[아주대학교 문항정보 5]

1. 일반 정보

유형	■논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연(오전) 대문항 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심 개념 및 용어	삼각함수, 그래프의 개형, 수열의 합, $\sum$의 성질, 자연 상수 e, 함수의 극한, 연속함수, 닫힌구간, 열린구간, 최대·최소 정리, 사잇값 정리, 부정적분, 합성함수 미분, 치환적분
예상 소요 시간	120분 중 60분	

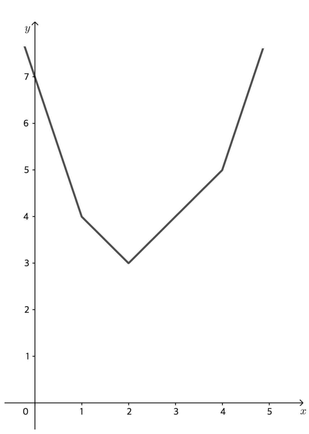
2. 문항 및 제시문

[제시문]

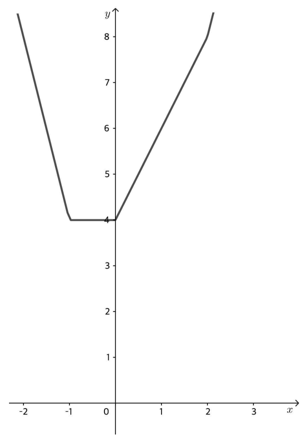
(가) 양의 정수 n에 대하여 n개의 실수 x_1, ... , x_n(단, $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$)을 사용하여 함수 $B(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$B(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - x_k| = |x - x_1| + \cdots + |x - x_n|$$

함수 $y = B(x)$의 그래프는 구간 $(-\infty,\ x_1]$과 구간 $[x_n,\ \infty)$에서 기울기가 각각 $-n$과 n인 직선이 되며, $x_k \ne x_{k+1}$이면 닫힌구간 $[x_k,\ x_{k+1}]$에서도 직선이다. 이와 같이 $y = B(x)$의 그래프에 나타나는 직선의 기울기의 집합을 S라 하자. $-n$과 n은 항상 S의 원소이며 S의 원소의 개수는 $n+1$ 이하이다. [그림 1-1]의 왼쪽의 예에서 $y = B(x)$의 그래프에 나타나는 직선의 기울기는 $-3, -1,\ 1,\ 3$이므로 $S = \{-3, -1, 1, 3\}$이다.



$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4$



$x_1 = x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2$

[그림 1-1]

(나) 함수 $f(x)$와 두 실수 x_1과 x_2에 대해, 함수 $C(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$C(x) = \left(f(x) - f(x_1)\right)^2 + \left(f(x) - f(x_2)\right)^2$$

실수 a에 대해 $C(a) = 0$이면, $\left(f(a) - f(x_1)\right)^2 = \left(f(a) - f(x_2)\right)^2 = 0$ 이므로 $f(a) = f(x_1) = f(x_2)$ 이다.

[문항]

[문제 1-1] (30점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) $n = 401$이고 모든 $1 \le k \le n$에 대하여 $x_k = k$인 n개의 정수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$을 사용하여 함수 $B(x)$를 만들 때, $B(x)$의 최솟값을 구하여라.

(2) 서로 다른 n개의 실수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$을 사용하여 함수 $B(x)$와 집합 S를 만들 때, S의 원소의 제곱의 합을 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^3}$의 값을 구하여라.

(3) 2 이상의 짝수 n에 대해, $1 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le 3$을 만족하는 n개의 정수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$을 사용하여 함수 $B(x)$와 집합 S를 만들자. S의 원소의 곱이 양수가 되게 하는 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$의 개수를 n에 대한 식으로 나타내어라.

(4) 모든 $1 \le k \le n$에 대하여 $-1 < x_k < 1$인 n개의 실수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$을 사용하여 함수 $B(x)$를 만들자. 방정식 $B(x) = n$의 해가 닫힌구간 $[-1, 1]$에 존재하는지 여부를 판단하고 그 이유를 서술하여라.

[문제 1-2] (20점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x) = \sec x$ 와 $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{\pi}{3}$를 사용하여 함수 $C(x)$를 만들 때, $\int C(x)\tan x\, dx$를 구하여라.

(2) 함수 $f(x) = e^{3x} - \cos^2(\pi x)$를 사용하여 함수 $C(x)$를 만들었더니 $\lim_{x\to 1} \frac{C(x)}{(\ln x)^2}$가 실수 L로 수렴하였다. 이때 L의 값을 구하여라.

3. 출제 의도

[문제 1-1] 제시문의 상황을 통해 연속함수의 성질을 이해하고 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

[문제 1-2] 제시문의 함수의 성질을 이해하고 부정적분과 함수의 연속성을 활용할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	수학 Ⅰ [12수학Ⅰ03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. 수학Ⅱ [12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅱ02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다. 미적분 [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	박교식 외 19	동아	2017	127. 131
	수학 Ⅰ	고성은 외 5	신사고	2017	133, 137
	수학 Ⅰ	황선욱 외 8	미래앤	2017	147
	수학 Ⅰ	배종숙 외 6	금성출판사	2017	148
	수학 Ⅰ	김원경 외 14	비상	2017	38, 139. 142
	수학 Ⅱ	권오남 외 19	교학사	2017	23
	수학 Ⅱ	이준열 외 9	천재교육	2017	38
	수학 Ⅱ	김원경 외 14	비상	2017	22
	`미적분	박교식 외 19	동아	2017	132
	미적분	고성은 외 5	신사고	2017	103

5. 문항 해설

본 문항은 수학Ⅰ의 $\sum$의 성질 활용, 수학 II에서의 자연 상수 e와 삼각함수 성질, 함수의 극한과 극한값, 연속함수의 성질과 활용에 대한 내용, 미적분에서의 극한에 대한 성질과 극한값, 합성함수의 미분, 여러 가지 함수의 부정적분, 치환적분의 간단한 지식을 활용하고 있다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 주어진 상황에서 함수의 해의 여부를 최대·최소 정리, 사잇값 정리 등을 이용하여 판단하며, 다항함수의 도함수를 적용하고, 부정적분을 구하며 합성함수의 미분법을 이용하여 극한값을 구할 수 있는지 확인한다. 또한 본 문항은 학생들이 간단한 함수를 통해 수학 내적 연결성을 활용한 함수적 사고를 할 수 있는지 측정하고 문제 해결의 효율적인 해결 전략을 찾는 문제해결력 역량과 이를 논리적으로 전개할 수 있는 추론 역량을 평가하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	$x=201$에서 최솟값을 가지는 것을 확인	3점
	$B(201)=2\sum_{k=1}^{200}k$	1점
	40200	2점
[1-1] (2)	$S=\{-n, -(n-2), \ldots, n-2, n\}$	2점
	S의 원소의 제곱의 합 $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (최고차항이 $\frac{1}{3}n^2$임을 확인)	3점
	$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\frac{1}{3}$	2점
[1-1] (3)	$x_k=1,2,3$인 k의 개수를 각각 a_1, a_2, a_3 로 두고 문제 해결 시도	1점
	a_1, a_2 a_3가 모두 양수인 경우: $\left(\frac{n}{2}-1\right)^2$	4점
	a_1, a_2 a_3 중 어느 하나가 0인 경우: $\frac{3n}{2}-3$	3점
	전체 경우의 수 $\left(\frac{n}{2}-1\right)^2+\frac{3n}{2}-3=\frac{n^2}{4}+\frac{n}{2}-2$	1점
[1-1] (4)	$B(1)=n-\sum x_k$, $B(-1)=n+\sum x_k$	1점
	$B(1)=n$이면 $x=1$이 $B(x)=n$의 해	2점
	$B(1)\neq n$이면, $B(1)+B(-1)=2n$이므로 $B(1)<n$, $B(-1)>n$이거나 $B(1)>n$, $B(-1)<n$임을 언급	2점

하위문항	채점 기준	배점
	사잇값 정리에 의해 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 방정식 $B(x)-n=0$은 적어도 1개의 해를 가진다.	2점
	결론 도출: "방정식 $B(x)=n$은 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 항상 해를 가진다."	1점
[1-2] (1)	$C(x)$ 전개: $(1-\sec x)^2+(2-\sec x)^2=5-6\sec x+2\sec^2 x$	2점
	$\int \tan x dx=-\ln\lvert\cos x\rvert+C$	2점
	$\int \tan x \sec x dx=\sec x+C$	2점
	$\int \sec^2 x \tan x dx=\frac{\sec^2 x}{2}+C$ (혹은 $\frac{\tan^2 x}{2}+C$)	2점
	답 $\int C(x)\tan x\, dx=-5\ln\lvert\cos x\rvert-6\sec x+\sec^2 x+C$ (혹은 $-5\ln\lvert\cos x\rvert-6\sec x+\tan^2 x+C$)	2점
[1-2] (2)	분자의 극한 $\lim_{x\to1}C(x)=0$	2점
	$C(x)=2\,(f(x)-f(1))^2$	3점
	$g(t)=f(e^t)$ 라 두면, $g'(0)=f'(1)=3e^3$	3점
	답 $18e^6$	2점

7. 예시 답안

[문제 1-1]

(1) 구간 $(-\infty,\ 201]$에서 직선의 기울기가 음수이고, 구간 $[201,\ \infty)$에서 기울기가 양수이다. 따라서 그래프의 개형으로부터 $x=201$에서 최솟값을 가짐을 알 수 있다.

따라서 $B(201)\ =\ \sum_{k=1}^{401}\lvert 201-k\rvert$가 최솟값이 되며, 이를 계산하면

$B(201)\ =2\sum_{k=1}^{200}k=2\ \cdot\ \frac{200\times201}{2}=200\times201\ =40200$ 이다.

(2) x_k들이 모두 다르기 때문에, 집합 S는 $n+1$개의 원소를 가지고 다음과 같은 형태를 가진다.

$$S=\{-n,\ -(n-2),\ \ldots\ ,\ n-2,\ n\}$$

따라서 S의 원소들의 제곱의 합은

$$\sum_{i=0}^{n}(-n+2i)^2=\sum_{i=0}^{n}(n^2-4ni+4i^2)=n^2(n+1)-4n\sum_{i=1}^{n}i+4\sum_{i=1}^{n}i^2$$
$$=n^2(n+1)-4n\cdot\frac{n(n+1)}{2}+4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=-n^2(n+1)+\frac{2}{3}\cdot n(n+1)(2n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

이고, a_n은 n에 대한 삼차식으로 최고차항이 $\frac{1}{3}n^3$이 되어 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\frac{1}{3}$이다.

(3) $x_k=1$인 k의 개수를 a_1, $x_k=2$인 k의 개수를 a_2, $x_k=3$인 k의 개수를 a_3이라 하고 다음 ①과 ②를 생각하자.

① a_1, a_2 a_3가 모두 양수인 경우:

집합 $S=\{-a_1-a_2-a_3,\ -a_1-a_2+a_3,\ -a_1+a_2+a_3,\ a_1+a_2+a_3\}$이 된다.

이때 $-a_1-a_2-a_3=-n$ 이고 $a_1+a_2+a_3=n$ 이므로 S의 원소의 곱이 양수가 되기 위해서는 $-a_1-a_2+a_3=-n+2a_3<0$ 이고 $-a_1+a_2+a_3=n-2a_1>0$ 이어야 한다.

즉, a_1과 a_3은 모두 0보다 크고 $\frac{n}{2}$보다 작은 정수이므로 a_2가 결정되고, 모든 가능한 경우의 수는 $\left(\frac{n}{2}-1\right)^2$이다.

② a_1, a_2 a_3 중 어느 하나가 0인 경우:

a_1, a_2 a_3 중 0인 것이 2개이면, $S=\{-n,n\}$이 되어 S의 원소의 곱이 항상 음수가 되어 모순이다. 따라서 정확히 하나만 0이 되는데, $a_i=0$이고 $a_j, a_l>0$ (단, $j<l$)이라 두자. 그러면, $S=\{-a_j-a_l,\ -a_j+a_l,\ -a_j+a_l\}$이고 $-a_j-a_l=-n$ 이고 $a_j+a_l=n$ 이므로 $-a_j+a_l<0$가 성립해야 한다. 즉 가능한 경우는 a_l이 0보다 크고 $\frac{n}{2}$보다 작은 정수인 경우로 총 경우의 수는 $\frac{n}{2}-1$이 된다.

$a_i=0$인 i를 고르는 방법이 3가지이므로, 이 경우 가능한 경우의 수는 $\frac{3n}{2}-3$이다.

따라서 ①과 ②의 경우를 고려하면 S의 원소의 곱이 양수가 되는 n에 대한 식은 $\left(\frac{n}{2}-1\right)^2+\frac{3n}{2}-3=\frac{n^2}{4}+\frac{n}{2}-2$ 이다.

(4) $|x_k|<1$로부터 $B(1)=n-\sum x_k$, $B(-1)=n+\sum x_k$이다.

$B(1)=n$이면 $x=1$이 $B(x)=n$의 해가 된다.

$B(1)\neq n$이면, $B(1)+B(-1)=2n$이므로 $B(1)<n$, $B(-1)>n$이거나 $B(1)>n$, $B(-1)<n$이다. 사잇값 정리에 의해 열린구간 $(-1,1)$에서 방정식 $B(x)-n=0$은 적어도 1개의 해를 가진다. 따라서 방정식 $B(x)=n$은 닫힌구간 $[-1,1]$에서 항상 해를 가진다.

[문제 1-2]

(1) $\sec 0 = 1,\ \ \sec\frac{\pi}{3} = 2$이므로 $C(x) = (1-\sec x)^2 + (2-\sec x)^2 = 5 - 6\sec x + 2\sec^2 x$이다. 따라서

$\int C(x)\tan x\, dx = 5\int \tan x\, dx - 6\int \tan x \sec x\, dx + 2\int \sec^2 x \tan x\, dx$이다.

한편 $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$, $\int \tan x \sec x dx = \sec x + C$,

$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{\sec^2 x}{2} + C$ 이므로, $\int C(x)\tan x\, dx = -5\ln|\cos x| - 6\sec x + \sec^2 x + C$ 가 된다.

(2) $\lim_{x\to 1}\frac{C(x)}{(\ln x)^2}$ 이 수렴하고 분모의 극한 $\lim_{x\to 1}(\ln x)^2 = 0$ 이므로 분자의 극한도 $\lim_{x\to 1} C(x) = 0$ 이다.

$C(x)$가 연속함수이므로, $0 = \lim_{x\to 1} C(x) = C(1) = (f(1) - f(x_1))^2 + (f(1) - f(x_2))^2$ 이 되어

$f(1) = f(x_1) = f(x_2)$이고, $C(x) = 2\,(f(x) - f(1))^2$이다.

이를 계산하기 위해 $\ln x = t$로 치환하면,

$$\lim_{x\to 1}\frac{C(x)}{(\ln x)^2} = 2\cdot\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x) - f(1)}{\ln x}\right)^2 = 2\cdot\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(e^t) - f(e^0)}{t}\right)^2$$

이 된다. $g(t) = f(e^t)$ 라 두면, $g'(t) = f'(e^t)\,e^t$이며, 미분 계수의 정의로부터 $\lim_{t\to 0}\frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = g'(0) = f'(1) = 3e^3$이다. 따라서 답은 $18e^6$이다.

[아주대학교 문항정보 6]

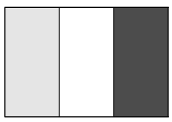
1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연계열(오전) 대문항 2번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학 I, 수학 II, 미적분, 확률과통계</td></tr>
<tr><td>핵심 개념 및 용어</td><td>경우의 수, 순열과 조합, 수렴, 발산, $\sum$의 성질, 자연 상수 e , 정적분, 급수, 급수의 합, 수열의 극한, $\lim_{n\to\infty} a_n$</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">120분 중 60분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

[제시문]

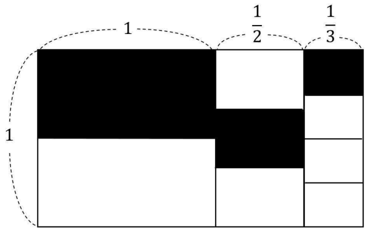
(가) [그림 2-1]과 같이 삼등분 된 모양의 깃발에 인접한 영역을 다른 색으로 칠한 것을 삼색기라 한다. 이때 회전하거나 뒤집어서 두 깃발이 같아지더라도 이들은 서로 다른 것으로 간주한다.



[그림 2-1]

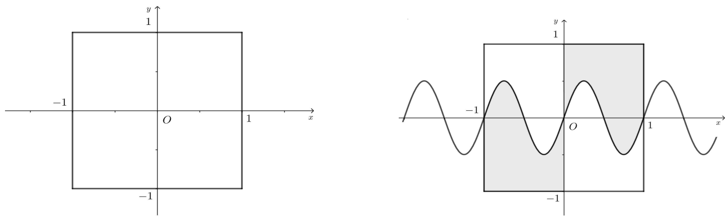
양의 정수 k에 대하여, k가지의 색을 사용하여 삼색기를 만드는 경우의 수를 $r(k)$라 하자. 예를 들어, 삼색기의 이웃하는 영역은 서로 다른 색을 가져야 하므로 곱의 법칙에 의해 $r(2)=2\times1\times1=2$이고, $r(3)=3\times2\times2=12$ 임을 알 수 있다.

(나) 양의 정수 $n(n\geq 2)$에 대하여, n개의 직사각형으로 구성된 깃발이 있고, $1\leq k\leq n$인 정수 k에 대하여 k번째 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{1}{k}$이고 세로의 길이는 1로 일정하다. 각 k번째 직사각형을 $k+1$개의 합동인 작은 직사각형으로 다시 쪼개어 이 중 한 개를 검은색으로 색칠하고 나머지는 검은색이 아닌 색으로 칠한다. 검은색으로 칠해진 모든 직사각형의 넓이의 합을 b_n, 나머지 부분의 넓이를 a_n이라 하자. [그림 2-2]는 $n=3$일 때 그려지는 깃발의 예이다.



[그림 2-2]

(다) 가로와 세로의 길이가 모두 2인 정사각형 모양의 깃발이 [그림 2-3]의 왼쪽 그림과 같이 좌표평면에 놓여있다. 이때 정사각형의 각 변은 직선 $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$ 의 일부이다. 함수 $f(x)$에 대하여, 깃발이 $y=f(x)$의 그래프와 y축에 의하여 같은 넓이를 가진 네 영역으로 나눠질 때, $f(x)$가 '균형 잡힌 깃발'을 만든다고 하자. 예를 들어 깃발이 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2\pi x$의 그래프와 y축에 의하여 같은 넓이를 가진 네 영역으로 나눠지므로 함수 $f(x)$가 균형 잡힌 깃발을 만든다. ([그림 2-3] 참조)



[그림 2-3]

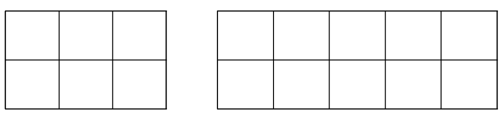
[문항]

[문제 2-1] (22점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} r(k)$을 n에 대한 식으로 나타내어라.

