm{Q})$인 두 점의 쌍 (P, Q)가 있음을 증명하시오.

[문제 2-2] 길이가 1인 선분을 세 부분으로 나누어 이 세 선분을 변으로 하는 둔각삼각형을 만들려고 한다. 제시문 (나)와 같은 방법으로 둔각삼각형을 만들 수 있는 x, y의 조건을 순서쌍 (x, y)의 집합으로 나타내고, 이 집합을 좌표평면에 나타낼 때 그 영역의 넓이를 구하시오.

풀어보기

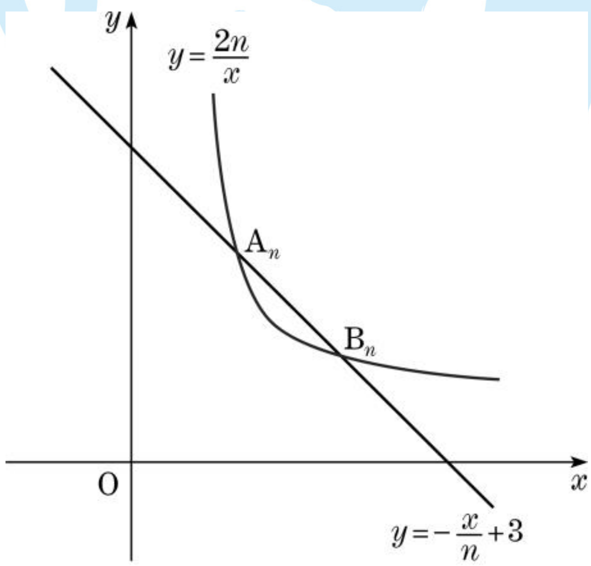
문제1

삼차방정식 $x^3-9x^2+24x-10=0$이 오직 하나의 실근을 갖는다. 다음 열린 구간 중 이 방정식의 실근이 존재하는 것은? (2016. 수능특강 미적분 I)

① $(-1, 0)$ ② $(0, 1)$ ③ $(1, 2)$
④ $(2, 3)$ ⑤ $(3, 4)$

문제2

자연수 n에 대하여 곡선 $y=\dfrac{2n}{x}$과 직선 $y=-\dfrac{x}{n}+3$의 두 교점을 A_n, B_n이라 할 때, 곡선 $y=\dfrac{2n}{x}$과 직선 $y=-\dfrac{x}{n}+3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $S_{n+1}-S_n$의 값은? (2013. 10월 전국연합)



① $\dfrac{3}{2}-2\ln2$ ② $1-\ln2$ ③ $\dfrac{3}{2}-\ln2$ ④ $1+\ln2$ ⑤ $\dfrac{3}{2}+2\ln2$

문제3

정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le \pi\}$ 인 함수 $f(x) = 2x\cos x$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2011. 대수능)

< 보 기 >

ㄱ. $f'(a) = 0$ 이면 $\tan a = \dfrac{1}{a}$ 이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극댓값을 가지는 a 가 구간 $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ 에 있다.

ㄷ. 구간 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 에서 방정식 $f(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제4

양수 a에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{2\ln t + a}{t}\,dt$의 최솟값이 $-\dfrac{9}{4}$이다. 함수 $g(x) = \ln x$에 대하여 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? (2016. 수능완성 미적분Ⅱ)

① $\dfrac{1}{e^2}$ ② $\dfrac{2}{e^2}$ ③ $\dfrac{3}{e^2}$
④ $\dfrac{4}{e^2}$ ⑤ $\dfrac{5}{e^2}$

예시답안

풀어보기(문제1)

$f(x)=x^3-9x^2+24x-10$ 이라 하면 $f(-1)=-44$, $f(0)=-10$, $f(1)=6$,
$f(2)=10$, $f(3)=8$, $f(4)=6$
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,1]$에서 연속이고 $f(0)f(1)<0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(0,1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

풀어보기(문제2)

곡선 $y=\dfrac{2n}{x}$과 직선 $y=-\dfrac{x}{n}+3$의 교점이 $\mathrm{A}_n(n,2)$, $\mathrm{B}_n(2n,1)$이고, $n\le x\le 2n$에서

$\dfrac{2n}{x}\le -\dfrac{x}{n}+3$이므로

$$S_n=\int_n^{2n}\left\{\left(-\frac{x}{n}+3\right)-\frac{2n}{x}\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2n}x^2+3x-2n\ln|x|\right]_n^{2n}=(-2n+6n-2n\ln 2n)-\left(-\frac{1}{2}n+3n-2n\ln n\right)$$

$$=n\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)$$

$$\therefore\ S_{n+1}-S_n=\frac{3}{2}-2\ln 2$$

풀어보기(문제3)

$f(x)=2x\cos x$에서 $f'(x)=2\cos x-2x\sin x$

ㄱ. $f'(a)=0$이면 $f'(a)=2\cos a-2a\sin a=0$

$2\cos a=2a\sin a$, $\dfrac{\sin a}{\cos a}=\dfrac{1}{a}$ ($\because\ a\ne 0,\ \cos a\ne 0$) $\quad\therefore \tan a=\dfrac{1}{a}$ (참)

ㄴ. 함수 $f'(x)=2\cos x-2x\sin x$는 모든 실수에서 연속이고

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\frac{\pi}{4}-2\times\frac{\pi}{4}\times\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi=\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)>0,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}-2\times\frac{\pi}{3}\times\sin\frac{\pi}{3}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi<0$$

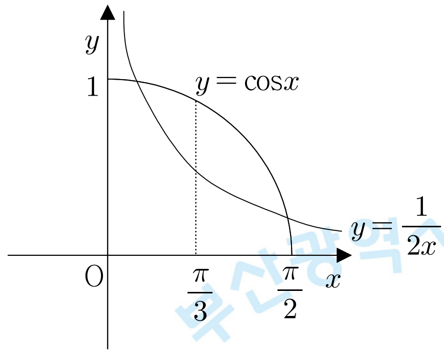
이므로 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지는 a가 구간 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right)$에 있다. (참)

ㄷ. 방정식 $f(x)=1$에서 $2x\cos x=1$, 즉 $\cos x=\dfrac{1}{2x}$ ($\because\ x\ne 0$)

구간 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$에서 방정식 $\cos x=\dfrac{1}{2x}$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=\cos x$, $y=\dfrac{1}{2x}$의

그래프의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

$x=\dfrac{\pi}{3}$일 때, $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{\pi}=\dfrac{3}{2\pi}$에서 $\dfrac{1}{2}>\dfrac{3}{2\pi}$이므로 $x=\dfrac{\pi}{3}$일 때, $y=\cos x$의 그래프가 $y=\dfrac{1}{2x}$의 그래프보다 위에 있다. 따라서 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 두 함수의 그래프는 그림과 같고 서로 다른 두 점에서 만난다. 즉 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)



그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

풀어보기(문제4)

$f(x)=\displaystyle\int_{1}^{x}\frac{2\ln t+a}{t}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\dfrac{2\ln x+a}{x}$

$f'(x)=0$에서 $2\ln x+a=0$

$\ln x=-\dfrac{a}{2}$

$x=e^{-\frac{a}{2}}$

$x=e^{-\frac{a}{2}}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

함수 $f(x)$는 $x=e^{-\frac{a}{2}}$에서 극소이면서 최소이다.

$f(x)=\displaystyle\int_{1}^{x}\frac{2\ln t+a}{t}dt=\int_{1}^{x}\frac{2\left(\ln t+\frac{a}{2}\right)}{t}dt$에서

$\ln t+\dfrac{a}{2}=s$로 놓으면 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}$이고

$t=1$일 때 $s=\dfrac{a}{2}$, $t=x$일 때 $s=\ln x+\dfrac{a}{2}$이므로

$f(x)=\int_{1}^{x}\frac{2\left(\ln t+\frac{a}{2}\right)}{t}dt$

$=\int_{\frac{a}{2}}^{\ln x+\frac{a}{2}}2s\,ds$

$=\left[s^2\right]_{\frac{a}{2}}^{\ln x+\frac{a}{2}}$

$=\left(\ln x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$

$=(\ln x)^2+a\ln x$

$x=e^{-\frac{a}{2}}$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 $-\frac{9}{4}$이므로

$f\left(e^{-\frac{a}{2}}\right)=\left(\ln e^{-\frac{a}{2}}\right)^2+a\ln e^{-\frac{a}{2}}$

$=\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}$

$=-\frac{a^2}{4}=-\frac{9}{4}$

$a^2=9$

이때 $a>0$이므로 $a=3$

$f(x)=(\ln x)^2+3\ln x$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표는

$(\ln x)^2+3\ln x=\ln x$

$(\ln x)^2+2\ln x=0$

$(\ln x+2)\ln x=0$

$\ln x=-2$ 또는 $\ln x=0$

$x=e^{-2}$ 또는 $x=1$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$S=\int_{e^{-2}}^{1}\left[\ln x-\{(\ln x)^2+3\ln x\}\right]dx$

$=\int_{e^{-2}}^{1}\{-(\ln x)^2-2\ln x\}dx$

$=-\int_{e^{-2}}^{1}(\ln x)^2dx-\int_{e^{-2}}^{1}2\ln x\,dx$

$\int_{e^{-2}}^{1}(\ln x)^2dx$에서 $u(x)=(\ln x)^2$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=(2\ln x)\times\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$S = -\int_{e^{-2}}^{1}(\ln x)^2 dx - \int_{e^{-2}}^{1} 2\ln x\, dx$$

$$= -\left\{\left[x(\ln x)^2\right]_{e^{-2}}^{1} - \int_{e^{-2}}^{1} 2\ln x\, dx\right\} - \int_{e^{-2}}^{1} 2\ln x\, dx$$

$$= -\left\{0 - e^{-2}(\ln e^{-2})^2\right\} = \frac{4}{e^2}$$

[문제2-1(a)] 대학발표 예시답안

직선 $y=mx+k$에 대하여, $f(k)$를 이 직선의 아래에 있는 볼록다각형의 영역의 둘레의 길이라고 정의하자. 이 함수는 제시문 <가>에서와 같이

$$f(a)=0\,,\ f(b)=1$$

을 만족하고 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이다. 따라서 사잇값 정리에 의해 $f(c)=\dfrac{1}{2}$을 만족하는 c가 열린구간 $(a,\ b)$에서는 적어도 하나가 존재한다. 따라서 이 볼록다각형은 직선 $y=mx+k$에 의하여 같은 둘레를 갖는 두 영역으로 나뉜다.

[문제2-1(b)] 대학발표 예시답안

함수 $g(\mathrm{X})$를

$g(\mathrm{X})=$(구리선의 점 X 에서의 온도) $-$ (구리선의 중심에 대하여 점 X 와 대칭인 점에서의 온도)

로 정의하자. 이 함수 g는 두 연속함수의 차이이므로 연속함수이다. 구리선 위의 어떤 점 X 와 대칭인 점을 Y 라 하고 만약 $g(\mathrm{X})=0$이면 $(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})$가 $f(\mathrm{P})=f(\mathrm{Q})$인 두 점의 쌍 $(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$가 된다.

이제 $f(\mathrm{X})$는 상수함수가 아니라고 하자. 그러면 $g(\mathrm{X})\neq 0$을 만족하는 X 는 존재하며, 이 경우에 $g(\mathrm{X})$와 $g(\mathrm{Y})$(여기서 Y 는 점 X 와 대칭인 점)는 절댓값은 같고 서로 다른 부호를 갖는다. 따라서 사잇값 정리에 의하여 $g(\mathrm{P})=0$이 되는 점 P 는 존재한다. 따라서 이 점 P 에 대칭인 점을 Q 라고 하면 $f(\mathrm{P})=f(\mathrm{Q})$이다.

[문제2-2] 대학발표 예시답안

변의 길이가 $a,\ b,\ c$(c가 가장 긴 길이)인 삼각형이 둔각삼각형이기 위한 필요충분조건은 $a^2+b^2<c^2$이다. 이 사실과 제시문의 기호를 이용하여 닫힌구간 $[0,\ 1]$을 서로 다른 두 점 $x,\ y\,(x<y)$으로 잘라 만들어지는 세 선분을 각 변으로 갖는 둔각 삼각형이 만들어지기 위해서는

$$(y-x)^2>x^2+(1-y)^2\ \Rightarrow\ y>\frac{1}{2(1-x)}$$

$$(1-y)^2>x^2+(y-x)^2\ \Rightarrow\ y<\frac{1-2x^2}{2(1-x)}$$

$$x^2>(y-x)^2+(1-y)^2\ \Rightarrow\ x>y-1+\frac{1}{2y}$$

을 만족하여야 한다. $x<y$이고 제시문 <나>의 집합 T_1의 영역에서 생각하면 되므로, 둔각삼각형을 만들 수 있는 $x,\ y$의 조건을 순서쌍 $(x,\ y)$의 집합으로 나타내면

$$S_1=\left\{(x,\ y)\in T_1 : y>\frac{1}{2(1-x)},\ y<\frac{1-2x^2}{2(1-x)},\ x>y-1+\frac{1}{2y}\right\}$$

이다. 또한 $x>y$의 경우도 같은 방법으로 생각하면

$$S_2=\left\{(x,\ y)\in T_2 : x>\frac{1}{2(1-y)},\ x<\frac{1-2y^2}{2(1-y)},\ y>x-1+\frac{1}{2x}\right\}$$

을 얻는다. 따라서 둔각삼각형을 만드는 순서쌍 $(x,\ y)$들의 집합은 $S_1 \cup S_2$이다.
이제 집합 $S_1 \cup S_2$을 좌표평면에 나타내자. 집합 S_2의 원소들은 집합 S_1의 원소들과 $y=x$에 대칭이므로, 집합 S_1을 좌표평면에 나타내면 충분하다. 따라서 $0<x<\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<y<1$을 만족하는 모든 $x,\ y$에 대하여 위의 부등식들의 영역을 알아보자.

(i) $f(x)=\dfrac{1}{2(1-x)}$ 라 하면, 먼저 $f(0)=\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$이다. 한편 $0<x<\frac{1}{2}$인 모든 x에 대하여

$$f'(x)=\frac{1}{2(x-1)^2}>0,\quad f''(x)=-\frac{1}{(x-1)^3}>0$$

이므로, $0<x<\frac{1}{2}$에서 f의 그래프는 증가하며 아래로 볼록이다. 그리고 부등식 $y>\dfrac{1}{2(1-x)}$의 영역은 $0<x<\frac{1}{2}$에서 y의 값이 $f(x)=\dfrac{1}{2(1-x)}$의 위에 있다. 따라서 집합 T_1의 영역에서는 아래 그림에서 영역 B_1에 해당한다.

(ii) $g(x)=\dfrac{1-2x^2}{2-2x}$ 라 하면, 먼저 $g(0)=\frac{1}{2}$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$이다. 한편, $g'(x)=\dfrac{2x^2-4x+1}{2(x-1)^2}$이므로 $0<x<\frac{1}{2}$에서,

만일 $0<x<\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$이면 $g'(x)>0$,

만일 $x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$이면 $g'(x)=0$,

만일 $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{1}{2}$이면 $g'(x)<0$

이다. 따라서 함수 g는 $x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$에서 극댓값 $g\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=2-\sqrt{2}$를 갖는다. 그리고 부등식 $y<\dfrac{1-2x^2}{2-2x}$의 영역은 $0<x<\frac{1}{2}$에서 y의 값이 곡선 $g(x)=\dfrac{1-2x^2}{2-2x}$의 아래에 있다. 따라서 집합 T_1의 영역에서는 아래 그림에서 영역 B_2에 해당한다.

(iii) $h(y)=y-1+\dfrac{1}{2y}$ 라 하면, 먼저 $h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $h(1)=\frac{1}{2}$이다. 한편 $h'(y)=1-\dfrac{1}{2y^2}$이므로 $\frac{1}{2}<y<1$에서,

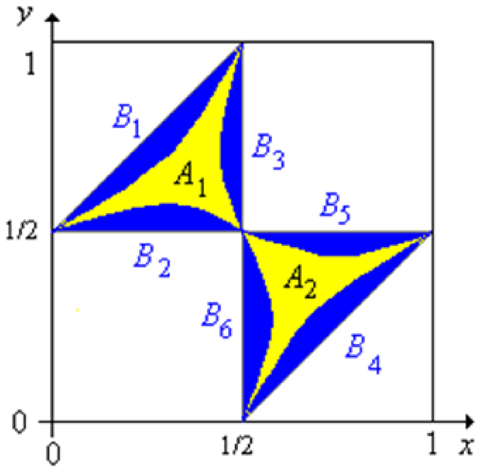
만일 $\dfrac{1}{2}<y<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이면 $h'(y)<0$,

만일 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이면 $h'(y)=0$,

만일 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}<y<1$ 이면 $h'(y)>0$

이므로 함수 h는 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$에서 극솟값 $h\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}-1$을 갖는다. 그리고 부등식 $x>y-1+\dfrac{1}{2y}$의 영역은 $\dfrac{1}{2}<y<1$에서 x의 값이 곡선 $h(y)=y-1+\dfrac{1}{2y}$의 오른쪽에 있다. 따라서 집합 T_1으 영역에서는 아래 그림에서 영역 B_3에 해당한다.

종합해 보면, 위의 세 부등식들이 나타내는 영역들은 아래의 그림에서 제시문의 그림의 T_1에 속하는 영역 B_1, B_2, B_3에 해당한다.



T_2에 속하는 영역도 대칭성에 의해 $(B_4,\ B_5,\ B_6)$를 구할 수 있다. 한편 영역 B_1, B_2, B_3의 넓이를 구해보면

$$A(B_1)=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2(1-x)}dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln(1-x)\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{8}-\frac{\ln 2}{2}$$

$$A(B_2)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2x^2-1}{2x-2}-\frac{1}{2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2x-2}dx=\frac{3}{8}-\frac{\ln 2}{2}$$

$$A(B_3)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{2}-\left(y-1+\frac{1}{2y}\right)dy=\left[\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}\ln y\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{3}{8}-\frac{\ln 2}{2}$$

이다. 따라서 모든 영역의 넓이의 합은

$$6\left(\frac{3}{8}-\frac{\ln 2}{2}\right)=\frac{9}{4}-3\ln 2$$

이다.

※ 참고

문항 2-2의 위 답안 중 (i), (ii), (iii)에서 셋 중 하나인 경우만 생각해도 충분하다고 설명하여도 된다. 만일 (i)의 경우를 생각하면 영역 B_1의 넓이를 구한 다음에 그 넓이에 여섯 배를 하여 영역의 넓이에 대한 답을 구할 수 있다.

23 숭실대학교 모의(자연계열)[19)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형(반영 점수는 수학 50점, 과학 50점)	국어, 수학가, 영어, 과탐(1과목) 중 2개영역 등급 합 6등급 이내	수학/과학 (2문항, 4문제)	120분

[문제 1A] 다음 논제에 답하시오. (30점)
집합 A는 $2x+2y+z=100$ 을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 집합이다. 다음 문항에 답하시오.

(1) 집합 A의 원소 중에서 $x+y+z=60$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하시오.

(2) 집합 A의 원소 중에서 $x+y+z=60$을 만족하는 않는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하시오.

[문제 1B] 다음 논제에 답하시오. (20점)
시각 $t=0$(초)에 10L의 물이 들어있는 물탱크의 유입구와 배출구를 모두 열었다. 시각 $t>0$에서 $f(t)=4(t+2)\ln(t+2)$ (L/초)의 속도로 새로운 물이 유입되고 $g(t)=\dfrac{2\ln(t+1)}{t+1}$ (L/초)의 속도로 물탱크의 물이 배출된다. 시각 $t=2$(초)에 물탱크에 들어있는 물의 양(L)을 구하시오.

19) 숭실대학교 홈페이지

풀어보기

문제1

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, u의 모든 순서쌍 (x, y, z, u)의 개수를 구하시오. (2015. 6월 평가원)

(가) $x+y+z+u=6$
(나) $x \neq u$

문제2

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? (2015. 9월 평가원)

(가) $a+b+c+3d=10$
(나) $a+b+c \leq 5$

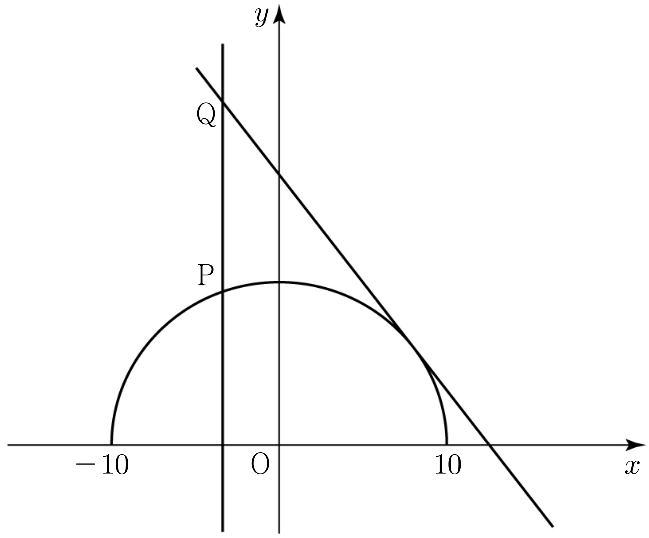
① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

문제3

한 변의 길이가 $12\sqrt{3}$인 정삼각형과 그 정삼각형에 내접하는 원으로 이루어진 도형이 있다. 이 도형에서 정삼각형의 각 변의 길이가 매초 $3\sqrt{3}$씩 늘어남에 따라 원도 정삼각형에 내접하면서 반지름의 길이가 늘어난다. 정삼각형의 한 변의 길이가 $24\sqrt{3}$이 되는 순간, 정삼각형에 내접하는 원의 넓이의 시간(초)에 대한 변화율이 $a\pi$이다. 이때, 상수 a의 값을 구하시오. (2011. 7월 전국연합)

문제4

곡선 $C: x^2+y^2=100\ (y \geq 0)$과 곡선 C의 접선 $y=-\sqrt{3}x+20$이 있다. 곡선 C 위의 점 P에서 y축에 평행한 직선을 그어 접선과 만나는 점을 Q라 하자. 점 P가 점 $\mathrm{A}(10,\ 0)$을 출발하여 곡선 위를 매초 5의 일정한 속력으로 점 $\mathrm{B}(-10,\ 0)$까지 이동할 때, 시간(초)에 대한 선분 PQ의 길이의 순간변화율의 최댓값을 구하시오. (2014. 7월 전국연합)



예시답안

풀어보기(문제1)

$x+y+z+u=6$인 경우의 수에서 $x=u$인 경우의 수를 빼면 된다.

$x+y+z+u=6$ 을 만족하는 음이 아닌 정수해 개수는 ${}_4\mathrm{H}_6={}_{4+6-1}\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_6=84$이고

① $x=u=0$ 일 때

$y+z=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는 ${}_2\mathrm{H}_6={}_7\mathrm{C}_6=7$ 가지

② $x=u=1$

$y+z=4$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는 ${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4=5$ 가지

③ $x=u=2$

$y+z=2$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는 ${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$ 가지

④ $x=u=3$

$y+z=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는 $y=0$, $z=0$ 인 1 가지

따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수는 $84-(7+5+3+1)=68$ 가지이다.

풀어보기(문제2)

a, b, c, d는 음이 아닌 정수이므로 (가) 조건에서

ⅰ) $d=0$ 일 때 $a+b+c=10$ (나) 조건$a+b+c\le 5$ 에 모순

ⅱ) $d=1$ 일 때 $a+b+c=7$ (나) 조건$a+b+c\le 5$ 에 모순

ⅲ) $d=2$ 일 때 $a+b+c=4$ 에서 ${}_3\mathrm{H}_4=15$

ⅳ) $d=3$ 일 때 $a+b+c=1$ 에서 ${}_3\mathrm{H}_1=3$

따라서 순서쌍(a, b, c, d)의 개수는 18개이다.

풀어보기(문제3)

t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이를 x_t, 그에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_t라 하면,

$r_t=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x_t$, $x_t=12\sqrt{3}+3\sqrt{3}\,t$이므로 $r_t=\dfrac{12+3t}{2}$

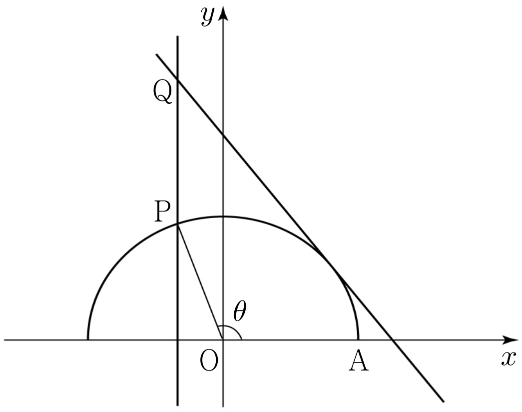
t초 후 정삼각형에 내접하는 원의 넓이는 $S(t)=\pi\left(\dfrac{12+3t}{2}\right)^2$이므로

$x_t=24\sqrt{3}$ 일 때, $t=4$

$S'(4)=2\pi\left(\dfrac{12+3\times 4}{2}\right)\times\dfrac{3}{2}=36\pi$이다.

따라서 $a=36$ 이다.

풀어보기(문제4)



$\angle \mathrm{AOP} = \theta$ 라 하면 호의 길이 $l = 10\theta$

점 $\mathrm{P}(10\cos\theta,\ 10\sin\theta)$가 매초 5의 일정한 속력으로 이동하므로 양변을 시각 t에 대해 미분하면

$$\frac{dl}{dt} = 10\frac{d\theta}{dt} = 5,\quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{\mathrm{PQ}} = L = 20 - 10\sqrt{3}\cos\theta - 10\sin\theta$$

따라서 L을 시각 t에 대해 미분하면

$$\frac{dL}{dt} = (10\sqrt{3}\sin\theta - 10\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}$$
$$= 10\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

따라서 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 일 때, 최댓값은 10이다.

[문제1 A] 대학발표 예시답안

(1) 이 문항은 연립방정식

$$\begin{cases} 2x+2y+z=100 \\ x+y+z=60 \end{cases}$$

의 자연수 해의 개수를 구하는 것이다. 위의 식에서 아래의 식을 빼 주면, $x+y=40$을 얻고 이로부터 $z=20$을 얻는다. 따라서 연립방정식을 만족하는 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 $x+y=40$을 만족하는 자연수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 40을 두 개의 자연수로 분할하는 경우의 수와 같으므로, $P(40,\ 2)={}_{39}C_1=39$이다.

(2) 집합 A의 원소의 개수는 $2x+2y+z=100$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수이다.

$x+y=k$라 하면, x, y는 자연수이고, $z=100-2x-2y=2(50-k)$도 자연수 이므로 k는 2 이상 49 이하의 모든 자연수, 즉 $2\le x+y=k\le 49$이다. 따라서 z는 2이상 96이하의 짝수이다. 이로부터 $2x+2y+z=100$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 $2\le x+y=k\le 49$을 만족하는 자연수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수와 같다.

$x+y=k$를 만족하는 자연수 x, y의 모든 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 $P(k,\ 2)={}_{k-1}C_1=k-1$이므로, $2\le x+y=k\le 49$을 만족하는 자연수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수

$$\sum_{k=2}^{49}P(k,\ 2)=\sum_{k=2}^{49}(k-1)=\sum_{m=1}^{48}m=1176$$

이 중에서 $x+y+z=60$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 문항 (1)로부터 39개 이므로, 집합 A의 원소 중에서 $x+y+z=60$을 만족하지 않는 자연수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 $1176-39=1137$개 이다.

[문제1 B] 대학발표 예시답안

시각 t에서 물탱크 안의 물의 양의 순간변화율은 $f(t)-g(t)$이다. 따라서 $t=0$에서 $t=2$까지 물탱크 물의 변화량(L)은 순견변화율을 적분하여 얻을 수 있다. 최초의 물의 양 10L를 더하면 $t=2$에서 물의 양은

$$10+\int_0^2(f(t)-g(t))dt$$

두 함수 $f(t)$, $g(t)$ 각각에 대한 정적분을 부분적분과 치환적분을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 4(t+2)\ln(t+2)dt$$

$$=\left[2x^2\ln x-x^2\right]_2^4$$

$$=56\ln 2-12$$

$$\int_0^2 g(t)dt = \int_0^2 \frac{2\ln(t+1)}{(t+1)}dt$$
$$= \int_0^{\ln 3} 2u\,du$$
$$= (\ln 3)^2$$

따라서 $t=2$에 물탱크에 들어있는 물의 양의 $56\ln 2 - 2 - (\ln 3)^2$ (L)이다.

24 아주대학교 수시 모의 자연계열[20]

시험시간	120분	문항수	2문항
문항유형	수학 2문항, 문항당 소문항 3개	배점	• 1번 문항 : 50점 • 2번 문항 : 50점
출제단원	1번 문항 : 정적분, 통계, 미분계수 2번 문항 : 코사인법칙(교육과정 외)	논술 고사일	2016.11.26.(토)~11.27(일)
반영비율	논술 60%, 학생부 교과 40%		
수능최저 학력기준	• 일반전형1 : 없음(단, 모집계열에 맞추어 수능을 응시해야 함) – 자연계열(금융공학과포함) : 국어, 수학(가), 영어, 탐구(과탐) • 의학과 : 국어, 수학(가), 영어, 탐구(과탐) 중 3과목 1등급 이내		

1. 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

주어진 여러 수량들의 대푯값을 찾을 때 우리는 평균을 이용한다. 평균을 구하는 과정에서 중요한 수량들은 그 중요도에 따라 더 반영하여야 한다.

(가) 구간 $[a,b]$에 정의된 함수 $f(x)$를 생각하자. 임의 부분구간 $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$를 수열 $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = \beta$을 이용하여 나누면, 이를 이용한 $[\alpha,\beta]$에서의 함수 $f(x)$의 평균의 근삿값은

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\frac{x_{k+1}-x_k}{\beta-\alpha} = \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k,\ \ \Delta x_k = x_{k+1}-x_k$$

가 된다. 이러한 과정의 극한으로서 '구간 $[\alpha,\beta]$에서의 함수 $f(x)$의 평균'은

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

으로 주어진다.

(나) 표본공간 $S=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$의 각 원소에 하나의 값을 대응시키는 함수 X를 '확률변수'라고 한다. 또한 S의 부분집합 $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$를 우리는 '사건'이라고 한다. 이때 E의 원소 하나로 이루어진 집합 $\{e_i\}$도 부분집합이므로 사건이다. 한 사건 E의 확률을 $P(E)$로 표시할 때, $P(E)>0$인 경우 '사건 E에서의 확률변수 X의 평균'을

$$\frac{1}{P(E)}\sum_{i=1}^{k} X(e_i)P(\{e_i\})$$

20) 아주대학교 홈페이지

으로 정의하자. 예를 들어 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수 $1, 2, 3, 4, 5, 6$은 표본이 되고 그 확률이 각각 $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$이고, 확률변수 X의 값들이 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$로 주어진 경우, 사건 $\{1, 2, 3\}$에서의 확률변수 X의 평균은

$$\frac{1}{p_1+p_2+p_3}(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)$$이 된다.

(다) 함수 $f(x)$가 열린 구간 (a,b)에서 정의되어 있고 모든 점에서 두 번 미분가능하다고 하자. 임의의 점 $x_0 \in (a,b)$에서 함수 $f(x)$의 이계도함수 값 $f''(x_0)$는 도함수 $f'(x)$의 x_0에서의 미분계수이다.

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$$

논제1-1

(1) 아주대학교를 다니는 다산이는 지금 수평거리 $200m$인 언덕을 걸어서 넘고 있다. 수평거리를 따른 언덕의 단면 높이가 구간 $[0,200]$에 정의된 다음의 함수

$$f(x) = x, \quad x \in [0,100] \ ; \ f(x) = 100 \times \cos^2\left(\frac{\pi}{200}(x-100)\right), \ x \in [100,200]$$

으로 표현된다고 하자. '구간 $[50, 200]$에서의 $f(x)$의 평균'을 구하라. (5점)

(2) 표본공간 $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$를 생각하자. 이 때 $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$에 대하여 각 사건 $\{n\}$이 나올 확률이 앞, 뒤가 나올 확률이 같은 동전을 다섯 번 던져 앞이 나오는 횟수가 n일 확률과 같다. 이 때, '2보다 작거나 같은 수로 이뤄진 사건에서의 확률변수 $X(n) = n^2$의 평균'을 구하라. (10점)

논제1-2

제시문 (가)에서 $[a,b] = [a_0, a_m]$이라고 하고 함수 $f(x)$가 이 구간 $[a_0, a_m]$에서 정의되어 있다고 하자. 구간 $[a_0,a_m]$을 수열 $a_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1} < a_m$으로 나누고 c_l $(l=1,...,m)$을 각 '작은 구간 $[a_{l-1}, a_l]$에서의 $f(x)$의 평균'이라고 하자.
구간 $[a_0,a_m]$ 위의 함수 $h_l(x)$ $(l=1,...,m)$을 각각 x가 $[a_{l-1}, a_l]$에 속할 때만 1이 되고, 그렇지 않으면 0이 되는 함수라고 정의 할 때, 다음의 함수를 생각하자.

$$g(x) = c_1 h_1(x) + \cdots + c_m h_m(x), \ x \in [a_0, a_m].$$

전체 구간 $[a, b]$에서의 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 평균의 대소관계에 대하여 논하라. (10점)

논제1-3

제시문 (다)에서 함수 $f(x)$의 이계도함수의 값이 구간 (a,b)안의 모든 점에서 0보다 크거나 같다고 하자.

(1) 함수 $f(x)$의 그래프 상의 임의의 점 $(x_0, f(x_0))$에서 그은 접선 ℓ은 항상 $y=f(x)$ 의 그래프 아래에 놓임을 보여라. (10점)

(2) 구간 (a,b)안의 임의의 점 x_0와 $[x_0-d, x_0+d] \subset (a,b)$이 되는 임의의 양수 d 에 대하여 '구간 $[x_0-d, x_0+d]$에서의 함수 $f(x)$의 평균'은 항상 $f(x_0)$보다 크거나 같음을 보여라. 또 '구간 $[x_0-d, x_0+d]$에서의 이차함수 $f(x) = px^2+qx+r$의 평균' (단, $p>0$)은 항상 $f(x_0)$보다 큼을 보여라. (15점)

풀어보기(문제1)

구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$이다. X의 평균이 $\frac{1}{4}$이고, $\int_0^1 (ax+5)f(x)\,dx = 10$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. (2012학년도 대수능)

풀어보기(문제2)

자연수 n에 대하여 구간 $[n,\ n+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은 $n+1$이다. 이때, 함수 $y=f(x)$의 구간 $[1,\ 100]$에서의 평균변화율을 구하시오.

(2004년 교육청 학력평가)

풀어보기(문제3)

함수 $f(x)=x^2(x-2)^2$이 있다. $0 \le x \le 2$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) \le f'(t)(x-t)+f(t)$$

를 만족시키는 실수 t의 집합은 $\{t \mid p \le t \le q\}$이다. $36pq$의 값을 구하시오.

(2012년 교육청 학력평가)

예시답안

풀어보기(문제1)

확률의 성질에 의해 $\int_0^1 f(x)dx=1$ …… ㉠ 이다.

조건에서 $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{4}$ …… ㉡ 이고,

㉠, ㉡에 의해

$$\begin{aligned}10&=\int_0^1(ax+5)f(x)dx\\&=\int_0^1 axf(x)dx+\int_0^1 5f(x)dx\\&=a\int_0^1 xf(x)dx+5\int_0^1 f(x)dx\\&=\frac{1}{4}a+5\end{aligned}$$

이다.

따라서 $a=20$ 이다.

풀어보기(문제2)

$\frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n}=n+1$ 에서 $f(n+1)-f(n)=n+1$ 이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 구간 $[1,100]$에서의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(100)-f(1)}{100-1}&=\frac{\{f(100)-f(99)\}+\{f(99)-f(98)\}+\cdots+\{f(2)-f(1)\}}{99}\\&=\frac{100+99+\cdots+2}{99}\\&=\frac{5049}{99}\\&=51\end{aligned}$$

이다.

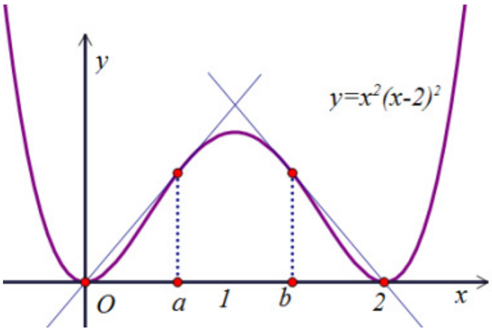
풀어보기(문제3)

직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$는 곡선 위의 점 $\mathrm{P}(t,\,f(t))$에서의 접선이므로

$0\le x\le 2$에서 $f(x)\le f'(t)(x-t)+f(t)$를 만족하는 t의 범위는 접선이 주어진 곡선의 위쪽에 놓이는 구간이다. 그런데 위로 볼록한 부분에 있는 점에서의 접선 중에는 구간 $[0,\,2]$에서 $y=f(x)$의 그래프 아래쪽을 지나는 접선이 생길 수 있다.

그러므로 원점에서 그은 접선의 접점과 점 $(2,\,0)$에서 그은 접선의 접점의 x좌표를 조사

하여, 그래프를 관찰하면 두 접점 사이의 구간이 문제의 조건을 만족하는 구간임을 알 수 있다. (아래 그림 참조)



$(0,0)$을 지나는 접선이 곡선과 만나는 점을 $(a,f(a))$, $(2,0)$을 지나는 접선이 곡선과 만나는 점을 $(b,f(b))$라고 하면, $y=x^2(x-2)^2$에서

$y'=2x(x-2)^2+2x^2(x-2)=4x(x-1)(x-2)$이다.

점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-a^2(a-2)^2=4a(a-1)(a-2)(x-a)\cdots$①이다.

접선이 $(0,0)$을 지나므로 위의 ①식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면,

$-a^2(a-2)^2=-4a^2(a-1)(a-2)$이다.

그런데 $a\neq 0$, $a\neq 2$이므로, 위의 식을 양변을 $a^2(a-2)$로 나누면

$(a-2)=4(a-1)$이다. 따라서 $a=\dfrac{2}{3}$이다.

한편 $f(x)=x^2(x-2)^2$에서, $f(1-x)=(1-x)^2(1+x)^2$이고

$f(1+x)=(1+x)^2(x-1)^2=(1+x)^2(1-x)^2$이므로, $f(1+x)=f(1-x)$이다.

즉, $f(x)$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

따라서, 점 $(2,\ 0)$에서 그은 접선의 접점의 x좌표 b는 다음과 같이 구할 수 있다.

$\dfrac{2}{3}+b=2$에서 $b=\dfrac{4}{3}$이다.

(참고로. 위의 ①식에 $(2,0)$을 대입하여 b를 구할 수도 있다.)

주어진 부등식을 만족시키는 실수 t의 값의 범위는 $\dfrac{2}{3}\leq t\leq\dfrac{4}{3}$이다.

따라서 $36pq=36\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{3}=32$ 이다.

논제1-1 (대학발표 예시답안)

(1) '구간 $[50,200]$에서의 함수 $f(x)$의 평균'을 M이라 하자.

$M=\dfrac{1}{200-50}\left[\displaystyle\int_{50}^{100}x\,dx+\int_{100}^{200}100\cos^2\left\{\frac{\pi}{200}(x-100)\right\}dx\right]$이다.

M을 계산하기 위하여 $I_1 = \int_{50}^{100} x dx$, $I_2 = \int_{100}^{200} 100\cos^2\left\{\frac{\pi}{200}(x-100)\right\}dx$로 두면,

$M = \frac{1}{150}(I_1 + I_2)$ 이고 , $I_1 = \int_{50}^{100} x dx = 3750$ 이다.

I_2를 계산하기 위하여, $\frac{\pi}{200}(x-100) = y$로 치환하고, $\cos(2y) = 2\cos^2 y - 1$를 대입하면

$$I_2 = \frac{20000}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y\, dy$$

$$= \frac{20000}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2y)}{2} dy = \frac{10000}{\pi}\left[y + \frac{1}{2}\sin(2y)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 5000$$

이다. 즉, ‘구간 $[50, 200]$에서의 함수 $f(x)$의 평균’ $M = \frac{1}{150}(3750 + 5000) = \frac{175}{3}$ 이다.

(2) 사건들 $\{0\}, \{1\}, \{2\}$의 확률은 이항분포에 의하여 각각 ${}_5C_0\left(\frac{1}{2}\right)^5$, ${}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^5$, ${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^5$이며 이들의 합은 $\frac{1+5+10}{2^5} = \frac{1}{2}$이다. 그러므로 사건 $\{0, 1, 2\}$에서의 확률변수 X의 평균은 제시문 (나)에서의 정의에 의하여

$$\frac{1}{\frac{1}{2}}\left(0^2 \cdot \frac{1}{2^5} + 1^2 \cdot \frac{5}{2^5} + 2^2 \cdot \frac{10}{2^5}\right) = \frac{45}{16}$$ 이다.

논제1-2 (대학발표 예시답안)

제시문 (가)의 정의에 의해서 $[a,b]$에서 $g(x)$의 평균은 $\frac{1}{a_m - a_0}\int_{a_0}^{a_m} g(x)\, dx$ 이다. 정적분의 성질에 의해서 $\int_{a_0}^{a_m} g(x)dx$는 m개의 정적분들 $\int_{a_0}^{a_1} g(x)dx, \ldots, \int_{a_{m-1}}^{a_m} g(x)dx$의 합이 되기 때문에

$$\frac{1}{a_m - a_0}\int_{a_0}^{a_m} g(x)\, dx = \frac{1}{a_m - a_0}\sum_{l=1}^{m}\int_{a_{l-1}}^{a_l} g(x)\, dx$$

임을 알 수 있다. 정의에 의해서 각 구간 $[a_{l-1}, a_l]$에서 함수 $g(x)$는 상수 c_l이므로 위의 식은 다시

$$\frac{1}{a_m - a_0}\sum_{l=1}^{m} c_l(a_l - a_{l-1})$$

이 된다. 이제 c_l의 정의를 대입하면

$$\frac{1}{a_m - a_0}\sum_{l=1}^{m}\left[\frac{1}{a_l - a_{l-1}}\int_{a_{l-1}}^{a_l} f(v)dv \cdot (a_l - a_{l-1})\right] = \frac{1}{a_m - a_0}\sum_{l=1}^{m}\int_{a_{l-1}}^{a_l} f(v)dv$$

를 얻게 되고, 다시 정적분의 성질에 의하여 위의 마지막 항이 $[a,b]$에서 $f(x)$의 평균이 됨을 알 수 있다. 그러므로 $[a,b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 평균은 같다.

