<문항카드 4>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(A형) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심 개념 및 용어	경우의 수, 기댓값, 여사건의 확률, 이항분포, 표준정규분포, 중복조합
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 어느 과수원에서 해마다 사과, 배, 감을 수확하여 일부는 소비자에게 직접 팔기도 한다. 생산하는 사과의 무게는 평균 250g, 표준편차 15g인 정규분포를 따른다고 한다.
다음 물음에 각각 답하시오.

(1-1) 구별이 되지 않는 바구니에 사과, 배, 감을 각각 2개 이상씩, 모두 9개의 과일을 담아 주문 제작하는 상점이 있다. 이 상점에서 4개의 과일바구니를 주문하는 방법의 수를 구하시오. (단, 동일한 구성의 바구니를 중복해서 주문할 수 있다.) (70점)

(1-2) 사과 9개를 담아 판매용 포장을 할 때, 사과 9개의 표본평균이 240g 이하이면 재포장을 한다. 16개가 들어있는 판매용 포장을 하는 경우에도 9개가 들어있는 포장 때와 같은 재포장률을 유지하려고 한다. 16개 사과의 표본평균이 얼마 이하가 되어야 하는지 구하시오. (80점)

(1-3) 판매용 사과가 상해 있을 확률은 0.1이고, 사과 9개가 들어있는 한 상자를 9000원에 판매하는데 이 중 3600원이 수익이라고 한다. 한 상자에서 상한 사과가 3개 이상 나오면 사과는 돌려받지 않고 받은 돈을 환불한다는 조건으로 판매할 때, 한 상자 당 예상 수익은 $0.9^9 \times a + b$원이다. 정수 a와 b의 값을 각각 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

1. 정규분포의 성질을 이해하고 확률을 구하는지 평가한다.
2. 이항분포를 이해하고 이항분포의 평균과 표준편차를 구하는지 평가한다.
3. 중복조합을 이해하고 중복조합의 수를 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 1	확률과 통계 (3) 통계 ㉮ 확률분포 [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. 확률과 통계 (1) 경우의 수 ㉮ 순열과 조합 [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	배종숙 외	금성출판사	2020	pp. 99, 109, 114-117, 27
	확률과 통계	이준열 외	천재교육	2020	pp. 91, 100, 105-107, 22
기타	해당 사항 없음				

5. 문항 해설

정규분포에서 확률을 구한다. 이항분포에서 평균과 분산을 구하여 이산형 확률변수의 기댓값과 표준편차를 구한다. 중복조합의 수를 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	■ 과일바구니 1개를 구성하는 방법의 관계식을 세우면 (+30점) ■ 1개를 구성하는 방법의 수 ${}_3\mathrm{H}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_2 = 10$ 중 한 가지를 쓰면 (+10점) ■ 1개를 구성하는 방법의 수가 k일 때 과일바구니 4개를 만드는 방법의 수의 관계식을 구하면 (+20점) ■ ${}_k\mathrm{H}_4 = {}_{\mathrm{k}+3}\mathrm{C}_4$를 구하면 (+10점) (이 문제에서는 $k=10$이므로 ${}_{10}\mathrm{H}_4 = {}_{13}\mathrm{C}_4 = \dfrac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4\cdot 3\cdot 2} = 715$)	70
(1-2)	■ $\overline{X_n}$의 분포를 알면 (+20점) ■ $\mathrm{P}(\overline{X_9} \le 240) = \mathrm{P}(\overline{X_{16}} \le a)$의 관계식을 바로 세우면 (+30점) ■ 풀이와 함께 답을 구하면 (+30점)	80
(1-3)	■ 사과 1 상자 중 상한 사과의 수의 분포를 알면 (+20점) ■ 사과 1상자를 환불할 확률 $1-\dfrac{22}{9}A$를 알면 (+20점) ■ 수익에 대한 분포를 알면 (+20점) ■ 기댓값을 구하여 $a=22000$, $b=-5400$를 쓰면 (+20점)	80

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1]

(1-1) 바구니에 들어간 사과, 배, 감의 수를 각각 a, b, c라 하면, 사과, 배, 감이 각각 적어도 2개씩, 모두 9개가 되도록 바구니를 구성하는 방법의 수는 다음 방정식을 만족하는 정수해의 개수와 같다.

$a+b+c=9$ (단, $a \geq 2$, $b \geq 2$, $c \geq 2$)

이 방정식을 만족하는 정수해의 개수는 $x+y+z=3$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_2 = 10$가지이다.

가능한 10가지의 과일바구니 중 중복을 허용하여 4개를 고르는 방법의 수는

${}_{10}\mathrm{H}_4 = {}_{13}\mathrm{C}_4 = \dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 13 \cdot 11 \cdot 5 = 715$이다.

(1-2) 사과 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(250, 225)$을 따르고, 사과 n개의 표본평균 $\overline{X_n}$는 정규분포 $N\left(250, \dfrac{225}{n}\right)$을 따른다. 따라서 $\mathrm{P}(\overline{X_9} \leq 240) = \mathrm{P}(\overline{X_{16}} \leq a)$를 만족하는 a를 구하면 된다.

$\mathrm{P}(\overline{X_9} \leq 240) = \mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{240-250}{15/3}\right) = \mathrm{P}(Z \leq -2)$이고 $\mathrm{P}(\overline{X_{16}} \leq a) = \mathrm{P}(Z \leq \dfrac{a-250}{15/4})$이므로

$a = 242.5$이다. 따라서 16개 사과 포장의 평균이 242.5g 이하일 때 재포장을 해야 한다.

(1-3) $A = 0.9^9$라 하자. 포장된 사과 중 상한 사과의 수를 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(9, 0.1)$을 따르고, 환불할 확률은

$$\mathrm{P}(X \geq 3) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 2) = 1 - 0.9^9 - {}_9\mathrm{C}_1 \times 0.9^8 \times 0.1 - {}_9\mathrm{C}_2 \times 0.9^7 \times 0.1^2 = 1 - \frac{22}{9}\mathrm{A}$$

이다.

확률변수 Y를 사과 한 상자 판매할 때의 수익이라고 하면 Y의 확률분포표는 다음과 같다.

y	-5400	3600
$\mathrm{P}(Y=y)$	$1-\dfrac{22}{9}A$	$\dfrac{22}{9}A$

그러므로 $\mathrm{E}(Y) = -5400 \times (1 - \dfrac{22}{9}A) + 3600 \times \dfrac{22}{9}A = -5400 + 22000A$이다.

따라서 $a = 22000$이고 $b = -5400$이다.

<문항카드 5>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ◻ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(A형) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심 개념 및 용어	거리, 합성함수 미분, 치환적분법
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 이계도함수는 연속함수이고, 아래 조건을 모두 만족한다. 다음 물음에 각각 답하시오.

< 조건 >

(가) $f(0)=1$

(나) $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.

(다) $0 \le x \le t$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이를 $\ell(t)$라 할 때,

모든 양의 실수 t에 대하여 $\ell(t)=\int_0^t f(x)\,dx$가 성립한다.

(2-1) $f'(0)$을 구하시오. (70점)

(2-2) $g(x)=f(x)+f'(x)$라 할 때, $x>0$에 대하여 $g(x)$를 구하시오. (80점)

(2-3) $x>0$에 대하여 $f(x)$를 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

곡선의 길이를 적분으로 표현하고 치환적분과 합성함수 미분을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 2	미적분 (3) 적분법 ② 정적분의 활용 [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. 미적분 (3) 적분법 ① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.

*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
**: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	김원경 외	비상교육	2020	pp. 80, 129, 155
	미적분	이준열 외	천재교육	2020	pp. 89, 150, 179
기타	해당 사항 없음				

5. 문항 해설

미지의 함수로 정의된 곡선의 길이를 적분으로 표현하고 합성함수 미분과 치환적분을 활용하여 미지의 함수를 계산한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	■ 적분 등식을 쓰면 (+30점) ■ $\sqrt{1+f'(t)^2}=f(t)$를 쓰면 (+30점) ■ 앞의 과정이 맞고 답을 구하면 (+10점)	70
(2-2)	■ $2f'(t)f''(t)=2f(t)f'(t)$를 구하면 (+20점) ■ $f''(t)=f(t)$를 구하면 (+20점) ■ $g'(x)=g(x)$를 구하면 (+20점) ■ 앞의 과정이 맞고 $g(x)=e^x$를 구하면 (+20점) ■ 풀이 없이 답만 쓰면 (0점)	80
(2-3)	■ 인수분해하고 $f(x)-f'(x)=e^{-x}$를 구하면 (+40점) ■ 앞의 과정이 맞고 답을 구하면 (+40점) ■ 풀이 없이 답만 쓰면 (0점)	80

	[별해 1] ■ $f'(x) = e^x - f(x)$를 구하고 방정식 $1 = -e^{2x} + 2e^x f(x)$를 구하면 (+40점) ■ 앞의 과정이 맞고 답을 구하면 (+40점) ■ 풀이 없이 답만 쓰면 (0점)
	[별해 2] ■ $f(x) - f'(x) = e^{-x}$를 구하면 (+40점) ■ 앞의 과정이 맞고 답을 구하면 (+40점) ■ 풀이 없이 답만 쓰면 (0점)
	[별해 3] ■ $g(x) = f(x) + f'(x) = e^x$의 양변에 e^x를 곱하면 (+20점) ■ 적분하여 $e^x f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$를 구하면 (+50점) ■ 답을 얻으면 (+10점)

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 2]

(2-1) $\int_0^t \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_0^t f(x)\,dx$가 성립하므로 미분하면 모든 실수 $t \geq 0$에 대하여 $\sqrt{1+f'(t)^2} = f(t)$가 성립한다. 따라서 $t=0$을 대입하면 $f'(0)=0$이다.

(2-2) $\sqrt{1+f'(t)^2} = f(t)$에서 $1+f'(t)^2 = f(t)^2$이다.
미분하면 $2f'(t)f''(t) = 2f(t)f'(t)$이고 $f'(t) > 0$이므로 $f''(t) = f(t)$이다.
그러므로 $g'(x) = f'(x) + f''(x) = f'(x) + f(x) = g(x)$이다.
조건 (나)에 의해 $g(x) > 0$이므로 $\frac{g'(x)}{g(x)} = 1$이고, 양변을 적분하면 $\ln g(x) = x + c$이다.
조건 (가)와 (2-1)의 결과로부터 $g(0) = f(0) + f'(0) = 1$이므로 $c = 0$이다. 그러므로 $g(x) = e^x$이다.

(2-3) $1 = f(x)^2 - f'(x)^2 = (f(x)+f'(x))(f(x)-f'(x))$이므로 $f(x) - f'(x) = \frac{1}{g(x)} = e^{-x}$이다.
한편, (2-2)에 의해 $g(x) = f(x) + f'(x) = e^x$이므로 앞의 식과 연립하여 풀면 $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$이다.