(2) 5가지의 색을 사용한 $r(5)$개의 모든 삼색기 중에서 임의로 2개를 골랐을 때, 각 깃발에 사용된 색의 집합이 서로소일 확률을 구하여라.

(3) 아래의 그림과 같은 모양을 가진 두 깃발 A와 B가 있다. 3가지의 색을 이용하여 인접한 영역이 서로 다른 색을 가지도록 칠하는 경우의 수를 각각 구하여라. (단, 회전하거나 뒤집어서 두 깃발이 같아지더라도 이들은 서로 다른 것으로 간주한다.)



깃발 A　　　　깃발 B

[문제 2-2] (10점) 제시문 (나)에서 $\lim_{n\to\infty} a_n$과 $\lim_{n\to\infty}(b_n)^{2n+2}$의 수렴, 발산을 각각 조사하고, 수렴한다면 그 값을 구하여라.

[문제 2-3] (18점) 제시문 (다)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x) = \frac{1}{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right) + a$ (단, $|a| \le \frac{1}{2}$) 이 균형 잡힌 깃발을 만들 때, a의 값을 구하여라.

(2) 이차함수 $f(x) = 2 - bx^2$ (단, $b > 3$) 이 균형 잡힌 깃발을 만들 때, $\sqrt{b}$ 의 값을 구하여라.

3. 출제 의도

[문제 2-1] 제시문에서 주어진 경우의 수의 규칙을 이해하고 이를 통해 수열의 합을 구하고 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

[문제 2-2] 수열의 수렴과 발산을 판단하고 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

[문제 2-3] 제시문의 함수의 성질을 확인하고 이를 통해 삼각함수의 정적분과 도형의 넓이 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	수학Ⅰ [12수학Ⅰ03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 수학 Ⅱ [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. 확률과통계 [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다. 미적분 [12미적01-01] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	박교식 외 19	동아	2017	131, 133
	수학 Ⅰ	고성은 외 5	신사고	2017	73, 138
	수학 Ⅰ	권오남 외 19	교학사	2017	144
	수학 Ⅰ	황선욱 외 8	미래앤	2017	147
	수학 Ⅰ	배종숙 외 6	금성출판사	2017	81, 148
	수학 Ⅰ	김원경 외 14	비상	2017	142, 144
	수학 Ⅱ	권오남 외 19	교학사	2017	121-122, 147
	수학 Ⅱ	이준열 외 9	천재교육	2017	117-118, 137
	수학 Ⅱ	류희찬 외 10	천재교과서	2017	117-118
	확률과통계	류희찬 외 10	천재교과서	2017	54
	확률과통계	김원경 외 14	비상	2017	44
	`미적분	박교식 외 19	동아	2017	72, 156
	미적분	황선욱 외 8	미래엔	2017	56
	미적분	고성은 외 5	신사고	2017	51, 142,

5. 문항 해설

본 문항은 수학Ⅰ의 $\sum$의 활용, 수학Ⅱ의 함수의 극한과 극한값, 다항함수의 정적분, 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이, 확률과 통계의 조합과 조합의 경우의 수, 미적분의 수열의 수렴과 발산, 수열의 극한에 대한 성질과 극한값의 기초적인 내용을 근간으로 하는 수학 내적 연결 융합형 문항이다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 주어진 규칙을 이해하고 이를 미적분과 확률통계의 기초적인 수학적 사실을 활용하여 수열의 수렴과 발산을 판단하고 문제를 해결하며, 정적분을 이용하여 삼각함수를 적분하고 도형의 넓이를 구하는 문제를 전략적으로 해결할 수 있는지 파악하고자 하는 문항이다. 또한 학생들이 제시문에 주어진 수학적 설명과 시각적 정보를 관찰하여 이를 귀납적으로 추론해 나가며 수학적 사실을 추측하고 적절한 근거에 기초하여 문제 해결과정을 전개할 수 있는지 문제해결력 역량과 효율적인 방법을 찾거나 정교화하는 융합 역량을 평가하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[2-1] (1)	$r(k) = k(k-1)(k-1)$	2점
	$\sum_{k=2}^{n} r(k) = \frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n-2)$	3점
[2-1] (2)	두 깃발 모두 두 개의 색을 사용하거나(①), 한 깃발은 세 개의 색, 다른 깃발은 두 개의 색을 사용(②)하여야 함을 관찰.	2점
	두 깃발 모두 두 개의 색을 쓰는 경우 : 60 가지	2점
	한 깃발은 세 개의 색, 다른 깃발은 두 개의 색을 쓰는 경우 : 120 가지	2점
	전체 확률 $\frac{60+120}{3160} = \frac{9}{158}$	2점
[2-1] (3)	깃발 A 54가지	4점
	깃발 B 486가지	5점
[2-2]	$b_n = 1 - \frac{1}{n+1}$	2점
	$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (발산함을 언급하면 1점, 풀이 3점)	4점
	$\lim_{n\to\infty} (b_n)^{2n+2} = \frac{1}{e^2}$ 이므로 수렴한다. (수렴함을 언급하면 1점)	4점
[2-3] (1)	$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right) + a\right)dx = 0$을 만족하는 a를 구해야 함을 확인	3점
	$\int \cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{\pi}sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{2}{3\pi}sin^3\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C$	3점
	$a = -\frac{2}{3\pi}$	3점
[2-3] (2)	구해야 하는 영역의 넓이가 1이어야 함을 관찰	1점
	영역에서 교점 $\left(\frac{1}{\sqrt{b}}, 1\right)$과 $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{b}}, -1\right)$를 구함	2점
	$1 = \frac{2}{\sqrt{b}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{b}}} (2 - bx^2 + 1)\,dx$	3점
	$\sqrt{b} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$	3점

7. 예시 답안

[문제 2-1]

(1) k가지 색을 사용해서 삼색기를 칠하는 방법의 수는 깃발의 이웃하는 영역을 서로 다른 색을 칠하는 경우의 수이다. 이는 곱의 법칙에 의해 $r(k) = k(k-1)(k-1)$이 된다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} r(k) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)(k-1) = \sum_{\ell=1}^{n-1}(\ell+1)\ell^2 = \sum_{\ell=1}^{n-1}\ell^3 + \sum_{\ell=1}^{n-1}\ell^2 \\ &= \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n-2)\end{aligned}$$

(2) 5가지 색으로 만드는 삼색기의 총 경우의 수 $r(5) = 5 \times 4^2 = 80$이므로 이 중 두 개의 깃발을 뽑는 경우의 수는 ${}_{80}C_2 = 40 \times 79 = 3160$이다.

각 삼색기를 색칠하기 위해서는 두 개 혹은 세 개의 색을 사용해야 한다. 골라진 두 깃발 모두가 세 개의 색을 사용하고 서로 중복되는 색이 사용되지 않았다면 최소 여섯 개의 색이 필요하다. 따라서 주어진 조건을 만족하기 위해서는 두 깃발 모두 두 개의 색을 사용하거나(①), 한 깃발은 세 개의 색, 다른 깃발은 두 개의 색을 사용(②)하여야 한다.

① 두 깃발 모두 두 개의 색을 쓰는 경우 : ${}_5C_2 \times 2 \times {}_3C_2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 60$

② 한 깃발은 세 개의 색, 다른 깃발은 두 개의 색을 쓰는 경우 : ${}_5C_3 \times 3! \times {}_2C_2 \times 2 = 120$

①과 ②에 따라서 원하는 확률은 $\frac{60+120}{3160} = \frac{9}{158}$

(3) ⅰ) 깃발 A를 칠하는 경우:

①	②	③
④	⑤	⑥

먼저 ②영역과 ④영역의 색이 같은 경우를 생각하면 ①과 ②의 색 선택은 모두 3×2가지 경우가 있고, ③과 ⑤의 색이 같은 경우(4가지)와 다른 경우(2가지)를 고려하면, 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $6 \times (4+2) = 36$가지이다. 비슷하게 ②영역과 ④영역의 색이 다른 경우를 생각하면 $6 \times (2+1) = 18$가지이다. 따라서 A를 칠하는 경우의 수를 a라 하면, $a = 36 + 18 = 54$이다.

ⅱ) 깃발 B를 칠하는 경우:

깃발 B를 칠하기 위해 아래 표시된 A와 모양이 동일한 부분을 생각하자.

		③		
		⑥		

③, ⑥ 부분에 칠할 수 있는 경우의 수는 모두 6가지이므로 ③, ⑥의 색이 정해져 있다면 표시된 부분을 색칠할 수 있는 경우의 수는 $\frac{a}{6}$가지. 따라서 B를 색칠하는 경우의 수는 먼저 처음 세 줄을 색칠하고(a가지) 뒤의 두 줄을 색칠하는($\frac{a}{6}$가지)를 색칠하는 경우와 같으므로 곱의 법칙에 의해 $a \times \frac{a}{6} = 486$이다.

[문제 2-2]

k번째 직사각형 안에 검은색으로 칠해지는 부분의 넓이는 $\frac{1}{k} \times \frac{1}{k+1}$이다. 따라서 $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$이므로 $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$로 수렴한다.

또한 이 깃발 전체의 넓이는 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$이고,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots = 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\cdots$$
$$> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ \cdots\ = 1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}n = \infty$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$이다. $S_n = a_n + b_n$이고, $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$이다.

한편, $-\frac{1}{n+1} = h$라 놓으면 $n\to\infty$일 때, $h\to 0$이므로,

$$\lim_{n\to\infty}(b_n)^{2n+2} = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{2(n+1)} = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}\times(-2)} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

이므로 수렴한다.

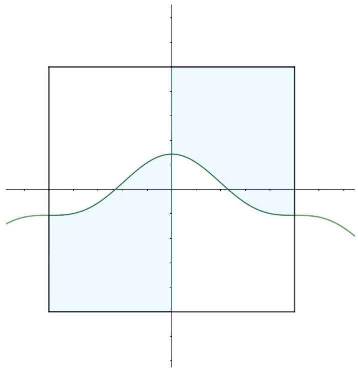
[문제 2-3]

(1) $|a| \le \frac{1}{2}$이므로 함수 $f(x)$는 $-1 \le x \le 1$ 범위에서 $-1 \le f(x) \le 1$을 만족하므로 정사각형 내부에 그려진다. 또한 $f(x)$는 y축에 대한 대칭이다. 따라서 $\int_0^1\left(\frac{1}{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)+a\right)dx = 0$을 만족하는 a를 구하면 충분하다.

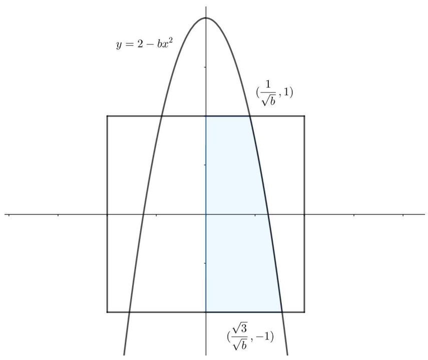
한편, $\cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$이므로

$\int \cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{\pi}sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{2}{3\pi}sin^3\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C$ (단, C는 적분 상수)

이고, 이를 이용하면 $\int_0^1\left(\frac{1}{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)+a\right)dx = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{3\pi} + a = 0$ 이다. 따라서 $a = -\frac{2}{3\pi}$이다.



(2) $f(x)=2-bx^2$는 y축에 대한 대칭인 함수이고 $b>3$이므로 아래 그림과 같은 개형을 가지고 있다. $f(x)$가 균형 잡힌 깃발을 만들기 위해서는 아래 그림의 색칠된 넓이가 1이 되어야 한다.



$f(x)=2-bx^2$과 정사각형의 윗변과 아랫변이 만나는 점을 $x>0$ 범위에서 구해보면 각각 점 $\left(\frac{1}{\sqrt{b}},\ 1\right)$, 점 $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{b}},\ -1\right)$이다. 따라서 위 부분의 넓이는

$$1=\frac{2}{\sqrt{b}}+\int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{b}}}(2-bx^2+1)\,dx$$

이므로 이를 계산하면 $\sqrt{b}=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}$을 얻을 수 있다.

[아주대학교 문항정보 7]

1. 일반 정보

유형	■논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연(오후) 대문항 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학I, 수학 II, 미적분
	핵심 개념 및 용어	미분가능, $\sum$의 성질, 자연 상수 e , 접선의 성질, 삼각함수의 미분, 함수의 최댓값, 미분가능, 그래프의 개형, 정적분
예상 소요 시간	120분 중 60분	

2. 문항 및 제시문

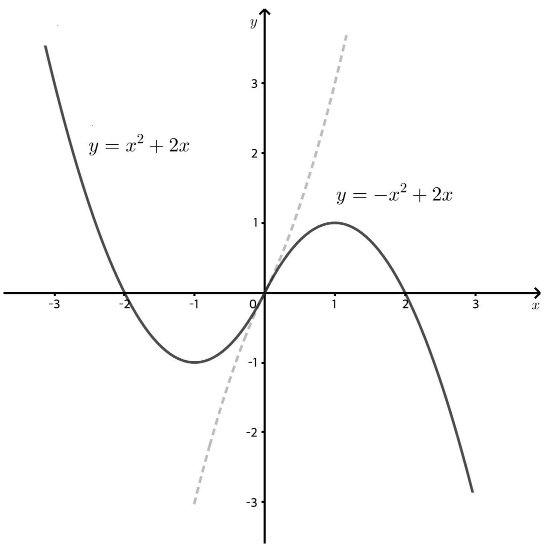
[제시문]

(가) 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $f(a)=g(a)$를 만족하면 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=a$에서 '만난다'고 하고, 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le a) \\ g(x) & (x > a) \end{cases}$$

를 $f(x)$에서 $g(x)$로 $x=a$에서 '갈아타는 함수'라 하자. 또한 $x=a$에서 만나는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여, $f(x)$와 $g(x)$가 각각 $x=a$에서 미분가능하고 $f'(a)=g'(a)$이면, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=a$에서 '부드럽게 만난다'고 하자.

예를 들어, 두 함수 $f(x)=x^2+2x$와 $g(x)=-x^2+2x$에 대하여, $f(0)=g(0)=0$이고 $f'(0)=g'(0)=2$이므로 $f(x)$와 $g(x)$는 $x=0$에서 부드럽게 만난다. [그림 1-1]은 $f(x)$에서 $g(x)$로 $x=0$에서 갈아타는 함수의 그래프이다.



[그림 1-1]

(나) 실수 전체에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다. 즉, 곡선 위의 점 P에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하면 $g(a)=f(a)$이고, $g'(a)=f'(a)$이므로, $f(x)$와 $g(x)$는 $x=a$에서 부드럽게 만난다. 따라서 임의의 실수 a에 대해서 $f(x)$와 $x=a$에서 부드럽게 만나는 직선은 존재한다.

함수 $f(x)$와 두 점에서 부드럽게 만나는 이차함수는 존재하지 않을 수 있다. 가령 함수 $f(x)=e^x$과 $x=0$, $x=2$에서 동시에 만나는 이차함수는 항상 찾을 수 있지만, 두 점 모두에서 부드럽게 만나는 이차함수는 존재하지 않는다.

[문항]

[문제 1-1] (15점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 실수 c에 대하여 두 함수 $f(x)=x^2-3x-6$과 $g(x)=x^3-4x+c$가 $x=a$에서 부드럽게 만난다. a가 정수가 아닐 때, $27c$의 값을 구하여라.

(2) 두 함수 $f(x)=x^4-2x^2-2x$와 $g(x)=\dfrac{3}{2}x^2-5x+\dfrac{1}{2}$이 $x=a$에서 부드럽게 만난다. 함수 $h(x)$를 $f(x)$에서 $g(x)$로 $x=a$에서 갈아타는 함수라고 할 때, $\displaystyle\int_0^2 h(x)\,dx$를 계산하여라.

[문제 1-2] (15점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 양의 정수 n에 대해, 함수 $f(x)=2^x$과 $x=n$에서 부드럽게 만나는 직선의 방정식을 $y=a_nx+b_n$ (단, a_n, b_n은 실수)라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{b_n}{a_n}$의 값을 구하여라.

(2) 함수 $f(x)=e^x$과 이차함수 $g(x)$는 $x=0$에서 부드럽게 만나고 $x=2$에서 만난다. 점 $\mathrm{P}(2, e^2)$에서 $y=f(x)$의 접선과 점 P에서의 $y=g(x)$의 접선이 이루는 예각을 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

[문제 1-3] (20점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 실수 b와 c에 대하여 두 함수 $f(x)=-x^4-2x^2+b$와 $g(x)=-\dfrac{4}{3}x^3-4x+c$가 $x=a$에서 부드럽게 만난다고 하자. $f(x)$에서 $g(x)$로 $x=a$에서 갈아타는 함수의 최댓값이 20일 때 $3(a+b+c)$의 값을 구하여라.

(2) 실수 d에 대하여 두 함수 $f(x)=\sin 2x+d$와 $g(x)=-\left|x-\dfrac{\pi}{2}\right|$이 $x=a$에서 부드럽게 만난다고 하자. $f(x)$에서 $g(x)$로 $x=a$에서 갈아타는 함수의 최댓값을 M이라 하면, M이 가장 클 때의 d의 값을 구하여라.

3. 출제 의도

[문제 1-1] 제시문을 통해 주어진 함수의 성질을 이해하고 이를 활용하여 다항함수의 정적분 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

[문제 1-2] 제시문에 주어진 함수의 접선의 성질을 이해하고 두 직선이 이루는 각의 삼각함수 값을 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 1-3] 함수의 성질과 미분을 활용하여 함수의 최댓값 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	수학 Ⅰ [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학Ⅰ03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. 수학 Ⅱ [12수학Ⅱ02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. 미적분 [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	권오남 외 19	교학사	2017	95
	수학 Ⅰ	홍성복 외 10	지학사	2017	141
	수학 Ⅰ	황선욱 외 8	미래앤	2017	90
	수학 Ⅰ	이준열 외 9	천재교육	2017	86, 147
	수학 Ⅰ	김원경 외 14	비상	2017	87, 142
	수학 Ⅱ	권오남 외 19	교학사	2017	98, 136
	수학 Ⅱ	고성은 외 5	신사고	2017	57, 60, 66-67
	수학 Ⅱ	류희찬 외 10	천재교과서	2017	56, 80, 88, 117-118
	미적분	박교식 외 19	동아	2017	65, 101, 105
	미적분	고성은 외 5	신사고	2017	62, 97, 105,

5. 문항 해설

본 문항은 수학 I의 삼각함수의 그래프, $\sum$의 성질, 수열의 합, 수학 II의 미분가능성과 연속성, 함수 그래프의 개형, 다항함수의 정적분, 미적분의 삼각함수와 합성함수의 미분, 다항함수의 정적분 등의 교육과정 수학 내용을 활용하여 문제해결력을 평가하기 위한 문항이다. 이러한 다양한 수학적 지식을 토대로 정적분을 계산하고, 접선의 성질을 이해를 토대로 접선이 이루는 각을 구하며 삼각함수의 이해를 바탕으로 함수의 최댓값 문제를 해결할 수 있는지를 평가하는 문제이다. 또한 학생들은 제시문에 주어진 일상적인 표현을 수학적 상황으로 연결하여 수학 모델을 적절히 활용하여 수학적 표현을 만들거나 변환하는 활동을 적합하게 할 수 있는지에 대한 수학 문제해결력 및 추론 역량을 평가하는 문항이다.