논제1-3 (대학발표 예시답안)

(1) 도함수 $f'(x)$는 증가함수이다. 즉, 구간 (a,b)안에 있는 임의의 $x_1 < x_2$에 대하여 $f'(x_1) \le f'(x_2)$이다. 왜냐하면 구간 $[x_1,x_2]$이 (a,b)안에 있고, 가정에 의해서 도함수 $f'(x)$은 $[x_1,x_2]$의 모든 점에서 미분가능하고 따라서 연속이기 때문에 평균값 정리에 의하여, (x_1,x_2) 안에 어떤 c가 존재하며 $f'(x_2)-f'(x_1) = f''(c)(x_2-x_1) \ge 0$이 성립하여 $f'(x_1) \le f'(x_2)$이 된다.

함수 $y = f(x)$의 그래프 상의 임의의 점 $(x_0, f(x_0))$에서 그은 접선 ℓ의 식은 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$이다. 즉, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$으로 표현된다.

(i) $x > x_0$ 일 때

평균값 정리에 의해 $x_0 < c < x$인 c가 존재하여 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c)$가 되고 $f'(x)$는 증가함수이므로 $f'(c) \ge f'(x_0)$이 된다. 따라서 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge f'(x_0)$이므로 $f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$을 얻는다.

(ii) $x < x_0$ 일 때

평균값 정리에 의해 $x < c < x_0$인 c가 존재하여 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c)$가 되고 $f'(x)$는 증가함수이므로 이번에는 $f'(c) \le f'(x_0)$이다.

따라서 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le f'(x_0)$ 이므로

$f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$을 얻는다. (왜냐하면 $x - x_0$는 음수)

(i), (ii) 에 의해 항상 $f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$이 성립하므로 접선 ℓ은 항상 f 의 그래프 아래에 놓인다.

(2) (a,b)안의 임의의 점 x_0와 $[x_0-d, x_0+d] \subset (a,b)$가 되는 임의의 양수 d에 대하여, $x \in [x_0-d, x_0+d]$ 이면 <논제 1-3-(1)>에 의하여 $f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$이 된다. 이 부등식의 양변을 x_0-d에서 x_0+d까지 적분하고 $2d$를 나누면,

$\dfrac{1}{2d}\displaystyle\int_{x_0-d}^{x_0+d} f(x)dx \ge \dfrac{1}{2d}\int_{x_0-d}^{x_0+d}(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))dx$ $\cdots$(※)가 성립한다.

(※) 식의 좌변은 '구간 $[x_0-d, x_0+d]$에서의 함수 $f(x)$의 평균'이고,

(※) 식의 우변은 $\frac{f(x_0)}{2d}\left(\int_{x_0-d}^{x_0+d} 1dx + \int_{x_0-d}^{x_0+d}(x-x_0)dx\right)$이다.

이때, 적분 $\int_{x_0-d}^{x_0+d} 1\,dx = 2d$ 이고,

$\int_{x_0-d}^{x_0+d}(x-x_0)dx$를 계산하기 위하여 $x-x_0=y$로 치환하면

$\int_{x_0-d}^{x_0+d}(x-x_0)dx = \int_{-d}^{d} ydy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-d}^{d} = 0$이다.

따라서 $\frac{1}{2d}\int_{x_0-d}^{x_0+d}\{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\}dx = f(x_0)$ 이므로, (※)식에 의하여

'구간 $[x_0-d, x_0+d]$에서의 함수 $f(x)$의 평균'은 항상 $f(x_0)$보다 크거나 같다.

한편, '구간 $[x_0-d, x_0+d]$에서의 $f(x) = px^2+qx+r$의 평균'(단, $p>0$)은

$$\frac{1}{2d}\int_{x_0-d}^{x_0+d}(px^2+qx+r)dx$$

$$= \frac{1}{2d}\left[\frac{p}{3}x^3+\frac{q}{2}x^2+rx\right]_{x_0-d}^{x_0+d}$$

$$= \frac{1}{2d}\left(\frac{p}{3}((x_0+d)^3-(x_0-d)^3)+\frac{q}{2}((x_0+d)^2-(x_0-d)^2)+r(x_0+d-(x_0-d))\right)$$

$$= \frac{1}{2d}\left(\frac{2d\times p}{3}(3x_0^2+d^2)+\frac{2d\times q}{2}(2x_0)+r(2d)\right)$$

$$= px_0^2+qx_0+r+\frac{pd^2}{3}$$

$$= f(x_0)+\frac{pd^2}{3}$$ 이다.

따라서 '구간 $[x_0-d, x_0+d]$에서의 함수 $f(x)$의 평균'은 항상 $f(x_0)$보다 크게 된다.

25 아주대학교 논술(오전)21)

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생의 경우 해결할 수 있는 수준의 다양한 수학적 주제를 다룸(학생부 40%+논술60%, 일괄반영)	없음	수학 (2문항, 문항별 3문제 내외 출제)	120분

[문항1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 자연로그의 밑 e가 계산된 최초의 기록은 1618년 존 네이피어에 의해 발간된 로그표이다. 그러나 네이피어는 로그 계산의 과정에서 나온 결과 값만을 간단히 다루었을 뿐 자연로그의 밑을 상수로 취급하지는 않았다. 야코프 베르누이는 복리 이자의 계산에서 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 극한값이 수렴함을 발견하였으며, 오일러는 1727년과 1728년 사이에 이 극한값을 e로 표현하였다.

(나) 실수 a에 대하여 함수 $p(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+a}$ $(x>0)$는 a값과 관계없이 "$\lim_{x\to\infty}\ln p(x)=1$"이고 $\lim_{x\to\infty}p(x)=e$가 된다. 따라서 실수 a가 주어질 때 마다 함수 $p(x)$와 상수 $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$을 비교할 수 있다.

(다) 우리는 극한과 도함수의 성질을 이용하여 여러 가지 부등식을 증명할 수 있다. 예를 들면 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ 일 때, 다음 두 명제가 성립한다.

명제 1) 모든 $x>0$에 대하여 $f'(x)>0$이면, 모든 $x>0$에 대하여 $f(x)<0$
명제 2) 모든 $x>0$에 대하여 $f'(x)<0$이면, 모든 $x>0$에 대하여 $f(x)>0$

(라) **평균값 정리**: 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

21) 아주대학교 홈페이지

[문제 1-1] 제시문 (나)와 (다)를 읽고 다음 논제에 답하시오.

(1) (8점) **'평균값정리를 함수 $\ln x$에 적용하여'** a값과 관계없이 $\lim_{x\to\infty} \ln p(x) = 1$임을 보이시오.

(2) (8점) 제시문 (다)의 명제 1)을 증명하시오.

[문제 1-2] 제시문 (나)와 (다)를 읽고 다음 논제에 답하시오.

(1) (9점) $a \geq \frac{1}{2}$인 a에 대하여 $p(x) > e$ $(x > 0)$임을 보이시오.

(2) (9점) $a \leq 0$인 a에 대하여 $p(x) < e$ $(x > 0)$임을 보이시오.

[문제 1-3] 제시문 (나)에서 $0 < a < \frac{1}{2}$일 때 다음 논제에 답하시오.

(1) (10점) $p(x_0)$가 $p(x)$의 최솟값이 되는 양수 x_0가 단 하나 존재하고 $0 < p(x_0) < e$ 임을 보이시오.

(2) (6점) x_0가 부등식 $\frac{a^2}{1-2a} < x_0 < \frac{a}{1-2a}$를 만족함을 보이시오.

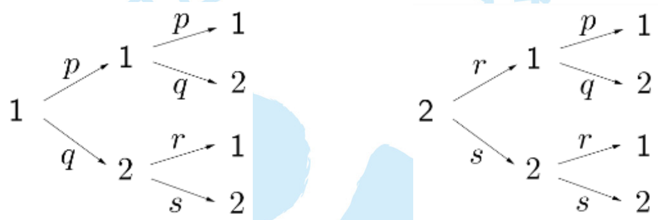
[문항2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 약용이네는 매일 오후 6시가 되면 집에서 식사(E_1)를 하거나 외식(E_2)을 한다. 내일부터는 매일 저녁 식사를 다음 표의 규칙에 따라 E_1 또는 E_2을 선택한다. p, q는 양수이고 r, s는 음이 아닌 실수이며 $p+q=1$, $r+s=1$을 만족한다.

2일 식사	확률
E_1 다음에 E_1	p
E_1 다음에 E_2	q
E_2 다음에 E_1	r
E_2 다음에 E_2	s

[표1]

(나) 제시문 (가)의 규칙을 연속으로 두 번 적용한 아래의 수형도는 오늘, 내일, 모레 저녁 식사의 모든 가능한 경우들을 표현한다.



예를 들면 $1 \xrightarrow{p} 1 \xrightarrow{q} 2$는 오늘, 내일, 모레 저녁 식사가 E_1, E_1, E_2 인 것을 표현하며 그 확률은 $E_1 \rightarrow E_1$의 확률과 $E_1 \rightarrow E_2$의 확률의 곱인 $p \times q$가 된다고 하자. 나머지 경우들의 확률도 비슷하게 확률의 곱으로 얻어진다고 하면 우리는 다음의 표를 얻게 된다.

3일 식사	확률
$E_1 \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_1$	$p \times p + q \times r$
$E_1 \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_2$	$p \times q + q \times s$
$E_2 \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_1$	$r \times p + s \times r$
$E_2 \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_2$	$r \times q + s \times s$

[표2]

(다) 제시문 (가)의 규칙을 연속으로 n번 적용하고 제시문 (나)와 같이 확률을 구해나갈 때, 오늘 저녁식사가 E_1일 경우 n일($n=1,2,\cdots$) 이후 저녁 식사가 E_1일 확률을 a_n, E_2일 확률을 b_n이라고 표시하고, 오늘 저녁 식사가 E_2일 경우 n일($n=1,2,\cdots$) 이후 저녁 식사가 E_1일 확률을 c_n, E_2일 확률을 d_n이라고 표시하자. 예를 들어 [표1]의 확률들은 a_1, b_1, c_1, d_1이고 [표2]에 계산된 확률들은 a_2, b_2, c_2, d_2이다.

(라) 실수 x, y와 자연수 n에 대하여 다음의 이항정리가 성립한다.

$$(x+y)^n = {}_n\mathrm{C}_0 x^n y^0 + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} y^1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} x^1 y^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n x^0 y^n.$$

[문제 2-1] 제시문 (가)~(다)에서 $p=s, q=r$이라고 하자.

(1) (5점) a_3, b_3을 구하시오.

(2) (7점) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = d_n,\ b_n = c_n$임을 보이시오.

[문제 2-2] 제시문 (가)~(다)에서 $p=s, q=r$이라고 하자.

(1) (8점) 확률 a_n이 다음 합

$$_n\mathrm{C}_0\, p^n q^0 + {}_n\mathrm{C}_1\, p^{n-1} q^1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\, p^1 q^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n\, p^0 q^n$$

의 첫 번째, 세 번째,⋯ 항들의 합 $_n\mathrm{C}_0\, p^n q^0 + {}_n\mathrm{C}_2\, p^{n-2} q^2 + n\mathrm{C}_4\, p^{n-4} q^4 + \cdots$이 됨을 보이시오.

(2) (8점) 이 경우 $\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n$의 값을 구하시오.

[문제 2-3] 제시문 (가)~(다)에서 $r=1,\ s=0$이라고 하자.

(1) (8점) 확률 a_2, b_2, a_3, b_3을 q에 대한 다항식으로 나타내시오. (단, 오름차순으로 나타내시오.)

(2) (8점) 확률 a_n, b_n의 일반항을 q에 대한 다항식으로 나타내시오. (단, 오름차순으로 나타내시오.)

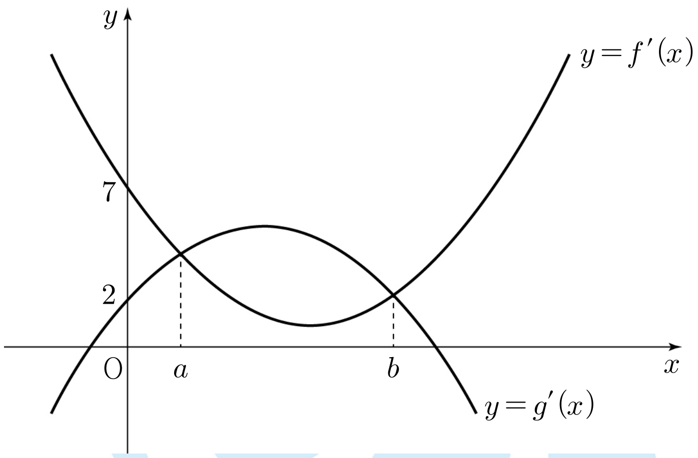
(3) (6점) 이 경우 $\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n$의 값을 구하시오.

풀어보기

문제1

그림과 같이 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표는 a, $b\,(0<a<b)$이다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(0)=7$, $g'(0)=2$)

(2016. 7월 학평 나형)



<보 기>

ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. $h(b)=0$이면 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. $0<\alpha<\beta<b$인 두 실수 α, β에 대하여 $h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제2

자연수 n에 대하여 $f(n)=\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{9}\right)^r$일 때, $\log f(n)>1$을 만족시키는 n의 최솟값은?

(단, $\log 3=0.4771$로 계산한다.) (2016. 3월 학평 가형)

① 18 ② 22 ③ 26 ④ 30 ⑤ 34

문제3

좌표평면 위의 한 점 $(x,\ y)$에서 세 점

$$(x+1,\ y),\ (x,\ y+1),\ (x+1,\ y+1)$$

중 한 점으로 이동하는 것을 점프라 하자.

점프를 반복하여 점 $(0,\ 0)$에서 점 $(4,\ 3)$까지 이동하는 모든 경우 중에서, 임의로 한 경우를 선택할 때 나오는 점프의 횟수를 확률변수 X라 하자. 다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다. (단, 각 경우가 선택되는 확률은 동일하다.)

점프를 반복하여 점 $(0,\ 0)$에서 점 $(4,\ 3)$까지 이동하는 모든 경우의 수를 N이라 하자. 확률변수 X가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 값을 k라 하면 $k=\boxed{(가)}$ 이고, 가장 큰 값은 $k+3$이다.

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{1}{N}\times\frac{4!}{3!}=\frac{4}{N}$$

$$\mathrm{P}(X=k+1)=\frac{1}{N}\times\frac{5!}{2!2!}=\frac{30}{N}$$

$$\mathrm{P}(X=k+2)=\frac{1}{N}\times\boxed{(나)}$$

$$\mathrm{P}(X=k+3)=\frac{1}{N}\times\frac{7!}{3!4!}=\frac{35}{N}$$

이고

$$\sum_{i=k}^{k+3}\mathrm{P}(X=i)=1$$

이므로 $N=\boxed{(다)}$ 이다.

따라서 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=k}^{k+3}\{i\times\mathrm{P}(X=i)\}=\frac{257}{43}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 $a,\ b,\ c$라 할 때, $a+b+c$의 값은?

(2017 대수능, 2016년 시행)

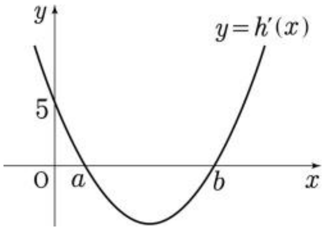
① 190 ② 193 ③ 196

④ 199 ⑤ 202

예시답안

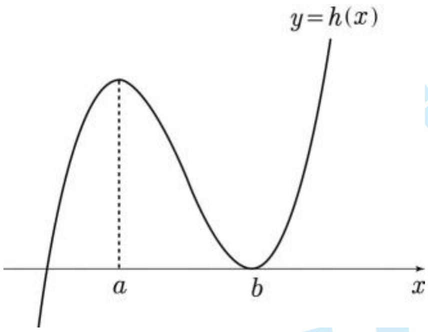
풀어보기(문제1)

함수 $y=h'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄴ. $h(b)=0$일 때, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 함수 $h(x)$는 닫힌 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고 열린 구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여 $\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)$를 만족시키는 γ가 열린 구간 $(\alpha,\ \beta)$에 존재한다.

열린 구간 $(0,\ b)$에 있는 모든 실수 x에 대하여 $h'(x)<5$ 이므로

$$\frac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)<5$$

$h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이므로 정답은 ⑤이다.

풀어보기(문제2)

$$f(n)={}_nC_0+{}_nC_1\left(\frac{1}{9}\right)^1+{}_nC_2\left(\frac{1}{9}\right)^2+\cdots+{}_nC_n\left(\frac{1}{9}\right)^n$$
$$=\left(1+\frac{1}{9}\right)^n=\left(\frac{10}{9}\right)^n$$

$$\log f(n)=\log\left(\frac{10}{9}\right)^n$$
$$=n(\log 10-\log 9)$$
$$=n(1-2\log 3)$$

$=n(1-2\times 0.4771)$

$=n(1-0.9542)$

$=0.0458n>1$

$n>\dfrac{1}{0.0458}=21.8\cdots$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 22이므로 정답은 ②이다.

풀어보기(문제3)

점프를 반복하여 점 (0, 0)에서 점 (4, 3)까지 이동하는 모든 경우의 수를 N이라 하자. 확률변수 X가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 값을 k라 하자.

이때, 점프는 $(x+1,\ y+1)$이 3번이고 $(x+1,\ y)$가 1번이면 되므로 $k=\boxed{4}$ 이고 가장 큰 값은 $k+3$이다.

$X=k$일 때, 점프는 $(x+1,\ y+1)$이 3번, $(x+1,\ y)$가 1번이므로

$\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{1}{N}\times\dfrac{4!}{3!}=\dfrac{4}{N}$

또, $X=k+1$일 때, 점프는 $(x+1,\ y+1)$이 2번, $(x+1,\ y)$가 2번 $(x,\ y+1)$이 1번이므로

$\mathrm{P}(X=k+1)=\dfrac{1}{N}\times\dfrac{5!}{2!2!}=\dfrac{30}{N}$

또, $X=k+2$일 때, 점프는 $(x+1,\ y+1)$이 1번, $(x+1,\ y)$가 3번, $(x,\ y+1)$이 2번 이어야 하므로

$\mathrm{P}(X=k+2)=\dfrac{1}{N}\times\dfrac{6!}{1!3!2!}=\dfrac{1}{N}\times\boxed{60}$

또, $X=k+3$일 때, 점프는 $(x+1,\ y)$가 4번, $(x,\ y+1)$이 3번 이어야 하므로

$\mathrm{P}(X=k+3)=\dfrac{1}{N}\times\dfrac{7!}{3!4!}=\dfrac{35}{N}$ 이고

$\displaystyle\sum_{i=k}^{k+3}\mathrm{P}(X=i)=1$에서

$\dfrac{4}{N}+\dfrac{30}{N}+\dfrac{60}{N}+\dfrac{35}{N}=1,\quad \dfrac{129}{N}=1$이므로 $N=\boxed{129}$ 이다.

따라서, 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.

$\mathrm{E}(X)=\displaystyle\sum_{i=k}^{k+3}i\mathrm{P}(X=i)=\dfrac{257}{43}$

위의 (가), (나), (다) 에 알맞은 값은 각각 4, 60, 129이므로

$a+b+c=4+60+129=193$이므로 정답은 ②이다.

[문제 1-1] 대학발표 예시답안

(1) [풀이] $f(x) = \ln p(x)$라 놓고 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$을 보인다. 실수 a를 잡고 고정시킨다고 하자. 평균값정리에 의해

$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c}(x+1-x)$인 c가 x와 $x+1$사이에 존재한다.

정리하면 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{c}$이고 $c = x+\alpha_x(0 < \alpha_x < 1)$로 표현하면

$\lim_{x\to\infty}(x+a)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+a}{x+\alpha_x}$가 되어 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

따라서 $\lim_{x\to\infty}\ln p(x) = 1.$

[참고1] $\lim_{x\to\infty}\ln p(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1\times\ln e = 1$

[참고2] $\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x}\right)^a = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^a = e\times 1^a = e$ 이므로 $\lim_{x\to\infty}\ln p(x) = 1$

(나침반 다른풀이) 평균값 정리를 함수 $\ln x$에 적용하면

$\frac{\ln(x+1)-\ln x}{x+1-x} = \frac{1}{c}$인 c가 x와 $x+1$사이에 존재한다.

$\frac{1}{x+1} < \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$

$\frac{x+a}{x+1} < (x+a)\ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{x+a}{x}$

$\frac{x+a}{x+1} < \ln p(x) < \frac{x+a}{x}$

$1 \le \lim_{x\to\infty}\ln p(x) \le 1$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\ln p(x) = 1$

(2) [풀이] 결론을 부정하면 $f(x_0) \ge 0$인 $x_0 > 0$가 존재한다. 모든 $x > 0$에 대하여 $f'(x) > 0$이므로 $f(x_0+1) > f(x_0) \ge 0$이고 모든 $x > x_0+1$에 대하여 $f(x) > f(x_0+1)$이다. 이는 $0 = \lim_{x\to\infty} f(x) \ge f(x_0+1)$ 이므로 모순이다.

[문제 1-2] 대학발표 예시답안

(1) [풀이] $f(x) = (x+a)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$라 하면

$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + (x+a)\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x+a}{x(x+1)}$ 이므로

$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ (실수 a에 대하여 성립)

$f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} - \frac{x(x+1)-(x+a)(2x+1)}{(x(x+1))^2} = \frac{(2a-1)x + a}{(x(x+1))^2}$

$a \geq \frac{1}{2}$이므로 $f''(x) > 0$ 이고 $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$이므로 $f'(x) < 0$

[문제 1-1] (1)에서 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$이고 명제 2)에 의해 $f(x) > 1$.

따라서 $p(x) = e^{f(x)} > e^1 = e$ $(x > 0)$

[다른 풀이] 앞의 풀이에서 $a = \frac{1}{2}$이면

$f''(x) = \frac{1}{2(x(x+1))^2} > 0$이고 $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$이므로 $f'(x) < 0$

[문제 1-1] (1)에서 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$이고 명제 2)에 의해 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} > e.$

이제 $a \geq \frac{1}{2}$이면 $p(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}+\left(a-\frac{1}{2}\right)} > e \times \left(1+\frac{1}{x}\right)^{a-\frac{1}{2}} \geq e \times 1 = e$

(2) [풀이] $f(x) = (x+a)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$라 하면

$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + (x+a)\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x+a}{x(x+1)}$ 이므로

$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ (실수 a에 대하여 성립)

$f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} - \frac{x(x+1)-(x+a)(2x+1)}{(x(x+1))^2} = \frac{(2a-1)x + a}{(x(x+1))^2}$

$a \leq 0$이므로 $f''(x) < 0$ 이고, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$이므로 $f'(x) > 0$

[문제 1-1] (1)에서 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$이고 명제 1)에 의해 $f(x) < 1$.

따라서 $p(x) = e^{f(x)} < e^1 = e$ $(x > 0)$

[다른 풀이] 앞의 풀이에서 $a=0$이면 $f''(x)=\dfrac{-x}{(x(x+1))^2}<0$이고,

$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$이므로 $f'(x)>0$

[문제 1-1] (1)에서 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$이고 명제 1)에 의해 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e$.

이제 $a\le 0$이면 $p(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^a<e\times\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^a\le e\times 1=e$

[문제1-3] 대학발표 예시답안

(1) [풀이] $f''\left(\dfrac{a}{1-2a}\right)=0$이고 부호가 $+$에서 $-$로 변하므로

$f'\left(\dfrac{a}{1-2a}\right)=\ln\left(\dfrac{1-a}{a}\right)-2(1-2a)$는 유일한 극값이고 극댓값.

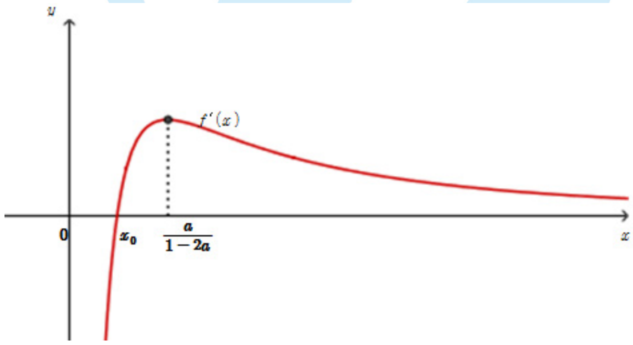
$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$ 이므로 $f'\left(\dfrac{a}{1-2a}\right)=\ln\left(\dfrac{1-a}{a}\right)-2(1-2a)>0$임은 분명하다.

$f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x+a}{x+1}-1-\ln x-\dfrac{a}{x}$에서

$g(t)=\ln t-at=t\left(\dfrac{\ln t}{t}-a\right)$ 를 생각하면

$\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=-\infty$ 이므로 $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=-\infty$

이므로 그래프 개형은 다음과 같다.



따라서 사이값 정리에 의해 구간 $\left(0,\dfrac{a}{1-2a}\right)$에 $f'(x_0)=0$되는 점 x_0가 존재한다. 이 점에서의 $f'(x)$의 부호는 $-$ 에서 $+$로 변하고 유일한 극값이므로 $x=x_0$에서 최솟값을 갖는다. 그러므로 $p(x)$는 $x=x_0$에서 최솟값을 가지고 $0<p(x_0)<e$.

(2) [풀이] $f'\left(\dfrac{a^2}{1-2a}\right)=\ln\left(1+\dfrac{1-2a}{a^2}\right)-\dfrac{\dfrac{a^2}{1-2a}+a}{\dfrac{a^2}{1-2a}\left(1+\dfrac{a^2}{1-2a}\right)}$

$= \ln\frac{(a-1)^2}{a^2} - (1-2a)\frac{a^2 + a(1-2a)}{a^2(a-1)^2} = 2\ln\frac{1-a}{a} - (1-2a)\frac{a(1-a)}{a^2(a-1)^2}$

$= 2\ln\frac{1-a}{a} - (1-2a)\frac{1}{a(1-a)}$ 이므로

$h(a) = 2\ln\frac{1-a}{a} - (1-2a)\frac{1}{a(1-a)}$ 라 두고 미분하면

$h'(a) = 2\left(\frac{-1}{1-a} - \frac{1}{a}\right) - \frac{-2a(1-a) - (1-2a)^2}{(a(1-a))^2} = 2\frac{-a-1+a}{a(1-a)} - \frac{-2a(1-a) - (1-2a)^2}{(a(1-a))^2}$

$= \frac{-2}{a(1-a)} - \frac{-2a^2 + 2a - 1}{(a(1-a))^2}$

$= \frac{-2a(1-a) + 2a^2 - 2a + 1}{(a(1-a))^2} = \frac{(2a-1)^2}{(a(1-a))^2} > 0$이고 $h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$이므로

모든 $a \left(0 < a < \frac{1}{2}\right)$에 대하여 $h(a) < 0$이고 $f'\left(\frac{a^2}{1-2a}\right) < 0.$

따라서 $\frac{a^2}{1-2a} < x_0$. 그러므로 $\frac{a^2}{1-2a} < x_0 < \frac{a}{1-2a}$.

[문제2-1] 대학발표 예시답안

(1) [풀이1] 제시문 (나)에 의해 $a_3 = a_2 p + b_2 q = (p^2 + q^2)p + (2pq)q = p^3 + 3pq^2$,
$b_3 = a_2 q + b_2 p = (p^2 + q^2)q + (2pq)p = 3p^2 q + q^3$

[풀이2] $E_1 \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_1$ 의 모든 가능한 경우는

$E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_1,\quad E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1,\quad E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1 \rightarrow E_1,\quad E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1$

네 가지이며 그 확률들의 합인 a_3은 $p^3 + 3pq^2$ 이다. 또한 $E_1 \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_2$ 의 모든 가능한 경우는

$E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2,\quad E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_2,\quad E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2,\quad E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_2 \rightarrow E_2$

네 가지이며 그 확률들의 합인 b_3은 $3p^2q + q^3$ 이다.

(2) [풀이1] 수학적 귀납법을 사용한다.
$a_1 = p = s = d_1,\ b_1 = q = r = c_1$
만일 $a_n = d_n, b_n = c_n$이라면
$a_{n+1} = a_n \cdot p + b_n \cdot q = d_n \cdot p + c_n \cdot q = c_n \cdot q + d_n \cdot p = d_{n+1}$

$b_{n+1} = a_n \cdot q + b_n \cdot p = d_n \cdot q + c_n \cdot p = c_n \cdot p + d_n \cdot q = c_{n+1}$

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = d_n$, $b_n = c_n$

[풀이2] 오늘 E_2로 시작하여 n일 후에 E_2가 되는 경우들은 오늘 E_1로 시작하여 n일 후에 E_1이 되는 경우들에서 E_1대신 E_2, E_2대신 E_1으로 바꾼 경우들과 같다 (1대1대응). 한편 이 문제에서 $E_1 \to E_1$의 확률과 $E_2 \to E_2$의 확률이 같고, $E_1 \to E_2$의 확률(q)과 $E_2 \to E_1$ ($r = q$)의 확률이 같기 때문에 a_n은 d_n과 같다. 같은 이유로 b_n과 c_n은 같다.

[문제2-2]

(1) [풀이1] a_n 이 나오는 경우는 다음과 같다.

$E_1 \to$(모두다 E_1)$\to E_1$ 한가지(${}_n\mathrm{C}_0$) 이며 각각 확률은 p^n 이므로 ${}_n\mathrm{C}_0\, p^n q^0$

$E_1 \to$($E_1 \to E_2$한번, $E_2 \to E_1$한번, 나머지는 전날과 같게 선택)$\to E_1$

${}_n\mathrm{C}_2$가지이며 각각의 확률은 $p^{n-2}q^2$이므로 ${}_n\mathrm{C}_2\, p^{n-2}q^2$ ($E_1 \to E_1$의 확률과 $E_2 \to E_2$의 확률이 같음에 유의)

$E_1 \to$($E_1 \to E_2$두번, $E_2 \to E_1$두번, 나머지는 전날과 같게 선택)$\to E_1$

${}_n\mathrm{C}_4$가지이며 각각의 확률은 $p^{n-4}q^4$이므로 ${}_n\mathrm{C}_4\, p^{n-4}q^4$ ($E_1 \to E_1$의 확률과 $E_2 \to E_2$의 확률이 같음에 유의)

(생략가능)

이렇게 확률을 구해가면 결국 a_n은 주어진 이항정리의 홀수 번째 항들의 합이다.

[풀이2] $a_{n+1} = a_n \cdot p + b_n \cdot q$에서 $b_n = \dfrac{a_{n+1} - pa_n}{q}$ 를 얻고

$b_{n+1} = a_n \cdot q + b_n \cdot p$에 대입하면

$\dfrac{a_{n+2} - pa_{n+1}}{q} = qa_n + p \cdot \dfrac{a_{n+1} - pa_n}{q}$ 정리하면

$a_{n+2} = 2pa_{n+1} + ((1-p)^2 - p^2)\, a_n = 2pa_{n+1} + (1-2p)\, a_n$

이제 $a_{n+2} - a_{n+1} = (2p-1)(a_{n+1} - a_n)$ 에서

$a_{n+2} - a_{n+1} = (2p-1)^n (a_2 - a_1) = (2p-1)^n (p^2 + (1-p)^2 - p) = -(1-p)(2p-1)^{n+1}$

그러므로 $a_n = a_{n-1} + (p-1)(2p-1)^{n-1}$

$= a_{n-2} + (p-1)(2p-1)^{n-2} + (p-1)(2p-1)^{n-1} = \cdots$

$= a_1 + (p-1)(2p-1)^1 + \cdots + (p-1)(2p-1)^{n-2} + (p-1)(2p-1)^{n-1}$

$= p + (p-1)(2p-1)\dfrac{1-(2p-1)^{n-1}}{1-(2p-1)} = p - \dfrac{2p-1}{2}(1-(2p-1)^{n-1})$

$= \dfrac{1+(2p-1)^n}{2} = \dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$

이제 $\dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2} = \dfrac{1}{2}\{ {}_nC_0\, p^n q^0 + {}_nC_1\, p^{n-1} q^1 + \cdots + {}_nC_{n-1} p^1 q^{n-1} + {}_nC_n\, p^0 q^n \; + $

${}_nC_0\, p^n (-q)^0 + {}_nC_1\, p^{n-1}(-q)^1 + \cdots + {}_nC_{n-1} p^1 (-q)^{n-1} + {}_nC_n\, p^0 (-q)^n \}$

에서 a_n은 ${}_nC_0\, p^n q^0 + {}_nC_1\, p^{n-1} q^1 + \cdots + {}_nC_{n-1} p^1 q^{n-1} + {}_nC_n\, p^0 q^n$의 홀수 번째 항들의 합과 같다.

(2) **[풀이]** 주어진 이항정리는 $(p+q)^n = 1$이고 $a_n + b_n = 1$이기 때문에 b_n은 이항정리의 짝수 번째 항들의 합과 같다. 홀수 번째 항들의 합은 $\dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2} = \dfrac{1+(p-q)^n}{2}$의 전개를 통해 얻을 수 있기 때문에 $a_n = \dfrac{1+(p-q)^n}{2}$이다.

$p-q = p-(1-p) = 2p-1$이고, $0 < p < 1$ 이므로 $-1 < 2p-1 < 1$ 따라서

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$이다. 짝수 번째 항들의 합은 $\dfrac{(p+q)^n - (p-q)^n}{2} = \dfrac{1-(p-q)^n}{2}$의 전개를 통해 얻을 수 있기 때문에 $b_n = \dfrac{1-(p-q)^n}{2}$이고 위와 비슷하게 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{1}{2}$이다.

($1 = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$을 이용하여 b_n의 극한값을 얻을 수도 있다.)

[문제2-3] 대학발표 예시답안

(1) **[풀이]** a_2. $E_1 \to \bigcirc \to E_1$ 의 확률인 a_2는 [표2]에 의하여

$p^2 + q = (1-q)^2 + q = 1 - q + q^2$이다.

b_2. $E_1 \to \bigcirc \to E_2$ 의 확률인 b_2는 [표2]에 의하여 $pq = (1-q)q = q - q^2$이 된다.

a_3. 비슷하게 $E_1 \to \bigcirc \to \bigcirc \to E_1$ 의 모든 가능한 경우는

$$E_1 \to E_1 \to E_1 \to E_1,\quad E_1 \to E_1 \to E_2 \to E_1,\quad E_1 \to E_2 \to E_1 \to E_1,\quad E_1 \to E_2 \to E_2 \to E_1$$

이며 그 확률들의 합인 a_3은

$p\cdot p\cdot p + p\cdot q\cdot 1 + q\cdot 1\cdot p + q\cdot 0\cdot 1 = p^3 + 2pq = (1-q)^3 + 2(1-q)q = 1 - q + q^2 - q^3$

b_3. 비슷하게 $E_1 \to \bigcirc \to \bigcirc \to E_2$ 의 모든 가능한 경우는

$$E_1 \to E_1 \to E_1 \to E_2,\quad E_1 \to E_1 \to E_2 \to E_2,\quad E_1 \to E_2 \to E_1 \to E_2,\quad E_1 \to E_2 \to E_2 \to E_2$$

이며 그 확률들의 합인 b_3은

$p\cdot p\cdot q + p\cdot q\cdot 0 + q\cdot 1\cdot q + q\cdot 0\cdot 0 = p^2 q + q^2 = (1-q)^2 q + q^2 = q - q^2 + q^3$

(2) **[풀이]** 위의 논제를 이어 계속 추론해가면

$$a_n = 1 + (-q) + (-q)^2 + \cdots + (-q)^n,\quad b_n = -\{(-q) + (-q)^2 + \cdots + (-q)^n\}$$

이 됨을 추측할 수 있다.

(참고) [문제 2-2]의 풀이와 비슷하게 추론해갈 경우

$$a_n = {}_{n}\mathrm{C}_0\, p^n + {}_{n-1}\mathrm{C}_1\, p^{n-2} q^1 + {}_{n-2}\mathrm{C}_2\, p^{n-4} q^2 + \cdots,$$

$$b_n = {}_{n-1}\mathrm{C}_0\, p^{n-1} q + {}_{n-2}\mathrm{C}_1\, p^{n-3} q^2 + \cdots$$

까지는 얻을 수 있지만 q의 오름차순 전개가 매우 어렵다.

(3) **[풀이]** 등비급수의 공식에 의하여 $a_n = \dfrac{1-(-q)^{n+1}}{1+q}$, $b_n = -\dfrac{(-q)(1-(-q)^n)}{1+q}$이 되고 그 극한 값들은 각각 $\dfrac{1}{1+q}$, $\dfrac{q}{1+q}$이다.

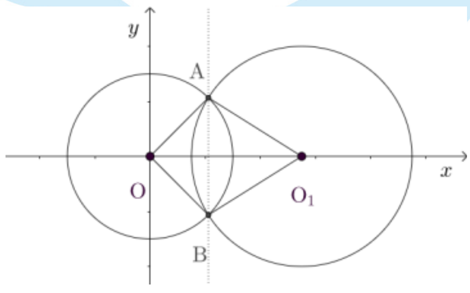
26 아주대학교 자연논술(오후)[22]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생의 경우 해결할 수 있는 수준의 다양한 수학적 주제를 다룸(학생부 40%+논술60%, 일괄반영)	없음	수학 (2문항, 문항별 세부문제 3문제 내외 출제)	120분

[문항1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 이차곡선을 원뿔곡선이라고 부르는 것은 그리스 시대 수학자들의 연구와 관련이 있다. 'Ellipse', 'Parabola', 'Hyperbola' 는 각각 그리스어 '모자라다','적당하다','초과하다'는 뜻을 가지고 있으며 원뿔의 단면과 밑면이 이루는 각과 모서리와 밑면이 이루는 각 사이의 관계와 관련이 있다. 이런 이차곡선은 산업현장에서 다양하게 사용되고 있으며 **이차곡선들의 교점과 관련된 문제**는 수학 이외의 분야에서 자주 나타나고 있다.

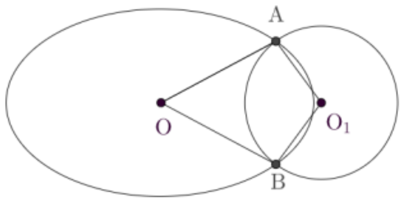
(나) 원 $x^2+y^2=r_1^2$과 원 $(x-d)^2+y^2=r_2^2$이 그림과 같이 만나고 있다. (단, $r_1^2+r_2^2 \le d^2$)



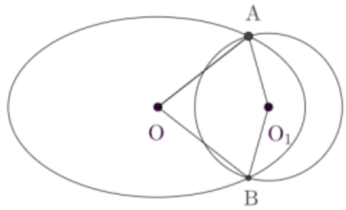
[그림 1]

(다) 타원과 원의 교점이 2개인 경우, [그림 2]처럼 교점 두 개와 원의 중심 O_1을 잇는 두 선분(선분 AO_1와 BO_1)이 각각 타원과 두 점에서 만나거나 [그림 3]처럼 교점 두 개와 점 O를 잇는 두 선분(선분 AO와 BO)이 각각 원과 두 점에서 만날 수도 있다.

22) 아주대학교 홈페이지



[그림 2]



[그림 3]

[문제 1-1] 제시문 (나)에서 두 원의 교점을 A, B라 하자.

(1) (8점) 점 A와 점 B의 좌표를 구하시오.

(2) (8점) $\theta_1 = \angle \mathrm{AOB}$, $\theta_2 = \angle \mathrm{AO_1B}$라 할 때 두 원에 의하여 동시에 둘러싸인 영역의 넓이를 θ_1과 θ_2로 나타내시오.

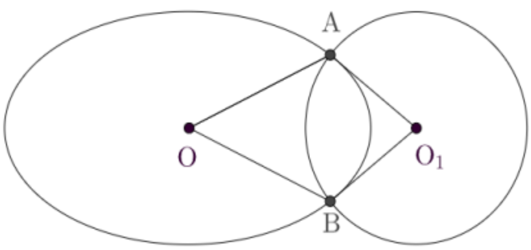
[문제 1-2] 타원 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$과 원 $(x-d)^2 + y^2 = 1$ $(d \geq 0)$의 교점의 개수를 d에 따라 구하면 다음과 같다.

	$d = 0$	$0 < d < 1$	$d = 1$	$1 < d < 3$	$d = 3$	$d > 3$
교점의 개수	2	e	3	f	1	0
수학적 근거		(g)		(h)		

(1) (12점) 위 표에서 값 e와 값 f를 구하고, (g)와 (h)의 자리에 들어갈 수학적 근거를 제시하시오.

(2) (8점) 타원 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$과 원 $(x-\sqrt{6})^2 + y^2 = 1$에 의해 동시에 둘러싸인 영역의 넓이를 정적분으로 표현하시오.

[문제 1-3] (14점) 타원 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$과 원 $(x-d)^2 + y^2 = 1$ $(d \geq 0)$이 있을 때, 제시문 (다)에서 나타나는 경우와는 다르게 사각형 $\mathrm{OAO_1B}$가 **'타원과 원에 의하여 동시에 둘러싸인 영역'**을 포함하도록 하는 값 d의 범위를 구하시오.



[문항2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 아래의 수직선 위의 구간 $[0,1], [1,2], \ldots, [2^n-1, 2^n]$ (n은 자연수)위에 한 변의 길이 1인 2^n개의 정사각형을 나누어 쌓으려고 한다.

쌓고 난 결과에 대하여 다음과 같이 D를 정의할 수 있다.

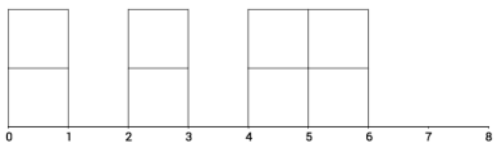
$$D = -\sum_{k=1}^{2^n} \frac{x_k}{2^n} \log_2 \frac{x_k}{2^n}.$$

(단, x_k는 구간 $[k-1,k]$에 쌓인 정사각형의 개수이고, $\frac{0}{2^n} \cdot \log_2 \frac{0}{2^n} = 0$으로 정의하자.)