[2-3 별해 1] $g(x) = f(x) + f'(x) = e^x$이므로 $f'(x) = e^x - f(x)$이다.
따라서 $1 = f(x)^2 - f'(x)^2 = f(x)^2 - (e^x - f(x))^2 = -e^{2x} + 2e^x f(x)$이다.
그러므로 $2e^x f(x) = e^{2x} + 1$이고 $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$이다.

[2-3 별해 2] $h(x)=f(x)-f'(x)$라 할 때, $h'(x)=-f(x)+f'(x)=-h(x)$이므로

$h(x)=e^{-x}$가 됨을 (2-2)와 같은 과정을 통해 보이고, $f(x)=\dfrac{g(x)+h(x)}{2}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$와

같이 구할 수도 있다.

[2-3 별해 3]

$g(x)=f(x)+f'(x)=e^x$의 양변에 e^x를 곱하면 $e^x(f(x)+f'(x))=e^{2x}$를 얻는다.

이 식을 적분하면 $e^xf(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$를 얻는다. $x=0$을 대입하면 $f(0)=\dfrac{1}{2}+C=1$이므로

$C=\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 $e^xf(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+\dfrac{1}{2}$이고 $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$이다.

<문항카드 6>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(A형) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심 개념 및 용어	이계도함수, 여러 가지 미분법
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 함수 $f(x)=\begin{cases} x-\ln x\,, & x>1 \\ x, & x\le 1 \end{cases}$에 대하여, $x(1)=e$인 이계도함수가 연속인 함수 $x(t)$는 모든 실수 $t>\dfrac{1}{e-1}$에 대하여 $f(x(t))=(e-1)t-\ln t$를 만족한다. 다음 물음에 각각 답하시오.

(3-1) $t>\dfrac{1}{e-1}$인 모든 t에 대하여 $x(t)>1$임을 보이시오. (80점)

(3-2) $x'(1), x''(1)$의 값을 각각 구하시오. (80점)

(3-3) $t>\dfrac{1}{e-1}$인 모든 t에 대하여 $x''(t)>0$임을 보이시오. (80점)

3. 출제 의도

합성함수의 이계도 함수를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 2	미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.

*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
**: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	홍성복 외	지학사	2020	pp. 88-105
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2020	pp. 85-92
기타	해당 사항 없음				

5. 문항 해설

미분을 이용하여 문제의 조건을 만족하는 관계식을 구하고 합성함수의 이계도 함수를 계산하여 문제를 해결한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	▪ $g'(t) = e-1-\frac{1}{t}$를 구하면 (+20점) ▪ 최솟값 $1+\ln(e-1)(>1)$를 구하면 (+30점) ▪ $x(t)>1$를 논리적으로 설명하면 (+30점)	80
(3-2)	▪ 식 (*)를 구하면(+20점) ▪ $x'(1) = \frac{e^2-2e}{e-1}$를 구하면 (+20점) ▪ 식 (**)를 구하면(+20점) ▪ $x''(1) = \frac{2e^2-3e}{(e-1)^3}$를 구하면 (+20점)	80
(3-3)	▪ [단계 1]에서 $x'(t)>0$ 을 보이면(+10점) ▪ [단계 2]에서 $\frac{1}{a} = \frac{x'(a)}{x(a)}$임을 보이면 (+10점) ▪ $x(a) = (e-1)a$임을 보이면 (+10점) ▪ $a = (e-1)a$가 되어 모순임을 보이면 (+20점)	80

	■ [단계 3]에서 $x''(1)=\dfrac{2e^2-3e}{(e-1)^3}$〉0 (+10점) ■ [단계 4]에서 사잇값 정리 이용하여 증명 (+20점)	
	■ $x''(t)$를 계산하고 $x''(a)\le 0$을 가정하여 $x(a)\le(e-1)a$임을 보이면(+30점) ■ $a\ge x(a)$임을 보이면 (+20점) ■ $a\ge(e-1)a$를 보여 모순임을 보이면 (+30점)	
	■ [단계 1]에서 $x''(t)$를 계산하여 $x''(a)=0$을 가정하여 $x(a)=(e-1)a$임을 보이면 (+30점) ■ [단계 1]에서 $a=(e-1)a$가 되어 모순임을 보이면 (+20점) ■ [단계 2]에서 $x''(1)=\dfrac{2e^2-3e}{(e-1)^3}$〉0 (+10점) ■ [단계 3]에서 사잇값 정리를 이용하여 증명하면(+20점)	
	[별해 3] ■ $g(x)=f(x)+f'(x)=e^x$의 양변에 e^x를 곱하면 (+20점) ■ 적분하여 $e^xf(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$를 구하면 (+50점) ■ 답을 얻으면 (+10점)	

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 3]

(3-1) $g(t)=(e-1)t-\ln t$라 할 때, $g'(t)=e-1-\dfrac{1}{t}$이므로 $g(t)$는 $t=\dfrac{1}{e-1}$일 때 최솟값 $1+\ln(e-1)(>1)$을 갖는다. 따라서 $f(x(t))>1$이고 $x\le 1$에서 $f(x)\le 1$이므로 $x(t)>1$이다.

(3-2) (3-1)에 의해 주어진 조건식은 아래 식 (1)과 같다.

$(e-1)t-\ln t=x(t)-\ln x(t)\ \cdots(1)$

식 (1)을 미분하면 $(e-1)-\dfrac{1}{t}=x'(t)-\dfrac{x'(t)}{x(t)}$이고, $t=1$을 대입하면

$x'(1)=\dfrac{e^2-2e}{e-1}$이다.

식 (1)을 두 번 미분하면 $\dfrac{1}{t^2}=x''(t)-\dfrac{x''(t)x(t)-x'(t)^2}{x(t)^2}$이고, $t=1$을 대입하면

$x''(1)=\dfrac{2e^2-3e}{(e-1)^3}$이다.

(3-3) (단계 1) (3-2)에서 구한 식 $e-1-\dfrac{1}{t}=x'(t)-\dfrac{x'(t)}{x(t)}=x'(t)\left(1-\dfrac{1}{x(t)}\right)$에서

$t>\dfrac{1}{e-1}$이면 $x'(t)>0$ 이다.

(단계 2) $f(x(t))=(e-1)t-\ln t$를 한 번 미분한 식과 두 번 미분한 식을 정리하면 각각 다음과 같다.

$(e-1)-\frac{1}{t}=x'(t)-\frac{x'(t)}{x(t)}$ $\cdots(1)$

$\frac{1}{t^2}=x''(t)-\frac{x''(t)x(t)-x'(t)^2}{x(t)^2}$ $\cdots(2)$

$a>\frac{1}{e-1}$인 a에 대하여 $x''(a)=0$이면, 식 (2)에서 $\frac{1}{a^2}=\left(\frac{x'(a)}{x(a)}\right)^2$이고,

$x(a), x'(a)>0$이므로 $\frac{1}{a}=\frac{x'(a)}{x(a)}$이다. 또한 식 (1)에서 $x'(a)=e-1$이고, 따라서

$x(a)=(e-1)a$이다.

이때, $(e-1)t-\ln t=x(t)-\ln x(t)$로부터,

$(e-1)a-\ln a=x(a)-\ln x(a)=(e-1)a-\ln(e-1)a$

이므로 $a=(e-1)a$가 성립되어 모순이다. 따라서 $t>\frac{1}{e-1}$인 t에 대하여 $x''(t)\neq 0$이 성립한다.

(단계 3) (3-2)의 결과로부터 $x''(1)=\frac{2e^2-3e}{(e-1)^3}>0$이다.

(단계 4) $a>\frac{1}{e-1}$인 a에 대하여 $x''(a)<0$인 점이 존재하면 (단계 3)과 사잇값 정리에 의하여 $x''(b)=0$인 b가 존재하지만 (단계 2)에 모순이다. 따라서 $t>\frac{1}{e-1}$인 t에 대하여 $x''(t)>0$이 성립한다.

[3-3 별해 1] $a>\frac{1}{e-1}$인 어떤 a에 대하여 $x''(a)\leq 0$가 성립한다고 가정하고 모순이 생김을 보이자. $g(t)=(e-1)t-\ln t$에 대하여 $f(x(t))=g(t)$이므로 $f'(x(t))x'(t)=g'(t)$와 $f''(x(t))(x'(t))^2+f'(x(t))x''(t)=g''(t)$가 성립하므로

$x''(t)=\frac{g''(t)f'(x(t))-g'(t)f''(x(t))x'(t)}{f'(x(t))^2}$이다.

이로부터 $x''(a)\leq 0$이면 $g''(a)(f'(x(a)))^2\leq(g'(a))^2 f''(x(a))$를 얻는다.

위 부등식을 계산하여 정리하면 $x(a)>1$이므로 $x(a)-1\leq a(e-1)-1$, 즉

$x(a)\leq(e-1)a$를 얻는다. $(e-1)t-\ln t=x(t)-\ln x(t)$으로부터,

$(e-1)a-\ln a=x(a)-\ln x(a)\leq(e-1)a-\ln x(a)$이므로 $a\geq x(a)=f^{-1}(g(a))$이고

$a-\ln a=f(a)\geq g(a)=(e-1)a-\ln a$이다. 따라서 $a\geq(e-1)a$가 성립하여 모순이 생긴다.

따라서 $t>\frac{1}{e-1}$인 t에 대하여 $x''(t)>0$이 성립한다.

[3-3 별해 2] (단계 1) $a>\frac{1}{e-1}$인 a에 대하여 $x''(a)=0$이 성립한다고 가정하고 모순이 생김을 보이자. $g(t)=(e-1)t-\ln t$에 대하여 $f(x(t))=g(t)$를 두 번 미분하고 정리한 식

$x''(t)=\frac{g''(t)f'(x(t))-g'(t)f''(x(t))x'(t)}{f'(x(t))^2}$

로부터 $x''(a)=0$이면 $g''(a)(f'(x(a)))^2=(g'(a))^2 f''(x(a))$를 얻는다. 이 식을 계산하여

정리하면 $x(a)>1$이므로 $x(a)-1=a(e-1)-1$, 즉 $x(a)=(e-1)a$를 얻는다.

$(e-1)t-\ln t=x(t)-\ln x(t)$ 로부터 $(e-1)a-\ln a=x(a)-\ln x(a)=(e-1)a-\ln(e-1)a$

이므로 $a=(e-1)a$가 성립되어 모순이다.

따라서 $t>\dfrac{1}{e-1}$인 t에 대하여 $x''(t)\neq 0$이 성립한다.

(단계 2) (3-2)의 결과로부터 $x''(1)=\dfrac{2e^2-3e}{(e-1)^3}>0$이다.

(단계 3) $a>\dfrac{1}{e-1}$인 a에 대하여 $x''(a)<0$인 점이 존재하면 (단계 2)와 사잇값 정리에 의하여 $x''(b)=0$인 b가 존재하지만 (단계 1)에 모순이다. 따라서 $t>\dfrac{1}{e-1}$인 t에 대하여 $x''(t)>0$이 성립한다.