6. 채점 기준

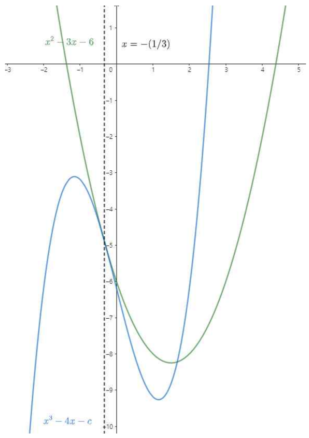
하위문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	$a=-\dfrac{1}{3}$	3점
	$27c=-167$	4점
[1-1] (2)	$a=1$	4점
	$\displaystyle\int_0^2 h(x)\,dx=-\frac{149}{30}$	4점
[1-2] (1)	$a_n=\ln 2\,(e^{n\ln 2})=2^n\ln 2$	2점
	$b_n=2^n-n2^n\ln 2$	2점
	$\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{b_n}{a_n}=\frac{100}{\ln 2}-5050$	3점
[1-2] (2)	$g(x)=\dfrac{e^2-3}{4}x^2+x+1$	3점
	$f'(2)=e^2,\quad g'(2)=e^2-2$	2점
	$\tan\theta=\dfrac{2}{(e^2-1)^2}$	3점
[1-3] (1)	$a=1$	2점
	$b=20$	4점
	$3(a+b+c)=130$	3점

하위문항	채점 기준	배점
[1-3] (2)	$1+d>0$인 d의 존재여부와 존재하는 경우 그 최댓값을 살펴보면 된다.	3점
	$\left\lvert a-\frac{\pi}{2}\right\rvert \ge 2$이거나 $a \le \frac{\pi}{2}$이면 $d+1<0$ 임을 안다.	3점
	M이 최대가 되는 경우는 $a=\frac{2\pi}{3}$이고 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$일 때이다.	5점

7. 예시 답안

[문제 1-1]

(1) 두 함수 $f(x)=x^2-3x-6$과 $g(x)=x^3-4x+c$가 $x=a$에서 부드럽게 만나므로 $f(a)=g(a)$이고 $f'(a)=g'(a)$이다. 즉, $a^2-3a-6=a^3-4a+c$이고 $2a-3=3a^2-4$이다.

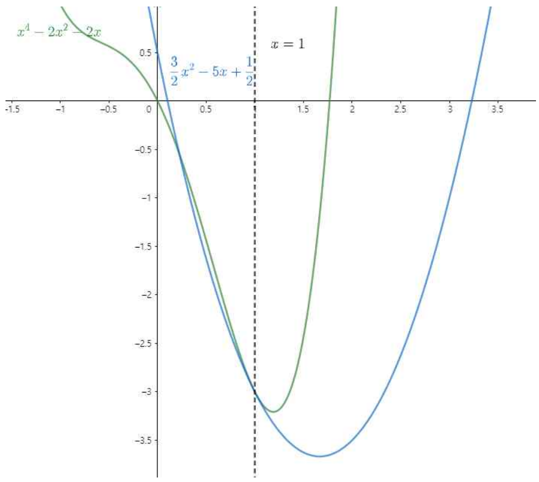


이를 풀면 $2a-3=3a^2-4$로부터, $3a^2-2a-1=(3a+1)(a-1)=0$ 이 되고 a는 정수가 아니므로 $a=-\frac{1}{3}$이다. 이제 $a^2-3a-6=a^3-4a+c$에 $a=-\frac{1}{3}$을 대입하면 $\frac{1}{9}+1-6=-\frac{1}{27}+\frac{4}{3}+c$이므로 $27c=-167$이다.

(2) $f(x)=x^4-2x^2-2x$과 $g(x)=\frac{3}{2}x^2-5x+\frac{1}{2}$이 $x=a$에서 부드럽게 만나므로 $f(a)=g(a)$이고 $f'(a)=g'(a)$이다. 즉, $a^4-2a^2-2a=\frac{3}{2}a^2-5a+\frac{1}{2}$이고 $4a^3-4a-2=3a-5$이다.

이를 풀면 $4a^3-4a-2=3a-5$로부터, $4a^3-7a+3=(a-1)(2a-1)(2a+3)=0$이고 따라서 가능한 a의 값은 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$ 이다. 이 중 $a^4-2a^2-2a=\frac{3}{2}a^2-5a+\frac{1}{2}$을 만족하는 것을 찾으면 $a=1$ 이다. 따라서 $h(x)$는 $f(x)$에서 $g(x)$로 $x=1$에서 갈아타는 함수이고, 주어진 식을 계산하면 아래와 같다.

$$\int_0^2 h(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 g(x)\,dx=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}-x^2\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{2}-\frac{5x^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_1^2$$
$$=\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-1\right)+\left(4-10+1-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{149}{30}$$



[문제 1-2]

(1) 양의 정수 n에 대해, $y=2^x$와 $x=n$에서 부드럽게 만나는 직선의 방정식은 $x=n$에서의 접선이다. $f'(n)=2^n\ln 2$이고 점 $(n, 2^n)$을 지나므로 접선의 방정식은 $y-2^n=2^n\ln 2(x-n)$가 되어 $a_n=\ln 2\,(e^{n\ln 2})=2^n\ln 2$ 이고, $b_n=2^n-n2^n\ln 2$ 이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{100}\frac{b_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{1}{\ln 2}-n\right)=\frac{100}{\ln 2}-5050$ 이다.

(2) $g(x)=px^2+qx+r$이라 하자. $g(0)=f(0)$로부터 $r=1$이고 $g'(0)=f'(0)$로부터 $q=1$이다. $g(2)=f(2)$로부터 $p=\frac{e^2-3}{4}$이므로 $g(x)=\frac{e^2-3}{4}x^2+x+1$이다.

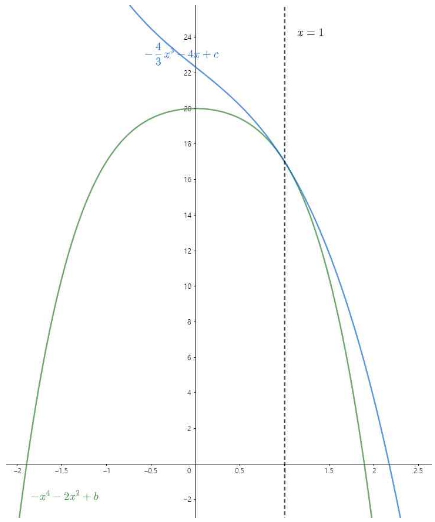
함수 $f(x)$위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=e^2$이고, 함수 $g(x)$위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $g'(2)=e^2-2$이고, θ는 예각이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan\theta=\frac{e^2-(e^2-2)}{1+e^2(e^2-2)}=\frac{2}{(e^2-1)^2}$$

이다.

[문제 1-3]

(1) $f(x) = -x^4 - 2x^2 + b$와 $g(x) = -\frac{4}{3}x^3 - 4x + c$가 $x = a$에서 부드럽게 만나므로 $f(a) = g(a)$이고 $f'(a) = g'(a)$이다. 즉, $-4a^3 - 4a = -4a^2 - 4$로부터, $4(a^2+1)(a-1) = 0$이므로 $a = 1$이다. 한편, $g(x)$는 $x \geq 1$에서 감소하므로 $h(x)$의 최댓값은 구간 $(-\infty, 1]$에서 $f(x)$의 최댓값과 같고, 따라서 $f(x)$의 극댓값 혹은 $f(1)$에서 최댓값을 가진다. $f'(x) = -4(x^2+1)x = 0$의 실수해는 $x = 0$이므로 $f(0)$와 $f(1)$의 값을 비교하면 $f(0) = b$이고 $f(1) = b - 6$이므로 b 최댓값이다. 즉, $b = 20$이다. $f(1) = g(1)$로부터, $-3 + b = -\frac{16}{3} + c$이고 $c = 17 + \frac{16}{3}$이다. 따라서 $3(a+b+c) = 3\left(1 + 20 + 17 + \frac{16}{3}\right) = 130$ 이다.

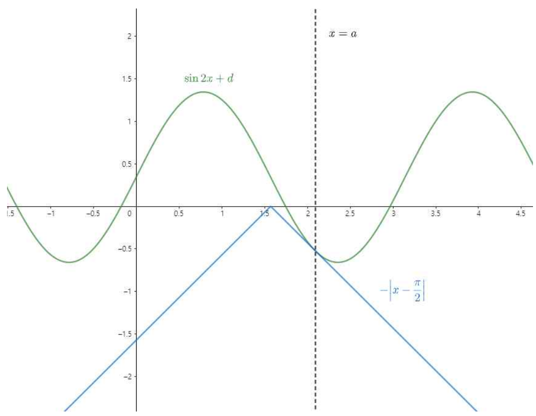


(2) 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x = a$에서 부드럽게 만나므로, $f(a) = g(a)$이고 $a \neq \frac{\pi}{2}$이며, $f'(a) = g'(a)$이다. $f(a) = g(a)$로부터, $d = -\sin 2a - \left|a - \frac{\pi}{2}\right|$가 된다. $f(x)$에서 $g(x)$로 $x = a$에서 갈아타는 함수의 최댓값 M은 $d+1$ 혹은 0이다. 따라서 $1 + d > 0$인 d의 존재여부와 존재하는 경우 그 최댓값을 살펴보면 된다.

$\left|a - \frac{\pi}{2}\right| \geq 2$이면 $1 + d = 1 - \sin 2a - \left|a - \frac{\pi}{2}\right| \leq 0$ 이므로 $\left|a - \frac{\pi}{2}\right| < 2$이라 가정하자. 먼저 $a \leq \frac{\pi}{2}$라 하자. $f'(a) = g'(a)$로부터 $2\cos 2a = 1$이므로 $a = \frac{\pi}{6} + k\pi$ 혹은 $a = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ (단, k는 정수) 꼴이고 이 중 범위를 만족하는 a는 $\frac{\pi}{6}$뿐이다. 이때 $d + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \left|\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right| + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} + 1 < 0$ 이다.

$a > \frac{\pi}{2}$인 경우를 살펴보자. $f'(a) = g'(a)$로부터 $2\cos 2a = -1$이므로 $a = \frac{\pi}{3} + k\pi$ 혹은 $a = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ (단, k는 정수) 꼴이고 이 중 범위를 만족하는 a는 $\frac{2\pi}{3}$ 뿐이다. 이때 $d + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + 1 > 0$이다.

따라서 M이 최대가 되는 경우는 $a = \frac{2\pi}{3}$이고 $d = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$일 때이다.



[아주대학교 문항정보 8]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연(오후) 대문항 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 확률과통계
	핵심 개념 및 용어	수열의 합, 합의 법칙, $\sum$의 성질, 경우의 수, 순열과 조합, 확률, 기댓값, 분산, 조건부 확률
예상 소요 시간	120분 중 60분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 주머니에 빨간 공이 r개, 파란 공이 b개 있다. 주머니에서 공 하나를 임의로 꺼내서 색을 확인한 다음 다시 주머니에 넣고, 방금 꺼낸 공과 같은 색의 공을 하나 더 가져와 주머니에 넣는 것을 1회 시행이라고 하자. 즉, 시행을 1회 할 때마다 주머니 속의 공의 개수는 하나씩 늘어난다. 예를 들어 $r=2$이고 $b=1$인 경우 첫 번째 시행에서 꺼낸 공이 파란 공이면, 첫 번째 시행을 마친 직후 주머니에는 빨간 공과 파란 공이 각각 정확히 2개씩 있다.

(나) 주머니에 빨간 공이 r개, 파란 공이 b개, 흰 공이 w개 있다. 수열 $\{a_n\}$을 음이 아닌 정수로 이루어진 수열이라고 하자. 양의 정수 n에 대하여 n번째 시행에서 공 하나를 임의로 꺼내서 색을 확인한 다음 다시 주머니에 넣고, 방금 꺼낸 공과 같은 색의 공을 a_n개 더 가져와 주머니에 넣는다. 예를 들어 $r=1$, $b=w=2$이고 $a_n=3n$인 경우, 첫 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공이면 첫 번째 시행을 마친 직후 주머니에는 빨간 공이 4개, 파란 공과 흰 공이 각각 2개씩 있다. 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 파란 공이면, 두 번째 시행을 마친 직후 주머니에는 빨간 공이 4개, 파란 공이 8개, 흰 공이 2개 있다.

[문항]

[문제 2-1] (21점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) r과 b가 양의 정수일 때, 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공일 확률을 r, b에 대한 식으로 나타내어라.

(2) $r=2$ 이고 $b=1$ 이라 하자. 세 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공이었을 때, 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공이었을 확률을 구하여라.

(3) $r=2$ 이고 $b=1$ 인 경우, 2021회 시행을 마친 직후 주머니의 빨간 공과 파란 공의 개수가 같을 확률을 구하여라.

[문제 2-2] (29점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 수열 $\{a_n\}$이 $a_n = n$ 이고, $r=b=1$, $w=2$ 라 하자. 2회 시행을 마친 직후 주머니의 흰 공의 개수를 확률변수 X라 할 때, 기댓값 $\mathrm{E}(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하여라.

(2) 수열 $\{a_n\}$은 양의 정수로 이루어진 수열이고, $r=b=w=1$ 이라 하자. 10 이하의 모든 양의 정수 n에 대하여 n회 시행을 마친 직후에는 주머니의 공의 개수가 3^n+2이고, 10회 시행을 마친 직후 주머니의 흰 공의 개수는 547이다. 4 번째 시행을 마친 직후 주머니의 흰 공의 개수를 구하여라.

(3) 수열 $\{a_n\}$은 모든 양의 정수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$을 만족하는 음이 아닌 정수로 이루어진 수열이고, $r=b=w=1$ 이라 하자. 100회 시행을 마친 직후 주머니의 빨간 공, 파란 공, 흰 공의 개수는 각각 2, 12, 4940 이다. 파란 공을 꺼낸 횟수를 m이라 할 때, 가능한 m의 값을 모두 구하고 $\sum_{n=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$ 의 값을 구하여라.

3. 출제 의도

[문제 2-1] 주어진 상황에 대한 경우의 수를 구할 수 있는지 확인하고 순열과 조합을 이해하고 이를 활용하여 확률을 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 2-2] 주어진 상황을 전략적으로 분석하여 기댓값과 분산을 구할 수 있는지 확인하고 경우의 수를 이용한 수열의 합 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	수학 Ⅰ [12수학Ⅰ03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.) 확률과통계 [12확통01-01] 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다. [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다. [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	박교식 외 19	동아	2017	114. 131
	수학 Ⅰ	고성은 외 5	신사고	2017	121, 137
	수학 Ⅰ	이준열 외 9	천재교육	2017	121
	확률과통계	류희찬 외 10	천재교과서	2017	44, 81, 86-87
	확률과통계	이준열 외 9	천재교육	2017	45
	확률과통계	박교식 외 19	동아	2017	51, 62-63
	확률과통계	김원경 외 14	비상	2017	44, 54-55, 62, 73, 77, 79, 96, 101

5. 문항 해설

본 문항은 수학 Ⅰ의 $\sum$의 성질, 확률과 통계의 조합과 경우의 수, 조건부확률, 이산확률변수에서의 기댓값과 분산 등의 교육과정 수학 내용을 활용하여 문제해결력을 평가하기 위한 문항이다. 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 교육과정에 주어진 기본적인 수학적 개념을 토대로 주어진 상황에 적합한 경우의 수와 확률을 계산하며 기댓값과 분산, 수열의 합 문제를 상황에 적용하여 문제를 해결할 수 있는지 파악한다. 또한 본 문항은 학생들이 제시문의 문제 해결 과정에서 필요한 내용들을 파악하여 상황에 맞게 전략적으로 헤아리는 정보처리 역량과 해의 과정을 수학적 개념을 활용하여 논리적으로 전개할 수 있는 추론 역량을 평가하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[2-1] (1)	첫 번째 공이 빨간 공인 경우의 확률은 $\frac{r}{r+b}\times\frac{r+1}{r+b+1}$ 이다.	2점
	첫 번째 공이 파란 공인 경우의 확률은 $\frac{b}{r+b}\times\frac{r}{r+b+1}$ 이다.	2점
	두 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공일 확률은 $\frac{r}{r+b}$ 이다.	2점
[2-1] (2)	R-R-R 확률 $\frac{24}{60}$, B-R-R 확률 $\frac{6}{60}$, R-B-R 확률 $\frac{6}{60}$, B-B-R 확률 $\frac{4}{60}$	4점
	조건부확률은 $\frac{3}{4}$ 이다.	3점

하위문항	채점 기준	배점
[2-1] (3)	빨간 공은 1010번, 파란 공은 1011번 꺼내져야 한다.	2점
	${}_{2021}C_{1010}\dfrac{(2\times3\times4\times\cdots\times1011)\times(1\times2\times\cdots\times1011)}{3\times4\times\cdots\times2023}$	3점
	$\dfrac{1}{2023}$	3점
[2-2] (1)	즉, $\mathrm{E}(X)=\dfrac{7}{2}$	4점
	$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=\dfrac{29}{20}$	5점
[2-2] (2)	$a_n=3^n-3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}$	2점
	흰 공은 $2,\ 4,\ 6$번째 뽑혔다.	4점
	4번째 시행 직후 흰 공의 개수는 $1+6+54=61$ 개다.	3점
[2-2] (3)	$a_{100}=100$이고, $n<100$인 모든 n에 대해 $a_n=n-1$이다.	5점
	$\displaystyle\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=5+\frac{\sqrt{98}}{2}$	2점
	$m=1,\ 2,\ 3,\ 4$가 가능하다.	2점
	$m\geq5$에서는 성립하지 않는다.	2점

7. 예시 답안

[문제 2-1]

(1) 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공일 확률을 경우를 나눠서 계산하자. 첫 번째 공이 빨간 공인 경우의 확률은 $\dfrac{r}{r+b}\times\dfrac{r+1}{r+b+1}$이고, 첫 번째 공이 파란 공인 경우의 확률은 $\dfrac{b}{r+b}\times\dfrac{r}{r+b+1}$이다.

따라서 확률의 덧셈정리에 의해 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공일 확률은 $\dfrac{r(r+1)+br}{(r+b)(r+b+1)}=\dfrac{r}{r+b}$이다.

(2) 세 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공일 경우는 모두 4가지이다. 빨간 공을 꺼내는 시행을 R, 파란 공을 꺼내는 시행을 B이라 하고 각 경우의 확률을 구하면 아래와 같다.