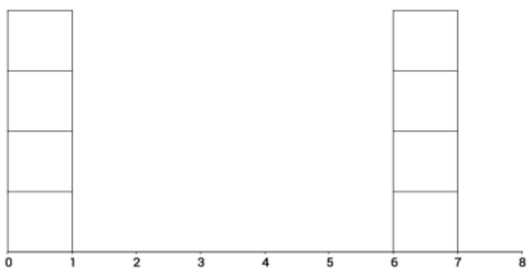
이 때 $\frac{x_k}{2^n}$의 값은 음이 아닌 실수들이며 합이 1이다.

다음은 $n=3$일 때의 몇 가지 쌓은 결과들에 대한 D의 값이다.

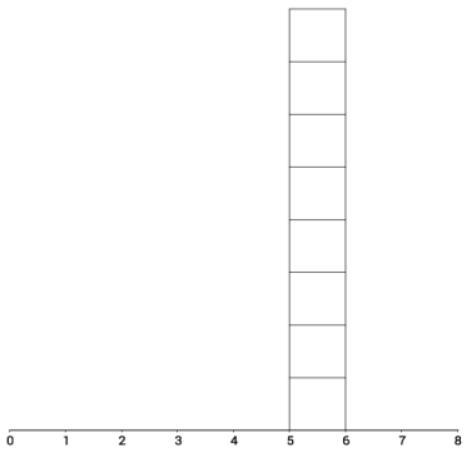
$D=3$



$D=2$



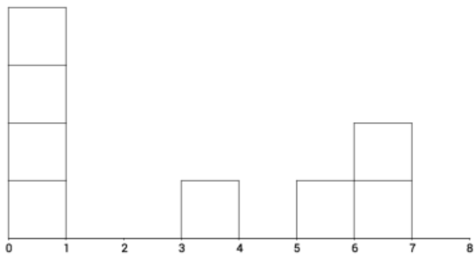
$D=1$

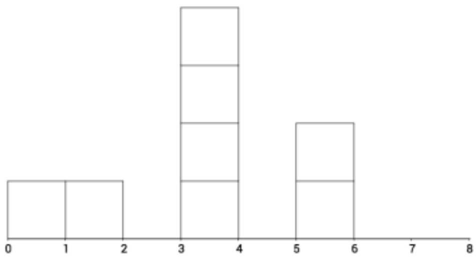


$D=0$

위 예를 보면 알 수 있듯이 정사각형을 고르게 쌓을수록 D의 값이 커짐을 확인할 수 있다. 이런 D는 정보전달과 관련된 수학 이론에 널리 사용되고 있다.

D의 값은 8개의 정사각형들을 몇 곳에 얼마씩 나누어 쌓을 것인가에만 의존하며, 쌓는 구체적인 위치에는 의존하지 않는다. 예를 들어 다음의 두 쌓은 결과는 같은 D의 값을 가진다.





(나) 함수 $f(x)$가 구간 $[0,a]$에서 정의된 연속함수이고, 이 구간에서 $0<f(x)<1$을 만족하며 $\int_0^a f(x)dx=1$이라고 하자. 이 때 함수 $f(x)$의 '고른 정도'를 나타내는 양을 제시문 (가)와 유사하게 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$D=-\int_0^a f(x)\ln f(x)\,dx\ .$$

[문제 2-1] 제시문 (가)에서 $n=3$인 경우 $2^3=8$개의 정사각형을 구간 $[0,1]$, $[1,2]$, … , $[7,8]$에 나누어 쌓게 된다.

(1) (7점) 구간 별 정사각형의 개수 x_k값이 0, 1, 2, 4, 8 중 하나인 쌓기 방법 중에 $D=2$가 되는 경우를 모두 찾아 표현하시오. 다만 쌓기 방법의 표현은 크기가 큰 순서대로 다음과 같이 나열하시오.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$$

(2) (7점) 구간 별 정사각형의 개수 x_k값이 0, 1, 2중 하나일 때 가능한 모든 D의 값의 개수를 구하시오.

[문제 2-2] 제시문 (가)에서 구간 $[0,1]$에 2^{n-1}개, 구간 $[1,2]$에 2^{n-2}개, $\cdots$,구간 $[n-1,n]$에 1개, 구간 $[n,n+1]$에 마지막 1개를 쌓는 경우를 생각하자.

(1) (9점) 이때 D의 값을 구하시오.

(2) (9점) n이 무한대로 갈 때 D의 극한값을 구하시오.

(힌트: $\dfrac{2k}{2^{k+1}}=\dfrac{k+1}{2^{k+1}}+\dfrac{1}{4}\dfrac{k-1}{2^{k-1}}$)

[문제 2-3] 제시문 (나)를 읽고 다음 논제에 답하시오.

(1) (9점) 자연수 n에 대하여 구간 $[0,n]$에 정의된 함수 $f(x)=ce^{-\frac{x}{n}}$의 정적분 값이 1이 되는 상수 c를 찾으시오.

(2) (9점) 위의 함수에 대하여 D의 값을 구하고, n이 무한대로 갈 때 D의 극한값을 구하시오.

풀어보기

문제1

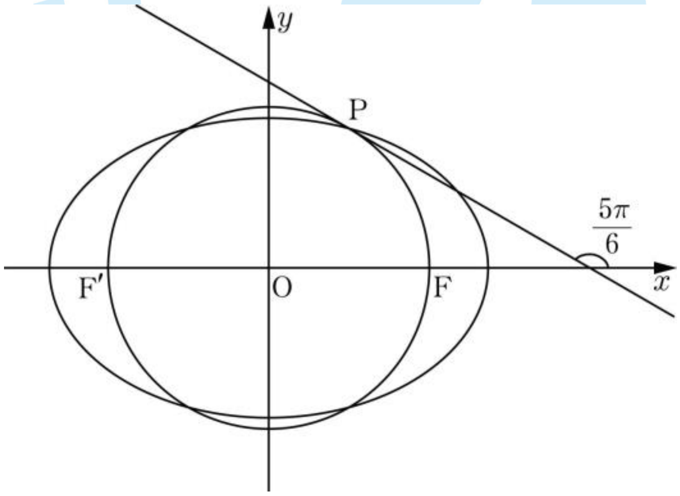
두 초점이 F,F′이고, 장축의 길이가 10, 단축의 길이가 6인 타원이 있다. 중심이 F이고 점 F′을 지나는 원과 이 타원의 두 교점 중 한 점을 P라 하자. 삼각형 PFF′의 넓이는? (2011. 9월 평가원)

① $2\sqrt{10}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{6}$ ④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $\sqrt{70}$

문제2

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 F(6, 0), F′(−6, 0)에 대하여 선분 F′F를 지름으로 하는 원이 있다. 타원과 원의 교점 중 제 1사분면에 있는 점을 P라 하자. 원 위의 점 P에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\dfrac{5}{6}\pi$일 때, 타원의 장축의 길이는? (단, a, b는 $0<\sqrt{2}b<a$인 상수이다.) (2016년 9월 전국연합)

① $5+6\sqrt{3}$ ② $6+6\sqrt{3}$ ③ $7+6\sqrt{3}$ ④ $6+7\sqrt{3}$ ⑤ $7+7\sqrt{3}$



문제3

함수 $f(x)=e^x-1$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2012. 4월 전국연합)

< 보 기 >

ㄱ. $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = e-2$

ㄴ. $x>0$에서 $f(x)>x$이다.

ㄷ. $\displaystyle\frac{5(e^5-1)}{2} < \int_0^{e^5-1} f^{-1}(x)dx < \frac{(e^5-1)^2}{2}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예시답안

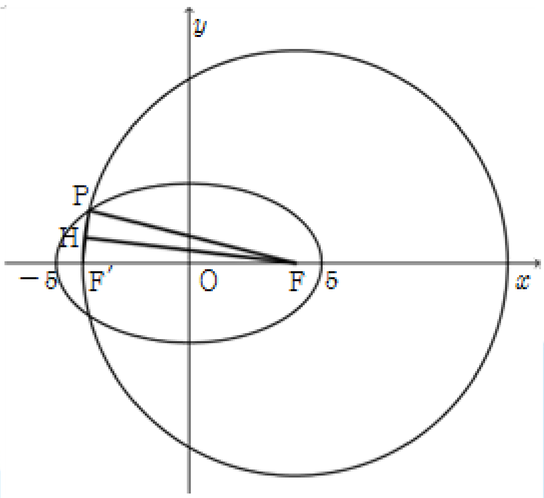
풀어보기(문제1)

조건을 만족하는 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$라 하면, $2a=10$, $2b=6$

$\therefore$ $a=5$, $b=3$

따라서, 두 초점 F,F′의 좌표를 각각 $(c,0)$, $(-c,0)$ $(c>0)$라 하면

$c^2=5^2-3^2=4^2$이다. 즉, $\mathrm{F}(4,0)$, $\mathrm{F'}(-4,0)$이다.



이때, $\overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{FP}}=8$, $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=10$이므로 $\overline{\mathrm{F'P}}=2$이고,

점 F에서 선분 PF′에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{FH}}=\sqrt{8^2-1^2}=3\sqrt{7}$이다.

따라서 구하고자 하는 삼각형 PFF′의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times2\times3\sqrt{7}=3\sqrt{7}$이므로 정답은 ④.

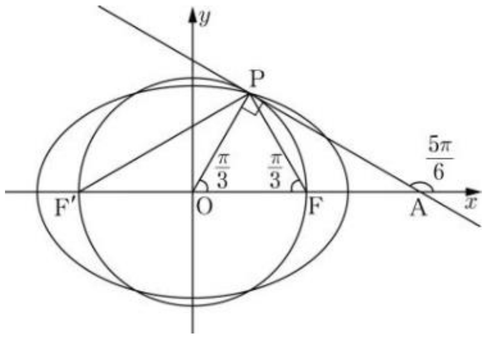
풀어보기(문제2)

접선이 x축과 만나는 점을 A라 하면 $\angle\mathrm{OAP}=\dfrac{\pi}{6}$이고, 직선 OP는 접선과 수직이므로

$\angle\mathrm{POF}=\dfrac{\pi}{3}$이다.

삼각형 POF는 정삼각형이므로 $\angle\mathrm{PFO}=\dfrac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{PF}}=6$이고 선분 F′F는 지름이므로,

직각삼각형 FPF′에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}\times\tan\dfrac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$



따라서 두 점 F, F′은 타원의 초점이고 타원의 정의에 의해 장축의 길이는 $\overline{PF}+\overline{PF'}=6+6\sqrt{3}$ 이므로 정답은 ②.

풀어보기(문제3)

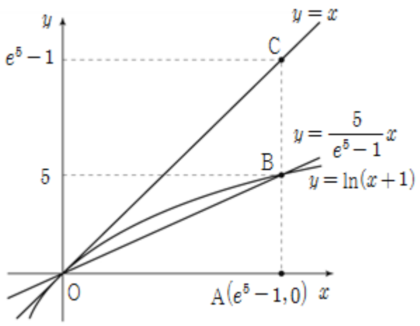
ㄱ. $\int_0^1 f(x)dx = [e^x - x]_0^1 = e-2$ (참)

ㄴ. $g(x)=f(x)-x$ 라 하자. $x>0$에서 $g'(x)=e^x-1>0$이므로 함수 $g(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 증가한다. 따라서 $g(0)=0$이므로 $x>0$에서 $f(x)>x$이다. (참)

ㄷ. $f^{-1}(x)=\ln(x+1)$ 이므로

$\triangle$OAB의 넓이$=\dfrac{5(e^5-1)}{2}<\displaystyle\int_0^{e^5-1} f^{-1}(x)dx$,

$\displaystyle\int_0^{e^5-1} f^{-1}(x)dx < \dfrac{(e^5-1)^2}{2} =$ $\triangle$OAC의 넓이 (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이므로 정답은 ⑤.

[문제 1-1] 대학발표 예시답안

(1) 식 $x^2+y^2=r_1^2$와 식 $(x-d)^2+y^2=r_2^2$을 연립하면

$y^2=r_1^2-x^2=r_2^2-(x-d)^2$에서 $-2dx+d^2=(x-d)^2-x^2=r_2^2-r_1^2$이다.

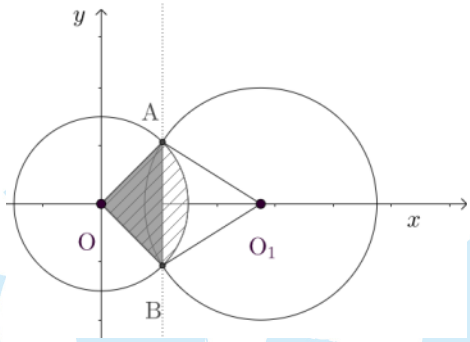
따라서 $x=\dfrac{d^2+r_1^2-r_2^2}{2d}$

이제 $y = \pm\sqrt{r_1^2 - (\frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d})^2}$

$= \pm \frac{\sqrt{2r_1^2 d^2 + 2r_1^2 r_2^2 + 2r_2^2 d^2 - r_1^4 - r_2^4 - d^4}}{2d}$

따라서 $A\left(\frac{d^2+r_1^2-r_2^2}{2d},\ \sqrt{r_1^2-\left(\frac{d^2+r_1^2-r_2^2}{2d}\right)^2}\right)$, $B\left(\frac{d^2+r_1^2-r_2^2}{2d},\ -\sqrt{r_1^2-\left(\frac{d^2+r_1^2-r_2^2}{2d}\right)^2}\right)$이다.

(2) 빗금친 부분의 넓이는 부채꼴 ABO 의 넓이에서 삼각형 ABO 의 넓이를 빼면 되므로



$\frac{1}{2}r_1^2\theta_1 - \frac{1}{2}r_1^2\sin\theta_1 = \frac{1}{2}r_1^2(\theta_1 - \sin\theta_1)$

같은 방법으로 반대쪽 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}r_2^2(\theta_2 - \sin\theta_2)$

따라서 구하는 넓이는 $\frac{1}{2}r_1^2(\theta_1 - \sin\theta_1) + \frac{1}{2}r_2^2(\theta_2 - \sin\theta_2)$

또는 만약 $r_1^2 + r_2^2 = d^2$이면 $\theta_1 + \theta_2 = \pi$이므로

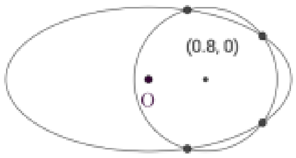
$\frac{1}{2}r_1^2(\theta_1 - \sin\theta_1) + \frac{1}{2}r_2^2(\pi - \theta_1 - \sin\theta_1)$ 등 다양한 답의 꼴이 나올 수 있다.

[문제 1-2] 대학발표 예시답안

(1) 두 식 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$과 $(x-d)^2 + y^2 = 1$을 연립하면, $\frac{x^2}{4} = 1-y^2 = (x-d)^2$이므로 $\pm\frac{x}{2} = x-d$. 따라서 $x = 2d$일 때 $y = \sqrt{1-d^2}$ 과 $x = \frac{2}{3}d$일 때 $y = \sqrt{1-\frac{d^2}{9}}$ 가 교점이 될 수 있다.

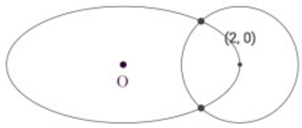
$0 < d < 1$일 때 ;

$x = 2d$와 $x = \frac{2}{3}d$ 둘 다 근이 될 수 있으므로 교점의 개수는 4개. ($e = 4$)

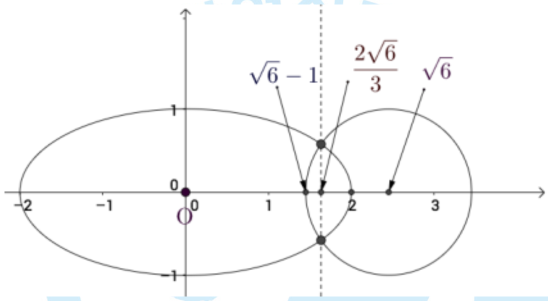


$1 < d < 3$일 때 ;

$x = \frac{2}{3}d$만 근이 될 수 있고 교점의 개수는 2개. ($f = 2$)



(2) 식 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$와 식 $(x-\sqrt{6})^2 + y^2 = 1$을 연립하면 두 점 $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$을 얻는다.



따라서 영역의 넓이는 $2\int_{\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx + 2\int_{\sqrt{6}-1}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}}\sqrt{1-(x-\sqrt{6})^2}\,dx$로 표현할 수 있다.

[문제1-3] 대학발표 예시답안

두 식 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$과 $(x-d)^2 + y^2 = 1$을 연립하면, $\frac{x^2}{4} = 1-y^2 = (x-d)^2$이므로 $\pm\frac{x}{2} = x-d$. 따라서 $x = 2d$일 때 $y = \sqrt{1-d^2}$ 과 $x = \frac{2}{3}d$일 때 $y = \sqrt{1-\frac{d^2}{9}}$ 이 교점이 될 수 있다.

그리고 교점이 2개인 경우는 $1 < d < 3$일 때 이므로 A와 B의 x좌표는 $\frac{2}{3}d$이다.

(i) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$의 점 $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3}d, \sqrt{1-\frac{d^2}{9}}\right)$에서의 접선의 방정식은,

$\frac{2d}{3} \cdot \frac{x}{4} + \sqrt{1-\frac{d^2}{9}} \cdot y = 1$에서 $y = -\frac{d}{6\sqrt{1-d^2/9}}x + \frac{1}{\sqrt{1-d^2/9}}$이다.

이 식에서 $x = d$일 때 y는 양이 아닌 실수이어야 하므로 $y = \frac{-d^2+6}{6\sqrt{1-d^2/9}} \le 0$

즉, $d \ge \sqrt{6}$이다.

(ii) $(x-d)^2+y^2=1$의 점 $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3}d,\ \sqrt{1-\frac{d^2}{9}}\right)$ 에서의 접선의 방정식은,

$\left(\frac{2}{3}d-d\right)(x-d)+\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}\,y=1$에서 $y=\dfrac{\frac{d}{3}(x-d)}{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$ 이다.

이 식에서 $x=0$일 때 y는 양이 아닌 실수이어야 하므로 $y=\dfrac{-d^2+3}{3\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}\le 0$

즉, $d\ge\sqrt{3}$
그러므로, (i), (ii)를 동시에 만족하는 영역은 $\sqrt{6}\le d<3$이다.

(참고) $d=\sqrt{6}$일 때 $\mathrm{AO_1}$은 타원의 접선이지만 AO는 원의 접선이 아니다.

[별해] 기울기를 비교할 수도 있다.

(i) 선분 OA의 기울기는 $\dfrac{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}{\frac{2d}{3}}$ 이고

점 $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3}d,\ \sqrt{1-\frac{d^2}{9}}\right)$에서의 $(x-d)^2+y^2=1$의 접선의 기울기는 $\dfrac{\frac{d}{3}}{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$ 이다.

그림과 같이 나타나려면 $\dfrac{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}{\frac{2d}{3}}\le\dfrac{\frac{d}{3}}{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$

이제 $1-\frac{d^2}{9}\le\frac{2d^2}{9}$ 이므로 $d\ge\sqrt{3}$

(ii) 선분 $\mathrm{O_1A}$의 기울기는 $\dfrac{0-\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}{d-\frac{2d}{3}}$ 이고

점 $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3}d,\ \sqrt{1-\frac{d^2}{9}}\right)$ 에서의 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 접선의 기울기는 $\dfrac{-d}{6\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$ 이다.

그림과 같이 나타나려면 $-\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{d^2}{9}}}{\dfrac{d}{3}} \geq \dfrac{-d}{6\sqrt{1-\dfrac{d^2}{9}}}$

이제 $6\left(1-\dfrac{d^2}{9}\right) \leq \dfrac{d^2}{3}$ 이므로 $d \geq \sqrt{6}$

그러므로 (i), (ii)를 동시에 만족하는 영역은 $\sqrt{6} \leq d < 3$이다.

[문제2-1] 대학발표 예시답안

(1) (2,2,2,2,0,0,0,0), (4,1,1,1,1,0,0,0) 두 가지(뿐) 이다.

(2) 이 경우 쌓기 방법들을 위 문제의 표현 방법으로 찾으면
(1,1,1,1,1,1,1,1), (2,1,1,1,1,1,1,0), (2,2,1,1,1,1,0,0),
(2,2,2,1,1,0,0,0), (2,2,2,2,0,0,0,0)이며
각각의 경우 D의 값은 $3, \dfrac{11}{4}, \dfrac{5}{2}, \dfrac{9}{4}, 2$가 되어 다섯 개이다.

[문제2-2]

(1) 정의에 의하여 D의 값은 $-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{n-k}}{2^n}\log_2\frac{2^{n-k}}{2^n} - \frac{1}{2^n}\log_2\frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}+\frac{n}{2^n}$ 이다.

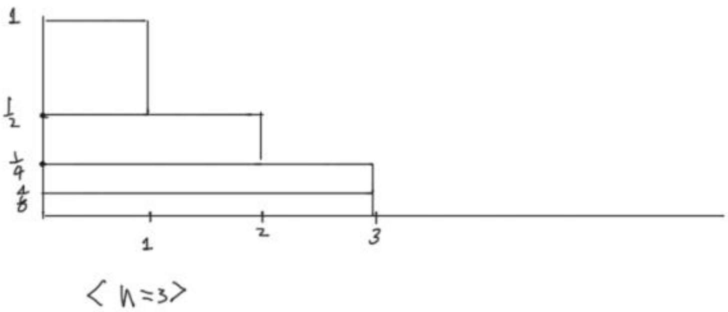
(2) n이 무한대로 갈 때 $\dfrac{n}{2^n}$은 0으로 간다. 또한 힌트를 이용하면

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{2^{k+1}}+\frac{1}{4}\frac{k-1}{2^{k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2^{k+1}}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{2^{k-1}}$$

을 관찰 할 수 있고, 구하고자 하는 극한 값을 S라고 하면 위식의 양변에서 n이 무한대로 보내면 $S=S-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}S$를 얻게 되어 $S=2$이다.

[별해] 아래 예와 같이 영역들의 넓이가 $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{2^2}, \dfrac{3}{2^3}, \cdots, \dfrac{n}{2^n}, \dfrac{n}{2^n}$인 사각형들을 위에서 아래로 순차적으로 쌓으면 전체 넓이가 각 구간 $[0,1], \cdots, [n-1,n]$ 위의 영역들의 합과 같고, $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}$이 되어 급수의 값은 $\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}=2\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$이 된다.

그러므로 극한값은 2이다.



[문제2-3] 대학발표 예시답안

(1) 각 n에 대하여 $f(x)$를 구간 $[0,n]$에서 정적분을 하면,

$$\int_0^n f(x)dx = \int_0^n c\,e^{-\frac{x}{n}}\,dx = \left[-cne^{-\frac{x}{n}}\right]_0^n = cn(1-e^{-1})$$ 이 된다.

그러므로 $c = \dfrac{1}{n(1-e^{-1})} = \dfrac{e}{n(e-1)}$ 이다.

(2) $n=1$인 경우 $f(x) = \dfrac{1}{1-e^{-1}}e^{-x} = \dfrac{e}{e-1}e^{-x}$ 이고 구간 $[0,1]$의 모든 x에 대하여 $0<f(x)<1$을 만족하지는 않으므로 제시문 (나)에 정의된 D값의 계산에서 제외된다.

$n \geq 2$인 경우 $f(x) = \dfrac{e}{n(e-1)}e^{-\frac{x}{n}}$ 이고,

$$D = -\int_0^n f(x)\ln f(x)\,dx$$

$$= -\frac{e}{n(e-1)}\int_0^n e^{-\frac{x}{n}}\left(\ln\frac{e}{n(e-1)} - \frac{x}{n}\right)dx$$

$$= -\frac{e}{n(e-1)}\ln\frac{e}{n(e-1)}\int_0^n e^{-\frac{x}{n}}\,dx + \frac{e}{n(e-1)}\int_0^n e^{-\frac{x}{n}}\frac{x}{n}dx$$

이 된다.

$\dfrac{x}{n}$를 y로 치환하여 식을 정리하면,

$$\frac{e}{e-1}\left[(\ln n - 1 + \ln(e-1))\int_0^1 e^{-y}dy + \int_0^1 e^{-y}y\,dy\right]$$ 이 되고,

치환적분법과 부분적분법을 이용하여 정적분값을 구하면,

$D = \ln n - 1 + \ln(e-1) + \dfrac{e-2}{e-1}$ 이다.

그러므로, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\ln n - 1 + \ln(e-1) + \frac{e-2}{e-1}\right)$은 존재하지 않는다. (무한대로 발산)

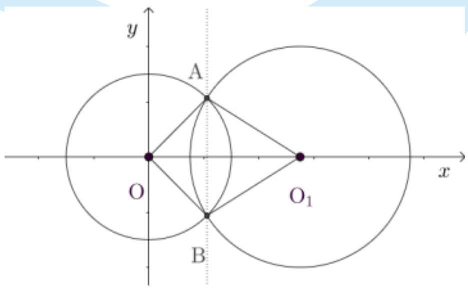
27 아주대학교 의학과 논술23)

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생의 경우 해결할 수 있는 수준의 다양한 수학적 주제를 다룸(학생부 40%+논술60%, 일괄반영)	국어, 수학(가), 영어, 탐구(과탐) 중 3과목 1등급 이내	수학, 생명과학 (각1문항, 문항별 세부문제 출제)	과학논술 (생명과학)포함 120분

[문항1] <50점> 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 이차곡선을 원뿔곡선이라고 부르는 것은 그리스 시대 수학자들의 연구와 관련이 있다. 'Ellipse', 'Parabola', 'Hyperbola' 는 각각 그리스어 '모자라다','적당하다','초과하다'는 뜻을 가지고 있으며 원뿔의 단면과 밑면이 이루는 각과 모서리와 밑면이 이루는 각 사이의 관계와 관련이 있다. 이런 이차곡선은 산업현장에서 다양하게 사용되고 있으며 **이차곡선들의 교점과 관련된 문제**는 수학 이외의 분야에서 자주 나타나고 있다.

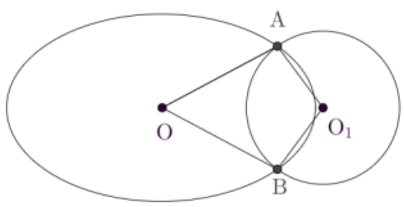
(나) 원 $x^2+y^2=r_1^2$과 원 $(x-d)^2+y^2=r_2^2$이 그림과 같이 만나고 있다. (단, $r_1^2+r_2^2 \le d^2$)



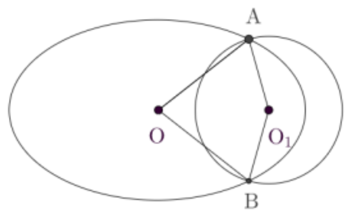
[그림 1]

(다) 타원과 원의 교점이 2개인 경우, [그림 2]처럼 교점 두 개와 원의 중심 O_1을 잇는 두 선분(선분 AO_1와 BO_1)이 각각 타원과 두 점에서 만나거나 [그림 3]처럼 교점 두 개와 점 O를 잇는 두 선분(선분 AO와 BO)이 각각 원과 두 점에서 만날 수도 있다.

23) 아주대학교 홈페이지



[그림 2]



[그림 3]

[문제 1-1] (7점) 제시문 (나)에서 두 원의 교점을 A, B라 하고, $\theta_1 = \angle AOB$, $\theta_2 = \angle AO_1B$라 할 때 두 원에 의하여 동시에 둘러싸인 영역의 넓이를 θ_1과 θ_2로 나타내시오.

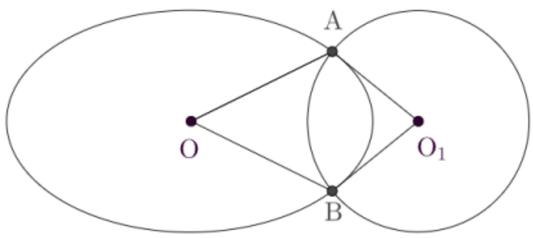
[문제 1-2] 제시문 (다)를 읽고 다음 논제에 답하시오.

(1) (12점) 타원 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$과 원 $(x-d)^2 + y^2 = 1$의 교점의 개수를 d에 따라 구하고 그 근거를 보이시오. (단, $d \geq 0$)

(2) (9점) 타원 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$과 원 $(x-d)^2 + y^2 = 3^2$의 교점의 개수를 d에 따라 구하시오. (단, $d \geq 0$)

[문제 1-3] 타원 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$과 원 $(x-d)^2 + y^2 = 1$을 생각하자.

(1) (12점) 제시문 (다)에서 나타나는 경우와는 다르게 사각형 OAO_1B가 **'타원과 원에 의해 동시에 둘러싸인 영역'**을 포함하도록 하는 값 d의 범위를 구하시오.

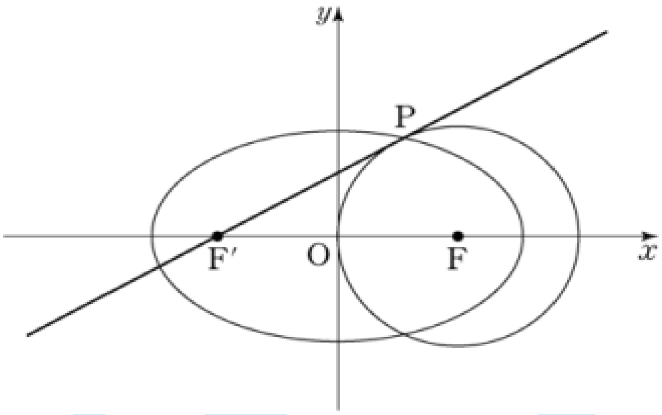


(2) (10점) 위에서 구한 d의 값 중 가장 작은 값에 대하여, 타원과 원에 의하여 동시에 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오. (단, 필요하면 $\theta_1 = \angle AOB$과 $\theta_2 = \angle AO_1B$를 사용하여 넓이를 표시할 수 있다.)

풀어보기

문제1

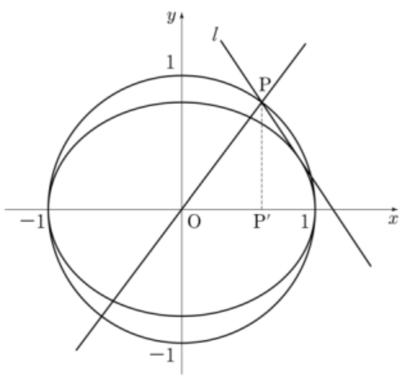
그림과 같이 두 점 F$(c,\ 0)$, F$'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 4인 타원이 있다. 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 c 인 원이 타원과 점 P에서 만난다. 점 P에서 원에 접하는 직선의 점 F$'$ 을 지날 때, c 의 값은? (2015. 6월 모평 B형)



① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{10}-\sqrt{3}$　③ $\sqrt{6}-1$
④ $2\sqrt{3}-2$　⑤ $\sqrt{14}-\sqrt{5}$

문제2

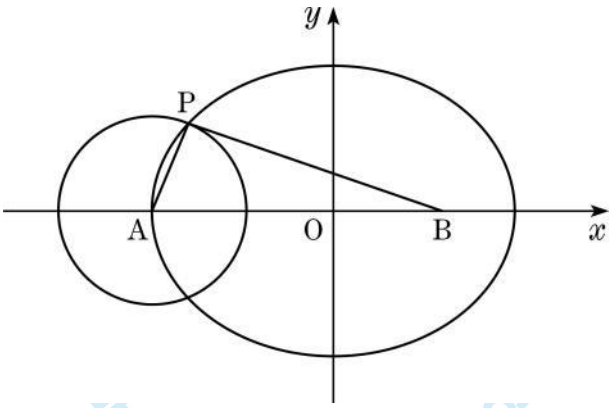
그림과 같이 좌표평면에서 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 P$'$이라 하자. 점 P$'$을 초점으로 하고, x축 위에 있는 원의 지름을 장축으로 하는 타원에 대하여 점 P에서 타원에 그은 접선 l의 기울기가 $-\dfrac{3}{2}$ 일 때, 직선 OP의 기울기는? (2014. 수능 예비시행)



① $\dfrac{7}{6}$　② $\dfrac{5}{4}$　③ $\dfrac{4}{3}$　④ $\dfrac{17}{12}$　⑤ $\dfrac{3}{2}$

문제3

그림과 같이 점 A$(-5,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원과 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 한 교점을 P라 하자. 점 B$(3,\ 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=10$일 때, $10r$의 값을 구하시오.(2013년 10월 전국연합)



예시답안

풀어보기(문제1)

이때, $\overline{PF}=\overline{OF}=c$, $\overline{PF}\perp\overline{PF'}$이므로 $\overline{FF'}=2c$, $\overline{PF'}=\sqrt{3}c$

$\overline{PF}+\overline{PF'}=4$이므로 $c+\sqrt{3}c=4$

$(1+\sqrt{3})c=4$, $c=\dfrac{4}{1+\sqrt{3}}=2(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3}-2$

이므로 정답은 ④이다.

풀어보기(문제2)

$P'(c, 0)$, 단축의 길이를 $2b$ 라 하면

타원은 $x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(1^2-b^2=c^2)$ 의 기울기 $m=-\dfrac{3}{2}$인 접선 l 은 $y=-\dfrac{3}{2}x\pm\sqrt{\dfrac{9}{4}+b^2}$

그림과 같은 제 1 사분면을 지나는 l 위의 점 $P\left(c, \sqrt{1-c^2}\right)$ $(0<c<1)$를 대입하면

$\sqrt{1-c^2}=-\dfrac{3}{2}c+\sqrt{\dfrac{9}{4}+1-c^2}$ $(\because 1^2-c^2=b^2)$.

$\sqrt{1-c^2}+\dfrac{3}{2}c=\sqrt{\dfrac{13}{4}-c^2}$ 을 양변 제곱하여 정리한 $3(1-c^2)=4c\sqrt{1-c^2}$ 을 다시 양변을 제곱하여 정리하면

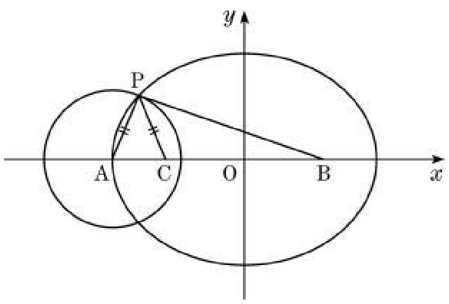
$25c^4-34c^2+9=0$, $(25c^2-9)(c^2-1)=0$

$\therefore$ $c=\pm\dfrac{3}{5}$ 또는 $c=\pm1$

$0<c<1$ 이므로 $c=\dfrac{3}{5}$, $P\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$

$\therefore$ $\overline{OP}$ 의 기울기는 $\dfrac{4}{3}$이므로 정답은 ③이다.

풀어보기(문제3)



타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$의 두 초점의 좌표를 각각 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ (단, $c>0$)이라 하면

$c^2=25-16=9$에서 $c=3$

따라서 점 B는 타원의 한 초점이고 다른 한 초점은 C$(-3,\ 0)$이다.
$\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}=10$이고, $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=10$이므로 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}}$. 타원의 장축의 길이는 10이므로 점 A의 좌표는 $(-5, 0)$이다. 즉, 삼각형 PAC는 이등변삼각형이므로 점 P의 x좌표는 -4이다.

$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$에서 $y^2=16\left\{1-\dfrac{(-4)^2}{25}\right\}$

$y=\dfrac{12}{5}$ 또는 $y=-\dfrac{12}{5}$

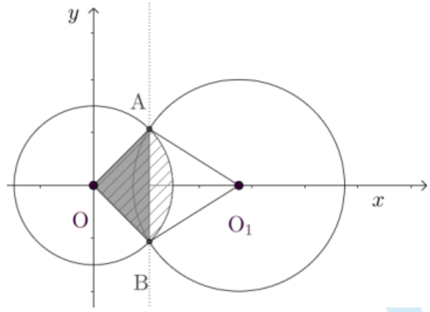
$\mathrm{P}\left(-4,\ \dfrac{12}{5}\right)$ 또는 $\mathrm{P}\left(-4,\ -\dfrac{12}{5}\right)$이므로

$r=\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{(-5+4)^2+\left(0-\dfrac{12}{5}\right)^2}=\dfrac{13}{5}$

$\therefore\ 10r=26$이다.

[문제 1-1] 대학발표 예시답안

빗금친 부분의 넓이는 부채꼴 ABO의 넓이에서 삼각형 ABO의 넓이를 빼면 되므로



$\dfrac{1}{2}r_1^2\theta_1-\dfrac{1}{2}r_1^2\sin\theta_1=\dfrac{1}{2}r_1^2(\theta_1-\sin\theta_1)$

비슷하게 반대쪽 부분의 넓이는 $\dfrac{1}{2}r_2^2(\theta_2-\sin\theta_2)$

따라서 구하는 넓이는 $\dfrac{1}{2}r_1^2(\theta_1-\sin\theta_1)+\dfrac{1}{2}r_2^2(\theta_2-\sin\theta_2)$

또는 만약 $r_1^2+r_2^2=d^2$이면 $\theta_1+\theta_2=\pi$이므로

$\dfrac{1}{2}r_1^2(\theta_1-\sin\theta_1)+\dfrac{1}{2}r_2^2(\pi-\theta_1-\sin\theta_1)$ 등 다양한 답의 꼴이 나올 수도 있다.

[문제 1-2] 대학발표 예시답안

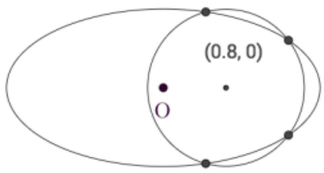
(1) 두 식 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$과 $(x-d)^2+y^2=1$을 연립하면

$\dfrac{x^2}{4}=1-y^2=(x-d)^2$이므로 $\pm\dfrac{x}{2}=x-d$. 따라서 $x=2d$일 때 $y=\sqrt{1-d^2}$ 과

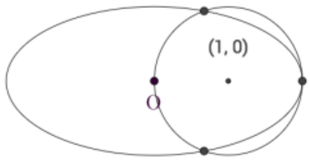
$x = \frac{2}{3}d$일 때 $y = \sqrt{1-\frac{d^2}{9}}$ 가 교점이 될 수 있다.

① $d = 0$ 일 때 두 근이 일치하므로 중근이고 교점의 개수는 2

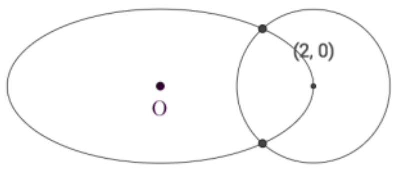
② $0 < d < 1$일 때 $x = 2d$와 $x = \frac{2}{3}d$ 둘 다 근이 될 수 있고 교점의 개수는 4



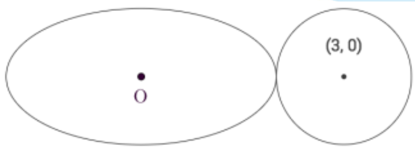
③ $d = 1$일 때 $x = 2d$일 때 $y = 0$이 되어 한 점이 되므로 교점의 개수는 3



④ $1 < d < 3$일 때 $x = \frac{2}{3}d$ 만 근이 될 수 있고 교점의 개수는 2



⑤ $d = 3$일 때 $x = \frac{2}{3}d$ 일 때 $y = 0$이 되어 한 점이 되므로 교점의 개수는 1



⑥ $d > 3$일 때 $x = 2d$와 $x = \frac{2}{3}d$ 둘 다 근이 안되므로 교점은 없다.

(2) 두 식 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$과 $(x-d)^2 + y^2 = 3^2$을 연립하면

$4(1-x^2) = y^2 = 9 - (x-d)^2$에서 $3x^2 + 2dx - d^2 + 5 = 0$을 얻는다.

이 식의 판별식 $D/4 = d^2 - 3(-d^2+5) = 4d^2 - 15$이고, 근은

$x = \dfrac{-d \pm \sqrt{4d^2 - 15}}{3}$이다. 이제 $x = \dfrac{-d \pm \sqrt{4d^2 - 15}}{3}$일 때

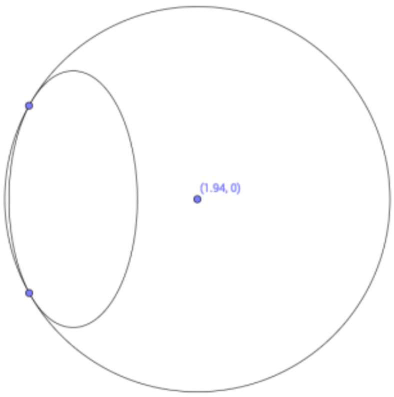
$y^2 = \dfrac{96 - 20d^2 \pm 8d\sqrt{4d^2 - 15}}{9}$

에서 교점을 구할 수 있다. $y = 0$되는 점을 구하면 $9d^4 - 180d^2 + 576 = 0$에서 $d = 2$ 또는 $d = 4$

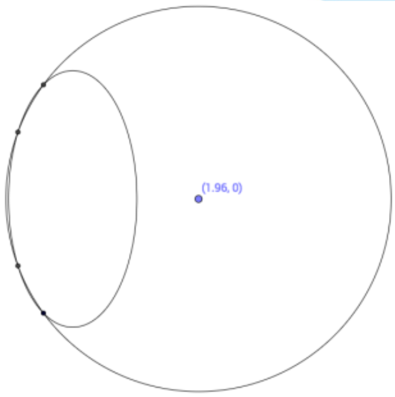
중근이 되는 위치를 구하기 위해 판별식 $D/4 = 4d^2 - 15 = 0$에서 $d = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$를 얻는다,

① $0 \le d < \dfrac{\sqrt{15}}{2}$ 일 때 판별식이 $D/4 = 4d^2 - 15 < 0$ 이므로 교점은 없다.