<문항카드 7>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(B형) / 문제 1	
출제 범위	**수학과 교육과정 과목명**	수학Ⅱ, 미적분
	핵심 개념 및 용어	도함수, 정적분, 극값, 증가, 감소
예상 소요 시간	25분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 아래 조건을 만족한다.

< 조건 >

(가) $f(0)=1$

(나) $0 \le x \le t$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이는 $f(t)-2e^{-t}+1$이다.

다음 물음에 각각 답하시오.

(1-1) 함수 $f(x)$를 구하시오. (70점)

(1-2) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최솟값 b를 갖는다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,1)$에서의 접선 ℓ과 직선 $y=b$, 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오. (80점)

(1-3) x축 위를 움직이는 어떤 점의 시각 t에서의 위치가 $x(t) = -t^2+4t+1$이다. $x(t)$가 최댓값을 갖게 되는 x축 위의 점을 A라 하자. 점 A를 지나는 임의의 직선 ℓ에 대하여 점 $(0,1)$에서 직선 ℓ까지의 거리를 $\mathrm{d}(\ell)$이라 할 때, $\mathrm{d}(\ell)$이 최대가 되는 직선 ℓ의 방정식을 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

적분과 미분의 관계, 곡선의 길이, 함수의 극값, 접선, 넓이에 대한 이해도를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 2	수학Ⅱ (2) 미분 ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 수학Ⅱ (3) 적분 ② 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. 미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용 [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. 미적분 (3) 적분법 ① 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. 미적분 (3) 적분법 ② 정적분의 활용 [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정 **: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」	

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅱ	박교식 외	동아출판	2020.3.1	pp. 71-96, 126-132
	미적분	이준열 외	천재교육	2020.3.1	pp. 102-111, 138-180
기타	해당 사항 없음				

5. 문항 해설

미지의 함수의 곡선의 길이로부터 함수를 구하고, 그 함수와 관련된 최솟값, 접선을 구하고, 넓이를 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	▪ $\int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt = f(x)-2e^{-x}+1$를 구하면 (+20점) ▪ $f'(x)=\frac{1}{4}e^x-e^{-x}$를 구하면 (+20점) ▪ $f(x)=\frac{1}{4}e^x+e^{-x}-\frac{1}{4}$를 구하면 (+30점)	70

(1–2)	▪ $f(x)$의 최솟값이 $f(\ln 2)=\frac{3}{4}$ 임을 보이면 (+20점) ▪ 접선 ℓ이 $y=-\frac{3}{4}x+1$임을 (또는 다른 필요한 과정을) 보이면 (+30점) ▪ 두 직선 $y=b$와 ℓ의 교점의 x좌표 $\frac{1}{3}$을 구하면 (+10점) ▪ 구하는 넓이가 $\frac{17}{24}-\ln 2$임을 보이면 (+20점)	80
(1–3)	▪ $\mathrm{A}=(5,0)$임을 보이면 (+20점) (이 단계가 틀리면, 이하 부분점수 각각 +0점) ▪$\mathrm{d}(\ell)$이 최대가 되는 직선 ℓ은 두 점 $(0,1)$과 A를 지나는 직선에 수직임을 (또는 다른 필요한 과정을) 언급하면 (+30점) ▪ 직선 ℓ의 방정식 $y=5(x-5)$을 구하면 (+30점)	80

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1]

(1-1) $\int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt = f(x)-2e^{-x}+1$이다. 양변을 x에 대해 미분하면

$\sqrt{1+(f'(x))^2}=f'(x)+2e^{-x}$이고 양변을 제곱하여 정리하면 $f'(x)=\frac{1}{4}e^x-e^{-x}$이다. 양변을

x에 대해 적분하면 $f(x)=\frac{1}{4}e^x+e^{-x}+c$ 이다. $f(0)=1$이므로, $c=-\frac{1}{4}$이 되어서, 함수

$f(x)$는 다음과 같다. $f(x)=\frac{1}{4}e^x+e^{-x}-\frac{1}{4}$

(1-2) $f'(x)=\frac{1}{4}e^x-e^{-x}$이므로, $x=\ln 2$일 때만 $f'(x)=0$이다.

$f''(x)=\frac{1}{4}e^x+e^{-x}$이므로, 모든 실수 x에 대해 $f''(x)>0$이다. 따라서 $f(x)$의 최솟값은

$f(\ln 2)=\frac{3}{4}$이고, $a=\ln 2$, $b=\frac{3}{4}$ 이다.

$f'(x)=\frac{1}{4}e^x-e^{-x}$로부터, $f'(0)=-\frac{3}{4}$ 이다. 따라서, 점 $(0,1)$에서의 접선 ℓ의 방정식은

$y-1=f'(0)(x-0)$으로부터 $y=-\frac{3}{4}x+1$이다.

직선 $y=b$와 접선 ℓ의 교점의 x좌표는 $-\frac{3}{4}x+1=\frac{3}{4}$로부터 $x=\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 영역의 넓이는 다음과 같다.

$$\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{4}e^x+e^{-x}+\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}\right)dx+\int_{\frac{1}{3}}^{\ln 2}\left(\frac{1}{4}e^x+e^{-x}-1\right)dx=\frac{17}{24}-\ln 2$$

[1-2 별해] (1-2)의 풀이에서 영역의 넓이를 구할 때, 도형의 넓이를 이용하여 $\frac{17}{24}-\ln 2$를 구할 수도 있다.

(1-3) $-t^2+4t+1=-(t-2)^2+5$ 이므로 $\mathrm{A}=(5,0)$ 이다.
$\mathrm{d}(\ell)$ 이 최대가 되는 직선 ℓ은 두 점 $(0,1)$과 A를 지나는 직선에 수직이다.
따라서 ℓ의 기울기는 5이고 구하는 직선의 방정식은 $y=5(x-5)$ 이다.

<문항카드 8>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(B형) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심 개념 및 용어	기댓값, 표준편차, 배반사건, 경우의 수, 조건부 확률, 확률의 곱셈 정리, 중복조합
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 상자 안에 '+1'이 적힌 공 10개와 '-1'이 적힌 공 10개가 들어 있다. 다음 물음에 각각 답하시오.

(2-1) 상자에서 임의로 공을 한 개 꺼내 나온 수를 기록하고 다시 넣는 시행을 반복하였다. 10번을 반복할 때 공에 적힌 수의 분산이 0.2 이상 0.4 이하였다면, '+1'이 몇 번 나왔는지 가능한 횟수를 모두 구하시오. (70점)

(2-2) 상자에서 A가 5개의 공을 임의로 꺼낸 후, B가 5개의 공을 임의로 꺼내고, C는 나머지 공을 가진다. A, B, C가 가진 공 중에서 '+1'이 적힌 공의 개수를 각각 a, b, c라 하자. $a>b>c$일 확률을 $\frac{q}{p}$로 나타낼 때 q의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (80점)

(2-3) 공 20개를 잘 섞어서 일렬로 나열하였다. 이때 같은 수끼리 연속되어 있는 부분을 하나의 묶음이라 하자. 예를 들어 '+1 +1 -1 -1 +1'에는 묶음이 3개있고, '-1 +1 -1 +1 +1'에는 묶음이 4개있다. 묶음이 5개가 되도록 공 20개를 일렬로 나열하는 방법의 수를 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

- 반복시행에서 확률을 구하여 확률변수의 기댓값과 표준편차를 구할 수 있는지 평가한다.
- 경우의 수와 중복조합의 수를 이해하는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 2	확률과 통계 (1) 경우의 수 - ① 순열과 조합 [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다. 확률과 통계 (2)확률 - ① 확률의 뜻과 활용 [12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 확률과 통계 (3)통계 - ① 확률분포 [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값과 표준편차를 구할 수 있다.

*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
**: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	박교식 외	동아출판	2019	pp. 20, 44, 51, 88
	확률과 통계	김원경 외	좋은책신사고	2019	pp. 25, 45, 50, 84
기타	해당 사항 없음				

5. 문항 해설

1) 반복시행에서 구한 이산형확률변수의 평균과 분산을 계산한다.
2) 경우의 수를 통하여 확률을 구한다.
3) 중복조합을 이용한 배열할 수 있는 경우의 수를 계산한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	확률변수를 정의하고 ■ 합과 제곱합을 알면 (각각 +10점씩) ■ 분산의 식을 세우면 (+20점) ■ 부등식을 풀어 X의 값을 정확하게 구하면 (+30점)	70
(2-2)	■ (a, b, c)의 가능한 경우가 $(5, 4, 1)$, $(5, 3, 2)$임을 보이면 (+20점) ■ 각 경우의 확률식을 옳게 구하면 (각각 +20점 씩) ■ 답을 정확히 구하면 (+20점)	80

(2-3)	■ 묶음의 수가 5인 경우가 2가지 임을 알면 (+20점) ■ 묶음의 수가 $k=2,3$인 경우의 방법의 수를 각각 구하면 (각각 +20점) ($_9C_2$를 계산하는 부분과 $_9C_1$을 계산하는 부분이 있는지를 각각 확인) ■ 답: $2\times36\times9$ 또는 648가지를 구하면 (+20점)	80

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 2]

(2-1) '+1' 이 나온 횟수를 X라 하면 평균은 $m=\dfrac{X-(10-X)}{10}=\dfrac{2X-10}{10}$이고 적힌 수의 제곱의 합은 10이므로 분산은 $V(X)=\dfrac{10}{10}-\left(\dfrac{2X-10}{10}\right)^2=1-\left(\dfrac{X}{5}-1\right)^2$이다. 조건으로부터

$$0.2\le V(X)\le0.4 \Leftrightarrow 0.6\le\left(\frac{X}{5}-1\right)^2\le0.8 \Leftrightarrow 15\le(X-5)^2\le20$$

이므로 $(X-5)^2=16$이고 $X=1$ 또는 9이다.

[2-1 별해] 10개의 수를 $x_1,x_2\cdots,x_{10}$이라 하면 평균은 $m=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i$, 제곱합은

$\sum_{i=1}^{10}x_i^2=10$이고 분산은 $\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i-m)^2=\dfrac{1}{10}\left(\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10m^2\right)=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i^2-m^2=1-m^2$이다.

10개의 수 중에서 '+1'이 나온 횟수를 X라 하면 X는 $0, 1, \cdots, 10$을 가질 수 있고

$\sum_{i=1}^{10}x_i=X-(10-X)=2X-10,\ m=\dfrac{X}{5}-1$이다.

m은 $-1, -0.8, -0.6, \cdots, 0.8, 1$의 값을 가질 수 있으므로

$0.2\le1-m^2\le0.4$를 만족하는 m은 ±0.8이고 X는 1 또는 9이다.