R-R-R : $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{24}{60}$ … ①

B-R-R : $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{6}{60}$ … ②

R-B-R : $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{60}$ … ③

B-B-R : $\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{60}$ … ④

따라서 조건부확률은 $\frac{①+②}{①+②+③+④}=\frac{24+6}{24+6+6+4}=\frac{3}{4}$ 이다.

(3) 2021회 시행 직후 공의 수는 2024개이고 빨간 공과 파란 공의 개수가 1012개로 같아야 하므로 빨간 공은 1010번, 파란 공은 1011번 꺼내져야 한다.

이렇게 공을 꺼내는 각 경우의 확률이 모두 $\frac{(2\times3\times4\times\cdots\times1011)\times(1\times2\times\cdots\times1011)}{3\times4\times\cdots\times2023}$ 와 같으므로 2021회 시행을 마친 직후 주머니의 빨간 공과 파란 공의 개수가 같을 확률은

$$\begin{aligned}{}_{2021}C_{1010}\frac{(2\times3\times4\times\cdots\times1011)\times(1\times2\times\cdots\times1011)}{3\times4\times\cdots\times2023}&=\frac{2021!}{1010!\times1011!}\cdot\frac{2\times(1011!)^2}{2023!}\\&=\frac{2\times1011}{2022\times2023}=\frac{1}{2023}\end{aligned}$$

가 된다.

[문제 2-2]

(1) 각 시행에서 꺼낸 공을 흰 공인 경우(W)와 흰 공이 아닐 경우(C)로 나누자. 각 경우의 확률과 X, X^2을 각각 구하면 아래와 같다.

C-C : $\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{20}$, $X=2$, $X^2=4$

W-C : $\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{20}$, $X=3$, $X^2=9$

C-W : $\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{20}$, $X=4$, $X^2=16$

W-W : $\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{20}$, $X=5$, $X^2=25$

즉, $\mathrm{E}(X)=\frac{7}{2}$, $\mathrm{E}(X^2)=\frac{137}{10}$ 이다. 따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=\frac{29}{20}$ 이다.

(2) $3+a_1+\cdots+a_n=3^n+2$이므로 $a_n=3^n-3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}$이다. $2\cdot3^6>546$이므로 $547-1=546$은 $2\cdot3^0$, $2\cdot3^1$, ... , $2\cdot3^5$의 조합만으로 이루어져야 한다. 한편, 그러한 조합은 $547=1+2(3+3^3+3^5)$으로 유일함을 알 수 있다. 즉, 흰 공은 2, 4, 6번째 뽑혔다. 따라서 4번째 시행 직후 흰 공의 개수는 $1+6+54=61$ 개이다.

(3) 수열 $\{a_n\}$이 모든 n에 대해 $a_n\ge0$, $a_{n+1}>a_n$이므로 $a_n\ge n-1$이다.

$2+12+4940=4954=3+a_1+a_2+\cdots+a_{100}\ge3+0+1+\cdots+99=4953$ 이므로, $a_n\ge n-1$에 대하여 하나의 n을 제외하고 등호가 성립해야 한다. $n<100$일 때 $a_n\ge n$이면, $a_{n+1}\ge a_n+1=n+1$가 되어

전체 공의 개수는 4955 이상이라 모순이다. 따라서 $a_{100}=100$이고, $n \le 99$ 이면 $a_n=n-1$이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\left(\sum_{n=1}^{98}\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{98}}=\sum_{n=1}^{98}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{98}}$$
$$=\sqrt{98}+\frac{10-\sqrt{98}}{2}=5+\frac{\sqrt{98}}{2}$$

이다.

한편 빨간 공의 개수가 $2=1+1$개이므로 두 번째 시행에서 반드시 빨간 공을 꺼내야 한다. 즉, 파란 공을 11개를 꺼내는 방법은 1을 사용하지 않아야 하므로, 11을 뽑는 방법은 아래와 같다.

- 12번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 (11개)
- 1번째 시행과 12번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 ($0+11=11$개)
- 1번째, 3번째, 10번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 ($0+2+9=11$개)
- 1번째, 3번째, 4번째, 7번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 ($0+2+3+6=11$개)
- 1번째, 3번째, 5번째, 6번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 ($0+2+4+5=11$개)

따라서, $m=1, 2, 3, 4$가 가능하다. 공을 다섯 번 꺼내면 파란 공은 최소한 $1+(0+2+3+4+5)=15$개 이상이므로, $m \ge 5$에서는 성립하지 않는다.

[아주대학교 문항정보 9]

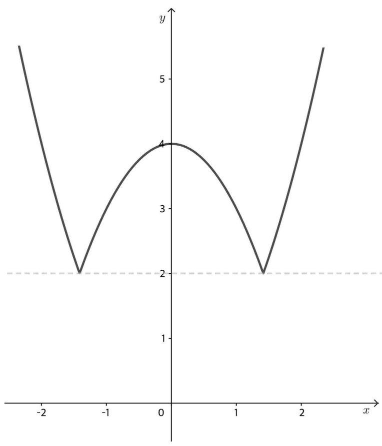
1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(저녁, 의학계열 제외) 대문항 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심 개념 및 용어	등비수열, 미분가능, 그래프의 개형, 극솟값, 극댓값, 변곡점, 정적분, 사잇값 정리, 급수, 급수의 합,
예상 소요 시간	120분 중 60분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

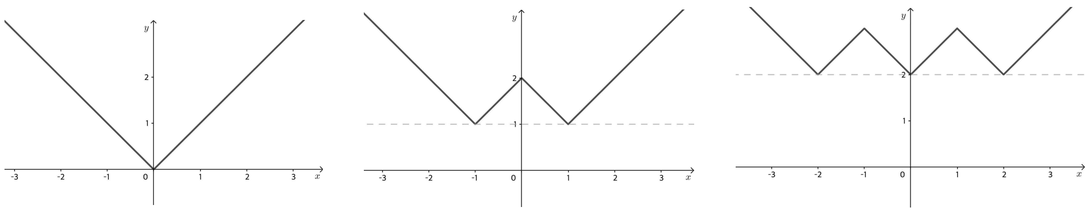
(가) 함수 $f(x)$에 대하여 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 x축 아래에 있는 부분을 x축에 대하여 대칭이동하여 그릴 수 있다. 이것은 $y=0$에서 $y=f(x)$의 그래프를 접어 올려 그린 것으로 볼 수 있다. 일반적으로, 실수 b에 대하여, $y=|f(x)-b|+b$ 의 그래프는 $y=f(x)$를 y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동하여 x축 아래에 있는 부분을 x축에 대하여 대칭이동하고 다시 y축의 방향으로 b만큼 평행이동하여 그릴 수 있는데, 이 또한 $y=b$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 접어 올려 그린 것으로 볼 수 있다. 이러한 이유로, 함수 $y=|f(x)-b|+b$ 를 $y=b$에서 $y=f(x)$를 '접어 올린 함수'라 하자. [그림 1-1]은 $y=2$에서 $y=x^2$을 접어 올린 함수의 그래프이다.



[그림 1-1]

(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 음이 아닌 정수 n에 대하여 $y=0,\ \ldots,\ y=n$에서 차례로 연이어 접어 올린 함수의 그래프와 직선 $y=n$이 만나는 점의 x 좌표의 집합을 S_n이라 하자. 예를 들어, $f(x)=x$이면, $y=0,\ \ y=1,\ \ y=2$에서 순서대로 접어 올린 함수의 그래프는 [그림 1-2]와 같으므로 $S_0=\{0\}$,

$S_1 = \{-1,\ 1\}$, $S_2 = \{-2, 0, 2\}$이다.



[그림 1-2]

[문항]

[문제 1-1] (35점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)$는 이차함수 $y=(x-2)^2$을 $y=1$에서 접어 올린 함수이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$가 정확히 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값을 모두 구하여라.

(2) 삼차함수 $f(x)=x^3-3x^2+2x-4$의 그래프의 변곡점 (a,b)를 생각하자. 함수 $g(x)$는 $y=f(x)$를 $y=b$ 에서 접어 올린 함수이다. 함수 $g(x)$가 $x=p$ 에서 극대가 되고 $x=q$ 에서 극소가 되도록 하는 모든 p와 q의 값을 구하여라.

(3) 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$를 $y=1$에서 접어 올린 함수이고, 함수 $h(x)$는 $y=f'(x)$를 $y=1$에서 접어 올린 함수이다. $g(x)$가 실수 전체에서 미분가능 할 때, 두 곡선 $y=g(x)$와 $y=h(x)$의 교점의 개수를 구하여라.

(4) 양의 실수 a에 대하여, 함수 $f(x)$는 $y=a\tan^3\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$를 $y=0$에서 접어 올린 함수이다. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{4}{\pi}$일 때 a의 값을 구하여라.

[문제 1-2] (15점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 이차함수 $f(x)=(x-7)^2$에 대하여 집합 S_{10}의 원소의 개수를 a라 하고 S_{10}의 모든 원소의 합을 b라 하자. a와 b의 값을 각각 구하여라.

(2) $x>0$ 에서 정의된 함수 $f(x)=\ln 3x$ 와 음이 아닌 정수 n에 대하여 S_n의 모든 원소의 곱을 p_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n$을 구하여라.

3. 출제 의도

[문제 1-1] 제시문의 내용을 이해하고 미분가능한 함수에서 주어진 조건을 활용하여 극댓값과 극솟값을 확인하여 정적분을 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 1-2] 주어진 조건을 활용하여 정적분의 값을 구하고 주어진 함수의 성질을 만족시키는 조건을 확인하여 등비급수를 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	수학 II [12수학Ⅱ02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. 미적분 [12미적01-03] 등비수열의 극한값을 구할 수 있다. [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. [12미적01-06] 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	권오남 외 19	교학사	2017	91
	수학 Ⅱ	류희찬 외 10	천재교과서	2017	38, 54, 93
	수학 Ⅱ	이준열 외 9	천재교육	2017	86
	수학 Ⅱ	고성은 외 5	신사고	2017	43, 61, 87
	미적분	김원경 외 14	비상	2017	33, 101
	`미적분	박교식 외 19	동아	2017	35, 105
	미적분	홍성복 외 10	지학사	2017	64-65
	미적분	고성은 외 5	신사고	2017	33, 60, 79, 105

5. 문항 해설

본 문항은 수학 II의 미분가능성과 연속성, 미적분의 등비수열의 극한값, 등비급수, 다항함수의 정적분에 대한 내용을 다루고 있다. 따라서 본 문항을 통해 간단한 함수를 가지고 극댓값과 극솟값, 정적분을 구하며, 주어진 함수의 성질을 만족시키는 조건을 확인하여 무한등비급수를 구할 수 있는지 평가하는 문항이다. 본 문항은 학생들이 간단한 수학적 현상을 관찰하여 이를 수학적 개념과 연결하고 다양한 함수적 사고를 할 수 있는지 측정하고 문제를 해결하기 위한 수학적 절차를 논리적으로 수행할 수 있는지에 대한 수학 문제해결 역량 및 추론 역량을 평가한다.

6. 채점 기준

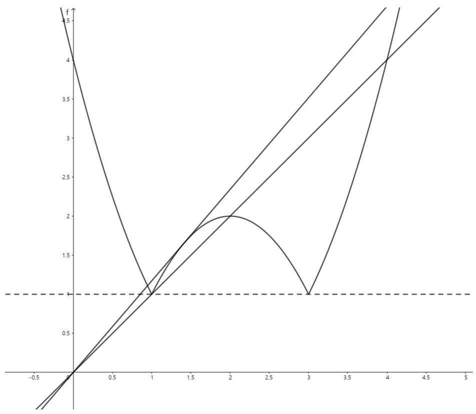
하위문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	$y=kx$가 $(1,1)$을 지나거나 $y=kx$가 $y=f(x)$와 접해야 함을 안다	3점
	$k=1$	1점
	$k=-2(\sqrt{2}-2)=4-2\sqrt{2}$	4점
[1-1] (2)	변곡점의 좌표 $(1,-4)$	2점
	$q=0,1,2$	2점
	$p=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	3점
[1-1] (3)	$f(x)=(x-a)^3+1$	4점
	$x<\frac{1}{\sqrt{3}}$일 때 $g(x)$는 증가하고 $h(x)$는 감소함을 알고, $g(0)<h(0)$이고 $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)>h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 임을 이용하여 $g(x)$와 $h(x)$는 한 점에서 만남을 증명	2점
	한 근은 구간 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)$에, 다른 근은 구간 $(1,3)$에 존재함을 증명	2점
	6개의 교점	2점
[1-1] (4)	$\int_0^1 \tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left[\tan^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]_0^1+\frac{4}{\pi}\left[\ln\left(\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)\right]_0^1$	5점
	$a=\frac{1}{1-\ln 2}$	5점

하위문항	채점 기준	배점
[1-2] (1)	$a=11$	3점
	$b=77$	3점
[1-2] (2)	$S_n = S_{n-2} \cup \left\{ \frac{e^n}{3}, \frac{e^{-n}}{3} \right\}$ 혹은 $p_n = p_{n-2} \times \frac{1}{9}$	4점
	$p_n = \frac{1}{3} p_{n-1}$ 혹은 첫째항이 $\frac{1}{3}$이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비급수	3점
	등비급수 = $\frac{1}{2}$	2점

7. 예시 답안

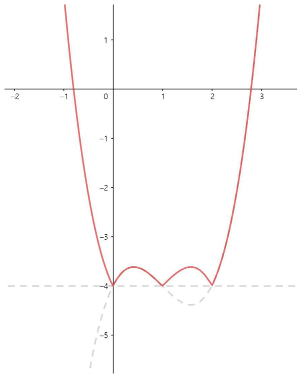
[문제 1-1]

(1) $y=f(x)$와 $y=kx$가 세 점에서 만나려면 아래 그림과 같이, $y=kx$가 $(1,1)$을 지나거나 $y=kx$가 $y=f(x)$와 접해야 한다. $y=kx$가 $(1,1)$을 지나는 경우 $k=1$이다.



$y=kx$와 $y=f(x)$가 $x=a$에서 접하는 경우를 생각하면, $1 \le a \le 3$가 되고, $f(x)=2-(x-2)^2$가 되므로 $f'(a)=-2(a-2)$이다. 따라서 $k=-2(a-2)$가 되어 접점의 y좌표는 $-2a(a-2)$이다. 한편 접점의 y좌표는 $f(a)$이므로, $-2a(a-2)=2-(a-2)^2$가 성립한다. 이를 정리하면, $a^2=2$이고 $1 \le a \le 3$이므로 $a=\sqrt{2}$이다. 따라서 $k=-2(\sqrt{2}-2)=4-2\sqrt{2}$이다. 따라서 가능한 k는 $k=1, 4-2\sqrt{2}$이다.

(2) $f'(x)=3x^2-6x+2$이고 $f''(x)=6x-6$이므로, 변곡점의 좌표는 $(1,-4)$이다. 따라서 $g(x)$는 $x^3-3x^2+2x-4=-4$의 세 근 $x=0,1,2$에서 극솟값을 가진다. 또한, $f'(x)=3x^2-6x+2=0$의 두 근 $x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$에서 극댓값을 가지므로, $p=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $q=0,1,2$ 이다.

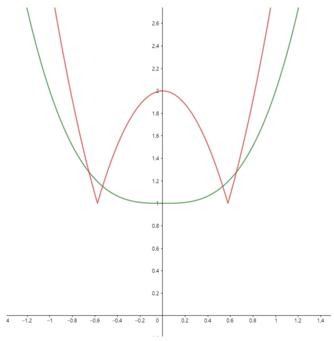


(3) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$를 $y=1$에서 접어 올렸더니 미분가능한 함수의 그래프가 되었으므로, $f(a)=1$인 모든 a에 대하여, $f'(a)=0$이어야 한다. 그런데 $x=a$에서 함수가 극댓값을 가지거나 극솟값을 가지면, 삼차함수 그래프의 개형으로부터 $g(x)$가 미분 불가능한 점이 항상 존재한다. 따라서 $x=a$에서 함수 $f(x)$는 변곡점을 가지므로 $f(x)=(x-a)^3+1$이다.

교점을 구하기 위해서 x축 방향으로 $-a$만큼 평행이동 시켜 생각하면 $a=0$일 때만 구하면 충분하다. $g(x)=|x|^3+1$과 $h(x)=|3x^2-1|+1$은 둘 다 y축 대칭이므로, $x>0$일 때의 교점의 개수를 구하면 된다.

① $x<\frac{1}{\sqrt{3}}$일 때: $g(x)$는 증가하고 $h(x)$는 감소한다. $g(0)-h(0)<0$이고 $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)>0$이므로 $g(x)-h(x)=0$이 되는 점이 하나 존재하므로, $g(x)$와 $h(x)$는 한 점에서 만난다.

② $x>\frac{1}{\sqrt{3}}$일 때: $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)>0$, $g(1)-h(1)<0$, $g(3)-h(3)>0$ 이므로, 사잇값 정리에 의해 한 근은 구간 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)$에, 다른 근은 구간 $(1,3)$에 존재한다. 두 근 모두 $x>\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로, 두 점에서 만난다. 그래프 $g(x)$와 $h(x)$의 개형으로부터, $x>0$인 근은 두 개 뿐이다.



따라서 $x>0$에서 교점은 세 개이고, 대칭성에 의해 모두 6개의 교점이 있다.

(4) $y=a\tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)$는 원점 대칭인 함수이므로 $y=f(x)$는 y축에 대하여 대칭인 함수이다. 즉, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=2\int_{0}^{1} f(x)\,dx$이고, 구간 $[0,\ 1]$에서 $\tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)\geq 0$이므로, $\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1} a\tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx$이다.

한편,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx &= \int_0^1 \left(\sec^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)-1\right)\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\tan^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]_0^1 + \frac{4}{\pi}\left[\ln\left(\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi}(1-\ln 2)\end{aligned}$$

이므로, $\int_{-1}^1 f(x)dx = 2a \cdot \frac{2}{\pi}(1-\ln 2) = \frac{4}{\pi}$ 이고, $a = \frac{1}{1-\ln 2}$ 이다.

[문제 1-2]

(1) 먼저, S_0, S_1의 원소의 개수가 각각 1, 2이다. 또한 $k \geq 2$에 대하여 S_k는 S_{k-2}와 $\{x \mid |f(x)| = k\}$의 합집합이고 그래프의 개형으로부터 S_k의 원소의 개수는 $k+1$ 임을 알 수 있다. S_k의 원소 s에 대하여 $14-s$도 S_k의 원소이므로 원소의 합은 $7k$이다. 따라서 $a = 1+2 \cdot 5 = 11$이며, $b = 7a = 77$이다.