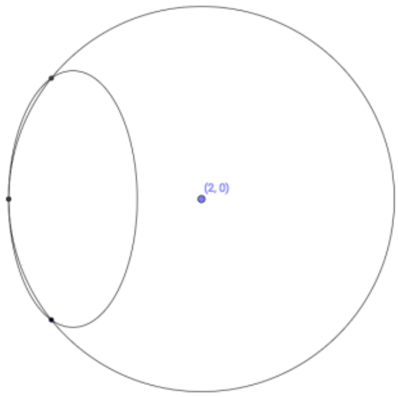
② $d = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$일 때 $x = -\dfrac{\sqrt{15}}{6}$가 중근이 될 수 있고, 대응되는 y의 근은 2개가 되어 교점의 개수는 2



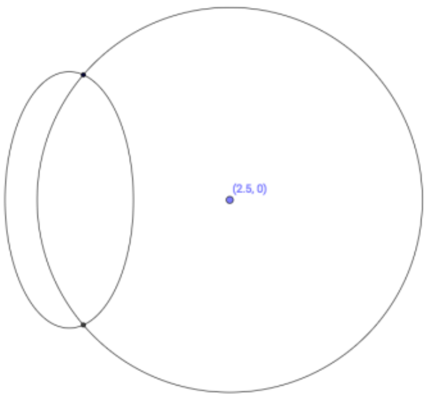
③ $\dfrac{\sqrt{15}}{2} < d < 2$일 때 $x = \dfrac{-d \pm \sqrt{4d^2 - 15}}{3}$ 의 두 개의 근을 갖게 되고, 대응되는 y의 근이 4개가 되어 교점의 개수는 4



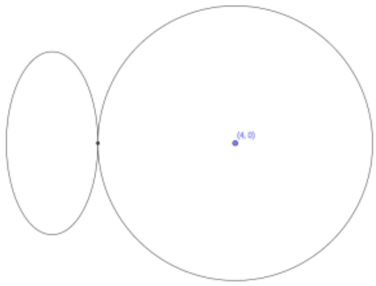
④ $d = 2$일 때 $x = -1$과 $x = -\dfrac{1}{3}$ 의 두 개의 근을 갖게 되어있고, $x = -1$에 대응하는 y의 근은 중근이므로 교점의 개수는 3



⑤ $2 < d < 4$일 때 x 근 한 개, 대응하는 y근 두 개가 되어 교점의 개수는 2



⑥ $d = 4$ 한 점에서만 접하므로 교점의 개수는 1



⑦ $d > 4$일 때 두 곡선이 만나지 않으므로 교점은 없다.

[문제1-3] 대학발표 예시답안

(1) 두 식 ① $\frac{x^2}{4}+y^2=1$과 ② $(x-d)^2+y^2=1$을 연립하면

$\frac{x^2}{4}=1-y^2=(x-d)^2$이므로 $\pm\frac{x}{2}=x-d$. 따라서 $x=2d$일 때 $y=\sqrt{1-d^2}$ 과

$x=\frac{2}{3}d$일 때 $y=\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}$ 가 교점이 될 수 있다. 그리고 교점이 2개인 경우는

$1<d<3$일 때 이므로 A와 B의 x좌표는 $\frac{2}{3}d$

(i) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 점 $\mathrm{P}\left(2d/3, \sqrt{1-d^2/9}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$\frac{2d}{3}\cdot\frac{x}{4}+\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}\cdot y=1$에서

$y=-\frac{d}{6\sqrt{1-d^2/9}}x+\frac{1}{\sqrt{1-d^2/9}}$. 이 식에서 $x=d$일 때 y는 양이 아닌 실수이어야 하

므로 $y=\frac{-d^2+6}{6\sqrt{1-d^2/9}}\le 0$

따라서 $d\ge\sqrt{6}$

(ii) $(x-d)^2+y^2=1$의 점 $\mathrm{P}\left(2d/3, \sqrt{1-d^2/9}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$\left(\frac{2}{3}d-d\right)(x-d)+\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}\,y=1$에서

$$y=\frac{\frac{d}{3}(x-d)}{\sqrt{1-d^2/9}}+\frac{1}{\sqrt{1-d^2/9}}$$

이 식에서 $x=0$일 때 y는 양이 아닌 실수이어야 하므로 $y=\frac{-d^2+3}{3\sqrt{1-d^2/9}}\le 0$

따라서 $d\ge\sqrt{3}$

결국 $\sqrt{6}\le d<3$

(참고) $d=\sqrt{6}$일 때 AO_1은 타원의 접선이지만 AO는 원의 접선이 아니다.

[다른 풀이] 기울기를 비교할 수도 있다.

(i) 선분 OA의 기울기는 $\dfrac{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}{\frac{2d}{3}}$이고 점 $\mathrm{P}\left(2d/3, \sqrt{1-d^2/9}\right)$ 에서의

$(x-d)^2+y^2=1$의 접선의 기울기는 $\dfrac{\frac{d}{3}}{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$

그림과 같이 나타나려면 $\dfrac{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}{\frac{2d}{3}} \le \dfrac{\frac{d}{3}}{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$

이제 $1-\dfrac{d^2}{9} \le \dfrac{2d^2}{9}$ 이므로 $d \ge \sqrt{3}$

(ii) 선분 O_1A의 기울기는 $\dfrac{0-\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}{d-\frac{2d}{3}}$이고 점 $P\left(2d/3, \sqrt{1-d^2/9}\right)$ 에서의

$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$의 접선의 기울기는 $\dfrac{-d}{6\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$

그림과 같이 나타나려면 $-\dfrac{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}{\frac{d}{3}} \ge \dfrac{-d}{6\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$

이제 $6\left(1-\dfrac{d^2}{9}\right) \le \dfrac{d^2}{3}$ 이므로 $d \ge \sqrt{6}$

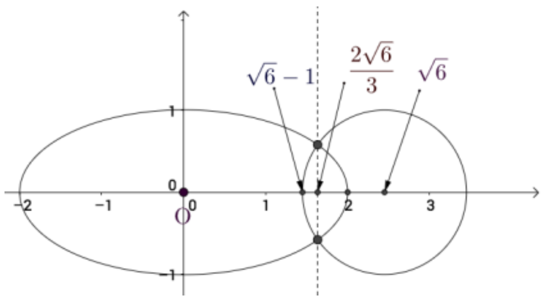
(i), (ii)를 동시에 만족하는 영역은 $\sqrt{6} \le d < 3$.

(2) 위에서 구한 d의 값 중 가장 작은 값은 $d=\sqrt{6}$이다.

식 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$와 식 $(x-\sqrt{6})^2+y^2=1$을 연립하면 두 점 $\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$을 얻는다.

그림에서

$$2\int_{\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{2} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx + 2\int_{\sqrt{6}-1}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \sqrt{1-(x-\sqrt{6})^2}\,dx$$



먼저 $2\displaystyle\int_{\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{2} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx$ 를 계산하자.

$\frac{x}{2} = \sin\theta\left(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$로 치환하고 $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$라 하면

$2\int_{\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{2} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx = 2\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\, d\theta = 2\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\, d\theta = [2\theta + \sin 2\theta]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \pi - 2\alpha - \sin 2\alpha$

여기에서 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$이므로

$2\int_{\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{2} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx = \pi - 2\alpha - \frac{2\sqrt{2}}{3}$

이제 $2\int_{\sqrt{6}-1}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \sqrt{1-(x-\sqrt{6})^2}\,dx$를 계산하자. $x-\sqrt{6} = \sin\theta \left(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$로 치환하고

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$라 하면

$2\int_{\sqrt{6}-1}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \sqrt{1-(x-\sqrt{6})^2}\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \cos^2\theta\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} (1+\cos 2\theta)\, d\theta = [\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha}$

$= \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\sqrt{2}}{3}$

이제 $2\int_{\sqrt{6}-1}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \sqrt{1-(x-\sqrt{6})^2}\,dx = \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\sqrt{2}}{3}$

$2\int_{\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{2} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx + 2\int_{\sqrt{6}-1}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \sqrt{1-(x-\sqrt{6})^2}\,dx = \pi - 2\alpha - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\sqrt{2}}{3}$

$= \frac{3\pi}{2} - \sqrt{2} - 3\alpha = \frac{3\pi}{2} - \sqrt{2} - \frac{3(\pi-\theta_2)}{2} = \frac{3\theta_2}{2} - \sqrt{2}$

(단, $2\alpha + \theta_2 = \pi$이므로 $\alpha = \frac{\pi - \theta_2}{2}$)

(참고) $\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로

$\sin\theta_2 = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{3}} = 2\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$이므로

$\sin\theta_1 = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{9}} = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

28 연세대학교 수시

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 벗어나지 않는 논술형 (반영 점수 비율은 교과 20, 비교과 10, 논술 70이며, 논술 점수는 수학 60, 과학 40)	4개영역 합 8등급 이내	수학(3문항, 8문제) 필수, 과학 1과목 선택	수학 120분 과학 30분

※ 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

[제시문 1]

[가] 다항함수 $h(x)$ 위의 점 $(a, h(a))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y = h'(a)(x-a)+h(a)$$

[나] 다항함수 $h(x)$가

$$h(x)=(x-a)^n g(x) \text{ (단, } n\text{은 자연수이고, } g(x)\text{는 다항함수이다.)}$$

로 나타내어질 때, 방정식 $h(x)=0$는 $x=a$를 근으로 갖는다고 한다.
특히, $n \geq 2$이면 방정식 $h(x)=0$은 $x=a$에서 중근을 갖는다고 한다.

[1-1] 곡선 $y=x^3+1$ 위의 점 $(1, 2)$에서 접선의 방정식을 구하시오. [4점]

[1-2] 다항함수 $f(x)$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=L(x)$라 할 때, 방정식 $f(x)-L(x)=0$이 $x=a$에서 중근을 가짐을 보이시오. [8점]

[1-3] 다항함수 $f(x)$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$를 지나는 직선을 $y=l(x)$라 하자. 방정식 $f(x)-l(x)=0$이 $x=a$에서 중근을 가질 때, 직선 $y=l(x)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선임을 보이시오. [8점]

[제시문 2]

[가] 좌표평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 C 위의 점 $(\cos\theta, \sin\theta)$에서의 접선을 l_θ라 할 때, 집합 A를 $A=\{l_\theta \mid 0 \le \theta < 2\pi\}$라 하자.

[나] 좌표평면 위의 점 P가 집합 A의 원소 중 오직 m개의 원소와 만나도록 하는 점 P의 집합을 U_m이라 하자. 예를 들어, 집합 U_0은 집합 A의 어떤 원소와도 만나지 않는 점의 집합이다. (단, m은 음이 아닌 정수이다.)

[다] 좌표평면 위의 점 (a, b)가 집합 U_2의 원소일 때, 점 (a, b)를 지나는 원 C 위의 서로 다른 두 접선의 접점을 이은 직선을 $L(a, b)$라 하자.

[2-1] 음이 아닌 정수 m에 대하여 집합 U_m을 구하시오. [10점]

[2-2] 집합 B를 $B=\{L(a, b) \mid a^2+b^2=10^2, (a, b)\in U_2\}$라 하자. 좌표평면 위의 점 P가 집합 B의 원소 중 오직 m개의 원소와 만나도록 하는 점 P의 집합 V_m을 구하시오. (단, m은 음이 아닌 정수이다.) [10점]

[제시문 3]

세 함수 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$p(x) \le q(x) \le r(x)$이고, $\lim_{x\to a} p(x) = \lim_{x\to a} r(x) = \alpha$이면 $\lim_{x\to a} q(x) = \alpha$이다.
(단, α는 실수이다.)

[3-1] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $f(1)=k$이고 $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right) = f(0)$을 만족시킨다. 모든 자연수 n에 대하여 $f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$일 때, $f(0)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [8점]

[3-2] 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \ge 0$인 함수 $g(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $g(x_1) \le g(x_2)$이다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $g\left(\frac{1}{2^n}\right) \le \frac{n}{2(n+1)} \cdot g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$이다.

[3-2-1] $g(0)$의 값을 구하시오. [4점]

[3-2-2] $\lim_{m\to\infty} \dfrac{g\left(\frac{1}{m}\right) - g(0)}{\frac{1}{m}}$의 값을 구하시오. (단, m은 자연수이다.) [8점]

예시답안

[Ⅰ-1]

$y=x^3+1$에서 $y'=3x^2$, $y'_{x=1}=3$이다. 따라서 곡선 $y=x^3+1$ 위의 점 $(1, 2)$에서 접선의 방정식은

$$y=3(x-1)+2,\ y=3x-1$$

이다.

[Ⅰ-2]

다항함수 $f(x)$ 의 최고 차수가 이차 이상의 함수일 때

$$f(x)=(x-a)^2Q(x)+b(x-a)+c \quad (Q(x)\text{ 는 다항함수, } b, c\text{는 상수})$$

로 나타낼 수 있다. 따라서

$$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)+b,\ f'(a)=b,\ f(a)=c$$

이다. 그러므로

$$L(x)=b(x-a)+c,\ f(x)-L(x)=(x-a)^2Q(x)$$

이다. 따라서 방정식 $f(x)-L(x)=0$ 은 $x=a$에서 중근을 가진다.

[대학 예시 답안]

$y=L(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$ 이므로 다항함수

$$G(x)=f(x)-L(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$$

는 $G(a)=0$과 $G'(a)=f'(a)-f'(a)=0$ 을 만족한다.

$G(a)=0$이면 $G(x)=(x-a)g(x)$(여기서 $g(x)$는 다항함수)로 표현할 수 있다.

그러면 $G'(x)=g(x)+(x-a)g'(x)$ 이고 $G'(a)=g(a)=0$이므로 $g(x)=(x-a)k(x)$(여기서 $k(x)$는 다항함수)로 나타낼 수 있다.

$G(x)=(x-a)g(x)=(x-a)^2k(x)$이므로 $f(x)-L(x)=0$ 은 $x=a$에서 중근을 가진다.

[Ⅰ-3]

점 $(a, f(a))$을 지나는 직선 $y=l(x)$의 기울기를 m이라 두면 $l(x)=m(x-a)+f(a)$이므로 $m=f'(a)$ 임을 보이면 된다. 방정식 $f(x)-l(x)=0$이 $x=a$에서 중근을 가지므로

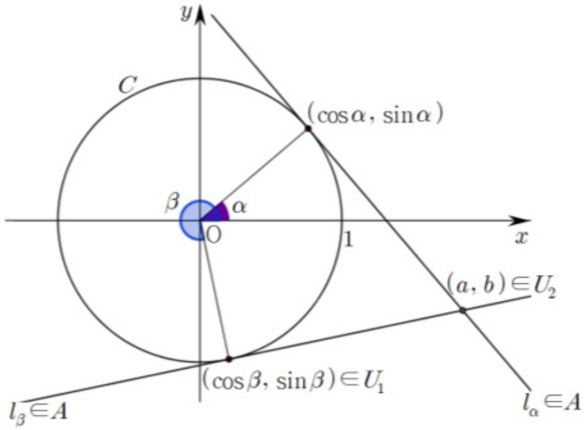
$$f(x)-l(x)=(x-a)^2g(x) \quad (g(x)\text{는 다항함수})$$

로 나타낼 수 있다. 그러므로

$$f'(x)-l'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2g'(x),\ f'(a)-l'(a)=0,\ f'(a)=l'(a)=m$$

이다. 따라서 $l(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$이므로 직선 $y=l(x)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선이다.

[2-1]

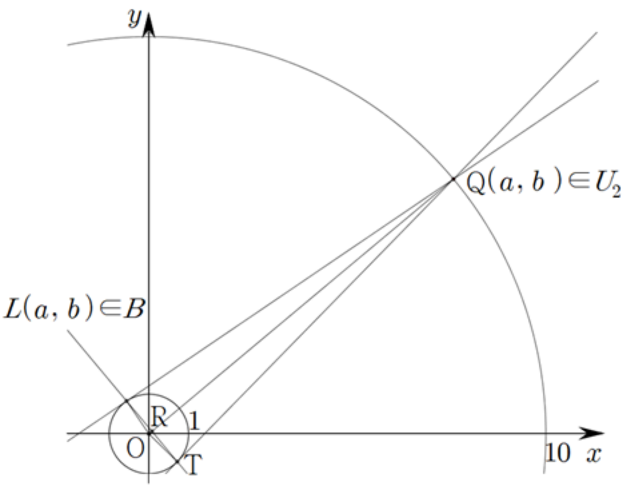


원 C 밖의 한 점에서는 원 C에 접선을 두 개 그을 수 있고, 원 C 위의 점에서는 원 C에 접선을 한 개 밖에 그을 수 없으며, 원 C 내부의 점에서는 원 C에 접선을 그을 수 없다. 따라서

$$U_0 = \{(a, b) \mid a^2 + b^2 < 1\},$$
$$U_1 = \{(a, b) \mid a^2 + b^2 = 1\},$$
$$U_2 = \{(a, b) \mid a^2 + b^2 > 1\},$$
$$U_m = \varnothing \ (m \text{ 은 } 3 \text{ 이상의 정수})$$

이다.

[2-2]



$a^2 + b^2 = 10^2$ 인 임의의 점 $Q(a, b) \in U_2$ 에 대하여, 점 Q 에서 원 C에 그은 한 접선의 접점을 점 T, 직선 $L(a, b)$와 선분 OQ 의 교점을 점 R 라 하자. 그러면

$\triangle ORT \backsim \triangle OTQ$ 이므로 $\overline{OT} : \overline{OQ} = \overline{OR} : \overline{OT}$, $1 : 10 = \overline{OR} : 1$이다. 따라서 $\overline{OR} = \dfrac{1}{10}$ 이다.

그러므로 원 $x^2+y^2=\dfrac{1}{100}$ 위의 점 $\left(\dfrac{1}{10}\cos\theta,\ \dfrac{1}{10}\sin\theta\right)$에서의 접선을 l'_θ라 하면 $B=\{l'_\theta \mid 0\le\theta<2\pi\}$이다. 따라서 [2-1]의 풀이와 마찬가지 방법에 의해서

$$V_0=\left\{(a,\ b)\mid a^2+b^2<\frac{1}{100}\right\},$$

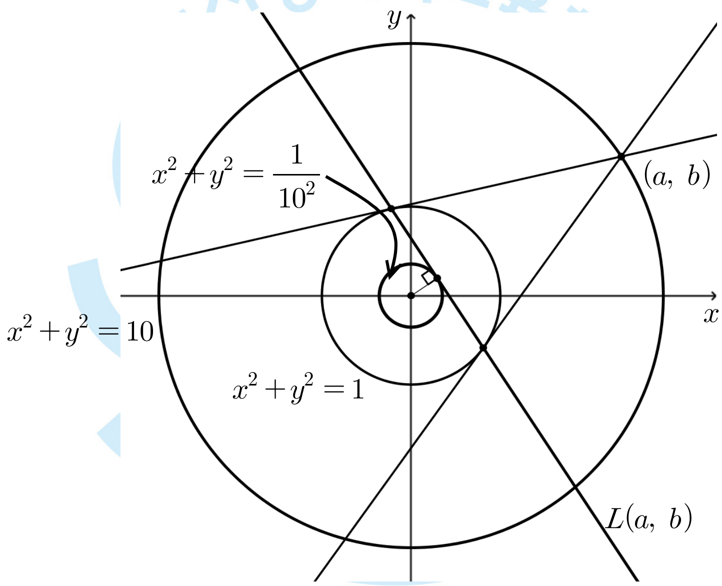
$$V_1=\left\{(a,\ b)\mid a^2+b^2=\frac{1}{100}\right\},$$

$$V_2=\left\{(a,\ b)\mid a^2+b^2>\frac{1}{100}\right\},$$

$V_m=\varnothing$ (m은 3 이상의 정수)

이다.

[다른 풀이]



점 $(a,\ b)$에서 원 C에 그은 서로 다른 두 접선의 접점을 이은 직선 $L(a,\ b)$의 방정식은 $ax+by=1$이다. 한편, $a^2+b^2=10^2$이므로 원점에서 직선 $L(a,\ b)$까지의 거리는

$$\frac{|1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{10}$$

으로 일정하다. 따라서

$$V_0=\left\{(a,\ b)\mid a^2+b^2<\frac{1}{10^2}\right\},$$

$$V_1=\left\{(a,\ b)\mid a^2+b^2=\frac{1}{10^2}\right\},$$

$$V_2=\left\{(a,\ b)\mid a^2+b^2>\frac{1}{10^2}\right\},$$

$$V_m=\varnothing,\ m\ge 3$$

이다.

(참고) 원 $x^2+y^2=r^2$ 밖의 한 점 (α, β)에서 원에 그은 두 접선의 접점을 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$라 할 때, 직선AB의 방정식은 $\alpha x+\beta y=r^2$ 이다.

(증명) 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에서 접선의 방정식은 각각

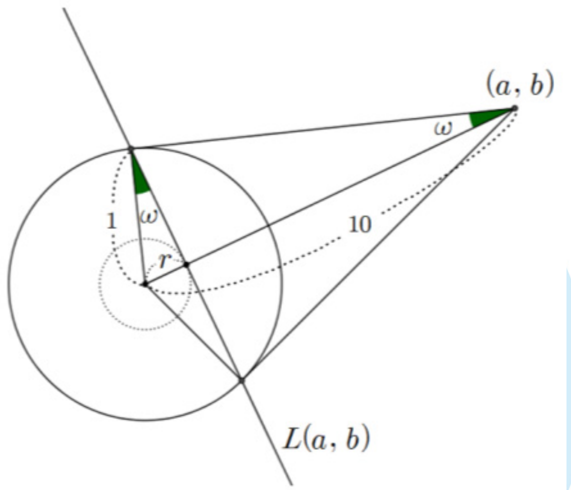
$$x_1 x+y_1 y=r^2\ ,\ x_2 x+y_2 y=r^2$$

이다. 두 접선은 모두 (α, β)를 지나므로

$$x_1 \alpha+y_1 \beta=r^2\ ,\ x_2 \alpha+y_2 \beta=r^2$$

이다. 그러므로 $\alpha x+\beta y=r^2$ 는 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$,$\mathrm{B}(x_2, y_2)$를 지나는 직선이다.

[대학 예시 답안]



그림에서 $\sin\omega=\dfrac{1}{10}$, 따라서 원점과 $L(a, b)$ 사이의 거리 $r=\dfrac{1}{10}$ 이다.

따라서, 모든 $L(a, b)$는 반지름이 $\dfrac{1}{10}$인 원에 접하는 직선이다.

$$V_0=\left\{(a, b)\,|\,a^2+b^2<\frac{1}{10^2}\right\},\ \ V_1=\left\{(a, b)\,|\,a^2+b^2=\frac{1}{10^2}\right\},$$

$$V_2=\left\{(a, b)\,|\,a^2+b^2>\frac{1}{10^2}\right\},\ \ V_m=\varnothing\ ,\ \ m\ge 3$$

[3-1]

$f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)=\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)\times f\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\times f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right),$$

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\times f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right),$$

$$\frac{n+1}{n+2}f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

이다. 그러므로 $g(n)=\frac{n+1}{n+2}f\left(\frac{1}{2^n}\right)$ 이라 두면, 모든 자연수 n에 대하여 $g(n)=g(n-1)$이 성립한다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여

$$g(n)=g(n-1)=g(n-2)=\cdots=g(0)$$

이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty}g(n)=g(0),\ \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n+1}{n+2}f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right\}=\frac{1}{2}f(1),\ f(0)=\frac{k}{2}$$

이다.

[다른 풀이]

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\times f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times f(1)$$

$$f\left(\frac{1}{2^2}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\times f\left(\frac{1}{2^{n-2}}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\times f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

이고 변변 곱하면

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{n+2}{n+1}\times f(1)$$

이다. 따라서 $f(0)=\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}f(1)=\frac{k}{2}$ 이다.

[대학 예시 답안]

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{n+2}{n+1}\times\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

이므로 $\frac{n+1}{n+2}f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$. 여기서, $a_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$라 하면, $a_{n+1}=a_n$, $a_1=\frac{1}{2}f(1)=\frac{k}{2}$ 즉, a_n은 공비가 1인 등비수열이다.

따라서 $a_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{k}{2}$ 이 되고 $f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{k(n+2)}{2(n+1)}$ 이다. 양변에 극한을 취하면

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{k(n+2)}{2(n+1)} = \frac{k}{2}.$$

[3-2-1]

$g\left(\frac{1}{2^n}\right) \le \frac{n}{2(n+1)} g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ 이므로 $(n+1)g\left(\frac{1}{2^n}\right) \le \frac{1}{2} ng\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ 이다. 그러므로 $h(n) = (n+1)g\left(\frac{1}{2^n}\right)$ 이라 두면, 모든 자연수 n에 대하여 $0 \le h(n) \le \frac{1}{2}h(n-1)$이다. 따라서

$$0 \le h(n) \le \frac{1}{2}h(n-1) \le \left(\frac{1}{2}\right)^2 h(n-2) \le \cdots \le \left(\frac{1}{2}\right)^n h(0)$$

이다. 그러므로

$$0 \le \lim_{n\to\infty} h(n) \le \lim_{n\to\infty} \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n h(0)\right\} = 0,\ \lim_{n\to\infty} h(n) = 0$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} h(n) = 0$ 이다. 한편, 모든 자연수 n에 대하여, $0 < \frac{1}{2^n}$ 이므로 $0 \le g(0) \le g\left(\frac{1}{2^n}\right)$이다. 그러므로

$$0 \le g(0) = \lim_{n\to\infty} g(0) \le \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$$

이다. 따라서 $g(0) = 0$ 이다.

[다른 풀이]

모든 자연수 n에 대하여 $0 \le \frac{1}{2^n}$ 이므로

$$\begin{aligned}
0 \le g(0) \le g\left(\frac{1}{2^n}\right) &\le \frac{1}{2} \times \frac{n}{n+1} g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \\
&\le \frac{1}{2^2} \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n} g\left(\frac{1}{2^{n-2}}\right) \\
&\le \frac{1}{2^3} \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} g\left(\frac{1}{2^{n-3}}\right) \\
&\ \ \vdots \\
&\le \frac{1}{2^n} \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times g\left(\frac{1}{2^0}\right) \\
&= \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n+1} \times g(1)
\end{aligned}$$

이고

$$0 \le g(0) \le \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n+1} \times g(1)$$

이다. 여기서 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n+1} \times g(1) = 0$ 이므로 [제시문3]에 의해 $g(0)=0$ 이다.

[대학 예시 답안]

$(n+1)g\left(\frac{1}{2^n}\right) \le \frac{1}{2} ng\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ 이므로 $b_n = ng\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ 으로 놓으면 $b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n$.

따라서 $b_n \le \frac{1}{2} b_{n-1} \le \frac{1}{2^2} b_{n-2} \le \cdots \le \frac{1}{2^{n-1}} b_1 = \frac{1}{2^{n-1}} g(1)$. 즉 $g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \le \frac{g(1)}{n2^{n-1}}$.

극한을 취하면

$$0 \le g(0) \le \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \le \lim_{n\to\infty} \frac{g(1)}{n2^{n-1}} = 0$$

따라서 $g(0)=0$.

[3-2-2]

임의의 자연수 m 에 대하여 $2^{n-1} \le m < 2^n$ 인 자연수 n 이 존재한다. 그러므로

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{m} \le \frac{1}{2^{n-1}}, \quad g\left(\frac{1}{2^n}\right) \le g\left(\frac{1}{m}\right) \le g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

이다. 한편, [3-2-1]에서 모든 자연수 n 에 대하여

$$(n+1)\, g\left(\frac{1}{2^n}\right) = h(n) \le \left(\frac{1}{2}\right)^n h(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n g(1), \quad g\left(\frac{1}{2^n}\right) \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{g(1)}{n+1}$$

이다. 그러므로

$$0 \le \frac{g\left(\frac{1}{m}\right) - g(0)}{\frac{1}{m}} = mg\left(\frac{1}{m}\right) \le mg\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \le m\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{g(1)}{n} \quad \cdots\cdots (1)$$

이다. 한편, $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{m}$ 에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{2}{m}$ 를 얻을 수 있고 $2^{n-1} \le m < 2^n$ 에서 $\ln m < n\ln 2$, $\frac{1}{n} < \frac{\ln 2}{\ln m}$ 를 얻을 수 있다. 이것을 (1)식에 적용하면

$$0 \le \frac{g\left(\frac{1}{m}\right) - g(0)}{\frac{1}{m}} \le m\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{g(1)}{n} < m \frac{2}{m} \frac{g(1)\ln 2}{\ln m} = \frac{2\ln 2}{\ln m} g(1)$$

그러므로

$$0 \le \lim_{m\to\infty} \frac{g\left(\frac{1}{m}\right) - g(0)}{\frac{1}{m}} \le \lim_{m\to\infty} \frac{2\ln 2}{\ln m} g(1) = 0$$

따라서 $\lim_{m\to\infty}\dfrac{g\left(\dfrac{1}{m}\right)-g(0)}{\dfrac{1}{m}}=0$이다.

[다른 풀이]

임의의 자연수 m에 대하여 $2^{n-1}\le m\le 2^n$인 자연수 n이 존재하여

$$0\le g\left(\frac{1}{2^n}\right)\le g\left(\frac{1}{m}\right)\le g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)\ \cdots\ ①$$

이다. 또한 [3-2-1]에서 $g(0)=0$이고 자연수 n에 대하여

$$0\le g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)\le \frac{1}{2^{n-1}}\times\frac{1}{n}\times g(1)\ \cdots\ ②$$

이므로 ①, ②에 의해

$$0\le \frac{g\left(\frac{1}{m}\right)-g(0)}{\frac{1}{m}}=m\times g\left(\frac{1}{m}\right)\le m\times g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)\le 2^n g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)\le \frac{2^n}{2^{n-1}}\times\frac{1}{n}\times g(1)$$

이 성립한다. $2^{n-1}\le m\le 2^n$에서 $m\to\infty$일 때, $n\to\infty$이고 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{2^{n-1}}\times\dfrac{1}{n}\times g(1)=0$이므로 [제시문3]에 의해

$$\lim_{m\to\infty}\frac{g\left(\frac{1}{m}\right)-g(0)}{\frac{1}{m}}=0$$

이다.

[대학 예시 답안]

문제[3-2-1] 풀이로부터 $g\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)\le\dfrac{g(1)}{n2^{n-1}}$ ……① 와 $g(0)=0$이 성립한다.

임의의 자연수 m에 대하여 어떤 자연수 n이 있어서 $2^{n-1}\le m<2^n$ (즉, $\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{1}{m}\le\dfrac{1}{2^{n-1}}$ ……②)를 만족한다. 이 관계식으로부터

$$(n-1)\ln 2\le \ln m<n\ln 2\ \cdots\cdots ③,\quad \frac{1}{n}<\frac{\ln 2}{\ln m}\ \cdots\cdots ④,\quad \frac{1}{2^{n-1}}<\frac{2}{m}\ \cdots\cdots ⑤$$

을 얻을 수 있다. 순서대로 ②, ①, ④, ⑤ 식을 적용하면

$$g\left(\frac{1}{m}\right)\le g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)\le\frac{g(1)}{n2^{n-1}}<\frac{\ln 2}{\ln m}\frac{2}{m}g(1).$$

임을 알 수 있다.

$$0 \le \frac{g\left(\frac{1}{m}\right) - g(0)}{\frac{1}{m}} = \frac{g\left(\frac{1}{m}\right)}{\frac{1}{m}} \le \frac{2g(1)\ln 2}{\ln m}$$

이고 극한을 취하면 우측 항은 0으로 수렴하므로 [제시문 3]에 의해

$$\lim_{m \to \infty} \frac{g\left(\frac{1}{m}\right) - g(0)}{\frac{1}{m}} = 0$$

이다.

29 이화여자대학교 수시(자연계열 I)[24]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 2개 영역 등급 합 4 이내	수학(3문항, 11문제)	100분

[1]

정수 $n \geq 0$에 대하여 아래와 같이 표현된 수열 $\{I_n\}$이 있다.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 정수 $n \geq 0$에 대하여 $I_{n+1} \leq I_n$이 성립함을 보이시오.

(2) 자연수 $n \geq 2$에 대하여 $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$가 성립함을 보이시오.

(3) 자연수 n에 대하여 $\dfrac{2n}{2n+1} = \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} \leq \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$이 성립함을 보이시오.

(4) 극한값 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$을 구하시오.

24) 이화여자대학교 홈페이지

[2]
부등식 $||y|+|x-2|-3|+||y|+|x+2|-3|\le 2$를 만족하는 좌표평면 위의 점의 집합을 D라 할 때 다음 물음에 답하시오.(30점)

(1) 부등식 $(|y|+|x-2|-3)(|y|+|x+2|-3)\le 0$을 만족하는 영역을 좌표평면 위에 나타내시오.

(2) 부등식 $2|y|+|x-2|+|x+2|\le 8$을 만족하는 영역을 좌표평면 위에 나타내시오.

(3) 집합 D의 영역을 좌표평면 위에 나타내고 넓이를 구하시오.

[3]

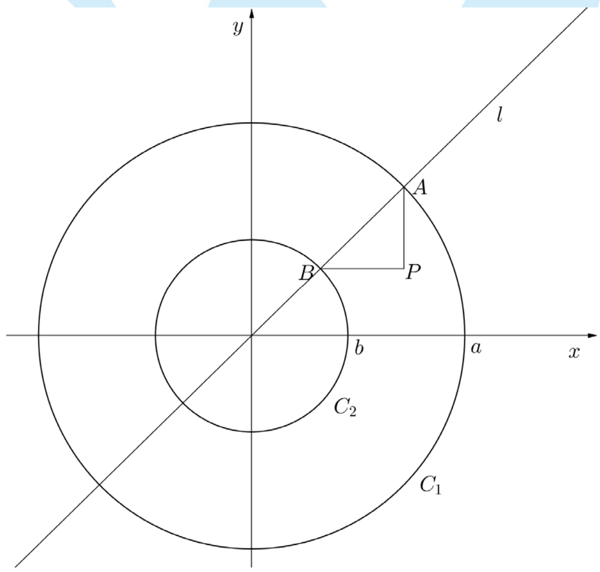
그림과 같이 $a>b>0$일 때 좌표평면 위에 두 원 $C_1 : x^2+y^2=a^2$, $C_2 : x^2+y^2=b^2$가 있다. 원점을 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 두 원 C_1, C_2와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 수직인 직선과 점 B를 지나고 y축에 수직인 직선이 만나는 점을 P라 할 때, 다음 물음에 답하시오. [40점]

(1) 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값을 구하시오.

(2) 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하시오.

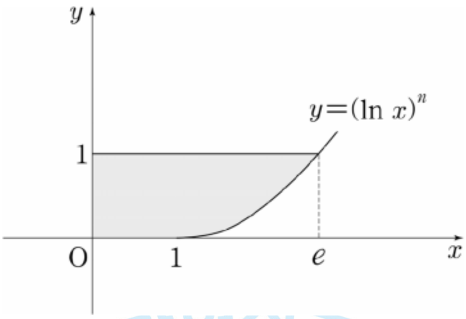
(3) 점 $\mathrm{Q}(b, 0)$과 점 $\mathrm{Q}'(-b, 0)$에 대하여 두 선분 PQ, PQ$'$의 길이의 합이 일정하도록 하는 $\dfrac{a}{b}$의 값을 구하시오.

(4) 문항 (2)의 도형의 방정식이 문항 (3)의 조건을 만족할 때 그 도형 위의 점 P에서의 접선을 l'라 하자. 점 Q에서 l'에 내린 수선을 발을 H라 하고 점 Q$'$에서 l'에 내린 수선의 발을 H$'$라 할 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{QP}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{Q'H'}}}{\overline{\mathrm{Q'P}}}$이 성립함을 보이시오.



풀어보기

문제1 2이상의 자연수 n에 대하여 곡선 $y=(\ln x)^n$ $(x \geq 1)$과 x축, y축 및 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (2011. 6월 모평)



< 보 기 >

ㄱ. $1 \leq x \leq e$일 때, $(\ln x)^n \geq (\ln x)^{n+1}$이다.

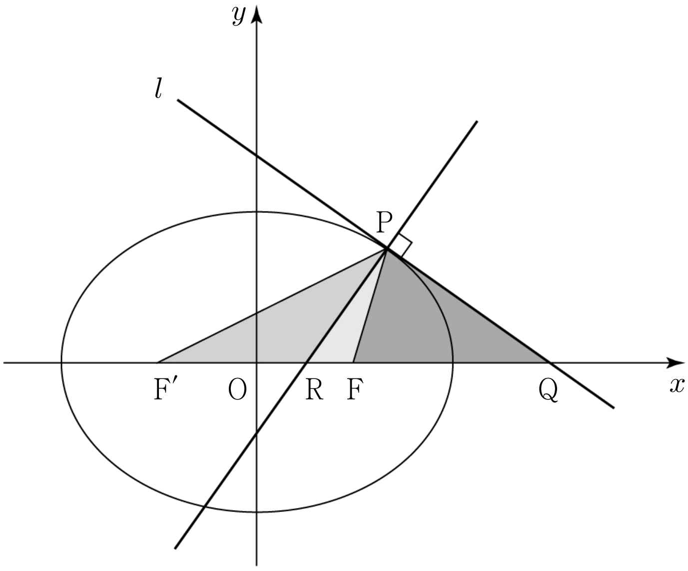
ㄴ. $S_n < S_{n+1}$

ㄷ. 함수 $f(x)=(\ln x)^n$ $(x \geq 1)$의 역함수를 $g(x)$라 하면 $S_n = \int_0^1 g(x)\,dx$ 이다.

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ,ㄷ

문제2 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $3x^2+4y^2=12$ 위를 움직이는 제1사분면 위의 점 P에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 Q, 점 P에서 접선 l과 수직인 직선을 그어 x축과 만나는 점을 R라 하자. 세 삼각형 PRF, PF′R, PFQ의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 점 P의 x좌표는? (2014. 전국연합)

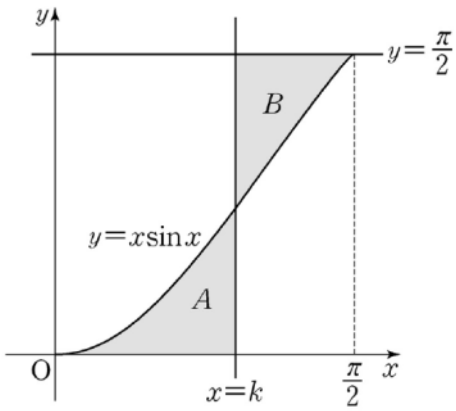


① $\frac{13}{12}$ ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{17}{12}$

문제3

그림과 같이 곡선 $y = x\sin x$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 이 곡선과 x축, 직선 $x = k$로 둘러싸인 영역을 A, 이 곡선과 직선 $x = k$, 직선 $y = \frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같을 때, 상수 k의 값은?(단, $0 \le k \le \frac{\pi}{2}$)

(2012. 9월 모평)



① $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}$　② $\frac{\pi}{4}$　③ $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}$　④ $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}$　⑤ $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}$

예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ⑤

ㄱ. $1 \le x \le e$ 의 범위에서 $0 \le \ln x \le 1$, $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} = (\ln x)^n (1 - \ln x) \ge 0$

$(\ln x)^n \ge (\ln x)^{n+1}$ (참)

ㄴ. $1 < x < e$에서 $(\ln x)^n > (\ln x)^{n+1}$이므로 $\int_1^e (\ln x)^n dx > \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$

$-\int_1^e (\ln x)^n dx < -\int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$, $e - \int_1^e (\ln x)^n dx < e - \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$

$\therefore S_n < S_{n+1}$ (참)

ㄷ. 주어진 그래프를 $y = x$에 대하여 대칭시키면 $S_n = \int_0^1 g(x) dx$ (참)

풀어보기(문제2) 정답 ④

초점 $\mathrm{F}(1, 0)$, $\mathrm{F}'(-1, 0)$

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 접선의 방정식은 $3x_1 x + 4y_1 y = 12$이다. 접선의 x절편은 $\frac{4}{x_1}$. $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y - y_1 = \frac{4y_1}{3x_1}(x - x_1)$$

접선에 수직인 직선의 방정식의 x절편은 $\frac{x_1}{4}$. 세 삼각형의 높이는 모두 같으므로 세 삼각형의 밑변의 길이가 등차수열을 이룬다.

$$\overline{\mathrm{RF}} = 1 - \frac{x_1}{4},\ \overline{\mathrm{F'R}} = \frac{x_1}{4} + 1,\ \overline{\mathrm{FQ}} = \frac{4}{x_1} - 1$$

$$2\left(\frac{x_1}{4} + 1\right) = \left(1 - \frac{x_1}{4}\right) + \left(\frac{4}{x_1} - 1\right)$$

양변에 $4x_1$을 곱하여 정리하면

$$3x_1^2 + 8x_1 - 16 = (3x_1 - 4)(x_1 + 4) = 0$$

따라서 $x_1 = \frac{4}{3}$

풀어보기(문제3) 정답 ③

$$\int_0^k x\sin x dx = \int_k^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\sin x dx\right) dx$$

$$\int_0^k x\sin x dx = \int_k^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} dx - \int_k^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$$

$$\int_0^k x\sin x dx + \int_k^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \int_k^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \int_k^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} dx$$

이때, $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$라고 하면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$ 이므로

$$(\text{좌변}) = [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$(\text{우변}) = \left[\frac{\pi}{2}x\right]_k^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}k$$

따라서 $1 = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}k$ 이므로 $\frac{\pi}{2}k = \frac{\pi^2}{4} - 1$

$\therefore\ k = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}$

[문제 1] 대학발표 예시답안

1-(1) 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 $0 \le \sin x \le 1$ 이기 때문에 $\sin^{n-1}x \le \sin x$ 이다. 그러므로

$$I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x\, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = I_n$$

이 성립한다.

1-(2)

1보다 큰 자연수 n에 대하여 부분적분법을 이용하면

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x \cdot \sin x\, dx \\
&= \left[\sin^{n-1}x\,(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x\, dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,(1-\sin^2 x)\, dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\, dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}$$

이므로 $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ 이고 $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ 이다.

1-(3)

(2)에 의하여 $\dfrac{2n}{2n+1} = \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}}$ 이 성립하고, (1)에 의하여 $I_{2n} \le I_{2n-1}$ 이므로 $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} \le \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$ 이 되고, 또 (1)에 의하여 $I_{2n+1} \le I_{2n}$ 이므로 $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \le 1$ 이다.

1-(4)

(3)에 의하여 $\dfrac{2n}{2n+1} = \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \le 1$ 이 성립하므로 수열의 조임정리에 의하여

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} \le \lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \le 1$$

이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$ 이다.