(2-2) $a>b>c$를 만족하는 (a,b,c)는 $(5,4,1)$ 또는 $(5,3,2)$ 뿐이다. 그러므로 A, B, C가 '+1'이 적힌 공을 각각 a,b,c개씩 가질 확률은 아래와 같다.

a	b	c	확률
5	4	1	$\dfrac{_{10}C_5}{_{20}C_5}\times\dfrac{_5C_4\times{}_{10}C_1}{_{15}C_5}\times\dfrac{_1C_1\times{}_9C_9}{_{10}C_{10}}$
5	3	2	$\dfrac{_{10}C_5}{_{20}C_5}\times\dfrac{_5C_3\times{}_{10}C_2}{_{15}C_5}\times\dfrac{_2C_2\times{}_8C_8}{_{10}C_{10}}$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{5^3}{11\cdot13\cdot17\cdot19}$이므로 구하는 답은 125이다.

(2-3) (단계 1) 묶음의 수가 5개가 될 방법은 '+1'의 묶음으로 시작하거나 '-1'의 묶음으로 시작하는 두 가지 경우가 있으며, 두 경우에 따른 방법의 수는 동일하다.

(단계 2) '+1'의 묶음으로 시작하여 5개의 묶음이 된다면 '+1'로 구성된 묶음의 수 3개, '-1'로 구성된 묶음의 수가 2개이어야 한다.

(단계 3) (단계 2)에서 같은 수가 적힌 10개의 공을 $k(k=3$ 또는 $k=2)$개의 묶음으로 구성하는 방법의 수는 10개의 동일한 공을 서로 다른 k개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣는 방법의 수와 동일하고, $X_1+X_2+\cdots+X_k=10$을 만족하는 양의 정수해의 개수와 같다. 그러므로 방법의 수는 ${}_{k}\mathrm{H}_{10-\mathrm{k}}={}_{9}\mathrm{C}_{k-1}$이다.

(단계 4) '+1'이 적힌 10개의 공을 3개의 묶음으로, '-1'이 적힌 10개의 공은 2개의 묶음으로 나누는 방법의 수는 ${}_{3}\mathrm{H}_{7}\times{}_{2}\mathrm{H}_{8}={}_{9}\mathrm{C}_{2}\times{}_{9}\mathrm{C}_{1}=36\times9=324$이다.

(단계 5) 전체 묶음의 수가 5개가 되는 방법의 수는 $2\times36\times9=648$이다.

<문항카드 9>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(B형) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분
	핵심 개념 및 용어	미분가능, 평균값 정리, 이계도함수, 극솟값
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 집합 A_f를 다음과 같이 정의하자.

$$A_f = \{m \in \mathbb{R} \mid \text{모든 실수 } x\text{에 대하여 } f(x) \geq f(0) + mx\text{가 성립한다.}\}$$

예를 들어, $f(x)=|x|$에 대하여 집합 A_f는 $A_f = \{m \mid -1 \leq m \leq 1\}$이다.
다음 물음에 각각 답하시오.

(3-1) $f(x)=x^3$에 대하여 A_f는 공집합이 됨을 보이시오. (80점)

(3-2) 함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f''(x) \geq 0$을 만족하면, $f'(0) \in A_f$가 성립함을 보이시오. (단, 그림을 이용한 직관적인 설명은 허용하지 않습니다.) (80점)

(3-3) 함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f''(x) \geq 0$을 만족하면, 실제로 $A_f = \{f'(0)\}$가 됨을 보이시오. (단, 그림을 이용한 직관적인 설명은 허용하지 않습니다.) (80점)

3. 출제 의도

- 미분계수의 정의와 기하학적 의미와 이해하고, 평균값 정리를 활용할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 2	수학Ⅱ (2)미분 ① 미분계수 [12수학Ⅱ02-02] 미분계수의 기하적 의미를 이해한다. 수학Ⅱ (2)미분 ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. 미적분 (2)미분법 ② 여러 가지 미분법 [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.
*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정 **: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」	

나) 자료 출처

참고자료		도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서		수학Ⅱ	황선욱 외	미래엔	2018.3.1	pp. 73-80
		미적분	김원경 외	비상교육	2019.3.1	pp. 96-101
기타		해당 사항 없음				

5. 문항 해설

이계도함수의 부호가 항상 0 이상인 경우에는 미분계수의 정의, 평균값 정리와 함수의 증가, 감소, 최솟값 등을 활용하여 주어진 부등식을 만족하는 직선이 접선 밖에 없음을 보인다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	■ $m \le 0$일 때 해집합 맞게 구하면 (+30점) ■ $m > 0$일 때 해집합 맞게 구하면 (+30점) ■ $A_f = \varnothing$임을 논리적으로 설명하면 (+20점)	80
	[별해 1] ■ $m > 0$인 경우 그래프 개형이 맞으면 (+20점) ■ $m = 0$인 경우 그래프 개형이 맞으면 (+20점) ■ $m < 0$인 경우 그래프 개형이 맞으면 (+20점) ■ $A_f = \varnothing$임을 논리적으로 설명하면 (+20점)	

	[별해 2] ■ 귀류법을 쓰기위해 모든 실수 x에 대해 $x^3 \geq mx$를 만족시키는 실수 m이 존재한다고 가정하면 (+10점) ■ $x=1$일 때 $m \leq 1$임을 보이면 (+20점) ■ $x=-1$일 때 $m \geq 1$임을 보이면 (+20점) ■ $m=1$일 때 모순이 됨을 보이면 (+30점)	
(3-2)	■ $g(0)=0$을 언급하면 (+10점) ■ $g''(x) \geq 0$을 이용하여 $g'(x)$가 증가함수임을 보이면 (+30점) ■ $g(x)$의 최솟값이 0임을 보이면 (+30점) ■ 결론 $f'(0) \in A_f$을 논리적으로 도출하면 (+10점) [별해 1] ■ $x=0$일 때 등식 성립함을 보이면 (+10점) ■ $x \neq 0$일 때 평균값 정리를 두 번 적용한 (식 *)을 맞게 구하면 (+30점) ■ $x \neq 0$일 때 조건 $f''(t_2) \geq 0$과 (식 **)로부터 결론을 도출하면 (+40점) [별해 2] ■ $x=0$일 때 등식 성립함을 보이면 (+10점) ■ $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가함수가 됨을 언급하면 (+10점) ■ $x \neq 0$일 때 평균값 정리를 적용하여 (식 3)을 보이면 (+20점) ■ $x>0$일 때 $f(x)-f(0)-f'(0)x \geq 0$을 보이면 (+20점) ■ $x<0$일 때 $f(x)-f(0)-f'(0)x \geq 0$을 보이면 (+20점)	80
(3-3)	■ $\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} \geq m$임을 보이면 (+30점) ■ $\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} \leq m$임을 보이면 (+30점) ■ $f'(0)=m$임을 보이면 (+20점)	80

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 3]

(3-1) 모든 실수 x에 대하여 $x^3 \geq mx$를 만족시키는 실수 m이 존재하지 않음을 보이면 된다. m의 조건에 따라 부등식 $x^3-mx=x(x^2-m) \geq 0$을 풀면,

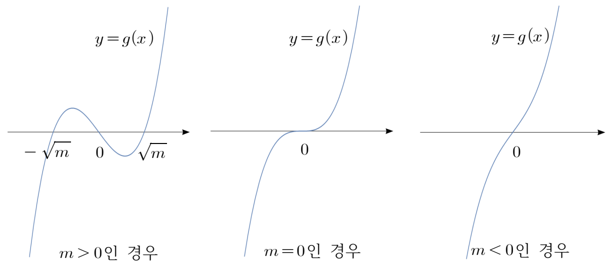
(i) $m \leq 0$일 때 해집합은 $\{x \mid x \geq 0\}$

(ii) $m>0$일 때 해집합은 $\{x \mid -\sqrt{m} \leq x \leq 0$ 또는 $x \geq \sqrt{m}\}$

이므로 모든 실수 x에 대해 $x^3 \geq mx$를 만족시키는 실수 m은 존재하지 않는다.

따라서 $A_f=\varnothing$이다.

[3-1 별해 1] $m>0$, $m=0$, $m<0$인 경우를 나누어 $g(x)=x^3-mx$의 그래프의 개형을 그리면,



이므로, 모든 실수 x에 대하여 $x^3 \geq mx$를 만족시키는 실수 m은 존재하지 않는다.

[3-1 별해 2] 모든 실수 x에 대하여 $x^3 \geq mx$를 만족시키는 실수 m이 존재하면 모순임을 보이자. 모든 실수 x에 대하여 부등식이 성립한다면 $x=1$일 때 $m \leq 1$이 성립하고, $x=-1$일 때 $m \geq 1$이 성립하므로 $m=1$이어야 한다. 이때 부등식 $x^3 \geq x$의 해집합은 $\{x|-1 \leq x \leq 0$ 또는 $x \geq 1\}$이므로 모든 실수 x에 대해 부등식이 성립한다는 가정에 모순이다.

(3-2) $g(x)=f(x)-f(0)-f'(0)x$라 할 때, $g(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같음을 보이면 된다. $g'(x)=f'(x)-f'(0)$의 도함수에 대해 $g''(x)=f''(x) \geq 0$가 성립하므로 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가함수이다.
즉 $g'(x)$는 $g'(0)=0$인 증가함수이므로 $x<0$에 대하여 $g'(x) \leq 0$이 성립하고, $x>0$에 대하여 $g'(x) \geq 0$이 성립한다. 따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 최솟값 $g(0)=0$을 갖는다.
즉, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-f(0)-f'(0)x \geq 0$이 성립하므로 $f'(0) \in A_f$이다.

[3-2 별해 1] $x=0$일 때 $f(x)-f(0)-f'(0)x=0$이 성립한다.
$x \neq 0$일 때 평균값 정리를 반복하여 적용하면,

$$f(x)-f(0)-f'(0)x=f'(t_1)x-f'(0)x=(f'(t_1)-f'(0))x=f''(t_2)t_1x$$

를 만족시키는 실수 t_1, t_2가 존재한다.
(단, (i) $x>0$일 때 $0<t_2<t_1<x$, (ii) $x<0$일 때 $x<t_1<t_2<0$)
이때, 이계도함수에 대한 조건으로부터 $f''(t_2) \geq 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-f(0)-f'(0)x \geq 0$이 성립하고, $f'(0) \in A_f$이다.

[3-2 별해 2] $x=0$일 때 $f(x)-f(0)-f'(0)x=0$이 성립한다. $x \neq 0$일 때 평균값 정리를 적용하면
$f(x)-f(0)-f'(0)x=f'(t_1)x-f'(0)x=(f'(t_1)-f'(0))x$ (식 1)
를 만족시키는 실수 t_1이 존재한다. (단, (i) $x>0$일 때 $0<t_1<x$, (ii) $x<0$일 때 $x<t_1<0$)
한편, 이계도함수에 대한 조건으로부터 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가함수이다.