(2) 먼저 $S_0 = \left\{\frac{1}{3}\right\}$이고, $\ln 3x = \pm 1$으로부터 $S_1 = \left\{\frac{e}{3}, \frac{e^{-1}}{3}\right\}$이다. 따라서 $p_0 = \frac{1}{3}$이고 $p_1 = \frac{1}{9}$이다.
$n \geq 2$일 때 그래프의 개형으로부터 $S_n = S_{n-2} \cup \{x \mid \ln 3x = \pm n\} = S_{n-2} \cup \left\{\frac{e^n}{3}, \frac{e^{-n}}{3}\right\}$가 되므로 $p_n = p_{n-2} \times \frac{1}{9}$이다. 따라서 $p_n = \frac{1}{3}p_{n-1}$이 되고, 구하고자 하는 값은 첫째항이 $\frac{1}{3}$이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비급수와 같으므로 값은 $\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ 이다.

[아주대학교 문항정보 10]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(저녁, 의학계열 제외) 대문항 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 확률과통계
	핵심개념 및 용어	로그, 경우의 수, 확률, 독립시행, 이항정리, 이항분포의 평균과 분산, 순열과 조합, 조건부 확률
예상 소요 시간	120분 중 60분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 b개가 놓여 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수를 확인하고 <검은 바둑돌의 규칙>에 따라 검은 바둑돌을 이동시키거나 버리는 것을 1회의 시행이라 하자.

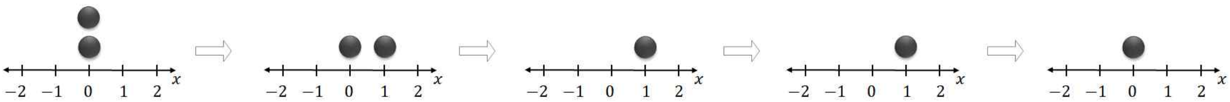
<검은 바둑돌의 규칙>

㉠ 눈의 수가 1 또는 4이면, 원점에 있는 검은 바둑돌 1개를 $x=1$의 위치로 이동시킨다. 원점에 검은 바둑돌이 없다면 아무 일도 하지 않는다.

㉡ 눈의 수가 2 또는 5이면, $x=1$의 위치에 있는 검은 바둑돌 1개를 원점으로 이동시킨다. $x=1$의 위치에 검은 바둑돌이 없다면 아무 일도 하지 않는다.

㉢ 눈의 수가 3 또는 6이면, 원점에 있는 검은 바둑돌 1개를 버린다. 원점에 검은 바둑돌이 없다면 아무 일도 하지 않는다.

예를 들어, 검은 바둑돌 2개가 원점에 놓여 있고 4회 시행을 하는 동안 주사위 눈의 수가 순서대로 1, 6, 4, 2가 나왔다면, 순서대로 시행한 규칙은 ㉠ - ㉢ - ㉠ - ㉡ 이 되어 검은 바둑돌의 배치는 [그림 2-1]과 같이 변한다.



[그림 2-1]

(나) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 b개와 흰 바둑돌 1개가 놓여 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수를 확인하고 검은 바둑돌을 제시문 (가)의 <검은 바둑돌의 규칙>에 따라 이동시키거나 버리고, 흰 바둑돌을 <흰 바둑돌의 규칙>에 따라 이동시키는 것을 1회의 시행이라 하자.

<흰 바둑돌의 규칙>

Ⓐ 눈의 수가 짝수이면 흰 바둑돌을 양의 방향으로 1 만큼 이동시킨다.
Ⓑ 눈의 수가 홀수이면 흰 바둑돌을 음의 방향으로 1 만큼 이동시킨다.

예를 들어 검은 바둑돌 2개, 흰 바둑돌 1개가 원점에 놓여 있고 4회 시행을 하는 동안 주사위 눈의 수가 순서대로 1, 6, 4, 2가 나왔다면, 검은 바둑돌 1개가 원점에 있고 흰 바둑돌은 $x=2$의 위치에 있다.

[문항]

[문제 2-1] (24점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 1개가 놓여 있다. 3회 시행 직후 검은 바둑돌이 수직선 위에 남아 있지 않을 확률을 p 라 할 때, $\log p$의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.47$, $\log 7 = 0.84$로 계산한다.)

(2) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 1개가 놓여 있다. 12회 시행을 하였을 때, 2, 4, 6, 8, 10, 12번째 시행 직후마다 검은 바둑돌이 원점에 있지 않는 사건을 A라 하고, 12번째 시행 직후 수직선 위에 검은 바둑돌이 남아 있는 사건을 B라 하자. 이때 $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) < \dfrac{3}{92}$임을 증명하여라. (단, $\left(\dfrac{5}{9}\right)^5 < \dfrac{19}{359}$를 증명 없이 이용할 수 있다.)

(3) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 2개가 놓여 있고 3회 시행을 하였다. 수직선 위에 남아 있는 검은 바둑돌의 개수를 확률변수 X라 할 때, X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$와 표준편차 $\sigma(X)$를 구하여라.

[문제 2-2] (26점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 수직선의 원점에 흰 바둑돌 1개가 놓여 있다. 양의 정수 n에 대하여 n회 시행 직후 흰 바둑돌이 $x=k$의 위치에 있을 확률을 p_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{n} k^2(p_k+p_{-k})$의 값을 n에 대한 식으로 나타내어라.

(2) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 3개와 흰 바둑돌 1개가 놓여 있다. 3 이상의 정수 n에 대하여 n회 시행 직후 바둑돌 배치로 가능한 경우의 수를 n에 대한 식으로 나타내어라.

(3) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 4개와 흰 바둑돌 1개가 놓여 있고, 13회 시행을 하여 나온 주사위의 눈의 수를 순서대로 $x_1, \dots, x_{13}$이라 하자. 다음 <조건>을 만족시키는 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, \dots, x_{13})$의 개수를 구하여라.

< 조 건 >

① 첫 12회 시행을 하는 동안 모든 주사위의 눈이 정확히 두 번씩 나왔다.
② 13번째 시행을 마친 직후에는 검은 바둑돌 4개와 흰 바둑돌이 모두 $x=1$의 위치에 있다.

3. 출제 의도

[문제 2-1] 제시문에 주어진 규칙을 이해하고 이에 대한 조건부확률 값과 기댓값, 표준편차를 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 2-2] 제시문에 주어진 조건에 맞는 기댓값, 표준편차를 확인하여 경우의 수를 구할 수 있는지 평가한다.

4. 문항 및 제시문의 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	수학 Ⅰ [12수학Ⅰ01-05] 상용로그를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 확률과통계 [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다. [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	권오남 외 19	교학사	2017	131
	수학 Ⅰ	황선욱 외 8	미래앤	2017	27, 147
	수학 Ⅰ	김원경 외 14	비상	2017	26, 131, 142
	확률과통계	류희찬 외 10	천재교과서	2017	54, 81, 86-87
	확률과통계	이준열 외 9	천재교육	2017	17, 21, 54
	확률과통계	박교식 외 19	동아	2017	43, 67, 94-95
	확률과통계	홍성복 외 10	지학사	2017	64, 65, 68, 93-94
	확률과통계	김원경 외 14	비상	2017	15, 17, 37, 73, 77, 79

5. 문항 해설

본 문항은 수학 I의 상용로그, 확률과통계의 중복조합, 조건부확률, 독립시행, 이항분포의 평균과 표준편차의 간단한 교육과정 개념을 다루고 있다. 따라서 본 문항은 제시문에 주어진 상황의 규칙성을 파악하고 이를 체계적으로 헤아리며 간단한 수학적 개념을 적용하여 조건에 맞는 기댓값, 표준편차를 확인하고 조건부확률과 경우의 수를 구할 수 있는지 평가하는 문항이다. 또한 본 문항은 일상적인 상황에서 생길 수 있는 소재를 통해 일어날 수 있는 사건의 규칙을 파악하고 이를 전략적으로 헤아릴 수 있는 정보처리 역량과 자신의 논리를 효율적으로 전개할 수 있는 의사소통 역량 및 해결과정을 논리적으로 수행해 나가는 추론 역량을 평가하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[2-1] (1)	3번째 시행 직후 버려질 확률 $2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$	3점
	$p=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}=\frac{14}{27}$	1점
	$\log p=-0.27$	2점
[2-1] (2)	$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{3}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^5$	3점
	$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^{\mathrm{C}})=\frac{4}{9}+\frac{1}{27}\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}=\frac{4}{9}+\frac{1}{12}\left(1-\frac{5^5}{9^5}\right)$	3점
	$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^{\mathrm{C}})}$	2점
	$\mathrm{P}(\mathrm{B}\vert\mathrm{A})=\frac{12\alpha}{9\alpha+19}<\frac{12\alpha}{9\alpha+359\alpha}=\frac{3}{92}$	2점
[2-1] (3)	$X=0$인 경우 5가지, $X=1$인 경우 13가지, $X=2$인 경우 9가지	각 1점
	$\mathrm{E}(X)=\frac{31}{27}$	2점
	$\sigma(X)=\frac{\sqrt{362}}{27}$	3점

하위문항	채점 기준	배점
[2-2] (1)	홀수가 m번 나오면 흰 바둑돌의 위치는 $k=n-2m$	2점
	$\sum_{k=1}^{n} k^2(p_k+p_{-k}) = \sum_{m=0}^{n}(n-2m)^2 \frac{{}_nC_m}{2^n}$	2점
	이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$에 따라 계산	2점
	답 n 구함	2점
[2-2] (2)	검 바둑돌 배치 10가지	3점
	흰 바둑돌 배치 $n+1$가지	2점
	전체 $10(n+1)$가지	3점
[2-2] (3)	x_{13}은 $2,\ 4,\ 6$ 중 하나 (짝수)	1점
	㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉡ (3점)	3점
	㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉢ (3점)	3점
	$6^3=216$	2점
	$3 \cdot 6^3 = 648$	1점

7. 예시 답안

[문제 2-1]

(1) 검은 바둑돌이 k번째 시행에서 규칙 ㉢에 의해 버려질 확률을 구하자.

$k=1$: 처음 시행에서 규칙 ㉢의 경우가 나와야 하므로 구하는 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

$k=2$: 처음 두 시행에서 ㉡ - ㉢이 나와야 하므로 구하는 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$이다.

$k=3$: 세 번의 시행동안 가능한 경우는 ㉡ - ㉡ - ㉢ 혹은 ㉠ - ㉡ - ㉢ 의 경우이므로 구하는 확률은 $2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$이다.

따라서 검은 바둑돌이 3회 시행 직후 수직선에 남아 있지 않을 확률은 $p=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}=\frac{14}{27}$이고, $\log p = \log 2 + \log 7 - 3\log 3 = 0.30 + 0.84 - 1.41 = -0.27$이다.

(2) $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}$이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{A})$와 $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$를 각각 구하자.

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$를 먼저 계산하자. 사건 $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$은 12회 시행하는 동안 $2k$번째 시행 직후 $(k=1,2,\ldots,6)$ 검은 바둑돌은 $x=1$의 위치에 있어야 한다. 처음 검은 바둑돌의 위치는 원점이므로 두 번째 시행 직후에 검은 바

둑돌이 $x=1$의 위치에 있기 위해서는 시행된 규칙은 ㉠-㉠의 경우, ㉠-㉢ 의 경우, ㉡-㉠의 경우로 총 3가지 경우가 있다. 이제 두 번의 시행을 더 했을 때 여전히 $x=1$의 위치에 있으려면 차례로 시행된 규칙은 아래의 5가지 중 하나이다.

㉠-㉠, ㉠-㉢, ㉡-㉠, ㉢-㉠, ㉢-㉢

따라서 12회의 시행을 마치기까지 이렇게 5번을 시행해야 하므로, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{3}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^5$이다.

이제 $\mathrm{P}(\mathrm{A})$를 구하자. $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^{\mathrm{C}})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$이므로, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^{\mathrm{C}})$을 구하면 된다.
바둑돌이 $2k+1$ 번째 혹은 $2k+2$ 번째에서 버려지는 확률을 구하자.
$k=0$일 때 : 첫 번째 혹은 두 번째 시행에서 버려져야 하므로, 첫 시행에서 규칙 ㉢의 경우이거나 두 번째 시행까지 차례로 ㉡-㉢의 경우가 된다. 따라서 확률은 $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$이다.
$k>0$일 때 : $2k$번째 까지는 검은 바둑돌이 남아 있어야 하므로 $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$를 구하는 같이 구할 수 있으므로 확률은 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}$이고, $2k+1$ 혹은 $2k+2$번째에서 버려지는 경우는 규칙 ㉡-㉢이 차례대로 나오는 경우 밖에 없으므로 구하고자 하는 확률은 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{27}\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}$이다.

즉, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^{\mathrm{C}})=\frac{4}{9}+\frac{1}{27}\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}=\frac{4}{9}+\frac{1}{12}\left(1-\frac{5^5}{9^5}\right)$이다. 이제 $\frac{5^5}{9^5}=\alpha$라 하고, 조건부 확률을 구하면

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^{\mathrm{C}})}=\frac{\frac{\alpha}{3}}{\frac{\alpha}{3}+\frac{4}{9}+\frac{1}{12}(1-\alpha)}=\frac{12\alpha}{9\alpha+19}\text{이다.}$$

한편, $359\alpha<19$ 이므로, $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{12\alpha}{9\alpha+19}<\frac{12\alpha}{9\alpha+359\alpha}=\frac{3}{92}$이다.

(3) 총 27 가지의 경우 중 각 X에 대하여 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

$X=0$인 경우 : ㉢-㉢ -*, ㉢-㉡-㉢, ㉡-㉢-㉢ 으로 모두 5가지.
$X=2$인 경우 : ㉠-㉠-㉢, ㉢이 나오지 않는 경우로 총 $1+8=9$가지.
$X=1$인 경우 : 나머지 27개에 대한 나머지 경우 13가지

따라서 $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{5}{27}+1\times\frac{13}{27}+2\times\frac{9}{27}=\frac{31}{27}$이다.

분산을 구해보면 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=\frac{49}{27}-\frac{31^2}{27^2}=\frac{7^2\times3^3-31^2}{27^2}$이다.

따라서 $\sigma(X)=\frac{\sqrt{362}}{27}$ 이다.

[문제 2-2]
(1) 홀수가 m번 (단, $2m\le n$) 나온다고 하면 흰 바둑돌의 위치는 $k=n-2m$ 이며, 홀수가 $n-m$ 번 나오면 흰 바둑돌의 위치는 $-k$이다. $\sum_{k=1}^{n}k^2(p_k+p_{-k})=\sum_{k=1}^{n}k^2p_k+\sum_{k=1}^{n}(-k)^2p_{-k}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 (p_k + p_{-k}) = \sum_{m=0}^{n} (n-2m)^2 \frac{{}_n\mathrm{C}_m}{2^n}$$

한편, n번의 시행에서 주사위의 눈의 수가 홀수가 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면, X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$를 따르므로 이항분포의 평균과 분산으로부터 $\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{V}(X)$를 구하면 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X) = \frac{n}{2} = 0 \times {}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \times {}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots + n \times {}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\mathrm{V}(X) = \frac{n}{4} = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 = 0^2 \times {}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1^2 \times {}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots + n^2 \times {}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

이로부터 $\mathrm{E}(X^2) = \frac{n^2+n}{4}$임을 확인 할 수 있다.

$$\text{(준식)} = n^2 - 4n\mathrm{E}(X) + 4\mathrm{E}(X^2) = n^2 - 2n^2 + n + n^2 = n$$

(2) 검은 바둑돌은 원점 혹은 $x=1$위에 있어야 하고 최대 3개까지 있을 수 있다. 원점의 검은 바둑돌의 개수를 a, $x=1$위의 검은 바둑돌의 개수를 b라고 하면 가능한 (a, b)는 $a+b \le 3$이 되는 음이 아닌 정수의 순서쌍이 되므로, $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(3,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(0,3)$으로 모두 10개이다. 또한 흰 바둑돌 배치의 경우의 수는 $n+1$이다.

한편 검은 바둑돌이 규칙 ㉠을 따라 움직이는 사건을 A라 하고 흰 바둑돌이 규칙 Ⓐ을 따라 움직이는 사건을 B라 하면, $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}$,$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$이므로 두 사건은 독립이다.

비슷하게 하면, 검은 바둑돌의 규칙 중 ㉠, ㉡, ㉢ 하나가 일어나는 사건과 흰 바둑돌의 규칙 중 Ⓐ와 Ⓑ가 일어나는 사건은 독립이다. 따라서 검은 바둑돌과 흰 바둑돌의 움직임은 서로 독립적이므로 전체 경우의 수는 $10(n+1)$가지이다.

(3) 먼저 흰 바둑돌의 위치는 주사위의 눈의 순서에 상관없이 그 횟수에 의해서만 결정되므로 조건 ①에 의해 12회 시행 직후에 흰 바둑돌은 원점에 있고 조건 ②에 의하여 x_{13}은 $2, 4, 6$중에 하나가 되어야 한다. 조건 ①로부터 12회 시행을 하는 동안 규칙 ㉠, ㉡, ㉢의 경우가 각각 네 번씩 일어났다는 것을 알 수 있고, 13회 시행까지 검은 바둑돌이 버려지지 않고 모두 남아 있으므로 규칙 ㉢의 경우가 되는 시행의 직전에 원점에 검은 바둑돌이 있으면 안된다. 따라서 ㉢이 시행되기 전에 검은 바둑돌 4개를 $x=1$의 위치로 옮기는 시행 (㉠)이 모두 일어나야 한다. 12회 시행을 하는 동안 규칙 ㉡이 ㉢과 ㉠ 사이에 일어나게 되면 검은 바둑돌을 버리게 되므로, 12회까지 가능한 경우는 아래 두 가지 중 하나이다.

(i) ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉡

검은 바둑돌 1개가 12회 시행 직후에 원점의 위치에 있으므로, ㉠의 경우가 일어나는 $x_{13} = 4$ 이다.

(ii) ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉢

검은 바둑돌이 모두 $x=1$의 위치에 있으므로, ㉠, ㉢의 경우가 일어나는 $x_{13} = 4$ 또는 $x_{13} = 6$이다.

즉 ㉠의 자리에는 $1,1,4,4$, ㉡ 의 자리에는 $2, 2, 5, 5$, ㉢의 자리에는 $3, 3, 6, 6$이 있어야 한다.
a, a, b, b를 일렬로 나열하는 순열의 개수는 6이므로, 구하고자 하는 답은 $3 \cdot 6^3 = 648$ 이다.

[아주대학교 문항정보 11]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(저녁, 의학계열) 대문항 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 확률과통계
	핵심개념 및 용어	로그, 경우의 수, 확률, 독립시행, 이항정리, 이항분포의 평균과 분산, 순열과 조합, 조건부 확률
예상 소요 시간	120분 중 60분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 b개가 놓여 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수를 확인하고 <검은 바둑돌의 규칙>에 따라 검은 바둑돌을 이동시키거나 버리는 것을 1회의 시행이라 하자.