[문제 2] 대학발표 예시답안

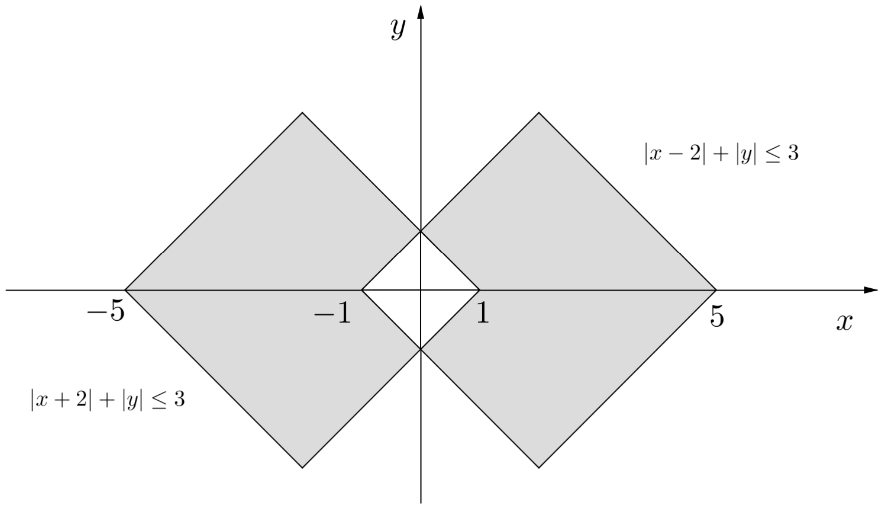
2-(1)

부등식 $(|y|+|x-2|-3)(|y|+|x+2|-3) \le 0$ 은 다음 두 영역으로 나누어진다.

(ⅰ) $|y|+|x-2| \le 3$ 이고 $|y|+|x+2| \ge 3$

(ⅱ) $|y|+|x-2| \ge 3$ 이고 $|y|+|x+2| \le 3$

따라서 부등식을 만족하는 영역은 두 마름모 $|y|+|x-2|=3$ 와 $|y|+|x+2|=3$ 내부의 점과 경계의 점의 합집합
$\{(x,y) \mid |y|+|x-2| \le 3\} \cup \{(x,y) \mid |y|+|x+2| \le 3\}$ 에서 교집합이 나타내는 영역의 내부
$\{(x,y) \mid |y|+|x-2| < 3,\ |y|+|x+2| < 3\}$ 을 뺀 것이다. 따라서 구하는 영역은 아래와 같다.



2-(2)

주어진 부등식이 $2|y|+|x-2|+|x+2|\le 8$이 나타내는 영역은 y가 양수 일 때,

$$y=-\frac{|x-2|+|x+2|}{2}+4$$

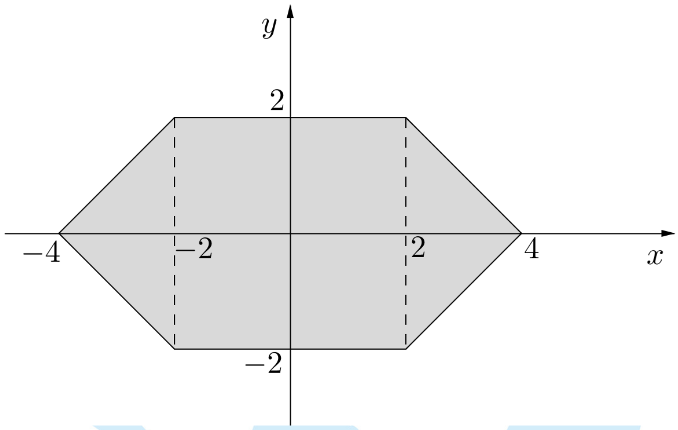
의 그래프 아래쪽의 점들과 y가 음수 일 때

$$y=\frac{|x-2|+|x+2|}{2}-4$$

의 그래프 위쪽의 점들이다.
따라서 문항의 부등식이 나타내는 영역은 그래프

$$y=-\frac{|x-2|+|x+2|}{2}+4 \quad , \quad y=\frac{|x-2|+|x+2|}{2}-4$$

의 점들이다. 따라서 구하는 영역은 아래와 같다.



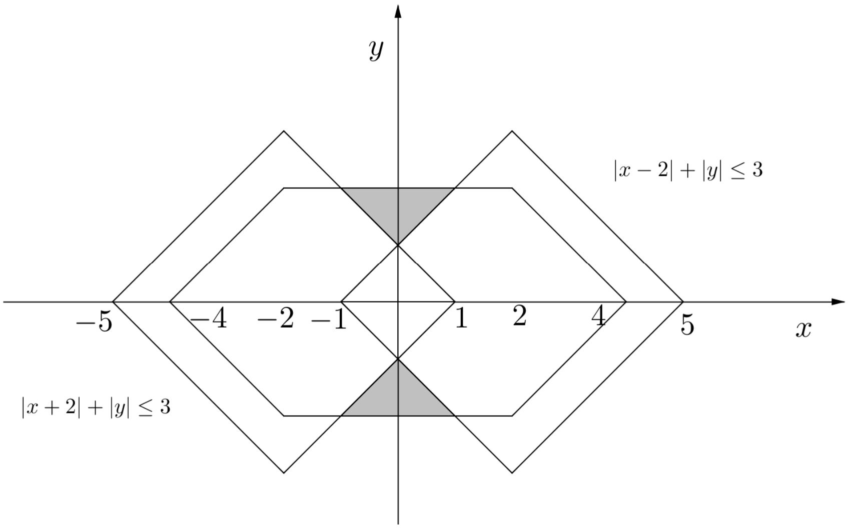
2-(3)

절댓값 부호를 풀기 위하여 두 마름모를
(i) $|y|+|x-2|\ge 3$이고 $|y|+|x+2|\ge 3$
(ii) $|y|+|x-2|\le 3$이고 $|y|+|x+2|\le 3$
(iii) $|y|+|x-2|\le 3$이고 $|y|+|x+2|\ge 3$
(iv) $|y|+|x-2|\ge 3$이고 $|y|+|x+2|\le 3$

(ㄱ) [영역(i)] $|y|+|x-2|\ge 3$이고 $|y|+|x+2|\ge 3$ 일 때 부등식을 풀면
$|y|+|x-2|-3+|y|+|x+2|-3\le 2 \Rightarrow 2|y|+|x-2|+|x+2|\le 8$
도형 $2|y|+|x-2|+|x+2|=8$과 마름모 $|y|+|x-2|=3$의 교점은 $(1,1)$, $(1,-1)$이고, 도형 $2|y|+|x-2|+|x+2|=8$과 마름모 $|y|+|x+2|=3$의 교점은 $(-1,1)$, $(-1,-1)$이다.
따라서 주어진 영역은 세 부등식

$$\begin{cases} |y|+|x-2|\ge 3 \\ |y|+|x+2|\ge 3 \\ 2|y|+|x-2|+|x+2|\le 8 \end{cases}$$

을 모두 만족하는 좌표 평면의 점으로 문항 (2) 에 따라 구하는 영역은 아래와 같다.



(ㄴ) [영역(ⅱ)] $|y|+|x-2|\le 3$이고 $|y|+|x+2|\le 3$ 일 때, 부등식을 풀면

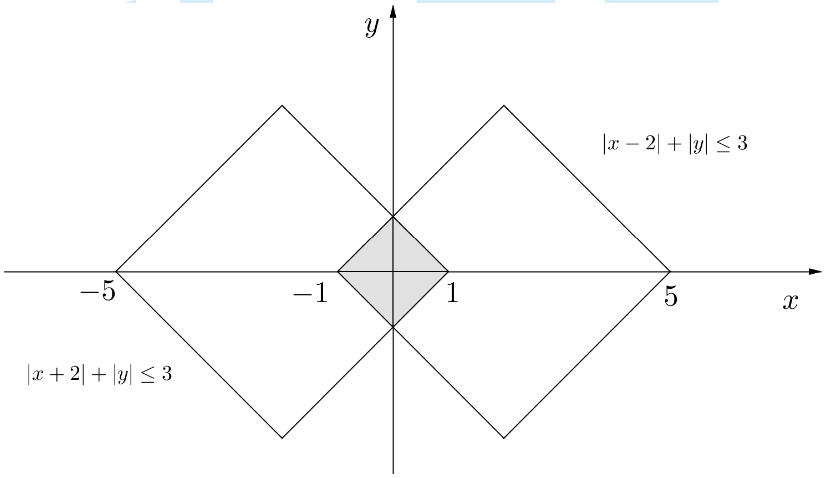
$|y|+|x-2|-3+|y|+|x+2|-3\ge -2 \Rightarrow 2|y|+|x-2|+|x+2|\ge 4$

이다. 주어진 영역에서 $-1\le x\le 1$이므로

$2|y|+|x-2|+|x+2|=2|y|+2-x+x+2\ge 4 \Rightarrow 2|y|\ge 0$

따라서 주어진 영역에서 모든 점이 부등식을 만족하며 구하는 영역은 두 부등식

$|y|+|x-2|\le 3$이고 $|y|+|x+2|\le 3$를 만족하는 평면위의 점으로 영역은 아래와 같다.



(ㄷ) [영역(ⅲ)] 이고 $|y|+|x+2|\ge 3$ 일 때, 부등식을 풀면

$-|y|-|x-2|+3+|y|+|x+2|-3\le 2 \Rightarrow -|x-2|+|x+2|\le 2$

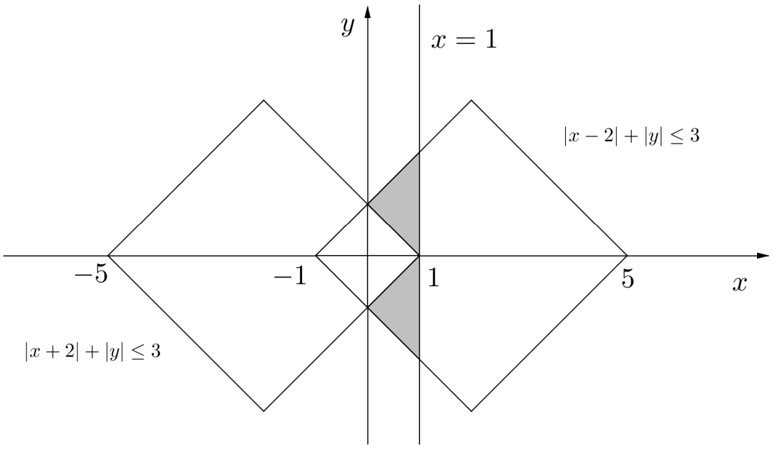
이다. 주어진 영역에서 $0\le x\le 5$이므로 부등식

$-|x-2|+|x+2|\le 2$를 $0\le x\le 5$에서 풀면 $0\le x\le 1$이다. 또한 $x=1$와 마름모

$|y|+|x-2|=3$의 교점은 $(1,2),(1,-2)$이다. 따라서 주어진 영역에서 구하는 부등식의 영역은 세 부등식

$$\begin{cases} |y|+|x-2|\le 3 \\ |y|+|x+2|\le 3 \\ 0\le x\le 1 \end{cases}$$

을 만족하는 좌표평면의 점의 집합으로 아래와 같다.



(ㄹ) [영역(ⅳ)] $|y|+|x-2|\ge 3$이고 $|y|+|x+2|\le 3$ 일 때, 부등식을 풀면

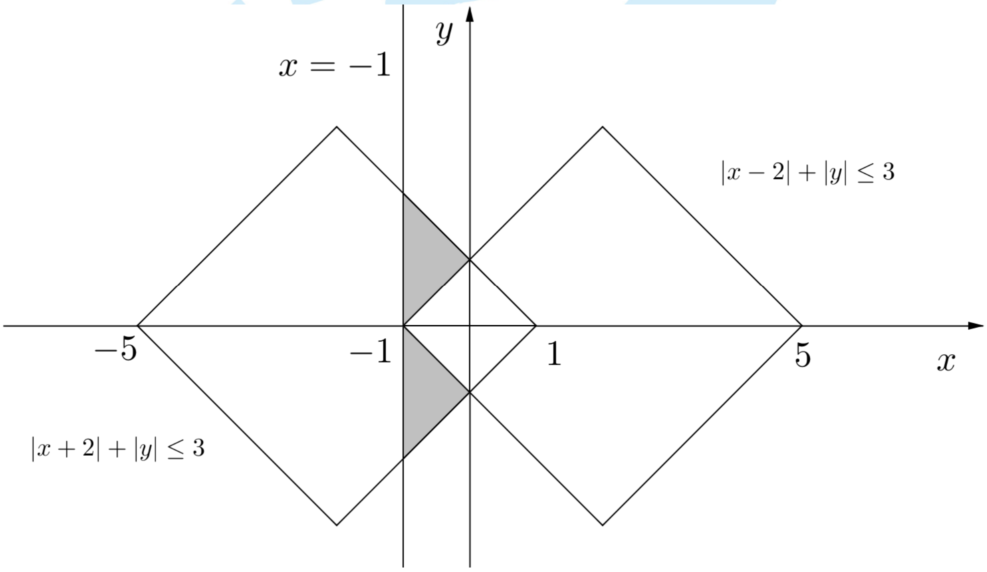
$|y|+|x-2|-3-|y|-|x+2|+3\le 2 \Rightarrow |x-2|-|x+2|\le 2$

이다. 주어진 영역에서 $-5\le x\le 0$이므로 부등식 $|x-2|-|x+2|\le 2$를 $-5\le x\le 0$에서 풀면 $-1\le x\le 0$이다. 직선 $x=-1$과 마름모 $|y|+|x+2|=3$의 교점은 $(-1,\ 2)$, $(-1,\ -2)$이다.

따라서 주어진 영역에서 구하는 부등식의 영역은 세 부등식

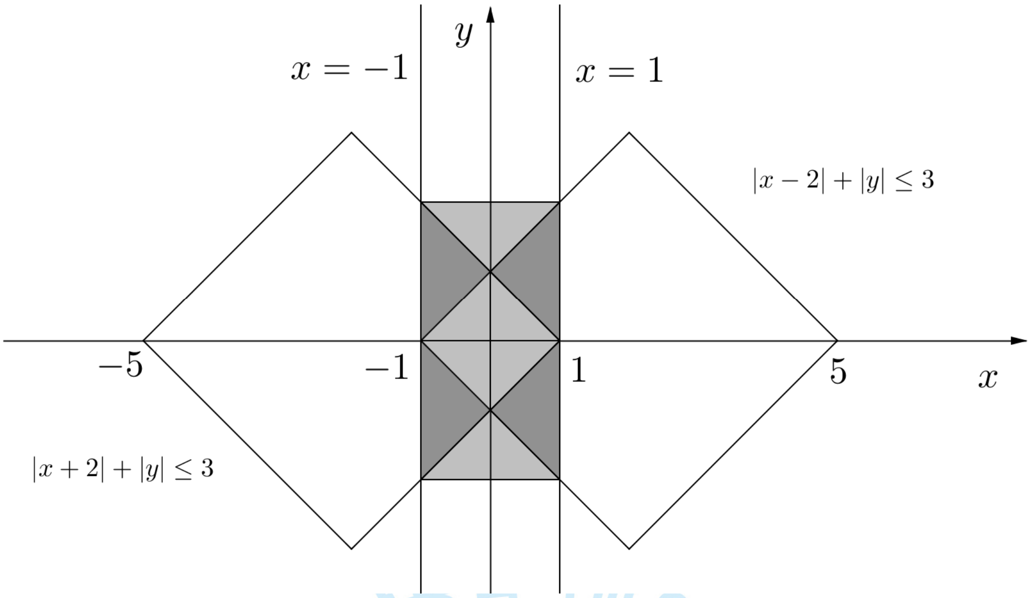
$$\begin{cases} |y|+|x-2|\ge 3 \\ |y|+|x+2|\le 3 \\ -1\le x\le 0 \end{cases}$$

을 만족하는 좌표평면의 점의 집합으로 다음 아래 그림과 같다



위 (ㄱ), (ㄴ), (ㄷ), (ㄹ)에서 구한 영역을 모두 합하여 구하는 부등식의 영역 D를 나타내면 아래와 같이 가로 2, 세로 4인 직사각형이다.

따라서 구하는 영역의 넓이는 8이다.


y
$x=-1$
$x=1$
$|x-2|+|y|\le 3$
-5
-1
1
5
x
$|x+2|+|y|\le 3$

[문제 3] 대학발표 예시답안

3-(1)

직선 l의 방정식을 $y=mx\,(m>0)$라 하면, 점 A,B는 각각 반지름의 길이가 a인 원과 반지름의 길이가 b인 원 위의 점이므로 $\mathrm{A}=(x, mx)$, $\mathrm{B}=\left(\frac{b}{a}x, \frac{mb}{a}x\right)$ 가 된다. 이 때 점 P의 좌표 $\left(x, \frac{mb}{a}x\right)$가 된다.

삼각형 ABP의 넓이는

$$S(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{b}{a}x\right)\left(mx-\frac{mb}{a}x\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{a}\right)^2 x^2 \quad (0<x<a)$$

가 된다.

한편 A는 반지름의 길이가 a인 원 위의 점이므로 $x^2+m^2x^2=a^2$이 되어 $m=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ 이 된다.

따라서 삼각형 ABP의 넓이는

$$S(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{a}\right)^2 x\sqrt{a^2-x^2}\ ,\ (0<x<a)$$

가 된다.

한편, $x\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2x^2-x^4}=\sqrt{\frac{a^4}{4}-\left(x^2-\frac{a^2}{2}\right)^2}$ 이므로 $S(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{4}(a-b)^2$이다.

3-(2)

점 A,B가 같은 직선 l위의 점이면서 각각 반지름의 길이가 a인 원과 반지름의 길이가 b인 원 위의 점이므로 $\mathrm{A}=(x, y)$, $\mathrm{B}=\left(\frac{b}{a}x, \frac{b}{a}y\right)$가 된다. 이 때 점 P의 좌표는 $\left(x, \frac{b}{a}y\right)$ 가 된다. $\mathrm{P}=\left(x, \frac{b}{a}y\right)=(X, Y)$라 하면 점 A (x, y)가 원 $x^2+y^2=a^2\,(0<x<a, 0<y<a)$ 위의 점이므로 $a^2=x^2+y^2=X^2+\left(\frac{a}{b}Y\right)^2$ 가 성립한다.

따라서 점 P(X, Y)들의 집합은 타원의 방정식 $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1\ \ (0<X<a, 0<Y<b)$을 만족한다.

3-(3)

두 선분 PQ, PQ′의 길이의 합이 일정하게 되면 점 P는 점 Q, Q′가 초점인 타원 위의 점이 된다. 즉, P (x, y)는 어떤 $c>d>0$에 대하여 , $b^2=c^2-d^2$을 만족한다. 한편 문항 (2) 의 결과로부터 P (x, y)는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로 $d^2\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)=y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$

이 성립한다.

$b^2 = c^2 - d^2$ 이므로 $c^2 - 2b^2 - \left(1 - \frac{b^2}{c^2} - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 = 0$ $(0 < x < a)$ 이 성립한다.

따라서 $a^2 = 2b^2$ 이 되고 a, b가 양수이므로 $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.

3-(4)

점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$가 타원 $\frac{x^2}{2} + y^2 = b^2$ 위의 점이므로 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서 접선의 방정식이 $\frac{x_1}{2}x + y_1 y = b^2$ 이 된다. 점과 직선사이의 거리에 의해서

$$\overline{\mathrm{QH}} = \frac{b\left|\frac{x_1}{2} - b\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + y_1^2}}, \quad \overline{\mathrm{Q'H'}} = \frac{b\left|\frac{x_1}{2} + b\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + y_1^2}}$$

이 되고, 두 점 사이의 거리에 의해

$\overline{\mathrm{QP}} = \sqrt{(x_1 - b)^2 + y_1^2}$, $\overline{\mathrm{Q'P}} = \sqrt{(x_1 + b)^2 + y_1^2}$

가 된다. 따라서

$$\frac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{QP}}} = \frac{\overline{\mathrm{Q'H'}}}{\overline{\mathrm{Q'P}}} \Leftrightarrow \frac{b^2\left(\frac{x_1}{2} - b\right)^2}{\left\{\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + y_1^2\right\}\left\{(x_1 - b)^2 + y_1^2\right\}} = \frac{b^2\left(\frac{x_1}{2} + b\right)^2}{\left\{\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + y_1^2\right\}\left\{(x_1 + b)^2 + y_1^2\right\}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{x_1}{2} - b\right)^2}{\left\{(x_1 - b)^2 + y_1^2\right\}} = \frac{\left(\frac{x_1}{2} + b\right)^2}{\left\{(x_1 + b)^2 + y_1^2\right\}}$$

점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$가 타원 $\frac{x^2}{2} + y^2 = b^2$ 위의 점이므로 $y_1^2 = b^2 - \frac{x_1^2}{2}$ 가 성립한다. 따라서

$$(x_1 - b)^2 + y_1^2 = (x_1 - b)^2 + b^2 - \frac{x_1^2}{2} = 2\left(\frac{x_1}{2} - b\right)^2, \quad (x_1 + b)^2 + y_1^2 = (x_1 + b)^2 + b^2 - \frac{x_1^2}{2} = 2\left(\frac{x_1}{2} + b\right)^2$$

가 되어 $\frac{\left(\frac{x_1}{2} - b\right)^2}{\left\{(x_1 - b)^2 + y_1^2\right\}} = \frac{\left(\frac{x_1}{2} + b\right)^2}{\left\{(x_1 + b)^2 + y_1^2\right\}}$ 이 된다.

따라서 $\frac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{QP}}} = \frac{\overline{\mathrm{Q'H'}}}{\overline{\mathrm{Q'P}}}$ 가 성립되는 것을 알 수 있다.

30 이화여자대학교 수시(자연계열Ⅱ)25)

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 2개 영역 등급 합 4 이내	수학(3문항, 10문제)	100분

[1] 정수 $n \ge 0$에 대하여 아래와 같이 표현된 수열 $\{I_n\}$이 있다.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 정수 $n \ge 0$에 대하여 $I_{n+1} \le I_n$이 성립함을 보이시오.

(2) 자연수 $n \ge 2$에 대하여 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$가 성립함을 보이시오.

(3) 극한값 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$을 구하시오.

25) 이화여자대학교 홈페이지

[2] 부등식 $||y|+|x-2|-3|+||y|+|x+2|-3|\le 2$를 만족하는 좌표평면 위의 점의 집합을 D라 할 때 다음 물음에 답하시오.(30점)

(1) 부등식 $(|y|+|x-2|-3)(|y|+|x+2|-3)\le 0$을 만족하는 영역을 좌표평면 위에 나타내시오.

(2) 부등식 $2|y|+|x-2|+|x+2|\le 8$을 만족하는 영역을 좌표평면 위에 나타내시오.

(3) 집합 D의 영역을 좌표평면 위에 나타내고 넓이를 구하시오.

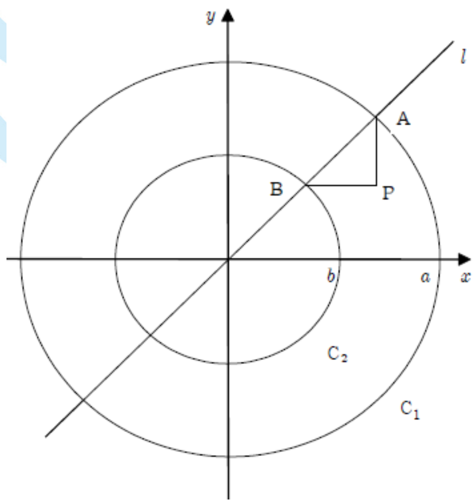
[3] 그림과 같이 $a>b>0$일 때 좌표평면 위에 두 원 $C_1 : x^2+y^2=a^2$, $C_2 : x^2+y^2=b^2$가 있다. 원점을 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 두 원 C_1, C_2와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 A,B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 수직인 직선과 점 B를 지나고 y축에 수직인 직선이 만나는 점을 P라 할 때, 다음 물음에 답하시오. [40점]

(1) 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값을 구하시오.

(2) 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하시오.

(3) 점 Q$(b,0)$과 점 Q$'(-b,0)$에 대하여 두 선분 PQ,PQ$'$의 길이의 합이 일정하도록 하는 $\frac{a}{b}$의 값을 구하시오.

(4) 문항 (2)의 도형의 방정식이 문항 (3)의 조건을 만족할 때 그 도형 위의 점 P에서의 접선을 l'라 하자. 점 Q에서 l'에 내린 수선의 발을 H라 하고 점 Q$'$에서 l'에 내린 수선의 발을 H$'$라 할 때, $\angle$QPH$=\angle$Q$'$PH$'$이 성립함을 보이시오.



풀어보기

문제1 함수 $f(x)=\sin\pi x$ 와 이차함수 $g(x)=x(x+1)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$ 를

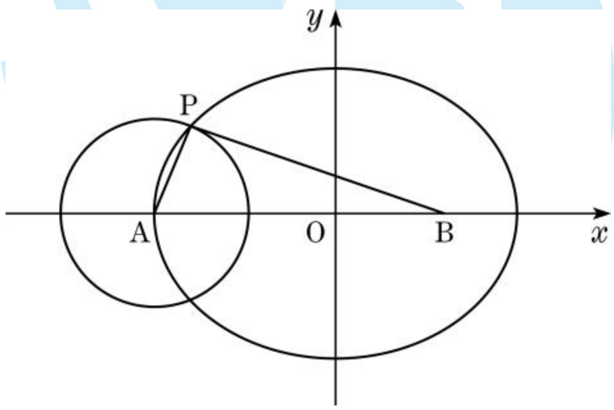
$$h(x)=\int_{g(x)}^{g(x+1)} f(t)\,dt$$

라 할 때, 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$ 에서 방정식 $h(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

(2015. 전국연합)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

문제2 그림과 같이 점 A$(-5,\ 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r 인 원과 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 의 한 교점을 P 라 하자. 점 B$(3,\ 0)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=10$ 일 때, $10r$ 의 값을 구하시오. (2013. 전국연합)



문제3

함수 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 에 대하여 $F(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt\ \ (x\geq 0)$ 일 때, $F'(a)=\ln 10$ 을 만족시키는 상수 a 의 값을 구하시오. (2014. 6월 모평)

예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ⑤

함수 $f(x)$는 주기가 2이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 실수 t와 정수 k에 대하여

$$\int_{t}^{t+2k} f(x)dx=0,\ \int_{-t}^{t+2k} f(x)dx=0$$

따라서 구간 $[-1, 1]$에서 방정식 $h(x)=0$

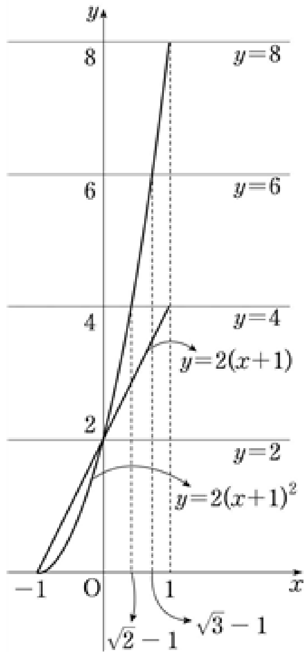
즉 $\displaystyle\int_{g(x)}^{g(x+1)} f(t)dt=0$을 만족시키려면 $g(x+1)-g(x)=2n$ (n은 정수)

또는 $g(x+1)+g(x)=2m$ (m은 정수)이어야 한다.

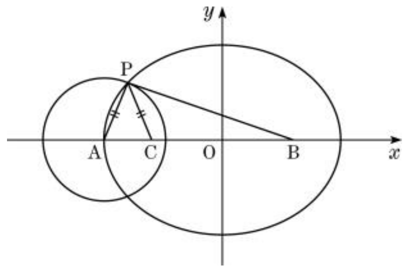
$g(x)=x(x+1)$이므로 $g(x+1)-g(x)=2(x+1)$

$g(x+1)+g(x)=2(x+1)^2$

구간 $[-1, 1]$에서 두 함수 $y=2(x+1)$, $y=2(x+1)^2$의 그래프는 그림과 같으므로 $2(x+1)=2n$(n은 정수)를 만족시키는 x의 값은 $-1,\ 0,\ 1$이고, $2(x+1)^2=2m$(m은 정수)를 만족시키는 x의 값은 $-1,\ 0,\ \sqrt{2}-1,\ \sqrt{3}-1,\ 1$이다. 따라서 서로 다른 실근의 개수는 5



풀어보기(문제2) 정답 26



타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 의 두 초점의 좌표를 각각 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ (단, $c>0$)이라 하면 $c^2=25-16=9$ 에서 $c=3$

따라서 점 B는 타원의 한 초점이고 다른 한 초점은 $C(-3, 0)$이다. $\overline{PB}+\overline{PC}=10$이고, $\overline{PA}+\overline{PB}=10$이므로 $\overline{PA}=\overline{PC}$. 타원의 장축의 길이는 10이므로 점 A의 좌표는 $(-5, 0)$이다. 즉, 삼각형 PAC는 이등변삼각형이므로 점 P의 x좌표는 -4이다.

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 에서 $y^2=16\left\{1-\frac{(-4)^2}{25}\right\}$

$$y=\frac{12}{5} \text{ 또는 } y=-\frac{12}{5}$$

$P\left(-4, \frac{12}{5}\right)$ 또는 $P\left(-4, -\frac{12}{5}\right)$이므로

$$r=\overline{PA}=\sqrt{(-5+4)^2+\left(0-\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{13}{5}$$

$\therefore\ 10r=26$

풀어보기(문제3)

정답 9

$x-t=u$라 하면 $t=x-u$

$$\begin{cases} t=0, & u=x \\ t=x, & u=0 \end{cases},\ dt=-du\text{이므로}$$

$$F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt=-\int_x^0 (x-u)f(u)du=\int_0^x (x-u)f(u)du$$

$$=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$$

$$F'(x)=\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(u)du$$

$$F'(a)=\int_0^a \frac{1}{u+1}du=[\ln(u+1)]_0^a=\ln(a+1)=\ln 10$$

$\therefore\ a=9$

[문제 1] 대학발표 예시답안

1-(1) 구간 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 에서 $0 \le \sin x \le 1$ 이기 때문에 $\sin^{n-1}x \le \sin x$ 이다. 그러므로

$$I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = I_n$$

이 성립한다.

1-(2)

1보다 큰 자연수 n에 대하여 부분적분법을 이용하면

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x \cdot \sin x\,dx \\
&= \left[\sin^{n-1}x(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}$$

이므로 $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ 이고 $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ 이다.

1-(3)

문항 (1)에 의하여 $I_{n+1} \le I_{n+1} \le I_n$ 이므로 $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} \le \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$ 이 성립하고, 문항(2)에 의하여 $\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{I_{n+2}}{I_n}$ 이다. 그러므로 $\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{I_{n+2}}{I_n} \le \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$ 이 참이고 수열의 조임정리에 의하여

$$1 = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} \le \lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$$

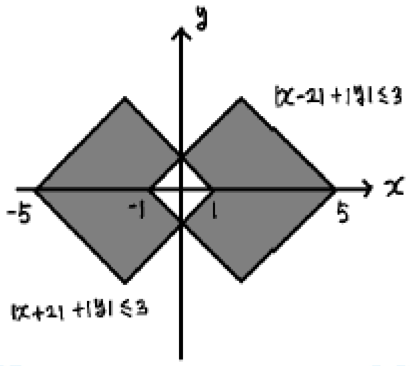
이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$ 이다.

[문제 2] 대학발표 예시답안

2-(1)

부등식 $(|y|+|x-2|-3)(|y|+|x+2|-3) \le 0$ 은 다음 두 영역으로 나누어진다.

(i) $|y|+|x-2|\le 3$ 이고 $|y|+|x+2|\ge 3$
(ii) $|y|+|x-2|\ge 3$ 이고 $|y|+|x+2|\le 3$
따라서 부등식을 만족하는 영역은 두 마름모 $|y|+|x-2|=3$ 와 $|y|+|x+2|=3$
내부의 점과 경계의 점의 합집합
$\{(x,y)||y|+|x-2|\le 3\}\cup\{(x,y)||y|+|x+2|\le 3\}$ 에서 교집합이 나타내는 영역의 내부
$\{(x,y)||y|+|x-2|<3,\ |y|+|x+2|<3\}$ 을 뺀 것이다. 따라서 구하는 영역은 아래와 같다.



2-(2)

주어진 부등식이 $2|y|+|x-2|+|x+2|\le 8$ 이 나타내는 영역은 y 가 양수 일 때,

$$y=-\frac{|x-2|+|x+2|}{2}+4$$

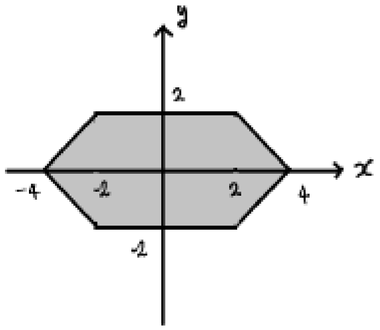
의 그래프 아래쪽의 점들과 y 가 음수 일 때

$$y=\frac{|x-2|+|x+2|}{2}-4$$

의 그래프 위쪽의 점들이다.
따라서 문항의 부등식이 나타내는 영역은 그래프

$$y=-\frac{|x-2|+|x+2|}{2}+4,\quad y=\frac{|x-2|+|x+2|}{2}-4$$

의 점들이다. 따라서 구하는 영역은 아래와 같다.



2-(3)

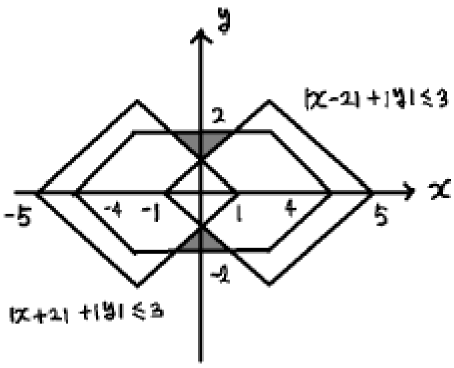
절댓값 부호를 풀기 위하여 두 마름모를
(i) $|y|+|x-2|\ge 3$ 이고 $|y|+|x+2|\ge 3$

(ii) $|y|+|x-2|\le 3$ 이고 $|y|+|x+2|\le 3$
(iii) $|y|+|x-2|\le 3$ 이고 $|y|+|x+2|\ge 3$
(iv) $|y|+|x-2|\ge 3$ 이고 $|y|+|x+2|\le 3$

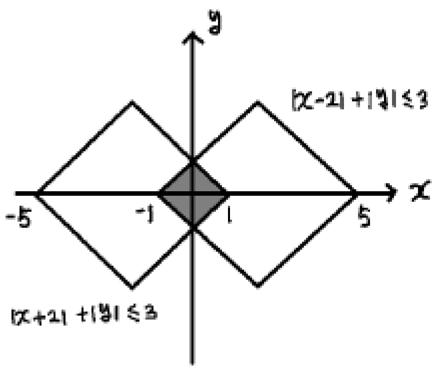
(ㄱ) [영역(i)] $|y|+|x-2|\ge 3$ 이고 $|y|+|x+2|\ge 3$ 일 때 부등식을 풀면
$|y|+|x-2|-3+|y|+|x+2|-3\le 2 \Rightarrow 2|y|+|x-2|+|x+2|\le 8$
도형 $2|y|+|x-2|+|x+2|=8$ 과 마름모 $|y|+|x-2|=3$ 의 교점은 $(1,1), (1,-1)$ 이고, 도형 $2|y|+|x-2|+|x+2|=8$ 과 마름모 $|y|+|x+2|=3$ 의 교점은 $(-1,1), (-1,-1)$ 이다.
따라서 주어진 영역은 세 부등식

$$\begin{cases}|y|+|x-2|\ge 3\\|y|+|x+2|\ge 3\\2|y|+|x-2|+|x+2|\le 8\end{cases}$$

을 모두 만족하는 좌표 평면의 점으로 문항 (2) 에 따라 구하는 영역은 아래와 같다.



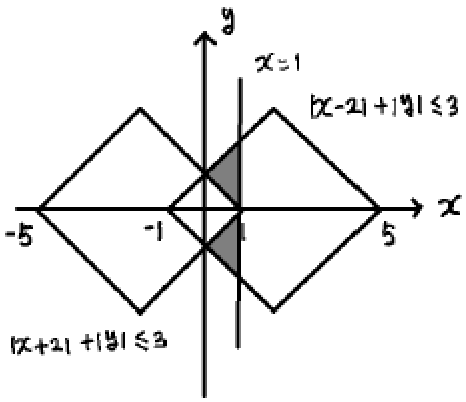
(ㄴ) [영역(ii)] $|y|+|x-2|\le 3$ 이고 $|y|+|x+2|\le 3$ 일 때, 부등식을 풀면
$|y|+|x-2|-3+|y|+|x+2|-3\ge -2 \Rightarrow 2|y|+|x-2|+|x+2|\ge 4$
이다. 주어진 영역에서 $-1\le x\le 1$ 이므로
$2|y|+|x-2|+|x+2|=2|y|+2-x+x+2\ge 4 \Rightarrow 2|y|\ge 0$
따라서 주어진 영역에서 모든 점이 부등식을 만족하며 구하는 영역은 두 부등식
$|y|+|x-2|\le 3$ 이고 $|y|+|x+2|\le 3$ 를 만족하는 평면위의 점으로 영역은 아래와 같다.



(ㄷ) [영역(iii)] 이고 $|y|+|x+2|\geq 3$ 일 때, 부등식을 풀면
$-|y|-|x-2|+3+|y|+|x+2|-3\leq 2 \Rightarrow -|x-2|+|x+2|\leq 2$
이다. 주어진 영역에서 $0\leq x\leq 5$이므로 부등식
$-|x-2|+|x+2|\leq 2$를 $0\leq x\leq 5$에서 풀면 $0\leq x\leq 1$이다. 또한 $x=1$와 마름모
$|y|+|x-2|=3$의 교점은 $(1,2), (1,-2)$이다. 따라서 주어진 영역에서 구하는 부등식의
영역은 세 부등식

$$\begin{cases} |y|+|x-2|\leq 3 \\ |y|+|x+2|\leq 3 \\ 0\leq x\leq 1 \end{cases}$$

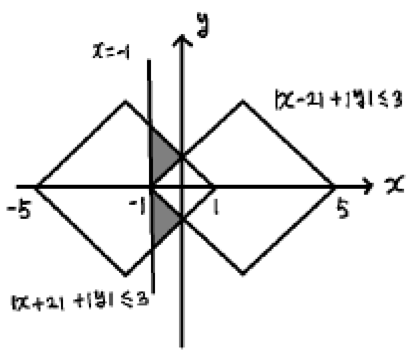
을 만족하는 좌표평면의 점의 집합으로 아래와 같다.



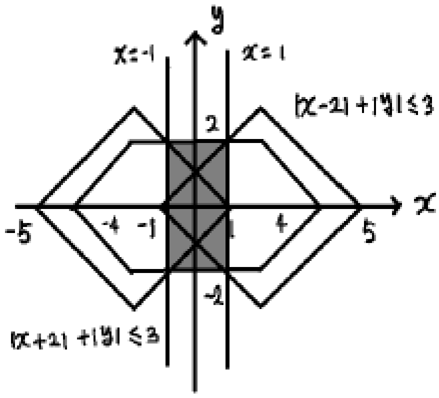
(ㄹ) [영역(iv)] $|y|+|x-2|\geq 3$이고 $|y|+|x+2|\leq 3$ 일 때, 부등식을 풀면
$|y|+|x-2|-3-|y|-|x+2|+3\leq 2 \Rightarrow |x-2|-|x+2|\leq 2$
이다. 주어진 영역에서 $-5\leq x\leq 0$이므로 부등식 $|x-2|-|x+2|\leq 2$를 $-5\leq x\leq 0$에서 풀면 $-1\leq x\leq 0$이다. 직선 $x=-1$과 마름모 $|y|+|x+2|=3$의 교점은 $(-1, 2), (-1, -2)$이다.
따라서 주어진 영역에서 구하는 부등식의 영역은 세 부등식

$$\begin{cases} |y|+|x-2|\geq 3 \\ |y|+|x+2|\leq 3 \\ -1\leq x\leq 0 \end{cases}$$

을 만족하는 좌표평면의 점의 집합으로 다음 아래 그림과 같다



위 (ㄱ), (ㄴ), (ㄷ), (ㄹ)에서 구한 영역을 모두 합하여 구하는 부등식의 영역 D를 나타내면 아래와 같이 가로 2, 세로 4인 직사각형이다.
따라서 구하는 영역의 넓이는 8이다.



[문제 3] 대학발표 예시답안

3-(1)

직선 l의 방정식을 $y=mx\,(m>0)$라 하면, 점 A, B는 각각 반지름의 길이가 a인 원과 반지름의 길이가 b인 원 위의 점이므로 A$=(x, mx)$, B $=\left(\frac{b}{a}x, \frac{mb}{a}x\right)$ 가 된다. 이 때 점 P의 좌표 $\left(x, \frac{mb}{a}x\right)$가 된다.

삼각형 ABP의 넓이는

$$S(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{b}{a}x\right)\left(mx-\frac{mb}{a}x\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{a}\right)^2x^2 \quad (0<x<a)$$

가 된다.

한편 A는 반지름의 길이가 a인 원 위의 점이므로 $x^2+m^2x^2=a^2$이 되어 $m=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ 이 된다.

따라서 삼각형 ABP의 넓이는

$$S(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{a}\right)^2 x\sqrt{a^2-x^2}\ ,\ (0<x<a)$$

가 된다.

한편, $x\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2x^2-x^4}=\sqrt{\frac{a^4}{4}-\left(x^2-\frac{a^2}{2}\right)^2}$ 이므로 $S(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{4}(a-b)^2$이다.

3-(2)

점 A, B가 같은 직선 l위의 점이면서 각각 반지름의 길이가 a인 원과 반지름의 길이가 b인 원 위의 점이므로 A$=(x, y)$, B$=\left(\frac{b}{a}x, \frac{b}{a}y\right)$가 된다. 이 때 점 P의 좌표는 $\left(x, \frac{b}{a}y\right)$가 된다. P$=\left(x, \frac{b}{a}y\right)=(X, Y)$라 하면 점 A$(x, y)$가 원 $x^2+y^2=a^2\,(0<x<a,\ 0<y<a)$ 위의 점이므로 $a^2=x^2+y^2=X^2+\left(\frac{a}{b}Y\right)^2$가 성립한다.

따라서 점 P(X, Y)들의 집합은 타원의 방정식 $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1\ \ (0<X<a,\ 0<Y<b)$을 만족한다.

3-(3)

두 선분 PQ, PQ$'$의 길이의 합이 일정하게 되면 점 P는 점 Q, Q$'$가 초점인 타원 위의 점이 된다. 즉, P(x, y)는 어떤 $c>d>0$에 대하여, $b^2=c^2-d^2$을 만족한다. 한편 문항 (2)의 결과로부터 P(x, y)는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로 $d^2\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)=y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$이 성립한다.