따라서

$x>0$일 때 (식 1)에서 $f'(t_1)-f'(0)\geq 0$, $x>0$이 되어 $f(x)-f(0)-f'(0)x\geq 0$이 성립하고,

$x<0$일 때 (식 1)에서 $f'(t_1)-f'(0)\leq 0$, $x<0$이 되어 $f(x)-f(0)-f'(0)x\geq 0$이 성립한다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-f(0)-f'(0)x\geq 0$이 성립하므로 $f'(0)\in A_f$이다.

(3-3) (3-2)에 의해 $m\in A_f$이면 $m=f'(0)$임을 보이면 된다.

$m\in A_f$라 하면, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(0)+mx$이므로

(i) $x>0$일 때, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\geq m$로부터 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\geq m$이 성립하고

(ii) $x<0$일 때, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\leq m$로부터 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\leq m$이 성립한다.

따라서 $m\in A_f$인 임의의 m에 대해 $m=f'(0)$이 성립하므로 $A_f=\{f'(0)\}$이다.

<문항카드 10>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(C형) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분
	핵심 개념 및 용어	미분 가능, 여러 가지 미분법
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 실수 전체의 집합에서 정의된 세 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-\dfrac{1}{2}\ , x\ge\dfrac{3}{2} \\ 2x-2\ , 1<x\le\dfrac{3}{2} \\ -x+1\ , x\le 1\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}(x-1)^2\ , x\ge 1 \\ -x+1\ , x<1\end{cases},\quad h(x)=\begin{cases}x+e^x-e\ , x\ge 1 \\ ex+1-e\ , x<1\end{cases}$$

에 대하여, 다음 물음에 각각 답하시오.

(1-1) 함수 $y=h(x)$가 역함수를 가짐을 보이시오. (70점)

(1-2) 집합 $A=\{a\in\mathbb{R}\,|\,(g\circ f)(x)$는 $x=a$에서 미분 가능하지 않다.$\}$를 구하시오. (80점)

(1-3) 함수 $(h^{-1}\circ f)(x)$가 $x=\dfrac{3}{2}$에서 미분 가능하지 않음을 보이시오. (80점)

3. 출제 의도

- 합성함수와 역함수의 미분을 계산할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 2	수학Ⅱ (2) 미분 ㉠ 미분계수 [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. 미적분 (2) 미분법 ㉡ 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.

*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정

**: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	홍성복 외	지학사	2020	pp. 88-103
	수학Ⅱ	황선옥 외	미래엔	2020	pp. 58
기타	해당 사항 없음				

5. 문항 해설

주어진 함수의 역함수와 합성함수을 구하고 미분이 불가능한 점을 찾는다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	■ $x>1$일 때 $h'(x)=1+e^x$를 맞게 구하면 (+20점) ■ $x<1$일 때 $h'(x)=e$를 맞게 구하면 (+20점) ■ $h(x)$가 증가함수이므로 역함수를 갖는다는 것을 설명하면 (+30점)	70
(1-2)	■ $g(f(x))=\begin{cases}(x-\frac{3}{2})^2, x \geq \frac{3}{2}(+10점) \\ -2x+3\ , 1<x \leq \frac{3}{2}(+10점) \\ x \qquad\quad , 0<x \leq 1(+10점) \\ x^2 \qquad\quad , x \leq 0(+20점)\end{cases}$ ■ (i) $x=\frac{3}{2}$에서 오른쪽 접선의 기울기가 0이고 왼쪽 접선의 기울기는 -2 (+10점) ■ (ii) $x=1$에서 오른쪽 접선의 기울기는 -2이고 왼쪽 접선의 기울기는 1 (+10점) ■ (iii) $x=0$에서 오른쪽 접선의 기울기는 1이고 왼쪽 접선의 기울기는 0 (+10점)	80
	[별해] ■ $x=0, 1, \frac{3}{2}$을 제외한 점에서는 $f(x)$와 $g(x)$가 미분가능함을 이용하여 합성함수의 미분가능성을 설명하면 (+30점) ■ (i) $x=0$에서 오른쪽 접선의 기울기는 1이고 왼쪽 접선의 기울기는 0 (+30점) ■ (ii) $x=1$에서 오른쪽 접선의 기울기는 -2이고 왼쪽 접선의 기울기는 1 (+10점) ■ (iii) $x=\frac{3}{2}$에서 오른쪽 접선의 기울기 0이고 왼쪽 접선의 기울기는 -2 (+10점)	

(1-3)	■ 미분계수를 구하는 오른쪽 극한식에서 $\frac{1}{1+e}$ 임을 보이면 (+50점) ■ 미분계수를 구하는 왼쪽 극한식에서에서 $\frac{2}{e}$ 임을 보이면 (+30점)	80

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1]

(1-1) $h'(x)=\begin{cases}1+e^x, & x>1\\ e, & x<1\end{cases}$ 이고 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가함수이다. 따라서 역함수를 가진다.

(1-2)

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases}(x-\frac{3}{2})^2, & x\geq\frac{3}{2}\\ -2x+3, & 1<x\leq\frac{3}{2}\\ x, & 0<x\leq 1\\ x^2, & x\leq 0\end{cases}$$

에서, $x=0,1,\frac{3}{2}$을 제외한 구간에서는 각각 다항함수이므로 미분가능하다.

$x=a$에서의 미분계수는 접선의 기울기와 같으므로,

(i) $x=\frac{3}{2}$에서 $(g\circ f)(x)$ $(x>\frac{3}{2})$의 접선의 기울기는 0이고 $(g\circ f)(x)$ $(x<\frac{3}{2})$의 접선의 기울기는 -2이므로 $x=\frac{3}{2}$에서 미분 가능하지 않다.

(ii) $x=1$에서 $(g\circ f)(x)$ $(x>1)$의 접선의 기울기는 -2이고 $(g\circ f)(x)$ $(x<1)$의 접선의 기울기는 1이므로 $x=\frac{3}{2}$에서 미분 가능하지 않다.

(iii) $x=0$에서 $(g\circ f)(x)$ $(x>0)$의 접선의 기울기는 1이고 $(g\circ f)(x)$ $(x<0)$의 접선의 기울기는 0이므로 $x=\frac{3}{2}$에서 미분 가능하지 않다.

따라서 $A=\left\{0,1,\frac{3}{2}\right\}$이다.

[1-2 별해] (합성함수를 구하지 않고)

$f(x)$가 미분 불가능한 점은 $x=1,\frac{3}{2}$이고, $g(x)$가 미분 불가능한 점은 $x=1$ 뿐이다.

한편 $f(x)=1$이 되는 점은 $x=0,\frac{3}{2}$이므로 $(g\circ f)(x)$는 $x=0,1,\frac{3}{2}$을 제외한 점에서는 미분가능하다.

$x=0$일 때,

$$\lim_{t\to 0+}\frac{g(f(t))-g(f(0))}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{g(-t+1)-g(1)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{t}{t}=1$$

$$\lim_{t\to0-}\frac{g(f(t))-g(f(0))}{t}=\lim_{t\to0-}\frac{g(-t+1)-g(1)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{t^2}{t}=0$$

이므로 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 미분 불가능하다.

$x=1$일 때,

$$\lim_{t\to0+}\frac{g(f(1+t))-g(f(1))}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{g(2t)-g(0)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{-2t}{t}=-2$$

$$\lim_{t\to0-}\frac{g(f(1+t))-g(f(0))}{t}=\lim_{t\to0-}\frac{g(-t)-g(1)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{t}{t}=1$$

이므로 $(g\circ f)(x)$는 $x=1$에서 미분 불가능하다.

$x=\frac{3}{2}$일 때,

$$\lim_{t\to0+}\frac{g(f(\frac{3}{2}+t))-g(f(\frac{3}{2}))}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{g(t+1)-g(1)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{t^2}{t}=0$$

$$\lim_{t\to0-}\frac{g(f(\frac{3}{2}+t))-g(f(\frac{3}{2}))}{t}=\lim_{t\to0-}\frac{g(2t+1)-g(1)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{-2t}{t}=-2$$

이므로 $(g\circ f)(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 미분 불가능하다.

(1-3)

$$\lim_{t\to0+}\frac{h^{-1}(f(3/2+t))-h^{-1}(f(3/2))}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{h^{-1}(1+t)-h^{-1}(1)}{t}=\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{h(x)-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{x+e^x-e-1}=\lim_{x\to1+}\frac{1}{1+\frac{e^x-e}{x-1}}$$
$$=\frac{1}{1+e}$$

(두 번째 등식에서 $h^{-1}(t+1)=x$ 이용)

$$\lim_{t\to0-}\frac{h^{-1}(f(3/2+t))-h^{-1}(f(3/2))}{t}=\lim_{t\to0-}\frac{h^{-1}(2t+1)-h^{-1}(1)}{t}=\lim_{t\to0^-}\frac{\frac{1}{e}(2t+1)+1-\frac{1}{e}-1}{t}=\frac{2}{e}$$

따라서 $\lim_{t\to0-}\frac{h^{-1}(f(3/2+t))-h^{-1}(f(3/2))}{t}\neq\lim_{t\to0+}\frac{h^{-1}(f(3/2+t))-h^{-1}(f(3/2))}{t}$이므로 $x=\frac{3}{2}$에서 미분불가능이다. (이 경우에도 $h^{-1}(2t+1)=x$로 치환하여 계산하는 것도 가능함.)

<문항카드 11>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(C형) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심 개념 및 용어	확률의 덧셈정리, 조건부 확률, 이항분포, 표준정규분포
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 어떤 질병에 걸릴 확률은 0.01이며 전체 주민 중 이 질병에 걸리는 환자 수는 이항분포를 따른다고 하자. 또한 진단키트를 이용하여 실제로 이 질병에 걸린 사람을 검사하였을 때 양성으로 판정할 확률은 0.99이고, 질병에 걸리지 않은 사람을 검사하였을 때 양성으로 판정할 확률은 0.03이라고 한다.