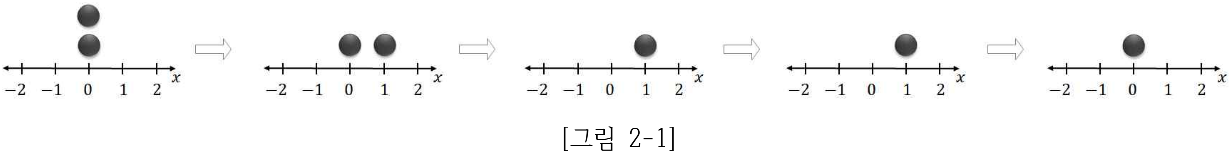
<검은 바둑돌의 규칙>

㉠ 눈의 수가 1 또는 4이면, 원점에 있는 검은 바둑돌 1개를 $x=1$의 위치로 이동시킨다. 원점에 검은 바둑돌이 없다면 아무 일도 하지 않는다.

㉡ 눈의 수가 2 또는 5이면, $x=1$의 위치에 있는 검은 바둑돌 1개를 원점으로 이동시킨다. $x=1$의 위치에 검은 바둑돌이 없다면 아무 일도 하지 않는다.

㉢ 눈의 수가 3 또는 6이면, 원점에 있는 검은 바둑돌 1개를 버린다. 원점에 검은 바둑돌이 없다면 아무 일도 하지 않는다.

예를 들어, 검은 바둑돌 2개가 원점에 놓여 있고 4회 시행을 하는 동안 주사위 눈의 수가 순서대로 1, 6, 4, 2가 나왔다면, 순서대로 시행한 규칙은 ㉠-㉢-㉠-㉡이 되어 검은 바둑돌의 배치는 [그림 2-1]과 같이 변한다.



[그림 2-1]

(나) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 b개와 흰 바둑돌 1개가 놓여 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수를 확인하고 검은 바둑돌을 제시문 (가)의 <검은 바둑돌의 규칙>에 따라 이동시키거나 버리고, 흰 바둑돌을 <흰 바둑돌의 규칙>에 따라 이동시키는 것을 1회의 시행이라 하자.

<흰 바둑돌의 규칙>

Ⓐ 눈의 수가 짝수이면 흰 바둑돌을 양의 방향으로 1 만큼 이동시킨다.
Ⓑ 눈의 수가 홀수이면 흰 바둑돌을 음의 방향으로 1 만큼 이동시킨다.

예를 들어 검은 바둑돌 2개, 흰 바둑돌 1개가 원점에 놓여 있고 4회 시행을 하는 동안 주사위 눈의 수가 순서대로 1, 6, 4, 2가 나왔다면, 검은 바둑돌 1개가 원점에 있고 흰 바둑돌은 $x=2$의 위치에 있다.

[문항]

[문제 1-1] (25점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 1개가 놓여 있다. 5회 시행 직후 검은 바둑돌이 수직선 위에 남아 있지 않을 확률을 p라 할 때, $\log p$의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.47$, $\log 7 = 0.84$, $\log 11 = 1.04$로 계산한다.)

(2) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 1개가 놓여 있다. 12회 시행을 하였을 때, 2, 4, 6, 8, 10, 12번째 시행 직후마다 검은 바둑돌이 원점에 있지 않는 사건을 A라 하고, 12번째 시행 직후 수직선 위에 검은 바둑돌이 남아 있는 사건을 B라 하자. 이때 $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) < \frac{3}{92}$임을 증명하여라. (단, $\left(\frac{5}{9}\right)^5 < \frac{19}{359}$를 증명 없이 이용할 수 있다.)

(3) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 2개가 놓여 있고 4회 시행을 하였다. 수직선 위에 남아 있는 검은 바둑돌의 개수를 확률변수 X라 할 때, X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$와 표준편차 $\sigma(X)$를 구하여라.

[문제 1-2] (25점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 수직선의 원점에 흰 바둑돌 1개가 놓여 있다. 홀수인 양의 정수 n에 대하여 n회 시행 직후 흰 바둑돌이 $x=k$의 위치에 있을 확률을 p_k라 할 때 $\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)(p_k+p_{-k})$의 값을 n에 대한 식으로 나타내어라.

(2) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 3개와 흰 바둑돌 1개가 놓여 있다. 3 이상의 정수 n에 대하여 n회 시행 직후 바둑돌 배치로 가능한 경우의 수를 n에 대한 식으로 나타내어라.

(3) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 4개와 흰 바둑돌 1개가 놓여 있고, 13회 시행을 하여 나온 주사위의 눈의 수를 순서대로 $x_1, \ldots, x_{13}$이라 하자. 다음 <조건>을 만족시키는 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, \ldots, x_{13})$의 개수를 구하여라.

< 조 건 >

① 첫 12회 시행을 하는 동안 모든 주사위의 눈이 정확히 두 번씩 나왔다.
② 13번째 시행을 마친 직후에는 검은 바둑돌 4개와 흰 바둑돌이 모두 $x=1$의 위치에 있다.

3. 출제 의도

[문제 1-1] 제시문에 주어진 규칙을 이해하고 이에 대한 조건부확률 값과 기댓값, 표준편차를 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 1-2] 제시문에 주어진 조건에 맞는 기댓값, 표준편차를 확인하여 경우의 수를 구할 수 있는지 평가한다.

4. 문항 및 제시문의 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	수학 Ⅰ [12수학Ⅰ01-05] 상용로그를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 확률과통계 [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다. [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	권오남 외 19	교학사	2017	131
	수학 Ⅰ	황선욱 외 8	미래앤	2017	27, 147
	수학 Ⅰ	김원경 외 14	비상	2017	26, 131, 142
	확률과통계	류희찬 외 10	천재교과서	2017	54, 81, 86-87
	확률과통계	이준열 외 9	천재교육	2017	17, 21, 54
	확률과통계	박교식 외 19	동아	2017	43, 67, 94-95
	확률과통계	홍성복 외 10	지학사	2017	64, 65, 68, 93-94
	확률과통계	김원경 외 14	비상	2017	15, 17, 37, 73, 77, 79

5. 문항 해설

본 문항은 수학 I의 상용로그, 확률과통계의 중복조합, 조건부확률, 독립시행, 이항분포의 평균과 표준편차의 간단한 교육과정 개념을 다루고 있다. 따라서 본 문항은 제시문에 주어진 상황의 규칙성을 파악하고 이를 체계적으로 헤아리며 간단한 수학적 개념을 적용하여 조건에 맞는 기댓값, 표준편차를 확인하고 조건부확률과 경우의 수를 구할 수 있는지 평가하는 문항이다. 또한 본 문항은 일상적인 상황에서 생길 수 있는 소재를 통해 일어날 수 있는 사건의 규칙을 파악하고 이를 전략적으로 헤아릴 수 있는 정보처리 역량과 자신의 논리를 효율적으로 전개할 수 있는 의사소통 역량 및 해결 과정을 논리적으로 수행해 나가는 추론 역량을 평가하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	5번째 시행 직후 버려질 확률 $13\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{13}{243}$	4점
	$p=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}+\frac{5}{81}+\frac{13}{243}=\frac{154}{243}$	1점
	$\log p=-0.17$	2점
[1-1] (2)	$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{3}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^5$	3점
	$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)=\frac{4}{9}+\frac{1}{27}\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}=\frac{4}{9}+\frac{1}{12}\left(1-\frac{5^5}{9^5}\right)$	3점
	$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)}$	1점
	$\mathrm{P}(\mathrm{B}\mid\mathrm{A})=\frac{12\alpha}{9\alpha+19}<\frac{12\alpha}{9\alpha+359\alpha}=\frac{3}{92}$	2점
[1-1] (3)	$X=0$인 경우 21가지, $X=1$인 경우 39가지, $X=2$인 경우 21가지	각 2점
	$\mathrm{E}(X)=1$	1점
	$\sigma(X)=\frac{\sqrt{42}}{9}$	2점

하위문항	채점 기준	배점
[1-2] (1)	홀수가 m번 나오면 흰 바둑돌의 위치는 $k=n-2m$	2점
	$\sum_{k=1}^{n} k^2(p_k+p_{-k}) = \sum_{m=0}^{n}(n-2m)^2 \frac{{}_nC_m}{2^n}$	2점
	이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$에 따라 계산	1점
	$\sum_{k=1}^{n} k^2(p_k+p_{-k}) = n$	2점
	$\sum_{k=1}^{n}(p_k+p_{-k}) = 1$	1점
[1-2] (2)	검 바둑돌 배치 10가지	2점
	흰 바둑돌 배치 $n+1$가지	2점
	서로 독립이므로 $10(n+1)$가지	3점
[1-2] (3)	x_{13}은 $2, 4, 6$ 중 하나 (짝수)	1점
	㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉡	3점
	㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉢	3점
	$6^3=216$	2점
	$3 \cdot 6^3 = 648$	1점

7. 예시 답안

[문제 1-1]

(1) 검은 바둑돌이 k번째 시행에서 규칙 ㉢에 의해 버려질 확률을 구하자.

$k=1$: 처음 시행에서 규칙 ㉢의 경우가 나와야 하므로 구하는 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

$k=2$: 처음 시행 후 검은 바둑돌이 원점에 있어야 하므로 첫 시행에서 반드시 규칙 ㉡의 경우가 나와야 하므로 2번째 시행 직후 버려질 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$이다.

$k=3$: 두 번의 시행 이후 검은 바둑돌이 원점에 있어야 하므로 차례대로 규칙 ㉡, ㉡의 경우가 되거나 혹은 차례로 규칙 ㉠ - ㉡의 경우가 되어야 한다. 3번째 시행 직후 버려질 확률은 $2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$이다.

$k=4$: 세 번의 시행 이후 검은 바둑돌이 원점에 있어야 하므로, 차례로 나온 규칙은 아래의 나열된 5가지의 경우 중 하나이다.

㉡ - ㉡ - ㉡, ㉡ - ㉠ - ㉡, ㉠ - ㉡ - ㉡, ㉠ - ㉠ - ㉡, ㉠ - ㉢ - ㉡

즉 4번째 시행 직후 버려질 확률은 $5\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{81}$이다.

$k=5$: 네 번의 시행 이후 검은 바둑돌이 원점에 있어야 하므로, 차례로 나온 규칙은 아래의 나열된 13가지의 경우 중 하나이다.

㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉡,　　㉡ - ㉡ - ㉠ - ㉡,　　㉡ - ㉠ - * - ㉡,
㉠ - ㉡ - ㉡ - ㉡,　　㉠ - ㉡ - ㉠ - ㉡,　　㉠ - ㉠ - * -㉡,
㉠ - ㉢ - *- ㉡

즉 5번째 시행 직후 버려질 확률은 $13\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{13}{243}$이다.

따라서 검은 바둑돌이 4회 시행 직후 수직선에 남아 있지 않을 확률은 $p=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}+\frac{5}{81}+\frac{13}{243}=\frac{154}{243}$이고,

$$\log p=\log\frac{154}{243}=\log 2+\log 7+\log 11-5\log 3=0.3+0.84+1.04-2.35=-0.17$$

이다.

(2) $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}$이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{A})$와 $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$를 각각 구하자.

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$를 먼저 계산하자. 사건 $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$은 12회 시행하는 동안 $2k$번째 시행 직후 $(k=1,2,\ldots,6)$ 검은 바둑돌은 $x=1$의 위치에 있어야 한다.

처음 검은 바둑돌의 위치는 원점이므로 두 번째 시행 직후에 검은 바둑돌이 $x=1$의 위치에 있기 위해서는 시행된 규칙은 ㉠ - ㉠의 경우, ㉠ - ㉢ 의 경우, ㉡ - ㉠의 경우로 총 3가지 경우가 있다. 이제 두 번의 시행을 더 했을 때 여전히 $x=1$의 위치에 있으려면 차례로 시행된 규칙은 아래의 5가지 중 하나이다.

㉠ - ㉠,　㉠ - ㉢,　㉡ - ㉠,　㉢ - ㉠,　㉢ - ㉢

따라서 12회의 시행을 마치기까지 이렇게 두 번씩 5번을 시행해야 하므로, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{3}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^5$이다.

이제 $\mathrm{P}(\mathrm{A})$를 구하자. $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$이므로, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)$을 구하면 된다.

바둑돌이 $2k+1$ 번째 혹은 $2k+2$ 번째에서 버려지는 확률을 먼저 구하자.

$k=0$일 때 : 첫 번째 혹은 두 번째 시행에서 버려져야 하므로, 첫 시행에서 규칙 ㉢의 경우이거나 두 번째 시행까지 차례로 ㉡ - ㉢의 경우가 된다. 따라서 확률은 $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$이다.

$k>0$일 때 : $2k$번째 까지는 검은 바둑돌이 남아 있어야 하므로 $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$를 구하는 같이 구할 수 있으므로 확률은 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}$이고, $2k+1$ 혹은 $2k+2$번째에서 버려지는 경우는 규칙 ㉡ - ㉢ 이 차례대로 나오는 경우 밖에 없으므로 구하고자 하는 확률은 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{27}\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}$이다.

즉, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)=\frac{4}{9}+\frac{1}{27}\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}=\frac{4}{9}+\frac{1}{12}\left(1-\frac{5^5}{9^5}\right)$이다. 이제 $\frac{5^5}{9^5}=\alpha$라하고, 조건부 확률을 구하면

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)}=\frac{\frac{\alpha}{3}}{\frac{\alpha}{3}+\frac{4}{9}+\frac{1}{12}(1-\alpha)}=\frac{12\alpha}{9\alpha+19}$$ 이다.

한편, $359\alpha < 19$ 이므로, $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \dfrac{12\alpha}{9\alpha+19} < \dfrac{12\alpha}{9\alpha+359\alpha} = \dfrac{3}{92}$ 이다.

(3) 총 81 가지의 경우 중 각 X에 대하여 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

$X=0$인 경우 : 아래의 나열된 $9+3+3+6=21$ 가지의 경우이다.

ⓒ - ⓒ - * - *, ⓒ - ⓛ - ⓒ - *, ⓛ - ⓒ - ⓒ-*,
ⓛ - ⓛ - ⓒ - ⓒ, ㉠ - ⓛ - ⓒ - ⓒ, ⓛ - ⓒ - ⓛ - ⓒ,
ⓒ - ㉠ - ⓛ - ⓒ, ⓒ - ⓛ - ⓛ - ⓒ, ㉠ - ⓒ - ⓛ - ⓒ

$X=2$인 경우 : ㉠, ⓛ 으로만 구성된 16가지 경우와 ㉠ - ㉠ - ⓒ - *, ⓛ - ㉠ - ㉠ - ⓒ, ㉠ -㉠ - ㉠ - ⓒ의 21가지의 경우이다.

$X=1$인 경우 : 81개에 대한 나머지 경우이므로 경우의 수는 39이다.

따라서 $\mathrm{E}(X) = 0\times\dfrac{21}{81}+1\times\dfrac{39}{81}+2\times\dfrac{21}{81}=1$이다.

분산을 구해보면 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2 = \dfrac{123}{81}-1 = \dfrac{42}{81}$ 이므로, $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{42}}{9}$ 이다.

[문제 1-2]

(1) 홀수가 m번 (단, $2m \le n$) 나온다고 하면 흰 바둑돌의 위치는 $k=n-2m$ 이며, 홀수가 $n-m$ 번 나오면 흰 바둑돌의 위치는 $-k$이다. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2(p_k+p_{-k}) = \sum_{k=1}^{n} k^2 p_k + \sum_{k=1}^{n}(-k)^2 p_{-k}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{n} k^2(p_k+p_{-k}) = \sum_{m=0}^{n}(n-2m)^2\frac{{}_n\mathrm{C}_m}{2^n}$$

이다. 한편, n번의 시행에서 주사위의 눈의 수가 홀수가 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면, X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$를 따르므로 이항분포의 평균과 분산으로부터 $\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{V}(X)$를 구하면 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X) = \frac{n}{2} = 0\times{}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\times{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots + n\times{}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\mathrm{V}(X) = \frac{n}{4} = \mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2 = 0^2\times{}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1^2\times{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots + n^2\times{}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

이로부터 $\mathrm{E}(X^2) = \dfrac{n^2+n}{4}$ 임을 확인 할 수 있다.

$$(\text{준식}) = n^2 - 4n\mathrm{E}(X) + 4\mathrm{E}(X^2) = n^2 - 2n^2 + n + n^2 = n$$

이다. 또한 n이 홀수 이므로 원점의 위치에 흰 바둑돌이 위치할 수 없고, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(p_k+p_{-k})$는 모든 확률의 합이므로 1이다. 따라서 답은 $n+1$이다.

(2) 검은 바둑돌은 원점 혹은 $x=1$위에 있어야 하고 최대 3개까지 있을 수 있다. 원점의 검은 바둑돌의 개수를 a, $x=1$위의 검은 바둑돌의 개수를 b라고 하면 가능한 (a, b)는 $a+b \le 3$이 되는 음이 아닌 정수의 순서쌍이 되므로, $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(3,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(0,3)$으로 모두 10개이다. 또한 흰 바둑돌 배치의 경우의 수는 $n+1$이다.

한편 검은 바둑돌이 규칙 ㉠을 따라 움직이는 사건을 A라 하고 흰 바둑돌이 규칙 Ⓐ을 따라 움직이는 사건을 B라 하면, $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}$,$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$이므로 두 사건은 독립이다.

비슷하게 하면, 검은 바둑돌의 규칙 중 ㉠, ㉡, ㉢ 하나가 일어나는 사건과 흰 바둑돌의 규칙 중 Ⓐ와 Ⓑ가 일어나는 사건은 독립이다. 따라서 검은 바둑돌과 흰 바둑돌의 움직임은 서로 독립적이므로 전체 경우의 수는 $10(n+1)$가지이다.

(3) 먼저 흰 바둑돌의 위치는 주사위의 눈의 순서에 상관없이 그 횟수에 의해서만 결정되므로 조건 ①에 의해 12회 시행 직후에 흰 바둑돌은 원점에 있고 조건 ②에 의하여 x_{13}은 $2, 4, 6$중에 하나가 되어야 한다. 조건 ①로부터 12회 시행을 하는 동안 규칙 ㉠, ㉡, ㉢의 경우가 각각 네 번씩 일어났다는 것을 알 수 있고, 13회 시행까지 검은 바둑돌이 버려지지 않고 모두 남아 있으므로 규칙 ㉢의 경우가 되는 시행의 직전에 원점에 검은 바둑돌이 있으면 안된다. 따라서 ㉢이 시행되기 전에 검은 바둑돌 4개를 $x=1$의 위치로 옮기는 시행 (㉠)이 모두 일어나야 한다. 12회 시행을 하는 동안 규칙 ㉡이 ㉢과 ㉠ 사이에 일어나게 되면 검은 바둑돌을 버리게 되므로, 12회까지 가능한 경우는 아래 두 가지 중 하나이다.

(i) ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉡

검은 바둑돌 1개가 12회 시행 직후에 원점의 위치에 있으므로, ㉠의 경우가 일어나는 $x_{13} = 4$ 이다.

(ii) ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉢

검은 바둑돌이 모두 $x=1$의 위치에 있으므로, ㉠, ㉢ 의 경우가 일어나는 $x_{13} = 4$ 또는 $x_{13} = 6$이다.