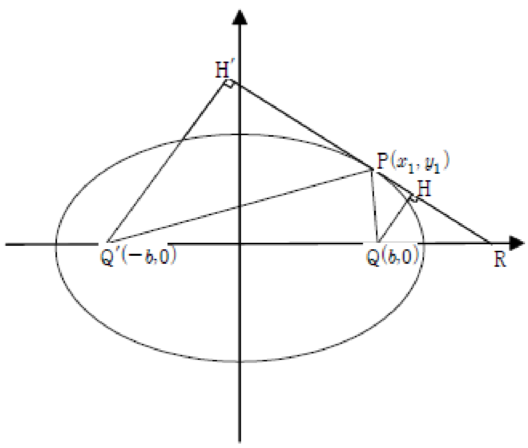
$b^2=c^2-d^2$이므로 $c^2-2b^2-\left(1-\frac{b^2}{c^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2=0\ \ (0<x<a)$이 성립한다.

따라서 $a^2=2b^2$이 되고 a, b가 양수이므로 $\frac{a}{b}=\sqrt{2}$임을 알 수 있다.

3-(4)

$\angle$QPH$=\angle$Q$'$PH$'$가 되는 것은

$\frac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{QP}}}=\sin\angle QPH=\sin\angle Q'PH'=\frac{\overline{Q'H'}}{\overline{Q'P}}$이 되는 것과 같다.



점 $P(x_1, y_1)$가 타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=b^2$ 위의 점이므로 $P(x_1, y_1)$에서 접선의 방정식이 $\frac{x_1}{2}x+y_1y=b^2$이 된다. 점과 직선사이의 거리에 의해서

$$\overline{QH}=\frac{b\left|\frac{x_1}{2}-b\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{2}\right)^2+y_1^2}}, \quad \overline{Q'H'}=\frac{b\left|\frac{x_1}{2}+b\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{2}\right)^2+y_1^2}}$$

이 되고, 두 점 사이의 거리에 의해

$\overline{QP}=\sqrt{(x_1-b)^2+y_1^2}$, $\overline{Q'P}=\sqrt{(x_1+b)^2+y_1^2}$

가 된다. 따라서

$$\frac{\overline{QH}}{\overline{QP}}=\frac{\overline{Q'H'}}{\overline{Q'P}} \Leftrightarrow \frac{b^2\left(\frac{x_1}{2}-b\right)^2}{\left\{\left(\frac{x_1}{2}\right)^2+y_1^2\right\}\left\{(x_1-b)^2+y_1^2\right\}}=\frac{b^2\left(\frac{x_1}{2}+b\right)^2}{\left\{\left(\frac{x_1}{2}\right)^2+y_1^2\right\}\left\{(x_1+b)^2+y_1^2\right\}}$$

점 $P(x_1, y_1)$가 타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=b^2$ 위의 점이므로 $y_1^2=b^2-\frac{x_1^2}{2}$가 성립한다. 따라서

$$(x_1-b)^2+y_1^2=(x_1-b)^2+b^2-\frac{x_1^2}{2}=2\left(\frac{x_1}{2}-b\right)^2, \quad (x_1+b)^2+y_1^2=(x_1+b)^2+b^2-\frac{x_1^2}{2}=2\left(\frac{x_1}{2}+b\right)^2$$

가 되어 $\frac{\left(\frac{x_1}{2}-b\right)^2}{\left\{(x_1-b)^2+y_1^2\right\}}=\frac{\left(\frac{x_1}{2}+b\right)^2}{\left\{(x_1+b)^2+y_1^2\right\}}$이 된다.

따라서 $\frac{\overline{QH}}{\overline{QP}}=\frac{\overline{Q'H'}}{\overline{Q'P}}$가 성립되어 $\angle QPH=\angle Q'PH'$가 되는 것을 알 수 있다.

31 인하대학교 수시 – 오전[26)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형 (반영 점수는 100점)	1개 영역 이상 2등급 이내 (2018대입 최저 없음)	수학 (4문항, 12문제)	120분

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (25점)

(가) 복소수 $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 하나의 해로서 $\omega^3=1$이 성립한다.

(나) 이항정리에 의해 모든 자연수 n과 복소수 α에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$(1+\alpha)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1\alpha + {}_nC_2\alpha^2 + \cdots + {}_nC_n\alpha^n$$

(※) 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같이 이항계수의 합으로 정의된다. 이때, m은 $\dfrac{n}{3}$을 넘지 않는 최대 정수이다.

$$a_n = {}_nC_0 + {}_nC_3 + {}_nC_6 + \cdots + {}_nC_{3m}$$

(1-1) $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 음이 아닌 정수 k에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오. (5점)

$$\frac{1+\omega^k+\omega^{2k}}{3} = \begin{cases} 1, & k\text{가 } 3\text{의 배수일 때} \\ 0, & k\text{가 } 3\text{의 배수가 아닐 때} \end{cases}$$

(1-2) 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$a_n = \frac{2^n + (1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n}{3}$$

(1-3) 자연수 n이 3의 배수일 때, $\left| a_n - \dfrac{2^n}{3} \right|$ 의 값을 구하시오. (5점)

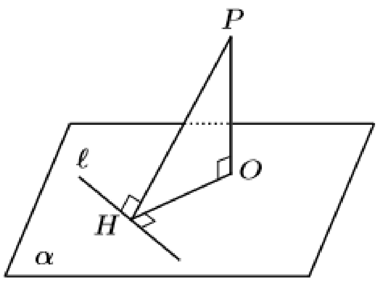
(1-4) 자연수 n이 3의 배수가 아닐 때, $\left| a_n - \dfrac{2^n}{3} \right|$ 의 값을 구하시오. (5점)

26) 인하대학교 홈페이지

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (25점)

(가) 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 평면을 결정한다.
(나) 직선 l이 평면 α위의 서로 다른 두 직선 m, n의 교점 O를 지나고 m, n과 각각 수직이면 직선 l은 평면 α에 수직이다.
(다) 평면 α위에 있지 않은 한 점 P와 평면 α위의 직선 l, 직선 l위의 한 점 H, 평면 α위에 있으면서 직선 l위에 있지 않은 점 O에 대하여 다음의 성질이 성립한다. 이를 삼수선의 정리라고 한다.

(1) $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{OH}} \perp l$이면 $\overline{\mathrm{PH}} \perp l$이다.
(2) $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{PH}} \perp l$이면 $\overline{\mathrm{OH}} \perp l$이다.
(3) $\overline{\mathrm{PH}} \perp l$, $\overline{\mathrm{OH}} \perp l$, $\overline{\mathrm{PO}} \perp \overline{\mathrm{OH}}$ 이면 $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha$이다.



※ 평면 α와 평면 α위에 있지 않은 두 점 P, Q가 주어졌다. (단, 직선 PQ는 α와 수직이 아니다.) 점 P를 지나고 직선 PQ에 수직인 평면을 α'라 두고 α와 α'의 교선을 l이라 하자. 점 Q에서 α에 내린 수선의 발을 R라 하고, R에서 l에 내린 수선의 발을 S라 하자.

(2-1) 선분 PS와 l이 수직임을 보이시오. (5점)

(2-2) 네 점 P, Q, R, S는 같은 평면에 있음을 보이시오. (10점)

(2-3) 좌표공간의 점 P, Q에 대하여 Q의 좌표가 $(2, 3, 4)$이고, α가 xy평면이라 하자. 직선 l의 방정식이 $x+2y=6, z=0$일 때, $\triangle$PRS의 외접원의 반지름을 구하시오. (10점)

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (25점)

(가) 'x는 6의 약수이다.', '$x=2x-1$'과 같이 변수 x를 포함한 문장이나 식의 참, 거짓이 x의 값에 따라 판별될 때, 그 문장이나 식을 조건이라고 한다. 또, 전체집합 U의 원소 중에서 조건을 참이 되게 하는 x의 값의 집합을 그 조건의 진리집합이라고 한다.

(나) 명제 $p \to q$에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때
- $P \subset Q$이면 명제 $p \to q$는 참이다.
- $P \not\subset Q$이면 명제 $p \to q$는 거짓이다.

(※) a, b가 상수일 때, 실수의 집합을 전체집합으로 하는 조건 p, q, r가 다음과 같다.
$p : x > a-b$ 이고 $x < b-a$이다.
$q : x > a-b$이고 $x < b-a$이며, x는 정수이다.
$r : x \geq a+1$ 또는 $x \leq b-2$이다.

(3-1) 조건 p의 진리집합이 공집합일 때, 두 상수 a, b가 만족하는 부등식을 구하시오. (7점)

(3-2) 명제 $p \to r$가 거짓이 되도록 하는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 모두 구하시오. (10점)

(3-3) 명제 $q \to r$가 거짓이 되도록 하는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 모두 구하시오. (10점)

[문제 4] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (25점)

(가) 닫힌 구간 $[a,b]$에서 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 연속이고 $f(x) \le g(x)$이면 다음 부등식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

(나) 모든 실수 x에 대하여 함수 $g(x)$가 미분가능하고 $g(x) > 0$일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}g(x)\right) = e^{-x}\left(g'(x) - g(x)\right)$$

(다) 모든 실수 x에 대하여 함수 $g(x)$가 미분가능하고 $g(x) > 0$일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

(※) 실수 전체에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 미분가능하다.

(4-1) 실수 $0 \le x \le 3$에 대하여 $f'(x) \ge 0$이고, $f(0) = 1$, $f(3) = 2$인 함수 $f(x)$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (5점)

$$1 \le \int_1^2 f(x)dx \le 2$$

(4-2) 실수 $x \ge 0$에 대하여 $g'(x) \ge g(x)$이고 $g(0) = 1$일 때, $x \ge 0$에서 $g(x) \ge e^x$임을 보이시오. (10점)

(4-3) 실수 $0 \le x \le 3$에 대하여 $g'(x) \ge g(x)$이고, $g(0) = 1$, $g(3) = e^4$인 함수 $g(x)$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$\frac{3}{2} \le \int_1^2 \ln g(x)dx \le \frac{5}{2}$$

풀어보기

문제1

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+2ax$ 가 구간 $(-\infty,\infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 M이라 하고, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은? (2012. 6월 평가원)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

문제2

좌표공간에 점 $\mathrm{A}(2,2,1)$과 평면 $\alpha: x+2y+2z-14=0$이 있다. 평면 α위의 점 P가 $\overline{\mathrm{AP}}\le 3$을 만족시킬 때, 점 P가 나타내는 도형의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는? (2016. 대수능)

① $\frac{14}{3}\pi$ ② $\frac{13}{3}\pi$ ③ 4π ④ $\frac{11}{3}\pi$ ⑤ $\frac{10}{3}\pi$

문제3

좌표공간에 서로 수직인 두 평면 α와 β가 있다. 평면 α위의 두 점 A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=3\sqrt{5}$ 이고 직선 AB는 평면 β에 평행하다. 점 A와 평면 β사이의 거리가 2이고, 평면 β위의 점 P와 평면 α사이의 거리는 4일 때, 삼각형 PAB의 넓이를 구하시오. (2016. 대수능)

문제4

50이하의 자연수 n중에서 $\sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k$의 값이 3의 배수가 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. (2010. 6월 평가원)

예시답안

풀어보기(문제1)

$f(x)=x^3+ax^2+2ax$ 이므로 $f'(x)=3x^2+2ax+2a$ 이다.
삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$을 만족해야 한다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=3x^2+2ax+2a\geq 0$이기 위해서는 이차방정식 $3x^2+2ax+2a=0$이 중근을 가지거나 허근을 가져야 하므로, $a^2-6a\leq 0$이 성립해야 한다. 이 부등식을 풀면 $0\leq a\leq 6$이므로 $M=6, m=0$이다. 즉, $M-m=6-0=6$이다.

풀어보기(문제2)

점 $\mathrm{A}(2,2,1)$과 평면 $\alpha: x+2y+2z-14=0$ 사이의 거리를 d라 하면,

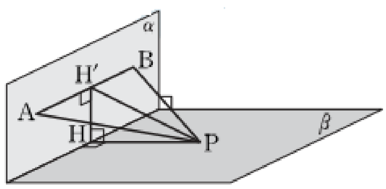
$$d=\frac{|2+2\times 2+2\times 1-14|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=2$$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}\leq 3$인 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$인 원의 경계 또는 내부이고 그 넓이는 5π이다. 평면 α의 법선벡터가 $\overrightarrow{n_1}=(1,2,2)$이고, xy평면의 법선벡터가 $\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$이므로 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면,

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\\ &= \frac{|1\times 0+2\times 0+2\times 1|}{\sqrt{9}\sqrt{1}}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

그러므로 구하는 정사영의 넓이를 S라 하면, $S=5\pi\cos\theta=\dfrac{10}{3}\pi$이다.

풀어보기(문제3)



그림과 같이 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}\perp\alpha, \overline{\mathrm{HH'}}\perp$(직선AB)이다.
그러므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PH'}}\perp$(직선AB)이다.

한편, 점 A와 평면 β사이의 거리가 2이고 직선 AB가 평면 β와 평행하므로 $\overline{\mathrm{HH}'}=2$
또 점 P와 평면 α사이의 거리가 4이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=4$
그러므로 직각삼각형 PHH′에서 $\overline{\mathrm{PH}'}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ 이다.
따라서 삼각형 PAB의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}=15$$

풀어보기(문제4)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k &= {}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n \\ &= ({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n)-{}_n\mathrm{C}_0 \\ &= 2^n-1\end{aligned}$$

2^n-1이 3의 배수가 되려면 2^n을 3으로 나눈 나머지가 1이 되어야 한다. 3으로 나눈 나머지가 1인 수는 $2^2, 2^4, 2^6, \cdots, 2^{50}$이므로 이를 만족하는 n의 개수는 25이다.

[문제1] 대학발표 예시답안

(1-1) 제시문 (가)에 의해, $1+\omega+\omega^2=0$이고 $\omega^3=1$이다.

(i) $k=0$일 때 ; $\dfrac{1+\omega^k+\omega^{2k}}{3}=\dfrac{1+\omega^0+\omega^0}{3}=1$

(ii) $k=1$일 때 ; $\dfrac{1+\omega^k+\omega^{2k}}{3}=\dfrac{1+\omega^1+\omega^2}{3}=0$

(iii) $k=2$일 때 ; $\dfrac{1+\omega^k+\omega^{2k}}{3}=\dfrac{1+\omega^2+\omega^4}{3}=\dfrac{1+\omega^2+\omega}{3}=0$

$\omega^3=1$이므로 $\dfrac{1+\omega^k+\omega^{2k}}{3}$의 값은 k가 3의 배수일 때 1, k가 3의 배수가 아닐 때 0이 된다.

(1-2) 이항정리에 의해서 $2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k$

$(1+\omega)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\,\omega^k$

$(1+\omega^2)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\,\omega^{2k}$ 이므로

$$\frac{2^n+(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n}{3} = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k + \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\omega^k + \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\omega^{2k}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\left(\frac{1+\omega^k+\omega^{2k}}{3}\right)$$
$$= {}_nC_0 + {}_nC_3 + {}_nC_6 + \cdots + {}_nC_{3m}$$
$$= a_n$$

(1-3) $1+\omega+\omega^2=0$을 이용하면,

$$a_n - \frac{2^n}{3} = \frac{(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n}{3}$$
$$= \frac{(-\omega^2)^n+(-\omega)^n}{3}$$
$$= (-1)^n\left(\frac{\omega^{2n}+\omega^n}{3}\right)$$
$$= (-1)^n\left(\frac{\omega^{2n}+\omega^n+1-1}{3}\right)$$

n이 3의 배수일 때 $1+\omega^n+\omega^{2n}=3$이므로 $\left|a_n - \frac{2^n}{3}\right| = \frac{2}{3}$이다.

(1-4) 위의 (1-3)을 이용하면,

n이 3의 배수가 아닐 때 $\left|a_n - \frac{2^n}{3}\right| = \frac{1}{3}$이다.

[문제2] 대학발표 예시답안

(2-1) $\overline{QR}\perp\alpha$, $\overline{RS}\perp l$이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{QS}\perp l$이다.
$\overline{PQ}\perp\alpha'$, $\overline{QS}\perp l$이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{PS}\perp l$이다.

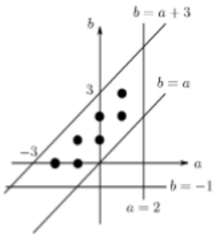
(2-2) 점 Q, R, S를 포함하는 평면을 β라 하고, 점 Q, P, S를 포함하는 평면을 γ라 하고, 제시문 (가)를 이용하여 평면 β와 γ가 일치함을 보이면 충분하다.
$l\perp\overline{RS}$, $l\perp\overline{QS}$이므로 $l\perp\beta$, 즉 β는 직선 l과 수직이고 점 S를 지나는 평면이다.
$l\perp\overline{PS}$, $l\perp\overline{QS}$이므로 $l\perp\gamma$, 즉 γ는 직선 l과 수직이고 점 S를 지나는 평면이다.
그러므로, 평면 β와 γ는 같은 평면이다.

(2-3) 사각형 PQRS에서 $\angle QPS=\angle QRS=90^\circ$이다. 따라서 점 P, Q, R, S는 선분 QS를 지름으로 하는 원 위의 점들이고, 이 원이 삼각형 PRS의 외접원임을 알 수 있다. 점 Q의 좌표가 $(2,3,4)$이므로 점 R의 좌표가 $(2,3,0)$임을 알고, xy평면 위의 점 $R(2,3,0)$에서 직선 $x+2y=6$까지의 거리를 구하면, $\overline{RS}=\frac{2}{\sqrt{5}}$이다. 그러므로 $\overline{QS}=\sqrt{\frac{84}{5}}$이고, $\triangle PRS$의 외접원의 반지름은 $\frac{\sqrt{105}}{5}$이다.

[문제3] 대학발표 예시답안

(3-1) 조건 p의 진리집합이 공집합이 되려면 $b-a \leq a-b$가 성립해야 하므로, $a \geq b$이다.

(3-2) 조건 p의 진리집합을 P, 조건 r의 진리집합을 R라 하자.
$P \subset R$가 성립하는 경우는 다음 중 하나가 성립할 때이다.
① $P=\varnothing$인 경우 : $a \geq b$인 경우
② R이 실수 전체의 집합인 경우 : $b-2 \geq a+1$, 즉, $b \geq a+3$인 경우
③ $P=(a-b, b-a)$, $R=(-\infty, b-2] \cup [a+1, \infty)$이고 $b-a \leq b-2$ 또는 $a-b \geq a+1$인 경우 : $a \geq 2$ 또는 $b \leq -1$인 경우



$p \rightarrow r$가 거짓인 경우는 순서쌍 (a, b)가 그림에서 사다리꼴의 내부에 있을 때이므로 구하고자 하는 순서쌍은 $(-2, 0)$, $(-1, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$이다.

(3-3) 조건 q이 진리집합을 Q라고 하면, 정수 $a<b$에 대하여
$Q=\{x \mid x\text{는 정수}, a-b+1 \leq x \leq b-a-1\}$이다.
모든 정수가 R의 원소인 것은 $(b-2)+1 \geq a+1$, 즉 $b \geq a+2$일 때이므로
$Q \subset R$인 경우는 다음 중 하나가 성립하는 경우이다.
① $a \geq b$
② $b \geq a+2$
③ $b-a-1 \leq b-2$ 또는 $a-b+1 \geq a+1$
즉, 명제 $q \rightarrow r$이 거짓이 되도록 하는 순서쌍은 $a<b$, $b<a+2$, $a<1$이고 $b>0$을 모두 만족하여야 한다. (3-2)에서 이 세 가지 조건을 모두 만족하는 것은 $(0, 1)$뿐이므로 답은 $(0, 1)$이다.

[문제4] 대학발표 예시답안

(4-1) $f'(x) \geq 0$이므로 $f(x)$는 증가함수이므로 $0 \leq x \leq 3$에서
$1=f(0) \leq f(x) \leq f(3)=2$ 가 성립한다. 그러므로,
제시문 (가)에 의해서 $1=\int_1^2 1\,dx \leq \int_1^2 f(x)dx \leq \int_1^2 2\,dx \leq 2$가 성립한다.

(4-2) $h(x)=e^{-x}g(x)$라 두자.

제시문 (나)에 의하면 $h'(x)=e^{-x}(g'(x)-g(x))\geq 0$이므로 $h(x)$는 증가함수이고, 모든 $x\geq 0$에 대하여 $h(x)\geq h(0)=1$이다. 즉, $g(x)=e^{x}h(x)\geq e^{x}$이다.

(4-3) 위의 풀이에서 $h(x)=e^{-x}g(x)$가 증가함수이므로,
$0\leq x\leq 3$일 때 $1\leq h(x)\leq h(3)=e$이다.
따라서 $e^{x}\leq g(x)\leq e^{x+1}$을 얻고, 로그함수는 증가함수이므로 $x\leq \ln g(x)\leq x+1$임을 알 수 있다. 제시문 (가)에 의해서 $\frac{3}{2}=\int_{1}^{2}x\,dx\leq \int_{1}^{2}\ln g(x)\leq \int_{1}^{2}(x+1)dx=\frac{5}{2}$를 얻는다.

32 인하대학교 수시 – 오후[27)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형 (반영 점수는 100점)	1개 영역 이상 2등급 이내	수학 (4문항, 12문제)	120분

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (25점)

(가) 양의 실수 a에 대하여 $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$이다.

(나) 어떤 명제 $p(n)$이 모든 자연수 $n\geq 2$에 대하여 성립함을 증명할 때, 수학적 귀납법을 이용하려면 다음 두 가지를 보여야 한다.

(ⅰ) $n=2$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=k\geq 2$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(※) 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 부등식을 만족한다.

$$a_{n+1}\geq \frac{na_n}{{a_n}^2+n-1}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(1-1) 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (6점)

$$\frac{n}{a_{n+1}}-\frac{n-1}{a_n}\leq a_n$$

(1-2) 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (7점)

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geq \frac{n}{a_{n+1}}$$

(1-3) 수학적 귀납법을 이용하여, 모든 자연수 $n\geq 2$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (12점)

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geq n$$

27) 인하대학교 홈페이지

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (25점)

(가) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, x가 증가하면서 $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 증가하다가 감소하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하며, 함숫값 $f(a)$를 극댓값이라 한다. 또 함수 $f(x)$가 $x=b$에서 연속이고, x가 증가하면서 $x=b$의 좌우에서 $f(x)$가 감소하다가 증가하면 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극소라 하며, 함숫값 $f(b)$를 극솟값이라 한다. 이때 극댓값과 극솟값을 모두 극값이라 한다.

(나) 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

- 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 가진다.
- 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 가진다.

※ 상수 a, b에 대하여 사차함수 $f(x)$를 $f(x)=x^4-2(a+b)x^3+6abx^2+2a^2b^2x$라 하자.

(2-1) 함수 $f(x)$가 단 하나의 극값을 갖도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)가 나타내는 영역을 좌표평면 위에 나타내시오. (15점)

(2-2) 집합 $\{\alpha | f(x)\text{는 } x=\alpha\text{에서 극값을 가진다.}\}$의 원소가 서로 다른 세 음수이고, 두 수 $2a$, $2b$가 정수인 $a, b\ (a<b)$의 순서쌍 (a, b)를 모두 구하시오. (10점)

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (25점)

(가) 공간 상의 세 점 O, A, B에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$는 $\vec{b}-\vec{a}$로 타나낼 수 있다. 또한, 선분 AB를 $m:n\,(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

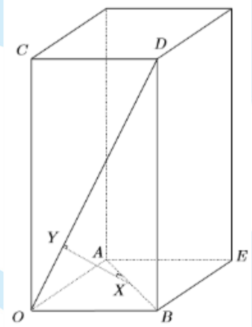
따라서, 선분 AB 위의 임의의 점 P에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\ (0\le t\le 1)$$

(나) 영벡터가 아닌 두 벡터가 수직일 필요충분조건은 두 벡터의 내적이 0인 것이다. 한편, 벡터의 내적은 다음과 같이 분배법칙을 만족한다.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

(※) 그림과 같이 직육면체에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=1$이고 $\overline{\mathrm{OC}}=2$이다. 직선 AB 위의 점 X, 직선 OD 위의 점 Y에 대하여, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$가 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$에 수직이다.



(3-1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$라 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$를

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OY}}=s\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s(\vec{b}+\vec{c})$$

로 나타낼 때, 실수 t와 s의 값을 구하시오.(10점)

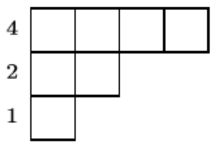
(3-2) 선분 XY의 길이를 구하시오. (5점)

(3-3) 직선 l은 밑면 OAEB를 포함하는 평면에 놓여 있고, X를 지나며 직선 AB와 수직이다. 점 Y와 l을 포함하는 평면이 주어진 직육면체를 자른 단면의 넓이를 구하시오. (10점)

[문제 4] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (25점)

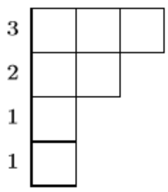
(가) 자연수를 순서를 생각하지 않고 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 것을 **자연수의 분할**이라고 하고, 특히 자연수 n을 k개의 자연수로 분할할 때, 이 분할의 수를 기호로 $P(n, k)$와 같이 나타낸다. (단, $n < k$이면 $P(n, k) = 0$이다.)

(나) 자연수 7의 분할 4+2+1은 다음과 같이 그림으로 표현할 수 있다.



$4+2+1$

위의 그림에서 가로와 세로를 바꾼 것을 생각하면, 자연수 분할 4+2+1로부터 자연수 7의 분할 3+2+1+1을 얻는다.



$3+2+1+1$

(※) 자연수 전체의 집합을 $\mathrm{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$이라 하자. 자연수 $n \geq 10$에 대하여 N의 부분집합 중 원소의 개수가 4이고 원소의 합이 n인 것의 개수를 a_n이라 하자. 자연수 $n \geq 1$에 대하여 n을 4이하인 자연수로 분할하는 경우의 수를 b_n이라 하자. 예를 들어, $a_{10} = 1$, $a_{11} = 1$이고, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$이다.

(4-1) a_{13}과 a_{15}의 값을 구하시오. (5점)

(4-2) b_4와 b_6의 값을 구하시오. (5점)

(4-3) 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오. (5점)

$$b_n = P(n, 1) + P(n, 2) + P(n, 3) + P(n, 4)$$

(4-4) 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$b_n = a_{n+10}$$

풀어보기

문제1

첫째항이 a인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+(-1)^n\times 2 & (n\text{이 }3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n+1 & (n\text{이 }3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15}=43$일 때, a의 값은? (2017. 평가원)

문제2

좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(5, 5, a)$, $\mathrm{B}(0, 0, 3)$을 지나는 직선과 직선 $x=4-y=z-1$이 서로 수직일 때, a의 값은? (2014. 대수능)

문제3

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)=x^3f(x)-7$
(나) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-2}=2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) (2016. 대수능)

문제4

자연수 7의 분할 중에서 3이하의 자연수의 합으로 나타내어지는 서로 다른 분할의 수는? (2011. 대수능)

예시답안

풀어보기(문제1)

주어진 식의 n에 $1, 2, 3, \cdots$ 을 차례로 대입하여 일정한 규칙을 찾아보자.

$a_2 = a_1 + (-1) \times 2 = a - 2$

$a_3 = a_2 + (-1)^2 \times 2 = a$

$a_4 = a_3 + 1 = a + 1$

$a_5 = a_4 + (-1)^4 \times 2 = a + 3$

$a_6 = a_5 + (-1)^5 \times 2 = a + 1$

$a_7 = a_6 + 1 = a + 2$

$a_8 = a_7 + (-1)^7 \times 2 = a$

$a_9 = a_8 + (-1)^8 \times 2 = a + 2$

$\vdots$

여기에서 수열 $a_3, a_6, a_9, \cdots$ 는 첫째항이 a이고 공차가 1인 등차수열을 이룬다. 그러므로, $a_{3k} = a + (k-1) \times 1 = a + k - 1$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$에서 $a_{15} = a + 5 - 1 = 43$임을 알 수 있고, 여기에서 $a = 39$를 얻는다.

풀어보기(문제2)

두 직선이 수직이 되려면, 직선 AB의 방향벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-5, -5, 3-a)$와 직선 $x = 4 - y = z - 1$의 방향벡터 $(1, -1, 1)$의 내적이 0이 되어야 한다.

즉, $(-5, -5, 3-a) \cdot (1, -1, 1) = -5 + 5 + (3-a) = 0$

$\therefore a = 3$

풀어보기(문제3)

조건 (나)에서 $\lim_{x \to 2}\{f(x) - g(x)\} = 0$ 이어야 하므로 $f(2) = g(2)$를 얻는다.

조건 (가)의 식에 $x = 2$를 대입하여 정리하면 $g(2) = 8f(2) - 7 = 8g(2) - 7$,

즉 $g(2) = 1$임을 알 수 있다.

조건 (나)를 정리하면,

$$\lim_{x \to 2}\frac{f(x) - g(x)}{x-2} = \lim_{x \to 2}\frac{\{f(x) - f(2)\} - \{g(x) - g(2)\}}{x-2} = f'(2) - g'(2)$$

(가)의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x)$ 이므로

$g'(2) = 12f(2) + 8f'(2) = 8g'(2) + 28$ 즉, $g'(2) = -4$이다.

그러므로 곡선 $y = g(x)$위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식은 $y = -4x + 9$이고

$a = -4$, $b = 9$이다.

$\therefore\ a^2 + b^2 = 97$

풀어보기(문제4)

자연수 7을 1, 2, 3의 세 수로 분할하는 경우의 수이므로

$$\begin{aligned} 7 &= 1+1+1+1+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1+2 \\ &= 1+1+1+2+2 \\ &= 1+2+2+2 \\ &= 1+1+1+1+3 \\ &= 1+1+2+3 \\ &= 1+3+3 \\ &= 2+2+3 \end{aligned}$$

그러므로 분할의 수는 8이다.

[문제1] 대학발표 예시답안

(1-1) 부등식 $a_{n+1} \ge \dfrac{na_n}{{a_n}^2 + n - 1}$을 변형해 보자.

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} \le \frac{{a_n}^2 + n - 1}{na_n}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{a_{n+1}} \le a_n + \frac{n-1}{a_n}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{a_{n+1}} - \frac{n-1}{a_n} \le a_n$$

(1-2) 위의 결과를 이용하면,

$a_1 \ge \dfrac{1}{a_2} - \dfrac{0}{a_1}$, $a_2 \ge \dfrac{2}{a_3} - \dfrac{1}{a_2}$, $\cdots$, $a_n \ge \dfrac{n}{a_{n+1}} - \dfrac{n-1}{a_n}$을 얻는다.

부등식의 합을 구해 보면,

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge \left(\dfrac{1}{a_2} - \dfrac{0}{a_1}\right) + \left(\dfrac{2}{a_3} - \dfrac{1}{a_2}\right) + \cdots + \left(\dfrac{n}{a_{n+1}} - \dfrac{n-1}{a_n}\right) = \dfrac{n}{a_{n+1}}$이다.

(1-3) (ⅰ) $n = 2$일 때, $a_1 \ge \dfrac{1}{a_2}$에서 $a_2 \ge \dfrac{1}{a_1}$이다. 따라서

$a_1 + a_2 \ge a_1 + \dfrac{1}{a_1} \ge 2$이 성립한다.

(ⅱ) $a_1 + \cdots + a_k \ge k$라 가정하자.

$a_{k+1} \geq 1$ 이면 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} \geq k+1$ 이 성립한다.

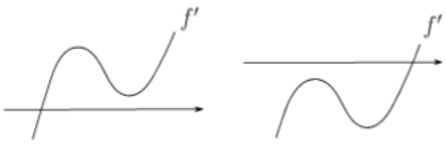
$a_{k+1} < 1$ 이면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} \geq \frac{k}{a_{k+1}} + a_{k+1} = \frac{k-1}{a_{k+1}} + \left(\frac{1}{a_{k+1}} + a_{k+1}\right) > k-1+2 = k+1$$

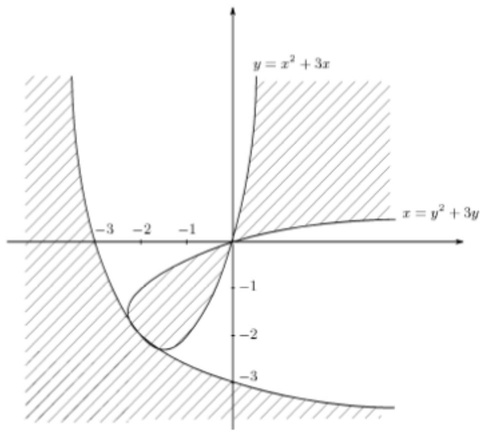
이 성립한다.

[문제2] 대학발표 예시답안

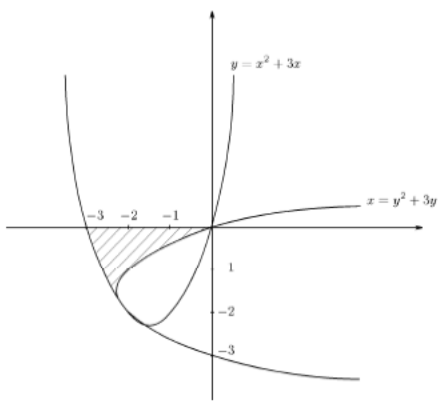
(2-1) $f'(x) = 4x^3 - 6(a+b)x^2 + 12abx + 2a^2b^2$, $f''(x) = 12(x-a)(x-b)$ 이다.
$a = b$ 이면 극값을 갖지 않고, $a \neq b$ 이면 $x = a$ 와 $x = b$ 에서 극값을 갖는다.
그러므로, $f(x)$ 가 단 하나의 극값을 가지려면, $f'(a) \times f'(b) \geq 0$ 을 만족해야 한다.
이를 그림으로 표현하면 다음과 같다.



$f'(a) = 2a^2(-a+3b+b^2)$, $f'(b) = 2b^2(-b+3a+a^2)$ 이므로, 구하는 영역은 아래와 같다.



(2-2) $f'(0) \geq 0$ 이므로, 서로 다른 세 음수에서 극값을 가지려면, $a < b < 0$, $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$ 일 때이다. 즉, $3y + y^2 > x$, $3x + x^2 > y$ 이다.



(경계제외)

따라서 구하고자 하는 순서쌍은 $\left(-\frac{5}{2}, -1\right), \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-2, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 이다.

[문제3] 대학발표 예시답안

(3-1) $\overrightarrow{\mathrm{XY}} = -t\vec{a}+(s-1+t)\vec{b}+s\vec{c}$ 이고 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ 에 수직이므로 $\overrightarrow{\mathrm{XY}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{XY}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}}=0$ 이 성립한다.

즉, $(-t\vec{a}+(s-1+t)\vec{b}+s\vec{c}) \cdot (\vec{b}-\vec{a})=0$ 에서 $2t+s-1=0$ 을,

$(-t\vec{a}+(s-1+t)\vec{b}+s\vec{c}) \cdot (\vec{b}+\vec{c})=0$ 에서 $t+5s-1=0$ 을 얻는다.

(3-2) 위 풀이에서 얻은 연립방정식 $\begin{cases} 2t+s-1=0 \\ t+5s-1=0 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $s=\frac{1}{9}, t=\frac{4}{9}$ 를 얻을 수 있다. 따라서

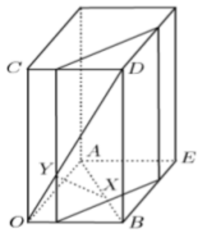
$$\overrightarrow{\mathrm{XY}} = -\frac{4}{9}\vec{a}+\left(\frac{1}{9}-1+\frac{4}{9}\right)\vec{b}+\frac{1}{9}\vec{c} = -\frac{4}{9}\vec{a}-\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{9}\vec{c}$$

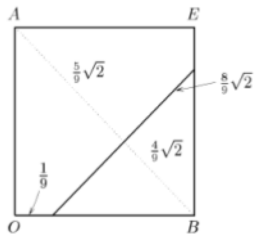
이고, $|\overrightarrow{\mathrm{XY}}|^2 = \left(-\frac{4}{9}\vec{a}-\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{9}\vec{c}\right) \cdot \left(-\frac{4}{9}\vec{a}-\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{9}\vec{c}\right) = \frac{36}{81}$

이다. 그러므로 선분 XY 의 길이는 $\frac{2}{3}$ 이다.

(3-3) 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$ 의 밑변으로의 사영은 AB 와 수직이므로, 점 Y 와 직선 l 을 포함하는 평면은 변 OC, BD 등과 평행이다. 따라서, 단면은 직사각형이고 이 직사각형의 밑변은 $\frac{8}{9}\sqrt{2}$, 높이는 2 이다. 그러므로 단면인 직사각형의 넓이는 $\frac{16}{9}\sqrt{2}$ 이다.

[아래 그림 참고]





[문제4] 대학발표 예시답안

(4-1) 원소의 개수가 4 이고 원소의 합이 13 인 N 의 부분집합 :

$\{1, 2, 3, 7\}$, $\{1, 2, 4, 6\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$

원소의 개수가 4 이고 원소의 합이 15 인 N 의 부분집합 :

$\{1, 2, 3, 9\}$, $\{1, 2, 4, 8\}$, $\{1, 2, 5, 7\}$, $\{1, 3, 4, 7\}$, $\{1, 3, 5, 6\}$, $\{2, 3, 4, 6\}$

그러므로 $a_{13}=3, a_{15}=6$ 이다.

(4-2) 자연수 4를 4이하인 자연수로 분할하는 경우 :
4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1
자연수 6을 4이하인 자연수로 분할하는 경우 :
4+2, 4+1+1, 3+3, 3+2+1, 3+1+1+1, 2+2+2,
2+2+1+1, 2+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1
그러므로, $b_4=5, b_6=9$이다.

(4-3) 제시문 (나)와 같이 자연수 분할을 그림으로 표현하여 가로, 세로를 바꾸어 생각해 보자. 자연수 n을 4이하인 자연수로 분할하는 것은 자연수 n을 4개 이하의 자연수로 분할하는 것과 같이 생각할 수 있다.
① 자연수 n을 1개의 자연수로 분할하는 경우의 수 : $P(n,1)$
② 자연수 n을 2개의 자연수로 분할하는 경우의 수 : $P(n,2)$
③ 자연수 n을 3개의 자연수로 분할하는 경우의 수 : $P(n,3)$
④ 자연수 n을 4개의 자연수로 분할하는 경우의 수 : $P(n,4)$
그러므로 $b_n=P(n,1)+P(n,2)+P(n,3)+P(n,4)$이 성립한다.

(4-4) a_{n+10}은 원소의 개수가 4이고, 원소의 합이 $n+10$인 N의 부분집합의 개수이다. 이것은 자연수 $n+10$을 서로 다른 4개의 자연수로 분할하는 경우의 수와 같다.
$n+10=n_1+n_2+n_3+n_4$, $n_1>n_2>n_3>n_4\ge 1$이라 하고,
m_1, m_2, m_3, m_4를 다음과 같이 정의하자.
$m_1=n_1-4$, $m_2=n_2-3$, $m_3=n_3-2$, $m_4=n_4-1$
이때 $m_1+m_2+m_3+m_4$는 자연수 n을 4개 이하의 자연수로 분할하는 것의 개수이다.
$n=m_1+m_2+m_3+m_4$, $m_1\ge m_2\ge m_3\ge m_4\ge 0$
그러므로 $a_{n+10}=P(n,1)+P(n,2)+P(n+3)+P(n,4)$가 성립하고, 풀이(4-3)에 의해 $a_{n+10}=b_n$을 얻을 수 있다.

33 중앙대학교 수시 자연계열 I

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	○	수학 (3문항, 5문제)	120분

[문제1]

K 마트는 고객이 물건을 1회 구매할 때마다 유명 연예인의 사진을 한 장씩 주는 이벤트를 시작할 예정이다. 사진의 종류는 총 3가지이고 구매자가 사진의 종류를 고를 수 없으며, 각각의 사진을 받을 확률은 다음과 같다.(단, $0<p<1$, $0<q<1$, $0<r<1$이고 $p+q+r=1$을 만족한다.)

사진	A	B	C	합계
확률	p	q	r	1

영희는 사진 A를, 철수는 사진 B와 C 모두를 받기 위해 물건을 구매하려 한다. 영희가 물건을 5회 구매할 확률과 철수가 물건을 10회 구매할 확률을 각각 구하시오.(단, 영희와 철수는 원하는 사진을 갖게 되면 더 이상 물건을 구매하지 않는다.) [20점]

[문제2]

다음 제시문 (가)와 (나)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 첫째항이 a, 공비가 $r(\neq 1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$이다.

(나) 다음은 상용로그표의 일부분이다.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117

[2.1] 제시문 (나)의 상용로그표를 이용하여 $m \le 1.01^{365} < m+1$을 만족하는 자연수 m을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. [10점]

[2.2] 자연수 n에 대하여 두 부등식 $x \le n$과 $2\times 2^{x} \le y \le 3\times 4^{x}$을 만족하는 자연수 x, y를 좌표로 가지는 점 (x, y)의 집합을 S_n이라 하자. 한 변의 길이가 1이고 네 꼭짓점이 모두 S_n에 속하는 정사각형의 개수를 $f(n)$이라고 할 때, $f(n) \ge 2016$을 만족하는 n의 최솟값을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. [15점]

[문제3]

(가) 점 A에서 점 B로 방향이 주어진 선분 AB를 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$로 나타내고, 선분 AB의 길이를 벡터의 크기 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$로 나타낸다.

(나) 좌표평면 위의 주어진 점 (a, b)와 곡선 $y=f(x)$ 사이의 거리
$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 의 최솟값을 점 (a, b)와 곡선 $y=f(x)$ 사이의 거리라 정의한다.

(다) 함수 $f : X \to Y$가 일대일 대응일 때 역함수 $f^{-1} : Y \to X$가 존재하고 다음과 같이 정의된다.

$$y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$$

(라) 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면 다음이 성립한다.