(2-1) 어떤 사람이 진단키트 검사로 양성판정을 받을 확률과 양성판정을 받았을 때 이 사람이 질병에 걸려 있을 확률을 각각 구하시오. (70점)

(2-2) 이 진단키트 검사결과 양성판정을 받은 사람 중에서 질병에 걸려 있는 환자 수는 이항분포를 따른다고 하자. 양성판정을 받은 768명 중에서 질병에 걸려 있는 환자 수가 210명 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (80점)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

(2-3) 의료보험에서 이 질병에 걸린 환자 한 명을 치료하기 위해 부담하는 비용은 100만원이지만, 진단키트 검사로 조기 진단하는 경우 양성판정을 받으면 실제로 질병에 걸리는 것과 상관없이 한 명에 대해 부담하는 치료비용이 10만원으로 줄어든다.
다만 집단검진을 통해 전체 n명을 검사할 때 소요되는 검사비용 $C(n)$은 다음과 같다.

$$C(n) = \begin{cases} 6000n, & n > 40000 \\ 10000n - \dfrac{n^2}{10}, & n \le 40000 \end{cases}$$

어떤 지역 주민 전체 n명을 집단검진할 때, 의료보험에서 부담하는 총 비용(전체 주민에 대한 검사비용과 양성판정을 받은 모든 사람에 대한 치료비용을 더한 비용)의 기댓값이 집단검진하지 않을 때 질병에 걸릴 환자 전체에 대한 치료비용의 기댓값보다 작아지는 n의 최솟값을 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

- 두 배반사건에 대한 확률의 덧셈정리를 이해하고 조건부확률의 개념을 이해하는지 평가한다.
- 이항분포와 정규분포와의 관계식을 이해하여 정규분포에서 확률을 구하는 과정을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 2	확률과 통계 (2) 확률 ① 확률의 뜻과 활용 [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 확률과 통계 (2) 확률 ② 조건부확률 [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 확률과 통계 (3) 통계 ① 확률분포 [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
**: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	김원경 외	비상교육	2020	pp. 44, 55, 85, 94, 97
	확률과 통계	배종숙 외	금성출판사	2020	pp. 59, 71, 109, 117, 121
기타	해당 사항 없음				

5. 문항 해설

– 두 사건이 배반일 때 덧셈정리를 활용하여 관심의 대상인 사건의 확률을 구하고 확률의 곱셈정리를 이용하여 조건부확률을 구한다.
– 이항분포의 평균과 분산을 구하여 이항분포와 정규분포와의 관계식을 이용하여 확률을 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	■ 풀이과정을 통해 $\mathrm{P}(A)$의 값을 구하면 (+30점) ■ 풀이과정을 통해 $\mathrm{P}(D\|A)$ 의 값 $\frac{1}{4}$을 구하거나 또는	70

	$\dfrac{\frac{1}{100}\times\frac{99}{100}}{\frac{1}{100}\times\frac{99}{100}+\frac{99}{100}\times\frac{3}{100}}$ 에 대응되는 수식이 있으면 (+40점)	
(2-2)	▪ 문제 2-1에서 구한 확률 $\frac{1}{4}$로부터 X의 기댓값 192를 구하면 (+20점) ▪ X의 분산($\mathrm{V}(X)$) 144 또는 표준편차 12를 구하면 (+20점) ▪ $\mathrm{P}(X \le 210) = \mathrm{P}(Z \le 1.5)$을 보이면 (+20점) ▪ $\mathrm{P}(Z \le 1.5) = 0.93$을 구하면(+20점)	80
(2-3)	▪ 예상되는 판정자수 $0.0396n$을 계산하면 (+10점) ▪ 진단키트 검사를 실시하지 않았을 때 드는 총 비용 $0.01\times n\times 10^6$을 구하면 (+20점) ▪ 진단키트 검사를 실시할 때 드는 총 비용 $C(n)+0.0396n\times 10^5$을 구하면 (+20점) ▪ $10^4 n > 10^4 n - \frac{n^2}{10} + 3960n$을 풀어서 $n = 39601$을 구하면 (+20점) $10^4 n \ge 10^4 n - \frac{n^2}{10} + 3960n$ $\quad\quad n = 39600$ ▪ n의 최솟값 39601을 논리적으로 도출하면 (+10점)	80

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 2]

(2-1) 질병에 걸리는 사건을 D, 양성으로 판정되는 사건을 A라 할 때 다음이 성립한다.

$\mathrm{P}(D)=0.01,\quad \mathrm{P}(D^C)=0.99,\quad \mathrm{P}(A|D)=0.99,\quad \mathrm{P}(A|D^C)=0.03$

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap D)+\mathrm{P}(A\cap D^C)=\mathrm{P}(D)\mathrm{P}(A|D)+\mathrm{P}(D^C)\mathrm{P}(A|D^C)=\dfrac{4\times 99}{10^4}=0.0396$이고

$\mathrm{P}(D|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap D)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\mathrm{P}(D)\mathrm{P}(A|D)}{\mathrm{P}(A)}$이므로

$$\mathrm{P}(D|A)=\frac{\mathrm{P}(D)\mathrm{P}(A|D)}{\mathrm{P}(D)\mathrm{P}(A|D)+\mathrm{P}(D^C)\mathrm{P}(A|D^C)}=\frac{\frac{1}{100}\times\frac{99}{100}}{\frac{1}{100}\times\frac{99}{100}+\frac{99}{100}\times\frac{3}{100}}=\frac{1}{4}\text{이다.}$$

(2-2) 768명의 양성판정을 받은 사람 중에 실제로 질병에 걸린 환자 수를 확률변수 X라 하면, X는 이항분포 $B(768,\frac{1}{4})$를 따르므로 $\mathrm{E}(X)=192$이고 $\mathrm{V}(X)=144$이다. 이항분포를 정규분포로 근사시키면 정규분포 $\mathrm{N}(192,144)$를 이용하여 다음과 같이 $\mathrm{P}(X\le 210)$를 구할 수 있다.

$$\mathrm{P}(X\le 210)=\mathrm{P}\left(\frac{X-192}{\sqrt{144}}\le\frac{210-192}{12}\right)=\mathrm{P}(Z\le 1.5)=0.5+0.43=0.93.$$

(2-3) 이 지역 주민 전체 수를 n이라 할 때, 예상되는 질병 환자 수는 $n\times 0.01$이고,
예상되는 양성판정자 수는 $n\times \mathrm{P}(A)=0.0396n$이다.
진단키트 검사를 실시여부에 따른 예상 총비용을 구하면

(i) 진단키트 검사를 실시하지 않았을 때 드는 총 비용 : $0.01\times n\times 10^6$ (원)

(ii) 진단키트 검사를 실시할 때 드는 총 비용: $C(n)+0.0396n\times 10^5$ (원)

이다. (i)의 비용이 (ii)보다 커지는 n의 최솟값을 구하자.

$n\le 40000$인 경우, $10^4 n > 10^4 n-\dfrac{n^2}{10}+3960n$을 풀면 $n>39600$이므로 n의 최솟값은 39601이다.

(구한 최솟값이 40000보다 작으므로 나머지 경우는 고려할 필요가 없다.)

<문항카드 12>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(C형) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분
	핵심 개념 및 용어	증가, 치환적분법, 급수의 합, 수열의 극한
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$, $g(x)=\sin^2(\pi x)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$을

$$a_n=\int_0^1 f(x)g(nx)\,dx,\ (n=1,2,\cdots)$$

로 정의할 때, 다음 물음에 각각 답하시오.

(3-1) $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$의 값을 구하시오. (80점)

(3-2) 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (80점)

$$a_n \le \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(3-3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)$이 성립함을 이용하여 극한 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

- 적분의 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해하고 치환적분을 활용할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 2	수학Ⅱ (2)미분 ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적분 (1)수열의 극한 ① 수열의 극한 [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. ② 급수 [12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. 미적분 (2)미분법 ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. ② 여러 가지 미분법 [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. 미적분 (3)적분법 ① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. ② 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정 **: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」	

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	김원경 외	비상교육	2019.3.1	pp. 11, 75, 126, 143
	수학Ⅱ	황선욱 외	미래엔	2018.3.1	pp. 82-84
기타	해당 사항 없음				

5. 문항 해설

- 치환적분과 적분의 성질을 이용하여 주어진 수열을 정적분으로 표현 가능한 급수의 합과 비교하고, 수열의 성질을 이용하여 계산한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	■ $\sin^2(\pi x) = \dfrac{1-\cos(2\pi x)}{2}$ 를 구하면 (+40점) ■ 적분값을 맞게 구하면 (+40점)	80

	[별해] ■ $\int_0^1 \sin^2 \pi x\, dx = \int_0^1 \cos^2 \pi x\, dx$를 이용하면 (+40점) ■ 적분값을 맞게 구하면 (+40점)	
(3-2)	■ 치환적분 $\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \frac{1}{n}\int_0^n f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)\,dt$을 적용하면 (+20점) ■ $\int_0^n dt = \sum_{k=1}^{k}\int_{k-1}^{k} dt$과 같이 적분 성질을 쓰면 (+20점) ■ f가 증가함수임을 이용하여 $\int_{k-1}^{k} f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)\,dt \le f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{k-1}^{k} g(t)\,dt$를 보이면 (+20점) ■ g가 주기함수임을 이용하여 결론에 도달하면 (+20점)	80
(3-3)	■ (식 1)과 같은 부등식을 쓰면, (3-1)의 적분 계산값 $\frac{1}{2}$이 틀려도 (+30점) ■ $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx$을 쓰면, 앞의 상수가 틀려도 (+30점) ■ 최종 답이 맞으면 (+20점)	80

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 3]

(3-1) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$이므로 $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$가 성립한다. 따라서 $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$임을 이용하여 적분 식을 변형하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\int_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos(2\pi x))\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

[3-1 별해] $\sin^2\pi x + \cos^2\pi x = 1$이고, $\sin^2\pi x$와 $\cos^2\pi x$의 그래프의 대칭성과 주기성을 이용하면 $\int_0^1 \sin^2\pi x\,dx = \int_0^1 \cos^2\pi x\,dx$이므로 다음과 같이 적분값을 구할 수 있다.

$$\int_0^1 \sin^2\pi x\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \sin^2\pi x\,dx + \int_0^1 \cos^2\pi x\,dx\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\sin^2\pi x + \cos^2\pi x)\,dx = \frac{1}{2}$$

(3-2) $f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \ge 0$이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가함수이다.

치환적분과 적분의 성질 $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$를 이용하면 아래 식(*)가 성립한다.

$$a_n = \int_0^1 f(x)g(nx)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^n f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)\,dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)\,dt \quad \cdots(*)$$

일반적으로 함수 $h(x)$가 $a \le x \le b$에서 $h(x) \ge 0$이면 정적분과 넓이의 관계에 의해

$\int_a^b h(x)\,dx \ge 0$이 성립한다. 따라서 식 (*)의 $k-1 \le x \le k$에서 $f(x)$가 증가함수이고

$g(x) \ge 0$임을 이용하면, $f\left(\frac{t}{n}\right)g(t) \le f\left(\frac{k}{n}\right)g(t) \Leftrightarrow f\left(\frac{k}{n}\right)g(t) - f\left(\frac{t}{n}\right)g(t) \ge 0$로부터

$\int_{k-1}^{k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)g(t) - f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)\right)dx \ge 0$이 성립한다. 이때, $\int_{k-1}^{k} f\left(\frac{k}{n}\right)g(t)dt = f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{k-1}^{k} g(t)dt$이고,

$g(x)$는 주기가 1인 함수임을 이용하면 위의 식 (*)에서

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)\,dt \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{k-1}^{k} g(t)\,dt = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\int_0^1 g(t)\,dt$$

가 성립한다. 따라서 (3-1)에서 구한 적분값 $\int_0^1 g(t)\,dt = \frac{1}{2}$를 대입하면

$a_n \le \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$이 성립한다.

(3-3) (3-2)와 동일한 방법으로 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) \le a_n \le \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

이 성립하고, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx$이다.