즉 ㉠의 자리에는 $1,1,4,4$, ㉡의 자리에는 $2, 2, 5, 5$, ㉢의 자리에는 $3, 3, 6, 6$이 있어야 한다.

a, a, b, b를 일렬로 나열하는 순열의 개수는 6이므로, 각 경우 6^3가지이고, 구하고자 하는 답은 $3 \cdot 6^3 = 648$이다.

[아주대학교 문항정보 12]

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자 전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연계열(의학과) / 대문항 2번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>과학과 교육과정 과목명</td><td>생명과학Ⅰ, 생명과학 Ⅱ</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>발효, 호흡, 미토콘드리아, 유전자 발현</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">120분 중 60분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

[제시문]

[가] 100년 전 독일의 과학자 Otto Warburg박사는 암세포가 산소 소비 없이 정상세포에 비하여 약 16배의 포도당을 소모한다는 사실을 발견하였다. 이러한 발견은 현대의학에서 암 환자의 진단에 유용하게 응용되고 있다. FDG-PET(주1) 진단법은 방사성동위원소로 표지된 탈산소 포도당(FDG)을 우리 몸에 주입하여, 포도당을 많이 사용하는 암조직을 양전자 방사 단층 촬영(PET)으로 찾아내는 방식이다. FDG는 포도당과 동일하게 세포에 흡수되지만 대사되지 않아 세포에 축적된다.

[나] Otto Warburg박사는 이러한 발견을 통하여 정상세포의 미토콘드리아 호흡(주2)이 파괴되면 정상세포가 암세포로 변형된다는 가설을 제시하였다. 이후 많은 과학자들의 연구를 통하여 Otto Warburg박사의 가설이 적용되는 암세포들이 존재하는 반면 적용되지 않는 암세포들도 많이 존재한다는 사실이 밝혀졌다. 즉 미토콘드리아 호흡이 파괴되어 정상세포가 암세포로 변형되는 경우와 미토콘드리아 호흡과 상관없이 암세포로의 변형되는 경우가 혼재 되어 있음을 확인하였다. 미토콘드리아 호흡이 파괴되어 발생한 암세포에서는 대부분의 경우 미토콘드리아 DNA 돌연변이(mutation)가 발견된다. 미토콘드리아 DNA는 미토콘드리아의 기질(matrix)에 존재하는 DNA로 미토콘드리아 전자전달계의 기능 유지에 중요한 역할을 담당하는 단백질들의 유전자들을 담고 있다. 현재까지 미토콘드리아 DNA 돌연변이가 유방암, 대장암, 췌장암 등 많은 암세포들의 발생에 원인이 되고 있음이 보고되고 있다.

[다] Otto Warburg박사의 발견은 항암제의 개발에도 큰 영향을 주고 있다. 미국의 AbbVie 제약사에서 개발 중인 항암제 Ritonavir는 포도당이 세포로 들어오는 통로인 포

도당 운반 단백질의 저해제로 현재 임상 2단계의 약효성 테스트 중이며, 항암효과가 탁월하여 새로운 항암제로 미국 FDA의 승인을 얻을 수 있을 것으로 기대되고 있다. Ritonavir는 정상세포에는 독성이 적은 것으로 알려지고 있다.

(주1)FDG-PET: ^{18}F-fluorodeoxyglucose positron emission tomography imaging
(주2)미토콘드리아 호흡: 미토콘드리아에서의 산소 소비

[문항]

[문제 2-1] (5점) Warburg박사는 암세포가 정상세포에 비교하여 약 16배의 포도당을 소비한다는 사실을 발견하였다. Warburg박사의 가설을 바탕으로 암세포가 정상세포보다 16배의 포도당을 소비하는 원인을 설명하시오.

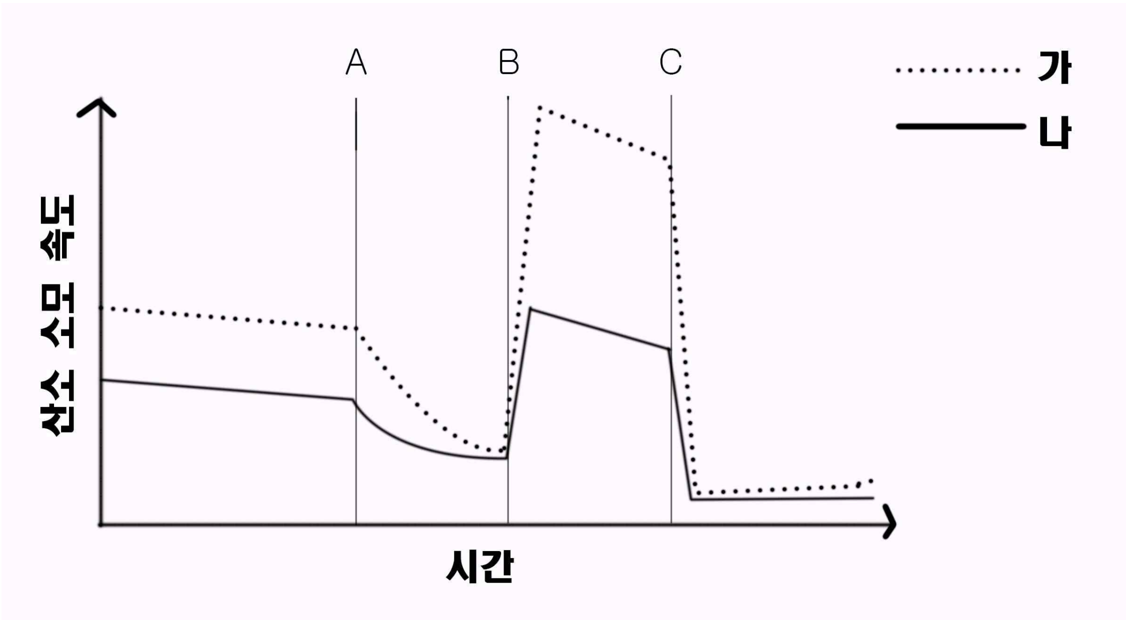
[문제 2-2] (5점) 암세포에서 미토콘드리아 DNA의 돌연변이에 의해 전자전달계의 첫 번째 전자 전달 효소 복합체(NADH 산화 효소)의 기능이 소실되었다. 이 암세포에서 1 몰(1 mol)의 포도당이 미토콘드리아 호흡을 통해 완전히 산화되었을 때 생산될 수 있는 최대의 ATP의 양을 계산하고 그 이유를 설명하시오.

[문제 2-3] (5점) 피루브산에서 젖산이 생성되지 않는 상황에서 1몰(mol) 포도당이 완전히 산화될 때 소비되는 O_2의 몰(mol) 수, 발생되는 CO_2의 몰(mol) 수와 H_2O의 몰(mol) 수를 정상세포와 Warburg박사의 가설에 부합하는 암세포에서 계산하시오.

[문제 2-4] (15점) 미토콘드리아는 생명체 진화의 가설 중 세포내 공생설에 부합하며, 아직도 원핵생물의 특성을 유지하고 있다. 이 사실을 바탕으로 다음의 질문들에 답하시오.
(1) 미토콘드리아 DNA에는 13개의 유전자가 존재한다. 대장암의 미토콘드리아 DNA 염기서열을 분석한 결과 단 한 염기의 돌연변이가 발견되었으며, 미토콘드리아에서 12개의 유전자의 mRNA가 사라진 것이 발견되었다. 미토콘드리아 DNA의 프로모터의 수는 몇 개인가?
(2) 췌장암의 미토콘드리아 DNA 염기서열을 분석한 결과 전사 종결 지점에 돌연변이가 발견되었으며, 12개 유전자의 mRNA가 매우 많이 증가하는 것이 발견되었다. 췌장암에서 mRNA가 증가한 이유를 설명하시오.
(3) (1), (2) 문제의 대장암과 췌장암 미토콘드리아 DNA 돌연변이가 초래하는 결과들로부터 미토콘드리아 DNA 프로모터들의 위치를 추정해 낼 수 있다. DNA 이중가닥을 단일가닥1, 단일 가닥2로 규정할 때 프로모터들이 어디에 존재해야 하는 가를 설명하시오.

[문제 2-5] (15점) 다음은 정상세포 (가)와 세균의 단백질 합성을 억제하는 특정 항생제(테트라사이클린)를 장기간 처리한 세포 (나)에서 미토콘드리아를 추출한 후, NADH와

ADP의 존재 하에 시간에 따른 미토콘드리아의 산소 소모 속도를 측정한 그래프이다. 산소 소모 속도의 측정 중에 각각 A, B, C의 약물을 투여하였다. A는 전자전달복합체의 ATP 합성효소를 억제하는 약물이고, B는 미토콘드리아 내막에서 수소이온의 농도차를 소실시키는 약물이며 C는 첫 번째 전자전달 복합체를 억제하는 약물이다.



(1) (가)와 (나)에서 산소소모 속도의 차이가 나타나는 원인을 설명하시오.
(2) A와 C 약물 투여 후 산소 소모 속도가 저하된 이유와 A와 C에 대한 반응이 차이가 나타나는 원인을 설명하시오.
(3) B 약물에 의한 산소 소모 속도 변화의 원인을 설명하시오.

[문제 2-6] (5점) Warburg박사의 가설에 부합하는 암세포들은 Ritonavir에 의하여 사멸되는 반면 정상세포들의 경우 큰 영향을 받지 않는 이유를 에너지 생산의 관점에서 설명하시오.

3. 출제 의도

생명과학 II 과정의 세포의 에너지 대사 과정인 발효와 호흡 과정을 정확히 이해하고 이를 응용할 수 있는가를 알아보고자 하였으며 이 과정에서 미토콘드리아의 역할에 중점을 두었다. 그리고 원핵생물의 유전자 발현에 관한 지식을 바탕으로 미토콘드리아의 유전자 발현을 추론할 수 있는지를 알아보고자 하였다.

4. 문항 및 제시문의 출제 근거

가) 교육과정 근거

제시문		영역별 내용
하위문항	2-1	생명과학 II - (3) 세포의 호흡과 광합성(p183) [12생과Ⅱ03-01] 미토콘드리아와 엽록체의 구조와 기능을 이해하고, 두 세포 소기관을 비교하여 공통점과 차이점을 설명할 수 있다. [12생과Ⅱ03-02] 세포 호흡 과정과 광합성의 탄소 고정 반응을 단계별로 구분하여 이해하고, 산화적 인산화 과정을 화학 삼투로 설명할 수 있다. [12생과Ⅱ03-03] 산소 호흡과 발효의 차이를 이해하고 실생활 속에서 발효를 이용한 사례를 조사하여 발표할 수 있다.
	2-2	생명과학 II - (3) 세포의 호흡과 광합성(p183) [12생과Ⅱ03-02] 세포 호흡 과정과 광합성의 탄소 고정 반응을 단계별로 구분하여 이해하고, 산화적 인산화 과정을 화학 삼투로 설명할 수 있다. [12생과Ⅱ03-03] 산소 호흡과 발효의 차이를 이해하고 실생활 속에서 발효를 이용한 사례를 조사하여 발표할 수 있다.
	2-3	생명과학 II - (3) 세포의 호흡과 광합성(p183) [12생과Ⅱ03-02] 세포 호흡 과정과 광합성의 탄소 고정 반응을 단계별로 구분하여 이해하고, 산화적 인산화 과정을 화학 삼투로 설명할 수 있다. [12생과Ⅱ03-03] 산소 호흡과 발효의 차이를 이해하고 실생활 속에서 발효를 이용한 사례를 조사하여 발표할 수 있다.
	2-4	생명과학 II - (4) 유전자의 발현과 조절(p184) [12생과Ⅱ04-01] 원핵세포와 진핵세포의 유전체 구성과 유전자 구조를 이해하고 차이를 비교할 수 있다. [12생과Ⅱ04-03] 전사와 번역 과정을 거쳐 유전자가 발현됨을 이해하고, 모형을 이용하여 유전자 발현 과정을 설명할 수 있다. [12생과Ⅱ04-04] 유전 암호를 이해하고, 유전 암호 표를 사용하여 유전 정보를 해독할 수 있다. [12생과Ⅱ04-05] 원핵생물과 진핵생물의 전사 조절 과정을 비교하여 설명할 수 있다.
	2-5	생명과학 II - (3) 세포의 호흡과 광합성(p183) [12생과Ⅱ03-01] 미토콘드리아와 엽록체의 구조와 기능을 이해하고, 두 세포 소기관을 비교하여 공통점과 차이점을 설명할 수 있다. [12생과Ⅱ03-02] 세포 호흡 과정과 광합성의 탄소 고정 반응을 단계별로 구분하여 이해하고, 산화적 인산화 과정을 화학 삼투로 설명할 수 있다.
	2-6	생명과학 II - (2) 세포의 특성(p181) [12생과Ⅱ02-02] 탄수화물, 지질, 단백질, 핵산의 기본 구조와 기능을 설명할 수 있다. 생명과학 II - (3) 세포의 호흡과 광합성(p183) [12생과Ⅱ03-02] 세포 호흡 과정과 광합성의 탄소 고정 반응을 단계별로 구분하여 이해하고, 산화적 인산화 과정을 화학 삼투로 설명할 수 있다. [12생과Ⅱ03-03] 산소 호흡과 발효의 차이를 이해하고 실생활 속에서 발효를 이용한 사례를 조사하여 발표할 수 있다. [12생과Ⅱ03-05] 세포 호흡과 광합성의 전자 전달계를 비교하여 공통점과 차이점을 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	생명과학 II	오현선 외 5인	Mirae N	2020	78-93, 134-137,
	생명과학 II	권혁빈 외 5인	㈜교학사	2020	64-79, 121-124, 142-145
	생명과학 II	전상학 외 5인	지학사	2020	72-81, 124-131, 150-157
	생명과학 II	심규철 외 5인	Visang	2020	72-87, 134-140, 150-157
	생명과학 II	심규철 외 5인	천재교육	2020	68-81, 128-136, 144-150
기타					

5. 문항 해설

제시문의 내용은 세포의 발효와 호흡 과정의 비정상적인 작동이 종양의 발생에 이를 수 있다는 Warberg 박사의 가설이다. 고등학교 생명과학 II의 발효와 호흡 교과 과정을 바탕으로 Warberg 박사의 가설을 설명할 것을 요구하였으며 이를 바탕으로 호흡과 발효 과정의 정확한 경로를 이해하고 있는 가를 질문하고자하는 응용문제를 제시하였다. 마지막으로 생명과학 II의 유전자와 형질 발현에서 원핵생물의 유전자 발현 과정을 이해하고 있는 가를 원핵생물 유전자의 특징을 보이는 미토콘드리아의 유전자를 통해 설명할 것을 요구하였다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	$FADH_2$만이 ATP 생산에 사용할 수 있다는 사실 기재 시 2점 부여 (NADH는 ATP 생산에 사용 못 한다는 사실만 기재 시 1점 부여). 1분자의 $FADH_2$로부터 1.5분자의 ATP가 생성된다는 사실 기재 시 3 점 부여. 계산이 틀리면 1점 차감.	5점
[2-2]	$FADH_2$만이 ATP 생산에 사용할 수 있다는 사실 기재 시 2점 부여 (NADH는 ATP 생산에 사용 못 한다는 사실만 기재 시 1점 부여). 1분자의 $FADH_2$로부터 1.5분자의 ATP가 생성된다는 사실 기재 시 3 점 부여. 계산이 틀리면 1점 차감.	5점
[2-3]	정상세포에서 각 분자들의 몰 수 정확히 기재 시 2점 부여. 수가 하나라도 틀리면 0점 부여. 암세포에서 CO_2 수 정확히 기재 시 2 점 부여. 암세포에서 O_2와 H_2O 수를 모두 정확히 기재 시 1 점 부여.	5점

하위 문항	채점 기준	배점
[2-4] (1)	여러 유전자들이 한 프로모터에 의하여 발현조절 될수 있다 또는 polycistronic 기재 시 3점 부여. 2개의 프로모터 기재 시 2점 부여.	5점
[2-4] (2)	미토콘드리아 DNA가 원형의 구조를 가짐을 기재 시 1점 부여. 원형의 구조 DNA의 전사 종결 결함 시 끝임 없이 전사가 진행됨을 기재 시 4점 부여.	5점
[2-4] (3)	동일 가닥에 프로모터가 존재한다면 12개의 mRNA의 양이 증가할 수 없다는 추론 기재 시 또는 다른 가닥에 프로모터들이 존재해야만 12개의 mRNA들 만이 증가한다는 추론 기재 시 3점 부여. 서로 다른 단일 가닥에 프로모터가 존재 한다는 추론 기재 시 또는 단일 가닥1에 프로모터 1개, 단일 가닥2에 프로모터 1개가 존재한다고 기재 시 2점 부여.	5점
[2-5] (1)	미토콘드리아 DNA의 유전자 발현 시스템이 원핵생물(세균)과 유사하며 이로 인하여 항생제가 미토콘드리아의 유전자 발현을 저해한다는 추론 기재 시 3점 부여. (원핵생물 언급 없을 시 0점) 미토콘드리아 DNA의 유전자 발현이 저해되면 전자전달계의 기능(활성)이 감소하여 산소 소비가 감소한다는 추론 기재 시 2점 부여.	5점
[2-5] (2)	약물 A는 수소이온의 농도차이를 해소하지 못하여 또는 수소 이온이 과다하게 축적되어 산소 소모가 감소한다는 사실 기재 시 1점 부여. 약물 C는 NADH가 전자전달계에 들어가지 못하게 하여 산소 소모가 감소한다는 사실 기재 시 1점 부여. 약물 A는 수소이온 농도차이가 과도하게 증가하기까지 시간이 다소 소요되므로 산소소모가 완만히 감소하나 약물 C는 즉시 전자전달계에 멈추게 되어 급격히 산소 소모가 감소한다는 사실 기재 시 3점 부여.	5점
[2-5] (3)	수소이온 농도차이를 유지하기 위하여 산소 소모를 늘린다는 사실 기재 시 3점 부여. 효소 반응 원리에 의하여 생성물(product)의 감소는 기질(substrate)의 사용을 늘린다는 사실 기재 시 2점 부여.	5점
[2-6]	정상세포는 단백질을 사용하여 미토콘드리아에서 에너지(ATP)를 생산할 수 있다는 사실 기재 시 2점 부여. 정상세포는 지방을 사용하여 미토콘드리아에서 에너지(ATP)를 생산할 수 있다는 사실 기재 시 2점 부여. 암세포는 미토콘드리아 호흡이 파괴되어 해당 과정으로만 에너지(ATP)를 생산할 수 있다는 사실 기재 시 1점 부여. (또는 암세포는 단백질, 지방을 사용하여 ATP를 생산할 수 없다 1점 부여)	5점

7. 예시 답안

[문제 2-1] (5점) Warburg박사는 암세포가 정상세포에 비교하여 약 16배의 포도당을 소비한다는 사실을 발견하였다. Warburg박사의 가설을 바탕으로 암세포가 정상세포보다 16배의 포도당을 소비하는 원인을 설명하시오

[예시 답안] Warburg박사의 가설: 미토콘드리아 호흡 파괴가 암세포로 변화하는 원인임. 설명: 포도당 한 분자에서 생성되는 ATP는 해당 과정에서 2분자, TCA회로에서 2분자, 산화적 인산화에서 약 28분자임. 미토콘드리아 호흡이 파괴되면 세포는 피루브산이 젖산으로 전환되는 발효과정을 통하여 ATP를 합성하므로, TCA회로와 산화적 인산화가 작동하지 못하여 포도당 한 분자당 ATP 2분자가 생성됨. 즉, 정상세포는 포도당 한 분자 당 32분자의 ATP 생성, 암세포는 2분자의 ATP 생성. 암세포가 생존을 위하여 정상세포와 유사한 양의 ATP가 필요하다고 가정할 때 정상세포보다 16배의 포도당이 필요함.