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

[3.1] 좌표평면 위의 원점 O와 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 $\mathrm{Q}(r, s)$가 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 만족한다. 이때 $s-r$의 최솟값을 구하시오. [10점]

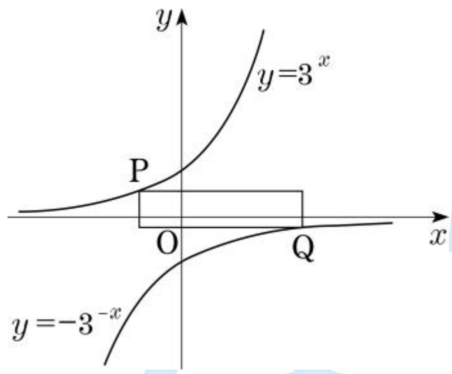
[3.2] 좌표평면 위의 점 $(t, 0)$과 곡선 $y=e^{x}$ 사이의 거리를 $L(t)$라 할 때, 정적분 $\displaystyle\int_{1}^{1+e^2} L^2(t)\,dt$를 구하시오. [15점]

풀어보기

문제1

함수 $y=3^x$의 그래프 위의 점 $P(\alpha,\ 3^{\alpha})$과 함수 $y=-3^{-x}$의 그래프 위의 점 $Q(\beta,\ -3^{-\beta})$에 대하여 $\beta-\alpha=4$가 성립한다. 그림과 같이 두 점 P, Q를 지나고 x축, y축과 평행한 직선을 그려 만들어지는 직사각형의 넓이의 최솟값은?

(2011. 10월 전국연합)



① $\frac{2}{9}$　② $\frac{2\sqrt{2}}{9}$　③ $\frac{4}{9}$　④ $\frac{4\sqrt{2}}{9}$　⑤ $\frac{8}{9}$

문제2

좌표평면에서 $a>1$인 자연수 a에 대하여 두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 20이상 40이하가 되도록 하는 a의 개수를 구하시오. (2014. 대수능)

예시답안

풀어보기(문제1)

정답) ⑤

직사각형의 가로의 길이는 $\beta-\alpha=4$이고, 세로의 길이는 $3^{\alpha}-(-3^{-\beta})$이므로 직사각형의 넓이를 S라 하면

$$S=(\beta-\alpha)(3^{\alpha}+3^{-\beta})=4(3^{\alpha}+3^{-\alpha-4})\geq 4\times 2\sqrt{3^{\alpha}\cdot 3^{-\alpha-4}}=\frac{8}{9}$$

(단, 등호는 $\alpha=-2$, $\beta=2$일 때 성립)

따라서 직사각형의 넓이의 최솟값은 $\frac{8}{9}$이다.

풀어보기(문제2)

정답) 15

두 그래프 $y=4^x, y=a^{-x+4}$의 교점의 x좌표값을 t라 두자. $y=4^x$에서

$x=0$일 때 $y=1$ (격자점 1개)

$x=1$일 때 $y=1, 2, 3, 4$ (격자점 4개)

$x=2$일 때 $y=1, 2, 3, \cdots, 16$ (격자점 16개)

$x=3$일 때 $y=1, 2, 3, \cdots, 64$ (격자점 64개)

이므로 주어진 격자점의 개수를 만족하기 위해서는 t가 $2\leq t<3$을 만족할 때이다.

이때 $4^t=a^{-t+4}$를 풀면 $t=\frac{4\log a}{\log 4a}$이므로 $2\leq t=\frac{4\log a}{\log 4a}<3$을 만족하는 a의 범위는

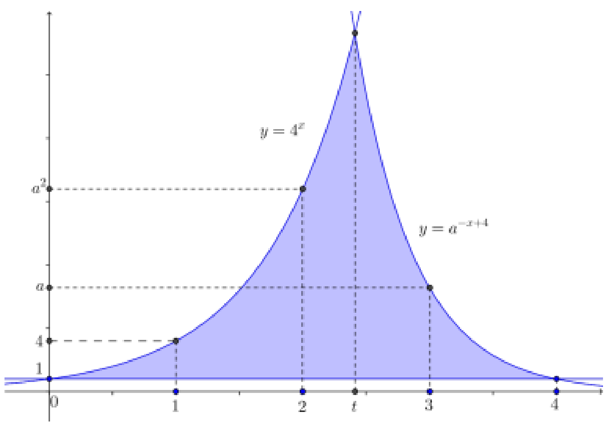
$4\leq a<64 \cdots ①$

이다. 영역내 x좌표가 0, 1, 2, 3, 4인 점의 개수의 합은 $1+4+16+a+1=a+22$이고 조건에 의해

$20\leq a+22\leq 40 \Rightarrow -2\leq a\leq 18 \cdots ②$

을 만족해야 한다.

①, ②에 의하여 만족하는 a의 범위는 $4\leq a\leq 18$이므로 구하는 자연수 a의 개수는 15개다.



[문제1] (대학발표 예시답안)

영희가 5회 구매하는 것은, 4회 구매까지는 사진 B 또는 C만을 가지게 되고 5회 구매에서 사진 A를 가지는 것이다. 따라서 그 확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(\text{영희 5회 구매}) = \left\{\sum_{i=0}^{4} {}_4\mathrm{C}_i\, q^i r^{4-i}\right\} p = (q+r)^4 p = (1-p)^4 p$$

철수가 10회 구매하는 것은 10회 구매에 사진 B 또는 C 중 한 가지를 처음으로 가지게 되는 경우이다. 즉, 9회까지는 사진 B를 가졌지만 C가 없는 경우와 9회까지는 사진 C를 가졌지만 B가 없는 경우이다. 따라서 그 확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{철수 10회 구매}) &= \mathrm{P}(\text{10회째 드디어 사진 C}) + \mathrm{P}(\text{10회째 드디어 사진 B}) \\ &= \left\{\sum_{i=0}^{8} {}_9\mathrm{C}_i\, p^i q^{9-i}\right\} r + \left\{\sum_{i=0}^{8} {}_9\mathrm{C}_i\, p^i r^{9-i}\right\} q \\ &= \left((p+q)^9 - p^9\right) r + \left((p+r)^9 - p^9\right) q\end{aligned}$$

[문제 2.1] (대학발표 예시답안)

$a = 1.01^{365}$라 놓으면, 상용로그표에 의해서 $\log a = 365\log 1.01 = 365 \times 0.0043 = 1.5695$이다.
상용로그표에 의하면, $\log 3.71 = 0.5694 < 0.5695 < 0.5705 = \log 3.72$이므로

$$\log 37.1 = 1 + \log 3.71 = 1.5694 < 1.5695 < 1.5705 = 1 + \log 3.72 = \log 37.2$$

이다. 따라서 $37.1 < a < 37.2$이므로 $m = 37$이다.

[문제 2.2] (다른 풀이)

$g(x) = 2 \cdot 2^x$, $h(x) = 3 \cdot 4^x$라 놓으면 $x \geq 0$에서 $g(x) \leq h(x)$임을 알 수 있다. 자연수 k에 대하여 $g(k) = 2 \cdot 2^k$, $h(k) = 3 \cdot 4^k$, $g(k+1) = 2 \cdot 2^{k+1}$, $h(k+1) = 3 \cdot 4^{k+1}$이다. 따라서 $f(k+1) - f(k) = h(k) - g(k+1) = 3 \cdot 4^k - 2 \cdot 2^{k+1}$이고 $k = 1, 2, 3, \cdots$ 이므로

$k = 1$이면 $f(2) - f(1) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2^2$

$k = 2$이면 $f(3) - f(2) = 3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 2^3$

$k = 3$이면 $f(2) - f(1) = 3 \cdot 4^3 - 2 \cdot 2^4$

……

$k = n-1$이면 $f(n) - f(n-1) = 3 \cdot 4^{n-1} - 2 \cdot 2^n$

위 식들을 변변 더하면 $f(n) - f(1) = \dfrac{12(4^{n-1}-1)}{4-1} - \dfrac{8(2^{n-1}-1)}{2-1}$이고 $f(1) = 0$이므로

$f(n) = 4^n - 2^{n+2} + 4 = (2^n - 2)^2$이다.

$(2^n - 2)^2 \geq 2016 > 1936 = 44^2$, 즉, $2^n > 44 + 2 = 46$이고 $n \geq 6$이므로 최소의 자연수 n은 $n = 6$이다.

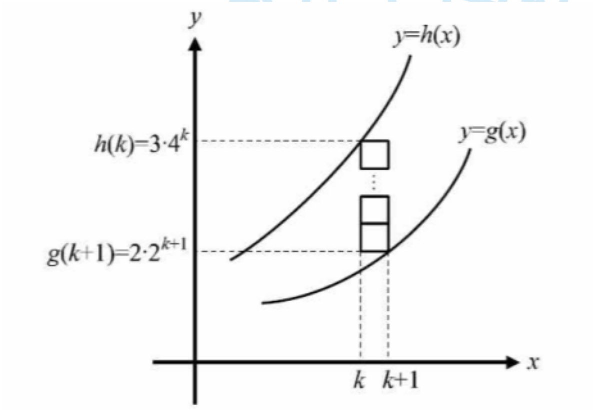
(대학발표 예시답안)

$g(x)=2\cdot 2^x$, $h(x)=3\cdot 4^x$라 놓으면, $x\geq 0$에서 $g(x)\leq h(x)$임을 알 수 있다. 자연수 k에 대하여 $g(k+1)=2\cdot 2^{k+1}$, $h(k)=3\cdot 4^k$이므로, 한 변의 길이가 1이고 네 꼭짓점이 모두 자연수 쌍의 좌표를 가지는 정사각형 중에서 영역

$\{(x, y)|k\leq x\leq k+1, g(x)\leq y\leq h(x)\}$에 포함되는 것의 개수는 $3\cdot 4^k-2\cdot 2^{k+1}$이다. (아래의 그림 참조) 따라서

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n-1}(3\cdot 4^k-2\cdot 2^{k+1})=\frac{12(4^{n-1}-1)}{4-1}-\frac{8(2^{n-1}-1)}{2-1}$$
$$=(2\cdot 2^{n-1}-2)^2=(2^n-2)^2\geq 2016$$

이므로 $(2^n-2)^2\geq 2016>1936=44^2$이다. 즉, $2^n>44+2=46$이다. $45^2=2025>2016$이므로 $(2^n-2)^2\geq 2016$을 만족하는 최소의 자연수 n은 $n=6$이다.



[문제 3.1] (다른 풀이)

점 (r, s)는 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있으므로 $r=\cos\theta$, $s=\sin\theta$ $\left(\alpha\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$로 둘 수 있다.

이때

$$\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\frac{4}{5},\ \sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\frac{3}{5}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25},\ \text{즉, } \sin\alpha=\frac{7}{25},\ \cos\alpha=\frac{24}{25}$$

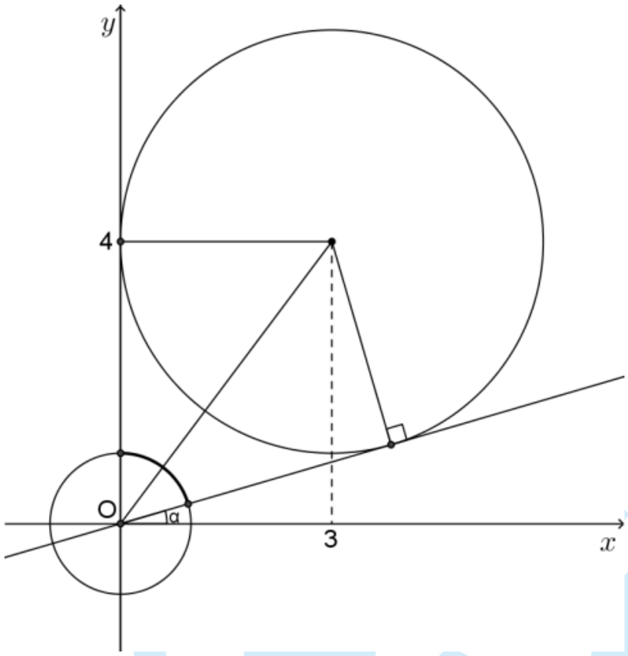
따라서

$$s-r=\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right),\ \alpha-\frac{\pi}{4}\leq\theta-\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{4}$$

이고 $\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{7}{25}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{24}{25}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{17}{25}$이므로

$$-\frac{17}{25}\leq s-r=\sqrt{2}\,sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leq 1$$

따라서 $s-r$의 최솟값은 $-\dfrac{17}{25}$이다.

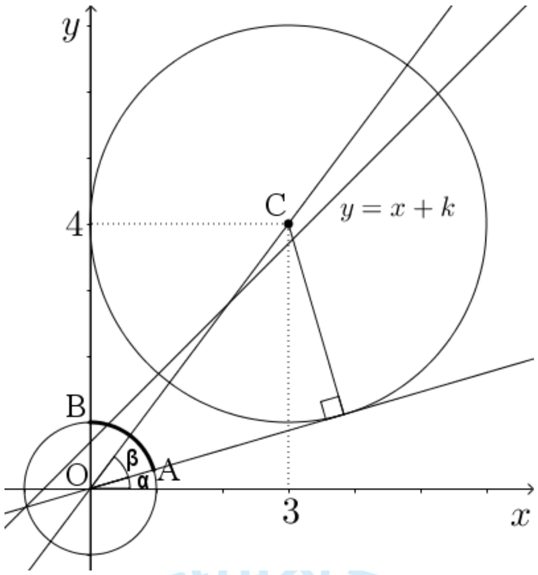


(다른 풀이2)

그림과 같이 원점에서 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$에 그은 두 접선이 단위원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 점 $\mathrm{Q}(r, s)$는 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 위를 움직인다. $s-r=k$라 두면 점 $\mathrm{Q}(r, s)$는 직선 $y=x+k$와 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$의 교점이다. 점 $\mathrm{Q}(r, s)$가 점 A와 같을 때 직선 $y=x+k$의 y절편인 k가 최소가 된다.

원 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$의 중심을 C라 하고 직선 OA, OC가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 α, β라 하면 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-2\beta$, $\cos\beta=\dfrac{4}{5}$, $\sin\beta=\dfrac{3}{5}$이므로

$\cos\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2\beta\right)=\sin 2\beta=2\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{24}{25}$, $\sin\alpha=\dfrac{7}{25}$이다. 따라서 점 $\mathrm{A}\left(\dfrac{24}{25}, \dfrac{7}{25}\right)$이므로 $s-r$의 최솟값은 $\dfrac{7}{25}-\dfrac{24}{25}=-\dfrac{17}{25}$이다.



(대학발표 예시답안)

$\overrightarrow{OQ} = \dfrac{1}{|\overrightarrow{OP}|}\overrightarrow{OP}$ 로 정의된 Q는 원점과 점 P를 이은 직선이 단위원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점이 된다. 따라서 원점에서 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$에 그은 두 접선의 방정식을 구하면 된다. 하나는 y축이고 나머지 하나를 구하기 위해서 $y=kx$로 놓고 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$에 대입하면 $(k^2+1)x^2-(6+8k)x+16=0$이고 중근을 가지기 위해서는 $k=\dfrac{7}{24}$이다. $7^2+24^2=25^2$이므로 직선 $y=\dfrac{7}{24}x$와 단위원이 $\left(\dfrac{24}{25}, \dfrac{7}{25}\right)$에서 만나고 이때 $s-r$는 최솟값 $-\dfrac{17}{25}$을 갖는다.

[문제 3.2] (대학발표 예시답안)

$y=e^x$ 위의 점 (s, e^s)의 접선과 수직을 이루며 (s, e^s)을 지나는 직선의 방정식은 $y-e^s=-e^{-s}(x-s)$이고 이것이 $(t, 0)$을 지나므로 대입하며 $t=s+e^{2s}$인 관계를 얻는다. 점 $(t, 0)$와 곡선 $y=e^x$의 거리의 제곱은 $L^2(t)=(t-s)^2+(e^s)^2=e^{4s}+e^{2s}$이다. $\dfrac{dt}{ds}=1+2e^{2s}$을 이용하고 함수 $t=s+e^{2s}$가 일대일 대응임을 고려하면

$\displaystyle\int_1^{1+e^2} L^2(t)\,dt = \int_1^{1+e^2}(e^{4s}+e^{2s})\,dt = \int_0^1\{(e^{4s}+e^{2s})(1+2e^{2s})\}\,ds$가 되고 계산하면

$\displaystyle\int_0^1\{(e^{4s}+e^{2s})(1+2e^{2s})\}\,ds = \frac{1}{3}e^6+\frac{3}{4}e^4+\frac{1}{2}e^2-\frac{19}{12}$이다.

34 중앙대학교 수시 자연계열Ⅱ

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	○	수학 (3문항, 5문제)	120분

[문제 1]

눈으로는 무게를 구별할 수 없고 무게가 서로 다른 구슬들이 있다. 양팔저울을 사용하여 이 구슬들을 가벼운 것부터 무거운 순서대로 정렬하려고 한다. 이를 위해서 다음과 같은 방식을 고려하고 있다고 하자.

- 구슬이 2개일 때 : 저울을 1회 사용하면 정렬할 수 있다.
- 구슬이 3개일 때 : 임의의 구슬을 1개 선택하고, 이 구슬과 나머지 2개 구슬의 무게를 각각 저울을 1회씩 사용하여 비교한다. 임의로 선택한 구슬보다 가볍고 무거운 것이 각각 1개씩 구별될 경우 정렬할 수 있다. 그러나, 나머지 2개 구슬이 모두 더 무겁거나 모두 더 가벼운 경우 그 구슬들은 저울을 1회 더 사용하여 정렬할 수 있다.
- 구슬이 4개일 때 : 임의의 구슬을 1개 선택하고, 이 구슬과 나머지 3개 구슬의 무게를 각각 저울을 1회씩 사용하여 비교한다. 그 후, 구슬이 2개 또는 3개일 때 정렬하는 방식으로 구슬을 정렬할 수 있다.

이와 같은 방식으로, n개의 구슬들을 가벼운 것부터 정렬하기 위해 양팔저울을 사용하는 횟수를 확률변수 X_n이라고 할 때, X_3과 X_4의 기댓값을 각각 구하시오. [20점]

[문제 2]

다음 제시문 (가)와 (나)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$는 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

(나) 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2, y_2, z_2)$에 대하여 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$의 중점의 좌표는 다음과 같다.

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

[2.1] 좌표공간의 두 점 $A(2, 4, 6)$, $B(-9, 1, 2)$와 평면 $3x-4y+2z+56=0$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. [10점]

[2.2] 좌표공간의 세 점 $C(5, -2, 1)$, $D(1, 4, 3)$, $E(-1, 6, 3)$으로부터 같은 거리만큼 떨어진 점 중에서 점 $(2, -3, -13)$과 가장 가까운 점을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. [15점]

[문제3]

(가) 두 함수 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$의 합성함수 $g\circ f$는 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$로 정의한다.

(나) 함수 $f: X\to Y$가 일대일 대응일 때 역함수 $f^{-1}: Y\to X$가 존재하고 다음과 같이 정의된다.

$$y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$$

(다) 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

(라) 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면 다음이 성립한다.

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

[3.1] 두 함수 $f(x)=e^x$, $g(x)=x+x^3+x^5+x^7+x^9$의 합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 있다. $x>0$에서 정의된 곡선 $y=h^{-1}(x)$ 위의 점 $(e^5, h^{-1}(e^5))$에서의 접선의 방정식을 구하시오. [10점]

[3.2] $F(x)=2x+\int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$의 역함수에 대한 정적분 $\int_0^{2+\alpha} F^{-1}(x)dx$를 구하시오. (단, $\alpha=\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$이다.) [15점]

풀어보기

문제1

함수 $f(x)=(x-1)e^x$ $(x>0)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e^2, 2)$에서의 접선의 기울기는? (2011. 3월 전국연합)

① $\frac{1}{2e^2}$ ② $\frac{1}{2e}$ ③ 1 ④ $2e$ ⑤ $2e^2$

문제2

좌표공간에서 중심이 $\mathrm{C}(1, 2, 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 구가 두 평면 α, β와 접하는 점을 각각 P, Q라 하자. 두 평면 α, β의 교선의 방정식이 $x=-y=z$일 때, 삼각형 CPQ의 넓이는 S이다. $100S$의 값을 구하시오. (2013. 10월 전국연합)

문제3

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$

(나) $\int_0^1 (x-1)f'(x+1)\,dx=-4$

$\int_1^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오. (단, $f'(x)$는 연속함수이다.) (2015. 10월 전국연합)

예시답안

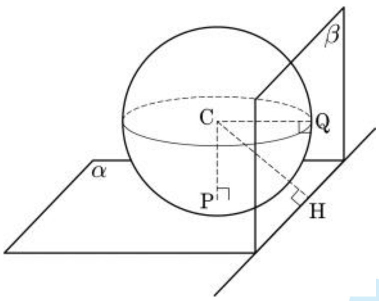
풀어보기(문제1)

정답) ①

$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$, $g'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}$ 이므로 $g'(e^2)=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{2e^2}$ 이다.

풀어보기(문제2)

정답) 150



구의 중심 C에서 두 평면의 교선 $x=-y=z$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\mathrm{H}(t,\ -t,\ t)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$는 교선의 방향벡터 $\vec{u}=(1,\ -1,\ 1)$과 수직이다. 따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{u}&=(t-1,\ -t-2,\ t-1)\cdot(1,\ -1,\ 1)\\&=(t-1)-(-t-2)+(t-1)=3t=0\end{aligned}$$

$t=0$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(-1,\ -2,\ -1)$

$$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$$

직각삼각형 CQH에서 $\cos(\angle\mathrm{QCH})=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\angle\mathrm{QCH}=\dfrac{\pi}{4}$

$\angle\mathrm{PCH}=\angle\mathrm{QCH}=\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\angle\mathrm{QCP}=\dfrac{\pi}{2}$가 되어 삼각형 CPQ는 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$인 직각이등변삼각형이다.

$S=\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2=\dfrac{3}{2}$ $\qquad\therefore\ 100S=150$

풀어보기(문제3)

정답) 6

$\displaystyle\int_0^1(x-1)f'(x+1)dx=-4$ 에서 $x+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dx}{dt}=1$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이다.

$$\int_0^1(x-1)f'(x+1)dx$$

$$=\int_1^2 (t-2)f'(t)dt = \Big[(t-2)f(t)\Big]_1^2 - \int_1^2 f(t)dt$$

$$=f(1)-\int_1^2 f(t)dt = 2-\int_1^2 f(t)dt = -4$$

따라서 $\int_1^2 f(x)dx = 6$이다.

[문제1] (대학발표 예시답안)

<방법1> 편의상, $E_2 = \mathrm{E}(X_2)$, $E_3 = \mathrm{E}(X_3)$, $E_4 = \mathrm{E}(X_4)$로 표시하자.

구슬이 2개일 때는 저울의 사용 횟수의 기댓값 $E_2 = 1$이다.

구슬이 3개일 때는 임의로 선택한 구슬이 제일 가볍거나 제일 무거운 경우 $2+E_2 = 2+1 = 3$번 저울을 사용할 것이며, 임의로 선택한 구슬이 중간 무게의 구슬이면 저울을 2번 사용하면 된다. 따라서 저울을 사용하는 횟수의 기댓값은

$$E_3 = \frac{1}{3}\times(2+E_2)\times 2 + \frac{1}{3}\times 2 = \frac{8}{3}$$

구슬이 4개일 때는 임의로 선택한 구슬이 제일 가볍거나 제일 무거운 경우 저울 사용 횟수의 기댓값은 $(3+E_3)$이고, 나머지 경우는 $(3+E_2)$이다. 따라서 저울을 사용하는 횟수의 기댓값은

$$E_4 = \frac{1}{4}\times\left(3+\frac{8}{3}\right)\times 2 + \frac{1}{4}\times(3+1)\times 2 = \frac{29}{6}$$

<방법2>

구슬이 3개일 때 저울의 사용횟수를 나타내는 확률변수 X_3의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X_3	2	3	합계
$P(X_3 = x_3)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\times 2 = \frac{2}{3}$	1

따라서 $\mathrm{E}(X_3) = 2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$이 된다.

구슬이 4개일 때 저울의 사용횟수를 나타내는 확률변수 X_4의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X_4	4	5	6	합계
$P(X_4 = x_4)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	1

따라서 $\mathrm{E}(X_4) = 4\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{3} = \frac{29}{6}$가 된다.

[문제 2-1] (대학발표 예시답안)

평면 $3x-4y+2z+56=0$을 π라 하고 $f(x,y,z)=3x-4y+2z+56$이라 하면,
$f(2,4,6)>0$이고 $f(-9,1,2)>0$이므로 두 점 A, B는 평면 π의 같은 쪽에 있다. 따라서 평면 π에 대한 점 A의 대칭점을 $A'(a,b,c)$라 할 때, $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\overline{A'B}$와 같다.

벡터 $\overrightarrow{AA'}=(a-2,b-4,c-6)$ (벡터표시) 은 평면 π의 법선벡터의 상수배이므로 $a=3k+2$, $b=-4k+4$, $c=2k+6$을 만족하는 상수 k가 있다. 두 점 A, A′의 중점 $\left(\frac{a+2}{2},\frac{b+4}{2},\frac{c+6}{2}\right)=\left(\frac{3k+4}{2},\frac{-4k+8}{2},\frac{2k+12}{2}\right)$가 평면 π 위의 점이므로 $A'(-10,20,-2)$이다. 따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\overline{A'B}=\sqrt{378}=3\sqrt{42}$이다.

[문제 2-2]

세 점 C, D, E로부터 같은 거리만큼 떨어진 점의 좌표를 (a,b,c)라고 하면,
$(a-5)^2+(b+2)^2+(c-1)^2=(a-1)^2+(b-4)^2+(c-3)^2=(a+1)^2+(b-6)^2+(c-3)^2$
이다. 이 식을 정리하면,

$$a=b-5,\ c=-b-11$$

이므로 점 (a,b,c)는 직선 $x+5=y=-z-11$ 위에 있다. 이제 점 $(2,-3,-13)$과 가장 가까운 직선 위의 점을 $(k-5,k,-k-11)$이라 하면

$$(k-7,k+3,-k+2)\cdot(1,1,-1)=0$$

이므로 $k=2$이고 구하고자 하는 점의 좌표는 $(-3,2,-13)$이다.

(대학발표 예시답안)

두 점 C, D의 중점은 점 $M(3,1,2)$이고 $\overrightarrow{MC}=(2,-3,-1)$이므로 두 점 C, D로부터 같은 거리만큼 떨어진 점의 자취는 평면 $2(x-3)-3(y-1)-(z-2)=0$, 즉, $2x-3y-z-1=0$이다. 비슷한 방법으로 두 점 C, E로부터 같은 거리만큼 떨어진 점의 자취는 평면 $3x-4y-z+4=0$임을 알 수 있다.
$2x-3y-z-1=0$과 $3x-4y-z+4=0$에서 z를 소거하여 $y=x+5$임을 안다. y에 $x+5$를 대입하여 $2x-3y-z-1=0$으로부터 $z=-x-16$을 얻는다. 따라서 평면 $2x-3y-z-1=0$와 평면 $3x-4y-z+4=0$의 교선은 직선 $x=t$, $y=t+5$, $z=-t-16$이다. 점 $(t,t+5,-t-16)$과 점 $(2,-3,-13)$ 사이의 거리의 제곱은 $(t-2)^2+(t+8)^2+(-t-3)^2=3(t+3)^2+50$이므로 $t=-3$일 때 최솟값을 가진다. 따라서 구하는 점은 점 $(-3,2,-13)$이다.

[문제 3-1] (대학발표 예시답안)

합성함수는 $h(x)=e^{x+x^3+x^5+x^7+x^9}$이고 역함수의 정의와 $h(1)=e^5$을 고려하면 $h^{-1}(e^5)=1$이고 점 $(e^5,h^{-1}(e^5))$의 직선 $y=x$의 대칭점은 $(1,e^5)$이다.

$h'(x)=(1+3x^2+5x^4+7x^6+9x^8)e^{x+x^3+x^5+x^7+x^9}$ 이므로 $h'(1)=25e^5$ 이다. 곡선 $y=h^{-1}(x)$ 의 $x=e^5$ 에서의 접선의 기울기는 $h'(1)$ 의 역수이므로 접선의 방정식은

$y-1=\dfrac{1}{25e^5}(x-e^5)$ 이고 정리하면 $y=\dfrac{1}{25e^5}x+\dfrac{24}{25}$ 이다.

[문제 3-2] (대학발표 예시답안)

역함수의 정의를 고려하면 $\displaystyle\int_0^{2+\alpha}F^{-1}(x)\,dx=2+\alpha-\int_0^1 F(x)\,dx$ 이다. 여기서 부분적분을 사용하면

$$\int_0^1 F(x)\,dx=[x\,F(x)]_0^1-\int_0^1 x\,F'(x)\,dx=2+\alpha-\int_0^1\left\{2x+x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right\}dx$$

이다. 또한 치환적분을 사용하면 $\displaystyle\int_0^1\left\{2x+x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right\}dx=1+\frac{1}{\pi}$ 이다. 따라서

$$\int_0^{2+\alpha}F^{-1}(x)\,dx=2+\alpha-(2+\alpha)+1+\frac{1}{\pi}=1+\frac{1}{\pi}$$

이다.

35 한양대학교(오전)

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정내 출제	없음	수학(2문항, 6문제)	90분

[문제1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

양의 실수 a에 대하여 구간 $(-1, \infty)$에서 아래와 같이 정의된 함수 $f(x)$가 최솟값 $-\dfrac{1}{2}$을 갖는다.

$$f(x) = \int_0^x \frac{\ln(t+1)+a}{t+1}\,dt$$

1. 양의 실수 a의 값과 정적분 $\displaystyle\int_0^{e^2-1} \frac{\{\ln(x+1)+1\}\{f(x)\}^3}{x+1}\,dx$를 구하시오.

2. 세 직선 $x=0$, $x=e^{-3}-1$, $y=0$과 곡선 $y=f(x)$에 의해 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

3. $x>0$일 때 부등식 $2f\left(\dfrac{2}{x}\right) > f\left(\dfrac{1}{x}\right) + f\left(\dfrac{3}{x}\right)$이 성립함을 보이시오.

[문제2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> 양의 실수 r에 대하여 중심의 좌표가 (r, r)이고 반지름의 길이가 r인 원을 C라 하자. 직선 $y=ax\,(0<a\leq 1)$가 원 C와 만나서 이루는 선분의 길이의 제곱을 $f(a)$라 하고 $f(0)=0$이라 하면, $f(a)$는 구간 $[0,1]$에서 정의된 함수이다. <나> 꼭짓점의 좌표가 $(c, 0, 1)\,(c\geq 1)$인 원뿔 D는 중심의 좌표가 $(c, 0, 0)$이고 반지름의 길이가 1인 xy평면 위의 원을 밑면으로 갖는다. 음이 아닌 실수 b에 대하여, 방향벡터가 $(1, b, b)$이고 원점을 지나는 직선이 원뿔 D와 만나서 이루는 선분의 길이를 $g(b)$라 하자. 단, 직선이 원뿔과 두 개 이상의 점에서 만나지 않으면 $g(b)=0$으로 한다.

1. 제시문 <가>의 함수 $f(a)$에 대하여 정적분 $\int_0^1 f(a)\,da$를 구하시오.

2. 제시문 <가>의 함수 $f(a)$에 대하여 정적분 $\int_0^1 f(a)\,da$와 $\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} f\left(\frac{100-k}{100}\right)$의 크기를 비교하시오.

3. 제시문 <나>의 $g(b)$를 구하시오.

풀어보기

문제1 양수 a와 두 실수 b, c에 대하여 함수

$$f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^x$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 갖는다.
(나) $0\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
$f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1\ge 0$이다.

세 수 a, b, c의 곱 abc의 최댓값을 $\dfrac{k}{e^3}$라 할 때, $60k$의 값을 구하시오.

(2016년 대입 평가원)

문제2 양의 실수 k에 대하여 곡선 $y=k\ln x$와 직선 $y=x$가 접할 때, 곡선 $y=k\ln x$, 직선 $y=x$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 ae^2-be이다. $100ab$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) (2015년 전국연합)

문제3 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[0, 1]$을 n등분한 각 분점 (양 끝점도 포함)을 차례대로

$$0 = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n = 1$$

이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2010년 대입 평가원)

<보 기>

ㄱ. $n = 2m$ (m은 자연수)이면 $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f(x_{2k})}{m} \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{n}$ 이다.

ㄴ. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left\{ \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right\} = \int_0^1 f(x)\,dx$

ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{n} \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{n}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

예시답안

풀어보기(문제1) 정답 15

$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ 을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x$ 인데

$f(x)$ 가 $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$ 에서 극값을 가지므로

$ax^2+(2a+b)x+b+c=0$의 근이 $x=\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ 이다.

근과 계수의 관계에 의해 $-\dfrac{2a+b}{a}=0$, $\dfrac{b+c}{a}=-3$ 이므로 $b=-2a$, $c=-a$ 이다.

따라서

$$f'(x)=a(x^2-3)e^x$$
$$f(x)=a(x^2-2x-1)e^x$$

이다.

$0\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)-f(x_2)+x_2-x_1\ge 0$ 이므로 양변을 $x_2-x_1(>0)$로 나누어 식을 정리하면

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}\ge -1$$

이다. $f(x)$ 가 $x\ge 0$에서 연속이고 미분 가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

인 $c\left(0\le x_1<c<x_2\right)$가 존재하고 $f'(c)\ge -1$이다. 즉, $x\ge 0$에서 $f'(x)\ge -1$이 항상 성립하게 하는 a의 범위를 구하면 된다.

$$f''(x)=a(x^2+2x-3)e^x=a(x+3)(x-1)e^x$$

이므로 $f'(x)$의 증감표는 아래와 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$		↘	$-2ea$	↗

증감표에 의해 $f'(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $-2ea$를 갖는다. 따라서

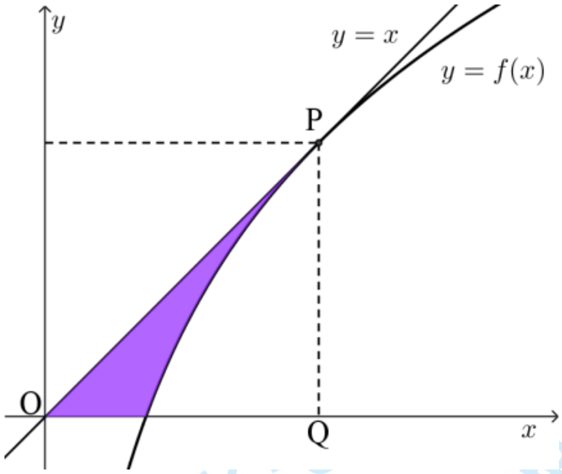
$$-2ea\ge -1,\ a\le \frac{1}{2e}$$

이므로 a의 최댓값은 $\dfrac{1}{2e}$ 이고 $abc=a\times(-2a)\times(-a)=2a^3$ 의 최댓값은 $\dfrac{1}{4e^3}$ 이다.

따라서 $k=\dfrac{1}{4}$ 이고 $60k=15$이다.

풀어보기(문제2) 정답 50

$f(x)=k\ln x$ 라 하자.



접점의 좌표를 $\mathrm{P}(p,\, p)$라 하면 $f(p)=k\ln p=p$ … ㉠

$f'(x)=\dfrac{k}{x}$ 이므로 $f'(p)=\dfrac{k}{p}=1$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $p=e,\ k=e,\ f(x)=e\ln x$

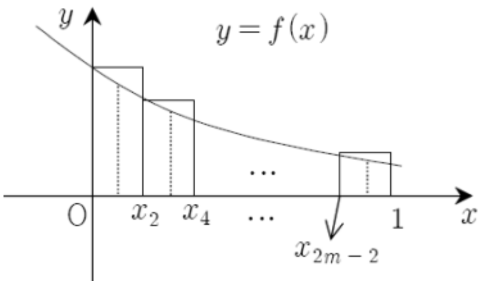
구하고자 하는 넓이 S는

$$S=(\text{삼각형 OPQ의 넓이})-\int_1^e f(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}e^2-\int_1^e e\ln x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}e^2-e\left[x\ln x-x\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{2}e^2-e(e\ln e-e+1)$$
$$=\frac{1}{2}e^2-e$$

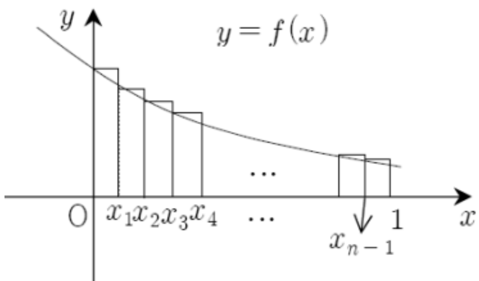
따라서 $a=\dfrac{1}{2},\ b=1$이므로 $100ab=50$

풀어보기(문제3) 정답 ②

ㄱ. (반례)



[그림1]



[그림2]

$x_{2k+2}-x_{2k}=\dfrac{2}{2m}=\dfrac{1}{m}$ 이므로 $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m}$ 은 [그림1]의 직사각형들의 넓이의 합을 나타낸다.

$x_{k+1}-x_k=\dfrac{1}{n}$ 이므로 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 은 [그림2]의 직사각형들의 넓이의 합을 나타낸다.

따라서, $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m} > \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 이다. (거짓)

ㄴ. $x_k=\dfrac{k}{n}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left\{\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right\} &= \frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\frac{1}{n}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx\right\} = \int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{(참)}\end{aligned}$$

ㄷ. (반례) ㄱ의 [그림2]에서 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ 는 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이이고, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 은 직사각형들의 넓이의 합을 나타내므로 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n} > \int_0^1 f(x)\,dx$ 이다. (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

[문제1]

1. $f(0)=0$, $f'(x)=\dfrac{\ln(x+1)+a}{x+1}=0$ 에서 $\ln(x+1)+a=0$, 즉 $x=e^{-a}-1$ 에서 최솟값을 갖는다. 그리고

$$f(x)=\int_0^x \frac{\ln(t+1)+a}{t+1}\,dt=\int_a^{\ln(x+1)+a} s\,ds=\frac{1}{2}\{\ln(x+1)\}^2+a\ln(x+1)$$

이므로 최솟값은 $f(e^{-a}-1)=\frac{1}{2}a^2-a^2=-\frac{1}{2}a^2$ 이다. 제시문에서 $f(x)$ 의 최솟값이 $-\frac{1}{2}$ 이므로 $a=1$ 이다. 또한 $f(x)=t$ 로 치환하면 $f'(x)dx=\dfrac{\ln(x+1)+1}{x+1}dx=dt$ 이므로

$$\int_0^{e^2-1}\frac{\{\ln(x+1)+1\}\{f(x)\}^3}{x+1}\,dx=\int_0^4 t^3\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^4=4^3=64$$

(대학예시답안)

$$f(x)=\int_0^x\frac{\ln(t+1)+a}{t+1}dt=\int_a^{\ln(x+1)+a}s\,ds=\frac{1}{2}(\ln(x+1)+a)^2-\frac{1}{2}a^2\ \geq\ -\frac{1}{2}a^2$$

이고, $x=e^{-a}-1$ 에서 최솟값 $-\frac{1}{2}a^2$ 을 갖는다.

따라서 $a=1$ 이고, $f(x)=\frac{1}{2}[\ln(x+1)]^2+\ln(x+1)$ 이다. $f(x)$ 를 미분하면

$$f'(x)=\ln(x+1)\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{\ln(x+1)+1}{x+1}$$

이다. 정적분 $\displaystyle\int_0^{e^2-1}\frac{\{\ln(x+1)+1\}\{f(x)\}^3}{x+1}dx$ 을 구하기 위하여, $f(x)=t$ 로 치환하여 적분하면,

$$\int_0^{e^2-1}\frac{\{\ln(x+1)+1\}\{f(x)\}^3}{x+1}\,dx=\int_0^4 t^3\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^4=4^3=64$$

2. $f(x)=\frac{1}{2}\{\ln(x+1)\}^2+\ln(x+1)=\frac{1}{2}\ln(x+1)\{\ln(x+1)+2\}=0$ 이므로

$$\ln(x+1)=0 \text{ 또는 } \ln(x+1)=-2,\ \text{즉}\quad x=0 \text{ 또는 } x=e^{-2}-1$$

이다. 따라서

$$\int_{e^{-3}-1}^0 |f(x)|\,dx=\int_{e^{-3}-1}^{e^{-2}-1}f(x)\,dx-\int_{e^{-2}-1}^0 f(x)\,dx$$

이다. 우선 $f(x)$ 의 부정적분을 구하면

$$\int f(x)\,dx=\int\left[\frac{1}{2}\{\ln(x+1)\}^2+\ln(x+1)\right]dx=\frac{1}{2}\int\{\ln(x+1)\}^2\,dx+\int\ln(x+1)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}(x+1)\{\ln(x+1)\}^2-\frac{1}{2}\int(x+1)\cdot 2\ln(x+1)\frac{1}{x+1}\,dx+\int\ln(x+1)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(x+1)\{\ln(x+1)\}^2$$

이다. 그리고

$$\int_{e^{-3}-1}^{e^{-2}-1} f(x)dx=\left[\frac{1}{2}(x+1)\{\ln(x+1)\}^2\right]_{e^{-3}-1}^{e^{-2}-1}=\frac{1}{2}e^{-2}(-2)^2-\frac{1}{2}e^{-3}(-3)^2=\frac{2}{e^2}-\frac{9}{2e^3}$$

$$\int_{e^{-2}-1}^{0} f(x)dx=\left[\frac{1}{2}(x+1)\{\ln(x+1)\}^2\right]_{e^{-2}-1}^{0}=0-\frac{1}{2}e^{-2}\times(-2)^2=-\frac{2}{e^2}$$

이므로

$$\int_{e^{-3}-1}^{0} |f(x)|\,dx=\frac{2}{e^2}-\frac{9}{2e^3}-\left(-\frac{2}{e^2}\right)=\frac{4}{e^2}-\frac{9}{2e^3}$$

이다.

3. $f'(x)=\dfrac{\ln(x+1)+1}{x+1}$, $f''(x)=\dfrac{-\ln(x+1)}{(x+1)^2}<0$ 이므로 양의 실수 x에 대하여 $f(x)$는 위로 볼록한 그래프이다. 따라서 $\dfrac{1}{x}, \dfrac{3}{x}$에 대하여

$$f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{x}\right)\right)>\frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{3}{x}\right)\right\}$$

이 성립한다. 그러므로 양이 실수 x에 대하여 부등식 $2f\left(\dfrac{2}{x}\right)>f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f\left(\dfrac{3}{x}\right)$ 이 성립한다.