한편,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 \frac{(1+e^x)'}{(1+e^x)}\,dx = \int_0^1 \left(\ln(1+e^x)\right)'\,dx = \ln(1+e) - \ln 2$$ 이므로

구하는 값은 $\ln\sqrt{\frac{1+e}{2}}$ 이다. ($\frac{1}{2}(\ln(1+e) - \ln 2)$, $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ 모두 정답)

<문항카드 13>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(D형) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분
	핵심 개념 및 용어	도함수, 극값, 증가, 감소, 정적분
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 상수 a에 대하여 다음 식을 만족한다.

$$\int_0^x f(t)\,dt = e^x - ae^{3x}\int_0^{\ln 3} e^{-t}f(t)\,dt$$

다음 물음에 각각 답하시오.

(1-1) 함수 $f(x)$와 실수 a를 각각 구하시오. (70점)

(1-2) 좌표평면의 $x<0$인 부분에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=e^x$ 위에 각각 하나씩 점을 잡고, y축 위에 두 점을 잡아서 직사각형을 만들 때, 직사각형 넓이의 최댓값을 구하시오. (80점)

(1-3) 곡선 $y=f(x)$와 y축의 교점을 P라 하자. 직선 ℓ_1은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선이고, ℓ_2는 x축과 평행하면서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선이다. 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 ℓ_1, ℓ_2로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

- 적분과 미분의 관계, 함수의 최댓값, 접선의 방정식, 넓이에 대한 이해도를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 2	수학Ⅱ (2) 미분 ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 수학Ⅱ (2) (3) 적분 ② 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. 미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용 [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. 미적분 (3) 적분법 ① 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. 미적분 (3) 적분법 ② 정적분의 활용 [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정 **: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」	

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅱ	박교식 외	동아출판	2020.3.1	pp. 71-96 pp. 126-132
	미적분	이준열 외	천재교육	2020.3.1	pp. 102-111, pp. 138-171
기타	해당 사항 없음				

5. 문항 해설

- 함수에 대한 적분 관계식으로부터 함수를 구하고, 그 함수와 관련된 최댓값, 접선의 방정식, 넓이를 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	■ $a\int_0^{\ln 3} e^{-t}f(t)\,dt = 1$까지 구하면 (+20점) ■ $f(x) = e^x - 3e^{3x}$를 구하면 (+30점) ■ $a = \dfrac{1}{\ln 3 - 12}$를 구하면 (+20점)	70

(1–2)	▪ $A(x) = -3xe^{3x}$ 를 보이면 (+30점) ▪ $A(x)$가 $x=-\frac{1}{3}$에서 최대임을 보이면 (+20점) ▪ 최댓값 $A\left(-\frac{1}{3}\right) = e^{-1}$ 을 구하면 (+30점)	80
(1–3)	▪ 접선 ℓ_1의 방정식 $y = -8x-2$을 구하면 (+30점) ▪ 직선 ℓ_2의 방정식 $y=\frac{2}{9}$ 을 구하면 (+20점) ▪ 두 직선 ℓ_1과 ℓ_2의 교점의 x좌표 $-\frac{5}{18}$를 구하면 (+10점) ▪ 영역의 넓이 $\frac{2}{9}\ln 3-\frac{1}{81}$을 구하면 (+20점)	80

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1]

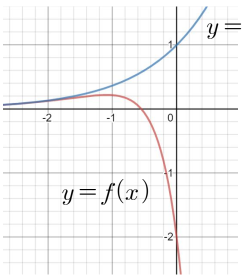
(1-1) $x=0$을 대입하면 $0=1-a\int_0^{\ln 3} e^{-t}f(t)\,dt$ 이므로 $a\int_0^{\ln 3} e^{-t}f(t)\,dt=1$ 이다.

따라서 $\int_0^x f(t)\,dt=e^x-e^{3x}$이다.

양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=e^x-3e^{3x}$이다.

$1=a\int_0^{\ln 3} e^{-t}f(t)\,dt=a\int_0^{\ln 3}(1-3e^{2t})\,dt$ 이므로 $a=\frac{1}{\ln 3-12}$이다.

(1-2) 곡선 $y=f(x)$와 $y=e^x$은 (그림 1)과 같다.



(그림 1)

꼭지점의 좌표는 (x, e^x), (x, e^x-3e^{3x}), $(0, e^x)$, $(0, e^x-3e^{3x})$이므로, 직사각형의 넓이는 $A(x) = -3xe^{3x}$ 이다.

$A'(x) = -3e^{3x}(1+3x)$이므로, $A'\left(-\frac{1}{3}\right)=0$이고, $x<-\frac{1}{3}$에서 $A'(x)>0$이고,

$x>-\frac{1}{3}$에서 $A'(x)<0$이다. 따라서 함수 $A(x)$는 $x=-\frac{1}{3}$에서 최대가 되고, 최댓값은

$A\left(-\frac{1}{3}\right)=e^{-1}$이다.

(1-3) $f'(x)=e^x-9e^{3x}=e^x(1-9e^{2x})$ 이므로, $f'(-\ln 3)=0$이고, $x<-\ln 3$에서 $f'(x)>0$이고, $x>-\ln 3$에서 $f'(x)<0$이다.

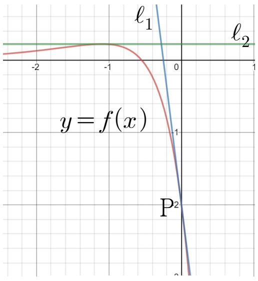
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\ln 3$에서 최대가 되고, 이 때 최댓값은 $f(-\ln 3)=\dfrac{2}{9}$ 이므로,

직선 ℓ_2의 방정식은 $y=\dfrac{2}{9}$ 이다. $f(x)=e^x-3e^{3x}$이므로, $\mathrm{P}=(0,-2)$이다. $f'(0)=-8$이므로

접선 ℓ_1의 방정식은 $y=-8x-2$이다. $-8x-2=\dfrac{2}{9}$로부터 직선 ℓ_1과 ℓ_2의 교점의 x좌표는

$-\dfrac{5}{18}$이다. 따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 ℓ_1, ℓ_2로 둘러싸인 영역의 넓이는 다음과 같다.

(아래 (그림 2) 참고) $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{-\frac{5}{18}}\left(\frac{2}{9}-e^x+3e^{3x}\right)dx+\int_{-\frac{5}{18}}^{0}\left(-8x-2-e^x+3e^{3x}\right)dx=\frac{2}{9}\ln 3-\frac{1}{81}$



(그림 2)

[1-3 별해] 영역의 넓이를 구할 때, 도형의 넓이를 이용하여 $\dfrac{2}{9}\ln 3-\dfrac{1}{81}$를 구할 수도 있다.

<문항카드 14>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(D형) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심 개념 및 용어	배반사건, 조건부확률, 확률의 곱셈정리, 표준정규분포, 기댓값과 표준편차, 이항분포와 정규분포의 관계
예상 소요 시간	35분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 상자 안에 '0'이 적힌 공 n개와 '1'이 적힌 공 4개가 들어 있다. 다음 물음에 각각 답하시오.

(2-1) 상자에서 공 4개를 동시에 뽑아 '0'이 적힌 공 한 개당 5000원을, '1'이 적힌 공 한 개당 3000원을 상금으로 받는다. $n=3$일 때, 상금의 표준편차를 구하시오. (70점)

(2-2) $n=2$일 때, 상자에서 공을 한 개씩 꺼내어, '0'이 나오면 다시 넣지 않고 '1'이 나오면 '1'이 적힌 새로운 공 한 개와 꺼낸 공을 함께 상자에 다시 넣는 시행을 3번 반복한다.
세 번째 꺼낸 공이 '1'이 적힌 공일 확률을 구하시오. (80점)

(2-3) $n=4$라 하자. 상자에서 임의로 공을 한 개 꺼내어 적힌 숫자를 확인하고 다시 넣는 시행을 k번 반복할 때, '1'이 적힌 공의 개수의 평균을 확률변수 X라 하자. 이항분포와 정규분포의 관계를 이용하여 조건 $\mathrm{P}(0.4 \le X \le 0.6) \ge 0.95$이 성립하는 k의 최솟값을 구하시오. (단, 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대해 $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) (80점)

3. 출제 의도

- 이산확률변수의 확률분포를 이해하고 표준편차를 구할 수 있는지를 평가한다.
- 조건부확률을 이해하고 이항분포와 표준정규분포의 관계를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 2	확률과 통계 (2) 확률 ⓶ 조건부확률 [12확통002-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. 확률과 통계 (3) 통계 ⓵ 확률분포 [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. 확률과 통계 (3) 통계 ⓶ 통계적 추정 [12확통03-06] 표본평균과 모평균의 관계를 이해하고 설명할 수 있다.
*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정 **: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」	

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	박규식 외	동아출판사	2020년	pp. 61, 87, 95, 98, 101, 105
	확률과 통계	류희찬 외	천재교과서	2020년	pp. 60, 89, 99, 105, 109
기타	해당 사항 없음				

5. 문항 해설

- 정의한 이산확률변수의 확률분포를 구하고 확률변수의 기댓값과 표준편차를 계산한다.
- 조건부확률을 이해하고 확률을 구한다.
- 이항분포와 정규분포와의 관계를 이용하여 확률의 값을 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	■ 풀이 과정이 있고 답이 맞으면 (+70점) ■ 답이 틀린 경우 - 확률분포를 구하면 (+20점) - E(X)를 맞게 구하면 (+10점) - V(X)를 맞게 구하면 (+10점) - 상금과 X 사이의 선형관계식을 구하면 (+20점)	70
	■ 풀이 과정이 있고 답이 맞으면 (+70점) ■ 답이 틀린 경우 - 확률분포를 구하면 (+20점)	

	- E(X)를 맞게 구하면 (+10점) - V(X)를 맞게 구하면 (+10점) - 상금과 X 사이의 선형관계식을 구하면 (+20점)	
	■ 풀이 과정이 있고 답이 맞으면 (+70점) ■ 답이 틀린 경우 - 확률분포를 구하면 (+20점) - E(X)를 맞게 구하면 (+10점)	
	■ 풀이 과정이 있고 답이 맞으면 (+70점) ■ 답이 틀린 경우 - 상금액수를 조정하면 (+20점) - 확률분포를 구하면 (+20점) - E(X)를 맞게 구하면 (+10점) - V(X)를 맞게 구하면 (+10점)	
(2-2)	■ 네 가지 경우로 나누면 (+20점) ■ 각 경우의 확률을 계산하면 (각각 +10점) ■ 답이 네 경우의 확률을 모두 더한 값이라는 것을 알면 (+10점) ■ $\frac{169}{210}$을 제시하면 (+10점)	80
(2-3)	■ 확률변수 kX가 이항분포 $\mathrm{B}(k,\ 0.5)$를 따르는 것을 보이면 (+20점) ■ $Z=\frac{Y-k/2}{\sqrt{k/4}}$가 표준정규분포를 따름을 언급하면 (+20점) ■ 풀이과정을 통해 $\mathrm{P}(0.4 \le X \le 0.6)=\mathrm{P}(\lvert Z\rvert \le 0.2\sqrt{k})$에 도달하면 (+30점) ■ 자연수 k의 최솟값 97을 구하면 (+10점)	80

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 2]

(2-1) 뽑은 공 중에서 '0'이 적힌 공의 수를 X라 하면 X의 확률분포는 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{x})$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{35}(1\cdot 12+2\cdot 18+3\cdot 4)=\frac{12}{7}$, $\mathrm{E}(X^2)=\frac{1}{35}(1\cdot 12+2^2\cdot 18+3^2\cdot 4)=\frac{24}{7}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\frac{24}{49}$이다. 상금을 Y라 하면 $Y=5000X+3000(4-X)=12000+2000X$이므로 Y의

표준편차는 $\sigma(Y)=\sigma(12000+2000X)=2000\sigma(X)=\frac{4000\sqrt{6}}{7}$이다.