[문제 2-2] (5점) 암세포에서 미토콘드리아 DNA의 돌연변이에 의해 전자전달계의 첫 번째 전자 전달 효소 복합체(NADH 산화 효소)의 기능이 소실되었다. 이 암세포에서 1 몰(1 mol)의 포도당이 미토콘드리아 호흡을 통해 완전히 산화되었을 때 생산될 수 있는 최대의 ATP의 양을 계산하고 그 이유를 설명하시오

[예시 답안] 1 몰의 포도당은 해당과정 중 2 몰의 ATP를 생산하고 TCA 회로에서 2 몰의 ATP를 생산하며 2 몰의 $FADH_2$와 10 몰의 NADH를 생산한다. $FADH_2$와 NADH는 전자전달계를 통하여 최대 28몰의 ATP를 생산한다. 전자전달계의 첫 번째 전자 전달 효소 복합체가 기능을 상실하면 NADH를 기질로 사용하지 못하고 $FADH_2$만을 사용하여 ATP를 생산할 수 있다. “1분자의 NADH로부터 2.5분자의 ATP가, 1분자의 $FADH_2$로부터 1.5분자의 ATP가 생성된다”. 그러므로 생성될 수 있는 최대의 ATP는 해당과정 2몰 + TCA 회로 2몰 + $2FADH_2$ X 1.5 몰 = 7몰 이다.

[문제 2-3] (5점) 피루브산에서 젖산이 생성되지 않는 상황에서 1몰(mol) 포도당이 완전히 산화될 때 소비되는 O_2의 몰(mol) 수, 발생되는 CO_2의 몰(mol) 수와 H_2O의 몰(mol) 수를 정상세포와 Warburg박사의 가설에 부합하는 암세포에서 계산하시오

[예시 답안] 정상세포에서는 1 몰의 포도당이 해당작용을 거쳐 2몰의 피루브산이 되며, 2몰의 피루브산이 2몰의 아세틸 CoA가 될 때 2몰의 CO_2(이산화탄소)와 2몰의 NADH가 발생된다. 2 몰의 아세틸 CoA는 TCA회로에서 4 몰의 CO_2(이산화탄소)와 6 몰의 NADH, 2 몰의 $FADH_2$가 발생된다. 8 몰의 NADH, 2 몰의 $FADH_2$는 전자전달계를 거쳐 6몰의 O_2(산소)를 6몰의 H_2O(물)로 환원시킨다. 즉, 정상세포에서는 1 몰의 포도당이 완전 산화될 때 6 몰의 CO_2(이산화탄소)를 발생되고, 6 몰의 O_2(산소)를 소비하여 6 몰의 H_2O(물)

을 발생시킨다.

"$C_6H_{12}O_6$ + $6O_2$ → $6CO_2$ + $6H_2O$ + 에너지"

피루브산이 젖산으로 전환되지 못하는 암세포에서는 발효를 할 수 없어, 피루브산이 아세틸 CoA로 전환되어 TCA회로에 완전히 산화된다. 그러므로 암세포에서는 1 몰의 포도당으로부터 6 몰의 CO_2(이산화탄소)가 발생된다. 그러나 암세포는 미토콘드리아 호흡이 파괴되었으므로 O_2(산소)의 소비를 못하고, O_2(산소)로부터 발생되는 H_2O(물)도 없다. 그러므로 암세포에서는 1 몰의 포도당이 완전 산화될 때 6 몰의 CO_2(이산화탄소)를 발생되고, 0 몰의 O_2(산소)를 소비하여 0 몰의 H_2O(물)을 발생시킨다.

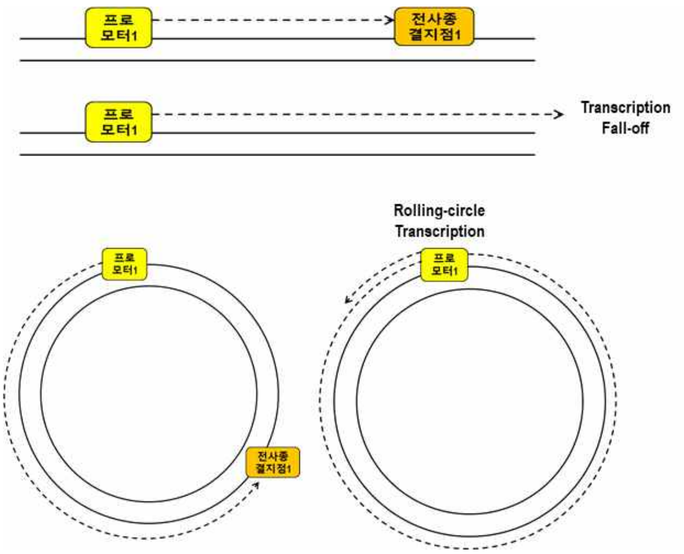
[문제 2-4] (15점) 미토콘드리아는 생명체 진화의 가설 중 세포내 공생설에 부합하며, 아직도 원핵생물의 특성을 유지하고 있다. 이 사실을 바탕으로 다음의 질문들에 답하시오

(1) (5점) 미토콘드리아 DNA에는 13개의 유전자가 존재한다. 대장암의 미토콘드리아 DNA 염기서열을 분석한 결과 단 한 염기의 돌연변이가 발견되었으며, 미토콘드리아에서 12개의 유전자의 mRNA가 사라진 것이 발견되었다. 미토콘드리아 DNA의 프로모터의 수는 몇 개인가?

[예시 답안] 미토콘드리아는 원핵생물의 특성을 유지하고 있으므로, 미토콘드리아 DNA 유전자들의 발현(전사)은 여러 유전자들이 한 프로모터(또는 조절 부위)에 의하여 발현조절 될 수 있다(polycistronic). 프로모터(또는 조절 부위)에 돌연변이가 발생하면 유전자 발현(전사)을 저해 할 수 있으므로, 대장암 미토콘드리아 DNA에서 발견된 돌연변이는 프로모터(또는 조절 부위)에 위치해 있다고 추론할 수 있다. 그리고 12개 유전자의 mRNA가 동시에 사라졌다는 사실로부터 12개의 유전자가 하나의 프로모터에 의하여 발현(전사) 조절된 다는 사실을 알 수 있으며, 나머지 1 개의 유전자는 다른 프로모터에 의하여 발현(전사) 조절된 다는 사실을 알 수 있다. 그러므로 미토콘드리아 DNA 유전자들은 총 2 개의 프로모터에 의하여 발현(전사) 조절된 다는 사실을 추론할 수 있다.

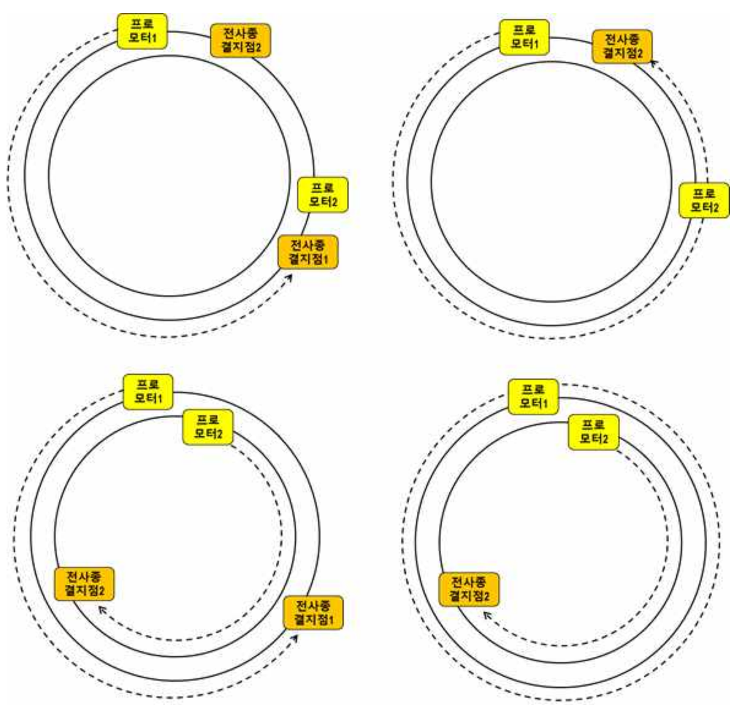
(2) (5점) 췌장암의 미토콘드리아 DNA 염기서열을 분석한 결과 전사 종결 지점에 돌연변이가 발견되었으며, 12개 유전자의 mRNA가 매우 많이 증가하는 것이 발견되었다. 췌장암에서 mRNA가 증가한 이유를 설명하시오

[예시 답안] 미토콘드리아는 원핵생물의 특성을 유지하고 있으므로, 미토콘드리아 DNA는 원형의 구조를 이루고 있다. 선형 DNA의 경우 전사 종결 지점에 돌연변이가 생겨 전사가 종결되지 않아도 DNA의 끝에서 전사가 끝나는 반면(RNA polymerase fall-off), 원형 DNA의 경우 전사 종결 지점의 돌연변이에 의하여 전사가 종결되지 못할 경우 끝임 없이 전사가 지속되게 된다(rolling circle transcription). 췌장암 미토콘드리아 DNA 돌연 변이는 전사 종결을 저해하여 끝임 없이 전사가 지속되게 하며, 이로 인하여 mRNA의 양이 매우 많이 증가하게 된다.

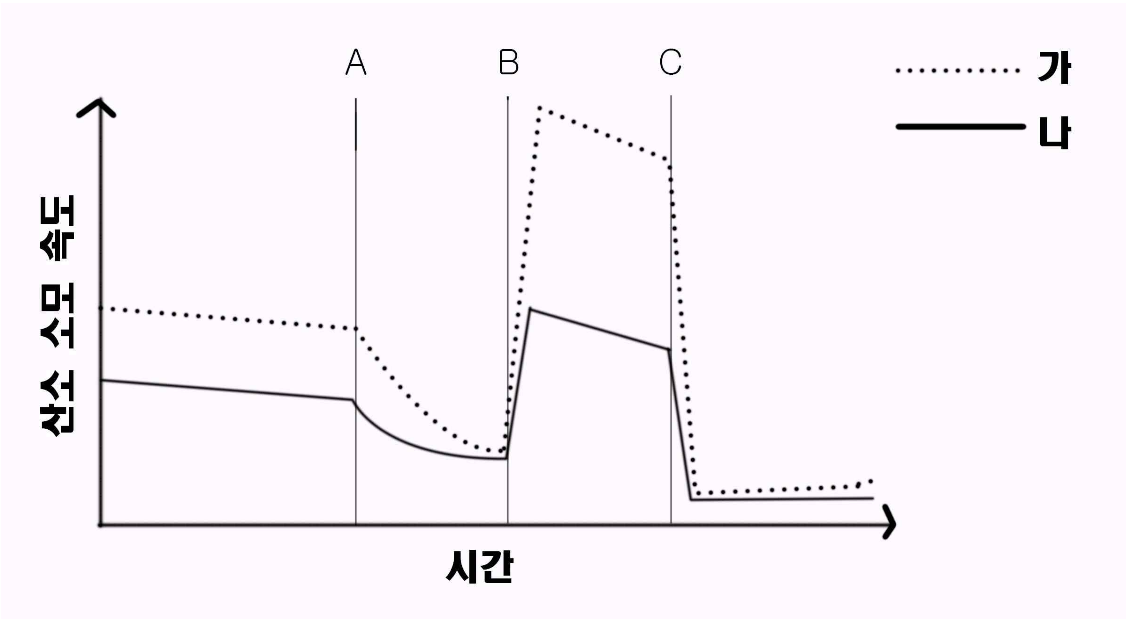


(3) (5점) (1), (2) 문제의 대장암과 췌장암 미토콘드리아 DNA 돌연변이가 초래하는 결과들로부터 미토콘드리아 DNA 프로모터들의 위치를 추정해 낼 수 있다. DNA 이중가닥을 단일 가닥1, 단일 가닥2로 규정할 때 프로모터들이 어디에 존재해야 하는 가를 설명하시오

[예시 답안] 미토콘드리아 DNA는 원형의 구조이므로, 유전자들이 동일한 단일 가닥에 존재한다면, 전사 종결 지점 돌연 변이는 유전자들의 mRNA 양을 증가 시킬 수 없다. 문제 (2)의 결과로부터 12 개의 유전자들의 mRNA만 양이 증가 하였으므로, 나머지 1 개의 유전자는 동일한 단일 가닥에 존재할 수 없다. 그러므로 2개의 프로모터들은 서로 다른 단일 가닥에 존재해야만 한다.



[문제 2-5] (15점) 다음은 정상세포 (가)와 세균의 단백질 합성을 억제하는 특정 항생제 (테트라사이클린)를 장기간 처리한 세포 (나)에서 미토콘드리아를 추출한 후, NADH와 ADP의 존재 하에 시간에 따른 미토콘드리아의 산소 소모 속도를 측정한 그래프이다. 산소 소모 속도의 측정 중에 각각 A, B, C의 약물을 투여하였다. A는 전자전달복합체의 ATP 합성효소를 억제하는 약물이고, B는 미토콘드리아 내막에서 수소이온의 농도차를 소실시키는 약물이며 C는 첫 번째 전자전달 복합체를 억제하는 약물이다.



(1) (5점) (가)와 (나)에서 산소소모 속도의 차이가 나타나는 원인을 설명하시오

[예시 답안] 미토콘드리아는 원핵세포로부터 진화하여 아직도 원핵생물(세균)의 특성을 유지하고 있으므로, 미토콘드리아는 원핵생물(세균)과 유사한 구조의 독립적인 DNA를 가지고 있으며 원핵생물(세균)과 유사한 독립적인 리보솜과 번역 시스템을 가지고 있다. 그러므로 세균의 단백질 합성을 특이하게 억제하는 항생제인 테트라사이클린은 장기간 사용되었을 경우에 세균과 유사한 단백질 합성 체계를 가지고 있는 미토콘드리아의 단백질 합성을 억제할 수 있다. 미토콘드리아는 전자전달복합체의 중요한 단백질들을 독자적으로 번역하여 합성하므로 테트라사이클린은 전자전달복합체의 단백질의 번역을 억제하여, 결국 전자전달복합체의 기능을 억제하고 산소의 소모를 감소시키는 결과를 초래한다.

(2) (5점) A와 C 약물 투여 후 산소 소모 속도가 저하된 이유와 A와 C에 대한 반응이 차이가 나타나는 원인을 설명하시오

[예시 답안] A는 다섯번째 전자전달복합체인 ATP 합성효소를 억제하는 약물이다. ATP 합성효소는 다른 전자전달복합체에서 전자의 이동과 이에 따른 수소이온의 미토콘드리아 내막 외부로의 이동 중에 발생한 미토콘드리아 내막의 외부와 내부의 수소이온 농도차이

를 해소하는 과정에서 발생하는 에너지를 이용하여 ADP로부터 ATP를 합성한다. 그러므로 ATP 합성효소를 억제하면 수소이온의 농도차이를 해소할 수 없게 되어 수소이온은 미토콘드리아의 내막 외부에 축적되고 이 현상은 효소반응의 원칙에 따라 NADH의 NAD^+로의 분해과정에서 나온 전자가 전자전달복합체를 이동하여 산소를 사용하여 물을 생성되는 과정이 억제된다.
C는 첫 번째 전자전달복합체 즉 NADH 산화효소를 억제하는 약물이다. NADH 산화효소는 NADH를 기질로 전자를 추출하여 다른 전자전달복합체로 전자를 운반하는 역할을 하는데, 이 효소가 억제되면 미토콘드리아에서 일어나는 전자의 이동과 산소의 소모가 중단된다.
C는 전자의 이동과 산소소모를 직접적으로 억제하므로 그 효과가 빠르게 나타나 두 세포 모두에서 산소소모를 급격하게 억제하지만, A는 산소소모를 직접적으로 억제하는 것이 아니라 전자의 이동에 의해 발생한 수소이온의 농도 차의 해소 과정을 억제함으로써 산소소모를 이차적으로 억제함으로 C 약물과 비교하여 상대적으로 산소 소모의 억제 효과가 늦게 발생한다.

(3) (5점) B 약물에 의한 산소 소모 속도 변화의 원인을 설명하시오
[예시 답안] B는 전자전달복합체에서 고에너지 전자의 이동에 의해 발생한 미토콘드리아 내막의 외부와 내부의 수소이온농도차이를 소실시키는 약물이므로 효소반응의 원칙에 의해 미토콘드리아의 전자전달복합체는 소실된 수소이온의 농도차를 복구하기 위해 NADH를 기질로 전자의 산화와 환원 과정에 의한 전자의 이동을 최대한으로 증가시키게 되고 이는 급격한 산소소모의 증가를 초래한다.
효소반응의 원칙: 효소는 기질을 사용하여 생성물을 만드는 단백질 또는 단백질 복합체이다. 일반적인 효소의 반응 속도는 기질과 생성물의 상대적인 양에 의해 결정된다. 즉 기질이 상재적으로 많을 경우에는 효소의 반응속도는 증가하고 효소의 반응에 따라 생성물의 상대적인 양이 많을 경우에는 효소의 반응 속도는 느려진다.

[문제 2-6] (5점) Warburg박사의 가설에 부합하는 암세포들은 Ritonavir에 의하여 사멸되는 반면 정상세포들의 경우 큰 영향을 받지 않는 이유를 에너지 생산의 관점에서 설명하시오
[예시 답안] 정상세포들은 미토콘드리아 호흡이 정상적이므로, 포도당의 세포 내 유입이 제한된다 하더라도 단백질과 지방으로부터 에너지(ATP)를 생산할 수 있다. 그러나 암세포는 미토콘드리아 호흡이 파괴되어 단백질과 지방으로부터 에너지(ATP)를 생산할 수 없고, 해당 과정을 통해서만 에너지(ATP)를 생산할 수 있다. 암세포의 세포 내로 포도당이 유입되지 못할 경우 해당 과정을 통한 에너지(ATP) 생산을 할 수 없어 결국 에너지의 부족으로 암세포는 사멸로 이르게 된다.