(대학예시답안)

$f'(x)=\dfrac{\ln(x+1)+1}{x+1}$ 이고, 양의 실수 x에 대하여 $f''(x)=\dfrac{-\ln(x+1)}{(x+1)^2}<0$ 이다. 그러므로 $f'(x)$는 감소함수이다. 평균값 정리에 의해 아래의 ①과 ②가 성립한다.

① $\dfrac{1}{x}$과 $\dfrac{2}{x}$ 사이에 c_1이 존재하여 $f'(c_1)=\dfrac{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{2}{x}-\frac{1}{x}}=x\left[f\left(\dfrac{2}{x}\right)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$ 을 만족한다.

② $\dfrac{2}{x}$와 $\dfrac{3}{x}$ 사이에 c_2이 존재하여 $f'(c_2)=\dfrac{f\left(\frac{3}{x}\right)-f\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{3}{x}-\frac{2}{x}}=x\left[f\left(\dfrac{3}{x}\right)-f\left(\dfrac{2}{x}\right)\right]$ 을 만족한다.

$x>0$에서 함수 $f'(x)$는 감소함수이고 $c_1<c_2$이므로, $f'(c_1)>f'(c_2)$이다.

따라서 $x\left[f\left(\dfrac{2}{x}\right)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]>x\left[f\left(\dfrac{3}{x}\right)-f\left(\dfrac{2}{x}\right)\right]$ 이고 $x>0$이므로

$$f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)>f\left(\frac{3}{x}\right)-f\left(\frac{2}{x}\right)$$

이다. 그러므로 양이 실수 x에 대하여 부등식 $2f\left(\dfrac{2}{x}\right)>f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f\left(\dfrac{3}{x}\right)$ 이 성립한다.

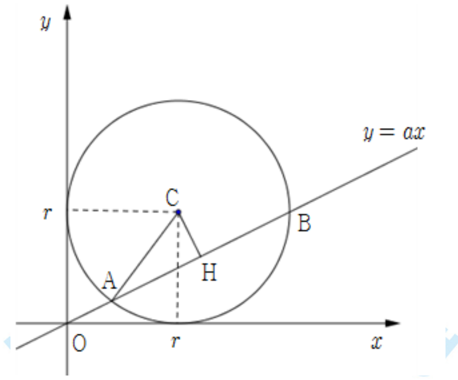
[문제2]

1. $y=ax$ 와 직선의 교점을 A, B라 두면 $f(a)=\overline{AB}^2$ 이다.

원의 중심을 C, 중심C (r,r) 에서 직선 $y=ax$ 에 내린 수선의 발을 H라 두면

$$\overline{CH}=\frac{|ra-r|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{r|a-1|}{\sqrt{a^2+1}},\quad \overline{AH}=\sqrt{r^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{r^2-\frac{r^2(a-1)^2}{a^2+1}}=r\sqrt{\frac{2a}{a^2+1}}$$

이다.



따라서 $\overline{AB}=2r\sqrt{\dfrac{2a}{a^2+1}}$ 이므로

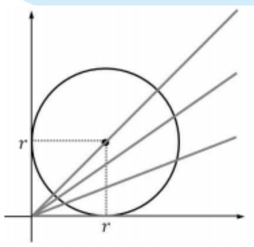
$$f(a)=4r^2\frac{2a}{a^2+1}$$

이다. 그러므로

$$\int_0^1 f(a)\,da=\int_0^1 4r^2\frac{2a}{a^2+1}\,da=\left[4r^2\ln(a^2+1)\right]_0^1=4r^2\ln 2$$

이다.

(대학예시답안)



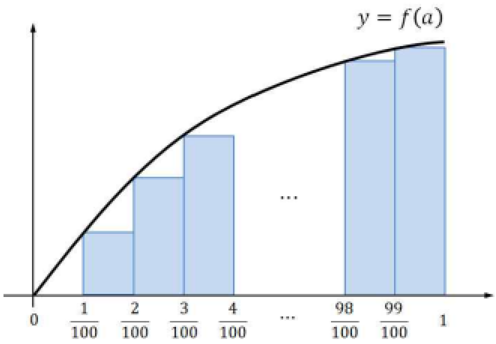
주어진 원의 방정식: $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

$y=ax$ 와의 교점의 방정식: $(x-r)^2+(ax-r)^2=r^2$, 즉 $(a^2+1)x^2-2r(a+1)x+r^2=0$

$$f(a)=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(x_1-x_2)^2+(ax_1-ax_2)^2=(a^2+1)(x_1-x_2)^2=4r^2\frac{2a}{a^2+1}$$

$$\int_0^1 f(a)da=\int_0^1 4r^2\frac{2a}{a^2+1}da=\left[4r^2\ln(a^2+1)\right]_0^1=4r^2\ln 2$$

2. (대학예시답안)

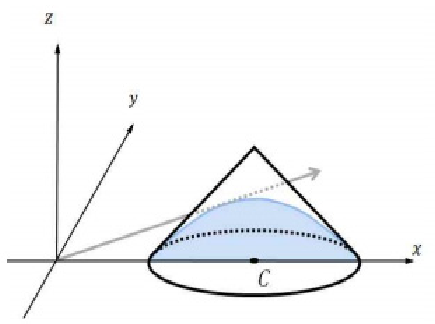


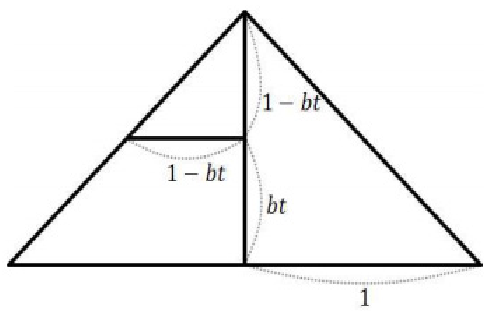
$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} f\left(\frac{100-k}{100}\right)=\sum_{k=0}^{99} f\left(\frac{k}{100}\right)\frac{1}{100}$ 는 위 그림과 같이, 높이가 $f\left(\frac{k}{100}\right)$, 밑변의 길이가 $\frac{1}{100}$ 인 사각형의 넓이들의 합이고, $\int_0^1 f(a)da$ 는 x축, $x=1$, 그리고 $y=f(a)$ 로 둘러싸인 영역의 넓이다.

f 는 $[0,1]$ 에서 증가함수이다. 따라서 $\int_0^1 f(a)\,da>\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} f\left(\frac{100-k}{100}\right)$ 가 성립한다.

($\because$ $f'(a)=8r^2\frac{1-a^2}{(a^2+1)^2}>0$ $(0<a<1)$ 또는 위 1의 그림과 같이 a값이 증가함에 따라 원과 직선과의 교선의 길이가 증가함을 그림을 통해 알 수 있다.)

3. (대학예시답안)





주어진 직선 위의 점의 좌표는 $t(1,b,b)$ 로 나타내어지는데, 원뿔은 x좌표가 양인 부분에 있으므로 $t>0$ 이다.
직선이 원뿔의 표면과 만나는 점을 $t(1,b,b)$ 라 하고, 이 교점과 원뿔의 꼭짓점 그리고 밑면의 중심점을 포함하는 평면을 생각하면, 그림의 삼각형으로부터 세 점의 위치관계를 다음과 같이 얻을 수 있다. 즉, 교점 (t,tb,tb) 으로부터 점 $(c,0,bt)$ 까지의 거리의 제곱은 $(t-c)^2+(bt-0)^2=(1-bt)^2$, 이를 t에 대한 2차식으로 정리하면

$$t^2+2(b-c)t+c^2-1=0$$

t에 대한 위의 방정식이 근을 가질 조건을 판별식으로 구하면 $(b-c)^2-(c^2-1)\geq 0$, 즉,

$b \ge c+\sqrt{c^2-1}$ 또는 $b \le c-\sqrt{c^2-1}$, 이 중 직선이 실제로 원뿔을 만나는 경우는 $b \le c-\sqrt{c^2-1}$ 이고 이 경우 해는 $t=-(b-c)\pm\sqrt{(b-c)^2-(c^2-1)}$, 즉,

$$t=-(b-c)\pm\sqrt{b^2-2bc+1}$$

이므로, 선분 길이의 제곱값은

$$(g(b))^2=(t_2-t_1)^2+(bt_2-bt_1)^2+(bt_2-bt_1)^2=(2b^2+1)(t_2-t_1)^2=4(2b^2+1)(b^2-2bc+1)$$

이다. 따라서 문제에 대한 답은,

$0 \le b < c-\sqrt{c^2-1}$ 일 때, $g(b)=2\sqrt{(2b^2+1)(b^2-2bc+1)}$

$b \ge c-\sqrt{c^2-1}$ 일 때, $g(b)=0$

36 한양대 오후 1차 (자연계열)[28]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고교 교육과정 내 출제 수학 가형 수능 출제범위와 동일	없음	수학 (2문항, 6문제)	90분

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.(50점)

> 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.
> <가> 모든 실수 x, y에 대하여 $g(x-y)=g(x)g(y)+f(x)f(y)$
> <나> $f(8)=1$, $g(8)=0$

[1.1] $f(0)$과 $g(0)$의 값을 구하시오.

[1.2] 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$ 임을 보이시오.

[1.3] 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하고, $f'(0)=\dfrac{\pi}{16}$, $g'(0)=0$일 때,

정적분 $\displaystyle\int_0^8 f(x)\{g(x)\}^2 e^{g(x)+1}dx$ 를 구하시오.

28) 한양대 입학처 홈페이지

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.(50점)

자연수 n에 대하여 다항식 $p_n(x)$가 다음과 같이 주어져 있다.

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

예를 들면, $n = 1, 2, 3$일 때 아래와 같이 다항식을 쓸 수 있다.

$$p_1 = 1 + x$$

$$p_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$p_3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

[2.1] 양의 실수 t에 대하여 부등식 $1 + t > \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)e^t$이 성립하는 t의 범위를 구하시오.

[2.2] $p_{2n-1}(0)$과 $p_{2n-1}(-2n)$의 크기를 비교하시오.

[2.3] 방정식 $p_{2n}(x) = 0$의 실근이 존재하지 않음을 설명하시오.

풀어보기

문제1

실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)f(y)+4f(x)+4f(y)+12$
(나) $f(\ln 2)=0$, $f'(0)=2$

이때, $f'(\ln 2)$의 값을 구하시오. (2011년 3월 전국연합)

문제2

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족한다.

(가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=x^2e^{-x^2}$
(나) $g(x)=\dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2}f(t)dt$

$f(1)=\dfrac{1}{e}$ 일 때, $f(2)-g(2)$의 값은? (2016년 9월 모의평가)

① $\dfrac{16}{3e^4}$　② $\dfrac{6}{e^4}$　③ $\dfrac{20}{3e^4}$　④ $\dfrac{22}{3e^4}$　⑤ $\dfrac{8}{e^4}$

문제3

함수 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(2016년 3월 전국연합)

ㄱ. $f'(0)=1$

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq -\dfrac{1}{2}$ 이다.

ㄷ. $0<a<b<1$일 때, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>1$ 이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예시답안

풀어보기(문제1)

$y=0$을 대입하면

$f(x)=f(x)f(0)+4f(x)+4f(0)+12$

$\{f(x)+4\}\{f(0)+3\}=0$

$f(0)=-3$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)f(h)+4f(x)+4f(h)+12-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)f(h)+3f(x)+4f(h)+12}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)+4\}\{f(h)+3\}}{h}$$
$$=\{f(x)+4\}\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3}{h}$$
$$=\{f(x)+4\}\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=\{f(x)+4\}f'(0)$$
$$=2\{f(x)+4\}$$

$\therefore f'(\ln2)=2\{f(\ln2)+4\}=8$

풀어보기(문제2)

$$g(x)=\frac{4}{e^4}\int_1^x e^{t^2}f(t)dt=\frac{2}{e^4}\int_1^x 2te^{t^2}\frac{f(t)}{t}dt$$

이 때, $u'=2te^{t^2}$, $v=\dfrac{f(t)}{t}$ 라 하면 $u=e^{t^2}$, $v'=t^2e^{-t^2}$ 이다.

그러므로 부분적분법에 의하여

$$g(x)=\frac{2}{e^4}\left\{\left[e^{t^2}\frac{f(t)}{t}\right]_1^x-\int_1^x t^2dt\right\}$$
$$=\frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\frac{f(x)}{x}-ef(1)-\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^x\right\}$$
$$=\frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\frac{f(x)}{x}-ef(1)-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$g(2)=\frac{2}{e^4}\left(e^4\frac{f(2)}{2}-\frac{10}{3}\right)=f(2)-\frac{20}{3e^4}$$

그러므로 $f(2)-g(2)=\dfrac{20}{3e^4}$

풀어보기(문제3)

함수 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 에서

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(-2x)(x^2+1)^2-(1-x^2)\{2(x^2+1)\cdot 2x\}}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2x(x^2+1)\{-(x^2+1)-2(1-x^2)\}}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

ㄱ. $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ 에서 $f'(0)=\dfrac{1}{1}=1$ (참)

ㄴ. $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극솟값 $-\dfrac{1}{2}$ 을 갖고 $x=1$ 에서 극댓값 $\dfrac{1}{2}$ 을 갖는다.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$$

$x>0$ 일 때, $f(x)>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극소이면서 최소이다.

따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)\geq-\dfrac{1}{2}$ 이다. (참)

ㄷ. $f''(x)=\dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$ 이므로 $f''(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$f'(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	1	↘	$-\frac{1}{8}$	↗

따라서 함수 $f'(x)$ 는 $x<-\sqrt{3}$ 또는 $0<x<\sqrt{3}$ 에서 감소하고,
$-\sqrt{3}<x<0$ 또는 $x>\sqrt{3}$ 에서 증가하므로 함수 $f'(x)$ 는 열린 구간 $(0,1)$ 에서 감소한다.
따라서 $0<x<1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x)<f'(0)=1 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,1]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0,1)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$0<a<b<1$인 모든 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$를 만족시키는 c가 열린 구간 $(0,1)$에 적어도 하나 존재한다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0<a<b<1$일 때, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(0)=1$ 이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[1.1] (대학발표 예시답안)

(가)에서 $x=y=8$라면 $g(0)=g(8-8)=g(8)^2-f(8)^2=1$.

한편 $x=y=0$이면 $1=g(0)=g(0)^2+f(0)^2=1+f(0)^2$ 이므로 $f(0)=0$이다.

[1.2] (대학발표 예시답안)

먼저 $g(8-x)=g(8)g(x)+f(8)f(x)=f(x)$ 이고,

$f(8-x)=g(8-(8-x))=g(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x+y)&=g(8-(x+y))=g((8-x)-y)\\&=g((8-x)-y)\\&=g(8-x)g(y)+f(8-x)f(y)\\&=f(x)g(y)+g(x)f(y)\end{aligned}$$

[1.3] (대학발표 예시답안)

먼저 $\dfrac{\pi}{16}=f'(0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}$ 이고

$0=g'(0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(h)-g(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(h)-1}{h}$ 이므로 모든 실수 x에 대하여

$$\begin{aligned}g'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(x)g(-h)+f(x)f(-h)-g(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{g(x)(g(-h)-1)+f(x)f(-h)}{h}\\&=-g'(0)g(x)-f'(0)f(x)=-\frac{\pi}{16}f(x)\end{aligned}$$

이다. 즉 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 미분가능함수이다.

한편 $g(x)=t$라 치환하면 $\dfrac{d}{dt}g(x)=g'(x)\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{\pi}{16}f(x)\dfrac{dx}{dt}=1$ 이고

$g(0)=1$, $g(8)=0$이므로,

$$\int_0^8 f(x)g(x)^2e^{g(x)+1}dx=\frac{16}{\pi}\int_0^1 t^2e^{t+1}dt=\frac{16}{\pi}\left[(t^2-2t+2)e^{t+1}\right]_0^1=\frac{16}{\pi}(e^2-2e).$$

위의 식에서 두 번째 등호는 다음 부정적분으로 알 수 있다.

$$\int t^2e^{t+1}dt = t^2e^{t+1} - 2\int te^{t+1}dt = t^2e^{t+1} - 2\left(te^{t+1} - \int e^{t+1}dt\right) = (t^2 - 2t + 2)e^{t+1}$$

[2.1] (대학발표 예시답안)

양의 실수 t에 대하여 $f(t) = (1+t) - \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)e^t$ 이라 하자.

양변을 t에 대하여 미분하면,

$f'(t) = 1 - \left(-t + 1 - \frac{t^2}{2}\right)e^t > 1 - (1-t)e^t = g(t)$ 를 얻는다.

임의의 양의 실수 t에 대하여 $g'(t) = e^t - (1-t)e^t = te^t > 0$ 이므로

$g(t)$는 증가함수이고, $g(0) = 1 - (1-0)e^0 = 0$ 이다.

임의의 양의 실수 t에 대하여 $g(t) > g(0) = 0$ 이고

$f'(t) > g(t) = 1 - (1-t)e^t > g(0) = 0$ 이므로

$f(t)$ 는 증가함수이고, $f(0) = 1 - (1-0)e^0 = 0$ 이다.

따라서 임의의 양의 실수 t에 대하여 $f(t) > 0$ 이다.

그러므로 모든 양의 실수 t에 대하여 $1 + t > \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)e^t$ 이므로, 부등식을 만족하는 t의 범위는 $(0, \infty)$ 이다.

[대학발표 다른 풀이 1]

$f'(t) = 1 - \left(-t + 1 - \frac{t^2}{2}\right)e^t$ 이고, $f''(t) = \left(\frac{t^2}{2} + 2t\right)e^t > 0$ 이다.

양의 실수범위에서 $f'(t)$ 는 증가함수이므로,

양의 실수 t에 대하여 $f'(t) > f'(0) = 0$ 이 성립한다.

따라서 양의 실수범위에서 $f(t)$ 도 역시 증가함수이고,

양의 실수 t에 대하여 $f(t) > f(0) = 0$ 이 성립한다.

따라서 $1 + t > \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)e^t$ 이 성립한다.

[대학발표 다른 풀이 2]

$f(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)e^t$, $g(t) = 1 + t$ 라 하자.

$f'(t) = -\frac{1}{2}(t^2 + 2t - 2)e^t$ 이고, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \pm \sqrt{3}$ 이다.

$f''(t) = -\frac{1}{2}(t^2 + 4t)e^t$ 이고, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0, -4$ 이다.

(변곡점은 $t = 0$, $t = 4$ 에서 나타난다.)

$t=0$일 때, $(0,1)$에서의 접선의 방정식은 $y=1+f'(0)t=1+t$이므로,
양의 실수 t에 대하여 $g(t)>f(t)$이 성립한다.

[2.2] (대학발표 예시답안)

다항식 $p_{2n-1}(x)$에 $x=0$을 대입하면, $p_{2n-1}(0)=1>0$ …… ㉠

다항식 $p_{2n-1}(x)$에 $x=-2n$을 대입하여 $p_{2n-1}(-2n)$을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} p_{2n-1}(-2n) &= \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-2n)^k}{k!}=[1+(-2n)]+\left[\frac{(-2n)^2}{2!}+\frac{(-2n)^3}{3!}\right]+\cdots \\ &\qquad +\left[\frac{(-2n)^{2k-2}}{(2k-2)!}+\frac{(-2n)^{2k-1}}{(2k-1)!}\right]+\cdots+\left[\frac{(-2n)^{2n-2}}{(2n-2)!}+\frac{(-2n)^{2n-1}}{(2n-1)!}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-2n)^{2k-2}}{(2k-2)!}+\frac{(-2n)^{2k-1}}{(2k-1)!}\right] \end{aligned}$$

임의의 $1\le k\le n$에 대하여

$$\frac{(-2n)^{2k-2}}{(2k-2)!}+\frac{(-2n)^{2k-1}}{(2k-1)!}=\frac{(-2n)^{2k-2}(2k-2n-1)}{(2k-1)!}<0$$

$$p_{2n-1}(-2n)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-2n)^{2k-2}}{(2k-2)!}+\frac{(-2n)^{2k-1}}{(2k-1)!}\right]<0 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

∴ 식 ㉠과 ㉡에 의해 $p_{2n-1}(0)>p_{2n-1}(-2n)$이다.

[2.3] (대학발표 예시답안)

$x\ge 0$인 경우와 $x<0$인 경우로 나누어 생각하자.

(i) $x\ge 0$인 경우

$p_{2n}(x)\ge 1>0$이므로, $p_{2n}(x)=0$을 만족하는 $x\ge 0$인 실수는 없다.

(ii) $x<0$인 경우

모든 자연수 n에 대하여 $p_{2n}(x)>0$임을 보이면 모든 음의 실수 x에서는 $p_{2n}(x)\ne 0$이다.

따라서 (i)과 (ii)에 의해, $p_{2n}(x)=0$을 만족하는 실수 x는 존재하지 않는다.

(ii)의 경우를 수학적 귀납법을 이용하여 증명하자.

$n=1$인 경우

$$p_2(x)=1+x+\frac{x^2}{2}=\left(1+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{x^2}{4}>0\text{이다.}$$

$n=k-1$인 경우 $p_{2k-2}(x)>0$이 성립함을 가정하자.

등식 $p_{2k}{}'(x)=p_{2k-1}(x)$이 성립하고 [2.2]에서

$p_{2k-1}(0)>0$과 $p_{2k-1}(-2k)<0$임을 알 수 있다.

$p_{2k-1}(x)$는 연속함수이므로, 중간값 정리에 의해 $p_{2k-1}(t)=0$인 t가 $-2k$과 0사이에 적어도 하나 존재한다. 즉,

$$0=p_{2k-1}(t)=\sum_{m=0}^{2k-1}\frac{t^m}{m!}=\sum_{m=0}^{2k-2}\frac{t^m}{m!}+\frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} \quad \cdots\cdots (*)$$

귀납법 가정에 의해, $0 < p_{2k-2}(x) = p_{2k-1}{}'(x)$ 이므로 $p_{2k-1}(x)$는 증가함수이다.
따라서 $p_{2k-1}(t)=0$ 인 t가 $-2k$와 0사이에 하나만 존재한다. 실수 $t<0$ 이므로,

$$p_{2k}{}''(t) = p_{2k-1}{}'(t) = p_{2k-2}(t) = \sum_{m=0}^{2k-2} \frac{t^m}{m!} = - \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} > 0 \quad \cdots\cdots \text{ ㉢}$$

위의 식 ㉢에서 4번째 등식은 식 (*)에 의해서 성립한다.
그러므로 다항식 $p_{2k}(x)$는 $x=t$에서 극솟값(최솟값)을 갖고,

$$t \neq 0 \text{ 이므로, } p_{2k}(x) \ge p_{2k}(t) = \sum_{m=0}^{2k} \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{t^m}{m!} + \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \frac{t^{2k}}{(2k)!} > 0$$

위의 등식에서 3번째 등식은 식 (*)에 의해서 성립한다.

그러므로 $p_{2n}(x)$는 실근을 갖지 않는다.

37 한양대 오후 2차(자연계열)29)

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고교 교육과정 내 출제 수학 가형 수능 출제범위와 동일	없음	수학 (2문항, 6문제)	90분

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

> 구간 $[0, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음과 같이 주어져 있다.
>
> $$f(x)=\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

[1.1] 양의 실수 t에 대하여 부등식 $\dfrac{1}{t+2}+\ln(t+1)-\ln(t+2)<0$이 성립함을 보이시오.

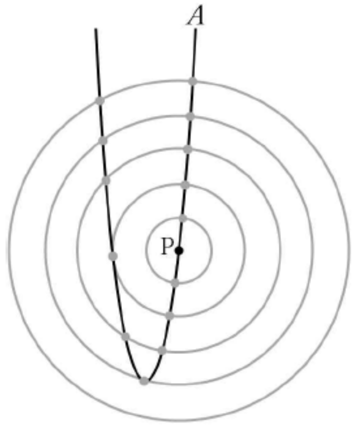
[1.2] 함수 $f(x)$의 최댓값을 구하시오.

[1.3] $x \geq 0$일 때, 부등식 $f''(x)f(x)>\{f'(x)\}^2$ 이 성립함을 보이시오.

29) 한양대 입학처 홈페이지

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.(50점)

좌표평면에서 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형 A 와 점 P 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r 인 원이 만나는 점의 개수를 n 이라 하자. 또 r 가 변할 때 n 의 최댓값이 존재한다면 이를 N_{P} 라고 하자. 예를 들어 오른쪽 그림에서 r 이 증가할 때, n 은 2, 3, 4, 3, 2 순으로 변하고 $N_{\mathrm{P}}=4$ 이다.



[2.1] 도형 A 를 포물선 $y=x^2$ 이라 하자. 점 $\mathrm{P}(\sqrt{3}, 3)$ 과의 거리가 $2\sqrt{3}$ 이 되는 A 의 점을 모두 구하시오.

[2.2] 도형 A 를 포물선 $y=x^2$ 이라 하자. 점 $P(a, a^2)$ 에 대하여 $N_{\mathrm{P}}=2$ 가 되는 a 의 값 또는 범위를 구하시오.

[2.3] 방정식 $x^3-3xy-y^3-1=0$ 이 나타내는 도형을 A 라 하자. 원점 $\mathrm{P}(0, 0)$ 에 대하여 N_{P} 를 구하고 이 때 반지름의 길이 r 의 값 또는 범위를 구하시오.

풀어보기

문제1

함수 $f(x)=e^x-1$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2012년 4월 전국연합)

보 기

ㄱ. $\int_0^1 f(x)dx = e-2$

ㄴ. $x>0$에서 $f(x)>x$이다.

ㄷ. $\dfrac{5(e^5-1)}{2} < \int_0^{e^5-1} f^{-1}(x)dx < \dfrac{(e^5-1)^2}{2}$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제2

실수 m에 대하여 점 $(0,2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty, a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은? (2012학년도 수능)

① -3　② $-\dfrac{3}{4}$　③ $\dfrac{3}{2}$　④ $\dfrac{15}{4}$　⑤ 6

예시답안

풀어보기(문제1)

ㄱ. $\int_0^1 f(x)dx = \left[e^x - x\right]_0^1 = e-2$ (참)

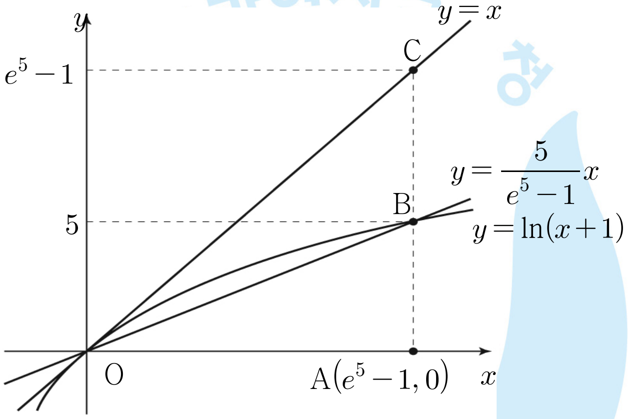
ㄴ. $g(x)=f(x)-x$ 라 하자.

$x>0$ 에서 $g'(x)=e^x-1>0$ 이므로 함수 $g(x)$는 구간 $(0, \infty)$ 에서 증가한다.

따라서 $g(0)=0$ 이므로 $x>0$ 에서 $f(x)>x$ 이다. (참)

ㄷ. $f^{-1}(x)=\ln(x+1)$ 이므로

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{5(e^5-1)}{2} < \int_0^{e^5-1} f^{-1}(x)dx\,,\quad \int_0^{e^5-1} f^{-1}(x)dx < \frac{(e^5-1)^2}{2} = \triangle\mathrm{OAC} \quad (\text{참})$$



풀어보기(문제2)

$y=mx+2$ 와 $y=x^3-3x^2+1$ 의 교점의 개수는 $x^3-3x^2-mx-1=0$,

$x^2-3x-\dfrac{1}{x}=m$ 의 실근의 개수와 같다. ($\because\ x \neq 0$)

$g(x)=x^2-3x-\dfrac{1}{x}$ 로 놓고 미분하면

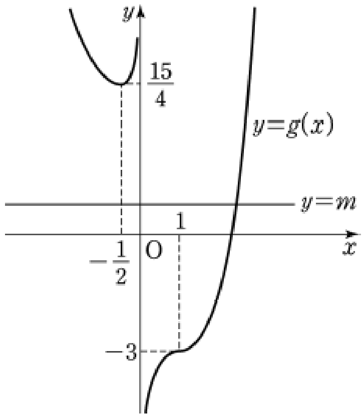
$$g'(x)=2x-3+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3-3x+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x^2}$$

증감표를 그려보면

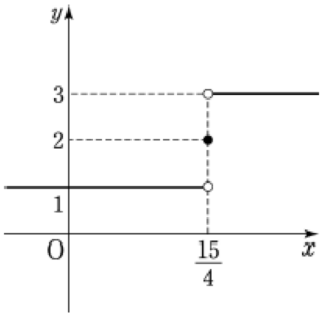
x		$-\frac{1}{2}$		(0)		1	
$g(x)$	$-$		$+$		$+$	$+$	$+$
$g'(x)$	↘	$\frac{15}{4}$	↗		↗	-3	↗

$\lim\limits_{x\to+0} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-0} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

$y=g(x)$, $y=m$의 그래프를 그리면

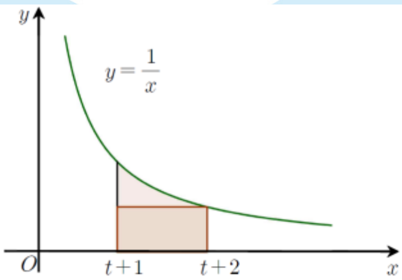


$f(m)$은 $y=g(x)$와 $y=m$의 교점의 개수이므로



따라서, a의 최댓값은 $\frac{15}{4}$이다.

[1.1] (대학발표 예시답안)



양의 실수 t에 대하여 $\frac{1}{t+2}+\ln(t+1)-\ln(t+2)=\int_{t+1}^{t+2}\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{x}\right)dx$ 이다.

이 때 함수 $\frac{1}{t+2}-\frac{1}{x}$는 구간 $[t+1, t+2]$에서 0보다 작거나 같기 때문에 적분값은 0보다 작다. 즉 $\int_{t+1}^{t+2}\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{x}\right)dx<0$ 이다.

(나침반 다른 풀이)

함수 $g(x)=\ln x\,(x>0)$라 두자.

양의 실수 t에 대하여 $g(x)$는 닫힌구간 $[t+1,\, t+2]$에서 연속이고, 열린구간 $(t+1,\, t+2)$에서 미분가능이므로 평균값 정리에 의해 $\dfrac{g(t+2)-g(t+1)}{(t+2)-(t+1)}=g'(c)$인 c가 열린구간 $(t+1,\, t+2)$에 존재한다.

이 때, $\dfrac{g(t+2)-g(t+1)}{(t+2)-(t+1)}=\ln(t+2)-\ln(t+1)=\dfrac{1}{c}$이고 $\dfrac{1}{t+2}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{t+1}$이므로

$\dfrac{1}{t+2}<\ln(t+2)-\ln(t+1)$이 성립한다.

[1.2] (대학발표 예시답안)

함수 $f(x)=\left(\dfrac{2x+1}{2x+2}\right)^{x+\frac{1}{2}}$의 양변에 로그를 취하면,

$\ln f(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\{\ln(2x+1)-\ln(2x+2)\}$이다. 양변을 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)}&=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{2x+2}\right\}+\ln(2x+1)-\ln(2x+2)\\&=\frac{1}{2(x+1)}+\ln(2x+1)-\ln(2x+2)=\int_{2x+1}^{2x+2}\left(\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{t}\right)dt\end{aligned}$$

위의 식에서 피적분 함수 $h(t)=\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{1}{t}$는 구간 $[2x+1,\, 2x+2]$에서 0보다 작거나 같기 때문에, $\dfrac{f'(x)}{f(x)}<0$을 얻는다. 그리고 실수 $x\ge 0$에 대하여 $f(x)>0$이므로, $f'(x)<0$이다. 즉, $f(x)$는 감소함수이다. 따라서 $f(x)\le f(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

[1.3] (대학발표 예시답안)

$x\ge 0$에 대하여 $g(x)=\ln f(x)$라 하자. 양변을 x에 대하여 미분하면,

$g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{2(x+1)}+\ln(2x+1)-\ln(2x+2)$ …… ㉠

이다. 다시 ㉠의 양변을 미분하면, $g''(x)=\dfrac{f''(x)f(x)-\{f'(x)\}^2}{\{f(x)\}^2}$이다.

이때, 실수 $x\ge 0$에 대하여 $f(x)>0$이므로,

$f''(x)f(x)>\{f(x)\}^2$이기 위한 필요충분조건은 $g''(x)>0$이다.

$$g''(x) = -\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{x+1}\left(1+\frac{1}{2(x+1)}\right) > 0$$

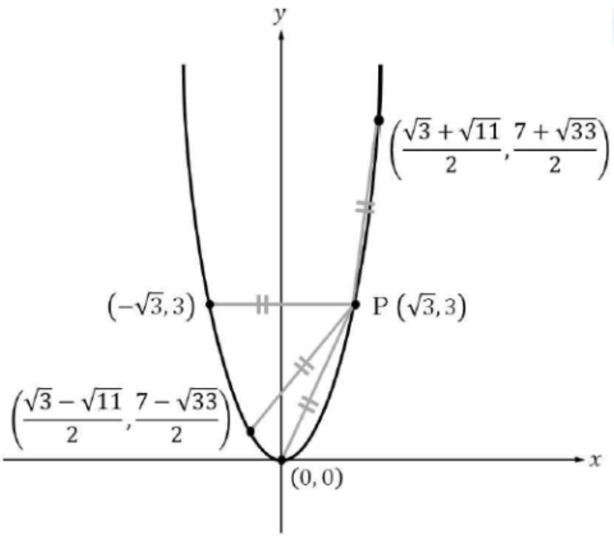
$$\frac{1}{x+\frac{1}{2}} > \frac{1}{x+1}\left(1+\frac{1}{2(x+1)}\right)$$

$$(x+1)^2 > \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right) \quad \cdots\cdots \text{ ㉡}$$

모든 실수 $x \geq 0$에 대하여 부등식 ㉡이 성립하므로, 부등식 $f''(x)f(x) > \{f(x)\}^2$ 이 성립한다.

[2.1] (대학발표 예시답안)

포물선 A의 한 점을 $\mathrm{Q}(x, x^2)$이라고 하면 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (x^2-3)^2}$ 이다.
$\overline{\mathrm{PQ}} = 2\sqrt{3}$ 이면 $(x-\sqrt{3})^2 + (x^2-3)^2 = 12$ 이고,
이를 정리하면 $x(x+\sqrt{3})\left(x - \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2}\right) = 0$ 이므로,
$\overline{\mathrm{PQ}} = 2\sqrt{3}$ 인 A의 점 Q는 모두 4개이고 각각의 좌표는 $(0, 0)$, $(-\sqrt{3}, 3)$, $\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2}, \frac{7+\sqrt{33}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2}, \frac{7-\sqrt{33}}{2}\right)$ 이다. (아래그림 참조.)



[2.2] (대학발표 예시답안)

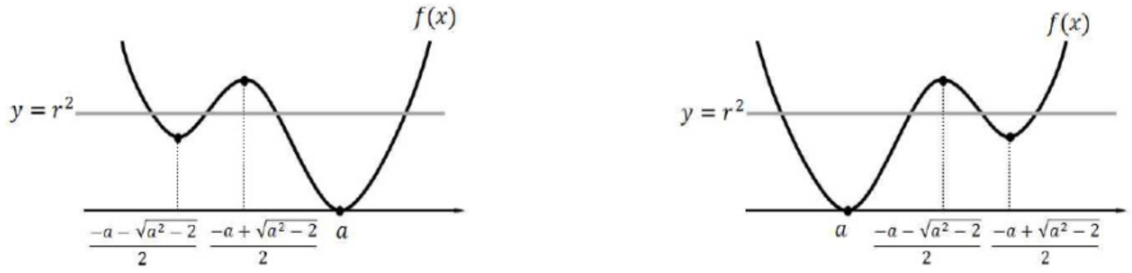
점 $\mathrm{P}(a, a^2)$와 포물선 A의 임의의 점 $\mathrm{Q}(x, x^2)$와의 거리는 $\sqrt{(x-a)^2 + (x^2-a^2)^2}$ 이다.
$f(x) = (x-a)^2 + (x^2-a^2)^2$ 이라 하면, 양의 실수 r에 대해, 점 P와 거리 r인 점들의 개수는 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = r^2$의 교점의 개수와 일치한다.
곡선 $y = f(x)$의 개형을 알아보기 위해 $f'(x) = 0$의 실근의 개수를 구해보자.
$f'(x) = 2(x-a) + 2(x^2-a^2)2x = 2(x-a)(2x^2+2a+1)$ 이므로,

$2x^2+2ax+1$ 의 판별식 $\frac{D}{4}=a^2-2$ 에 대하여

① $\frac{D}{4}>0$ (즉, $a<-\sqrt{2}$ 또는 $a>\sqrt{2}$) 이면,

$f'(x)=0$ 의 실근은 $a, \frac{-a-\sqrt{a^2-2}}{2}, \frac{-a+\sqrt{a^2-2}}{2}$ 이다.

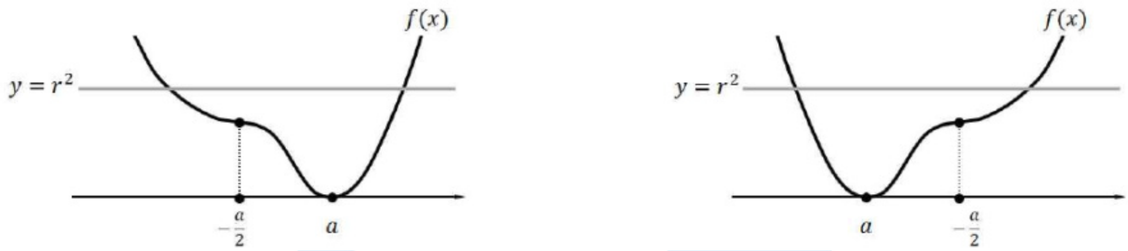
따라서 $f(x)$ 의 그래프는 다음 중 하나이다.



이 경우 양의 실수 r 에 대해 $y=f(x)$ 와 $y=r^2$ 의 교점은 최대 4개 이므로 $N_P=4$ 이다.

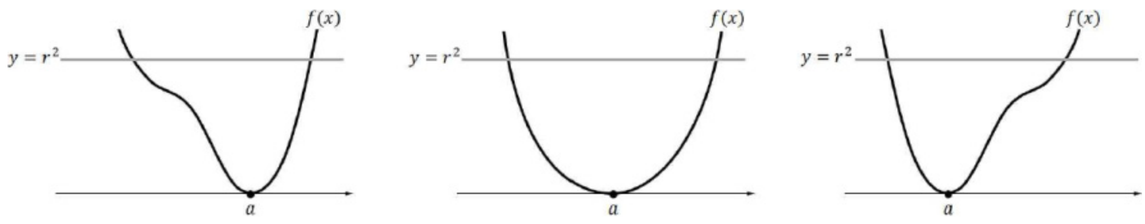
② $\frac{D}{4}=0$ (즉, $a=\pm\sqrt{2}$) 이면, $f'(x)=0$ 의 실근은 $a, -\frac{a}{2}$ 이다.

따라서 $f(x)$ 의 그래프는 다음 중 하나이다.



이 경우 양의 실수 r 에 대해 $y=f(x)$ 와 $y=r^2$ 의 교점은 항상 2개 이므로 $N_P=2$ 이다.

③ $D/4<0$ (즉, $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$) 이면, $f'(x)=0$ 의 실근은 a 뿐이다. 따라서 $f(x)$ 의 그래프는 다음 중 하나이다.



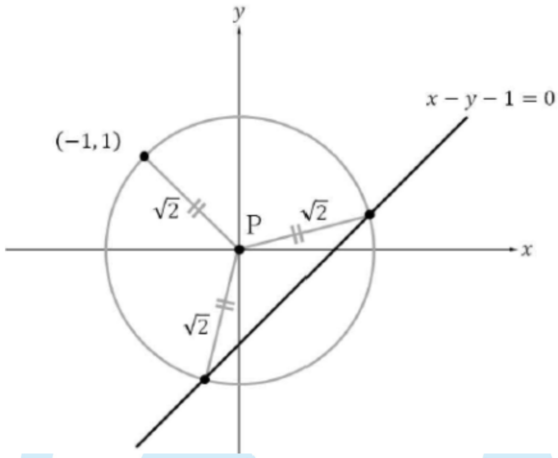
이 경우 양의 실수 r 에 대해 $y=f(x)$ 와 $y=r^2$ 의 교점은 항상 2개 이므로 $N_P=2$ 이다.

②, ③의 경우에만 $N_P=2$ 이므로, 구하는 a 값의 범위는 $-\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$ 이다.

[2.3] (대학발표 예시답안)

$$\begin{aligned} x^3-3xy-y^3-1 &= (x-y)^3+3xy(x-y)-3xy-1=(x-y)^3-1+3xy(x-y-1) \\ &= (x-y-1)\{(x-y)^2+(x-y)+1\}+3xy(x-y-1) \\ &= (x-y-1)(x^2-2xy+y^2+x-y+1+3xy) \\ &= \frac{1}{2}(x-y-1)\{(x+y)^2+(x+1)^2+(y-1)^2\} \end{aligned}$$

이므로 집합 A는 직선 $x-y-1=0$과 한 점 $(-1,1)$로 이루어져 있다.



위 그림으로부터 점 P 에 대한 집합 A의 N_{P}는 3이고 이 때 반지름 r은 $\sqrt{2}$ 이다.

발간을 도와주신 분

기 획

전영근 부산광역시교육청 교육국장
김혁규 부산광역시교육청 중등교육과장
김종희 부산광역시교육청 중등교육과 장학관
민복기 부산광역시교육청 중등교육과 장학사

집 필

김현미 부산진여자상업고등학교
박철호 부산남일고등학교
박윤효 부산국제고등학교
임재석 부산사대부설고등학교
위성미 부산사대부설고등학교
원태경 동래고등학교
정경영 부산사대부설고등학교
조준혁 동천고등학교
조동석 금명여자고등학교
김무진 부산사대부설고등학교
심미례 구덕고등학교
이재식 동래고등학교
최기원 동래고등학교

2017학년도 수리논술 나침반 Ⅸ

발행처 : 부산광역시교육청

발행일 : 2017. 6. 30.

인쇄처 : 고려문화사 051) 816-7988