[2-1 별해 1] 뽑은 공 중에서 '1'이 적힌 공의 수를 X라 하면 X의 확률분포는 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
P(X=x)	$\frac{{}_4C_1\,{}_3C_3}{{}_7C_4}=\frac{4}{35}$	$\frac{{}_4C_2\,{}_3C_2}{{}_7C_4}=\frac{18}{35}$	$\frac{{}_4C_3\,{}_3C_1}{{}_7C_4}=\frac{12}{35}$	$\frac{{}_4C_4\,{}_3C_0}{{}_7C_4}=\frac{1}{35}$	1

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{35}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 1) = \frac{16}{7}$,

$\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) = \frac{1}{35}(1 \cdot 4 + 2^2 \cdot 18 + 3^2 \cdot 12 + 4^2 \cdot 1) = \frac{40}{7}$이므로 $\mathrm{V}(X) = \frac{24}{49}$이다.

상금을 Y라 하면 $Y = 3000X + 5000(4-X) = 20000 - 2000X$이므로 Y의 표준편차

$\sigma(Y) = \sigma(20000 - 2000X) = 2000\sigma(X) = \frac{4000\sqrt{6}}{7}$이다.

[2-1 별해 2] 확률변수 Y는 전체 받는 상금의 액수라 할 때 Y의 확률분포는 다음과 같다.

Y	12000	14000	16000	18000	합계
P(Y=y)	$\frac{{}_4C_4\,{}_3C_0}{{}_7C_4}=\frac{1}{35}$	$\frac{{}_4C_3\,{}_3C_1}{{}_7C_4}=\frac{12}{35}$	$\frac{{}_4C_2\,{}_3C_2}{{}_7C_4}=\frac{18}{35}$	$\frac{{}_4C_1\,{}_3C_3}{{}_7C_4}=\frac{4}{35}$	1

$\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \frac{1000}{35}(12 \cdot 1 + 14 \cdot 12 + 16 \cdot 18 + 18 \cdot 4) = \frac{108000}{7}$,

$\mathrm{E}(Y^2) = \frac{10^6}{35}(12^2 \cdot 1 + 14^2 \cdot 12 + 16^2 \cdot 18 + 18^2 \cdot 4) = \frac{1680}{7} \times 10^6$이므로 $\mathrm{V}(Y) = \frac{96}{49} \cdot 10^6$이다.

그러므로 $\sigma(Y) = \frac{4000\sqrt{6}}{7}$이다.

[2-1 별해 3] 공 4개를 뽑아서 '0'이 적힌 공이 나온 수만큼 2000원을 받은 총액을 Z라 하면 Z의 표준편차는 문제에서 주어진 상금의 표준편차와 동일하다. Z의 확률분포는 다음과 같다.

Z	0	2000	4000	6000	합계
P(Z=z)	$\frac{{}_4C_4\,{}_3C_0}{{}_7C_4}=\frac{1}{35}$	$\frac{{}_4C_3\,{}_3C_1}{{}_7C_4}=\frac{12}{35}$	$\frac{{}_4C_2\,{}_3C_2}{{}_7C_4}=\frac{18}{35}$	$\frac{{}_4C_1\,{}_3C_3}{{}_7C_4}=\frac{4}{35}$	1

$\mathrm{E}(Z) = \frac{1000}{35}(2 \cdot 12 + 4 \cdot 18 + 6 \cdot 4) = \frac{24}{7} \cdot 10^3$,

$\mathrm{E}(Z^2) = \frac{10^6}{35}(2^2 \cdot 12 + 4^2 \cdot 18 + 6^2 \cdot 4) = \frac{96}{7} \cdot 10^6$ 이므로 $\sigma(Z) = \frac{4\sqrt{6}}{7} \times 10^3$이다.

(2-2) 첫 번째 시도에서 나온 수를 a, 두 번째 시도에서 나온 수를 b라 하자.

$(a,b) = (1,1)$이고 세 번째 시도에서 1이 나올 확률은 $\frac{4}{6} \times \frac{5}{7} \times \frac{6}{8} = \frac{5}{14}$,

$(a,b) = (1,0)$이고 세 번째 시도에서 1이 나올 확률은 $\frac{4}{6} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{63}$,

$(a,b) = (0,1)$이고 세 번째 시도에서 1이 나올 확률은 $\frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{2}{9}$,

$(a,b)=(0,0)$이고 세 번째 시도에서 1이 나올 확률은 $\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{4}=\frac{1}{15}$

이다. 따라서 네 경우의 확률을 모두 더하면 $\frac{169}{210}$이 구하는 확률이다.

(2-3) k번 공을 뽑아 구한 수의 합을 확률변수 Y라 하면, $Y=kX$는 이항분포 $\mathrm{B}(k,\ 0.5)$를 따르고 평균은 $\frac{k}{2}$, 분산은 $\frac{k}{4}$이다. k가 충분히 크면 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{k}{2},\ \frac{k}{4}\right)$를 따르므로 $Z=\frac{Y-k/2}{\sqrt{k/4}}$는 표준정규분포를 따른다.

$$\mathrm{P}(0.4\le X\le 0.6)=\mathrm{P}(0.4k\le Y\le 0.6k)$$

$$=\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y-k/2}{\sqrt{k/4}}\right|\le\frac{0.1k}{\sqrt{k/4}}\right)=\mathrm{P}(|Z|\le 0.2\sqrt{k})\ge 0.95$$

그러므로 $0.2\sqrt{k}\ge 1.96$를 만족하는 자연수 k의 최솟값은 97이다.

<문항카드 15>

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(D형) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심 개념 및 용어	거리, 여러 가지 미분법, 치환적분법
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $y=f(t)$는 다음 조건을 만족한다.

< 조건 >

(가) $f(0)=1$

(나) $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 $f'(t)>0$이다.

$t\ge 0$에 대하여 매개변수 방정식

$$x(t)=f(t)\cos(t^2-2t),\ y(t)=f(t)\sin(t^2-2t)$$

로 정의되는 점 $\mathrm{P}(x(t),y(t))$가 있다. 임의의 양수 a에 대하여 $0\le t\le a$에서 점 P가 움직인 거리가 $\int_0^a e^t\sqrt{4(t^2-1)^2+(t+2)^2}\,dt$일 때, 다음 물음에 각각 답하시오.

(3-1) $f'(1)$을 구하시오. (80점)

(3-2) 모든 양의 실수 x에 대하여 $(f'(x)-(x+2)e^x)(f(x)-(x+1)e^x)\le 0$가 성립함을 보이시오. (80점)

(3-3) $x\ge 0$에서 함수 $f(x)$를 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

- 매개변수 함수로 주어진 점이 움직인 거리를 적분으로 표현하고 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열A-문제 2	미적분 (3) 적분법 ② 정적분의 활용 [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. 미적분 (3) 적분법 ① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.
*: 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정 **: 교육부 발간 「2015 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」	

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	김원경 외	비상교육	2020	pp. 80, 129, 155
	미적분	이준열 외	천재교육	2020	pp. 89, 150, 179
기타	해당 사항 없음				

5. 문항 해설

- 매개변수 함수로 정의된 점의 움직인 거리를 합성함수 미분을 이용하여 구하고 환적분을 계산하여 미지의 함수를 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	■ $\frac{dx}{dt}$와 $\frac{dy}{dt}$를 구하면 (각각 +10점) ■ $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$를 구하면 (+30점) ■ $\frac{dx}{dt}$와 $\frac{dy}{dt}$를 쓰지 않고 $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$를 바로 기술하면 (+50점) ■ $\sqrt{(f'(x))^2+f(x)^2(2x-2)^2}=e^x\sqrt{4(x^2-1)^2+(x+2)^2}$ 를 구하면 (+20점) ■ 변수를 바꾸지 않고 t가 포함된 식으로 표현하면 $\sqrt{(f'(x))^2+f(x)^2(2x-2)^2}=e^x\sqrt{4(x^2-1)^2+(x+2)^2}$ (+10점) 즉 감점 10점 ■ 과정이 맞고 답을 구하면 (+10점)	80
(3-2)	■ $f(x)=(x+1)e^x$ 또는 $f'(x)=(x+2)e^x$라고 생각하여 풀면 (0점)	80

	■ $(f'(x))^2-(x+2)^2e^{2x}$를 계산하여 오른쪽 항 (*)을 구하면 (+40점) ■ 풀이의 (**)에서 $(f'(x)^2-(x+2)^2e^{2x})$와 $(f(x)^2-(x+1)^2e^{2x})$의 곱이 0보다 작거나 같음을 보이면 (+20점) ■ $f'(x)+(x+2)e^x>0$와 $f(x)+(x+1)e^x>0$를 기술하면 (각각 +10점)	
(3-3)	■ $f(x)=(x+1)e^x$ 또는 $f'(x)=(x+2)e^x$라고 생각하여 풀면 (0점) ■ 적분이 ≤ 0임을 기술하면 (+30점) ■ 적분값 $\frac{1}{2}(f(a)-(a+1)e^a)^2$을 구하면 (+40점) ■ 앞의 과정이 맞고 $f(x)=(x+1)e^x$를 구하면 (+10점)	80
	■ $f(x)=(x+1)e^x$ 또는 $f'(x)=(x+2)e^x$라고 생각하여 풀면 (0점) ■ $g(x)$를 설정하고 $g(x)\ge 0$을 기술하면 (+30점) ■ $g'(x)$을 계산하고 $g'(x)\le 0$을 보이면 (+30점) ■ $g(x)\le 0$를 보이고 $f(x)$를 구하면 (+20점)	

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 3]

(3-1) $\frac{dx}{dt}=f'(t)\cos(t^2-2t)-f(t)(2t-2)\sin(t^2-2t)$이고

$\frac{dy}{dt}=f'(t)\sin(t^2-2t)+f(t)(2t-2)\cos(t^2-2t)$이므로

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(f'(t))^2+f(t)^2(2t-2)^2$이다.

$\int_0^x\sqrt{(f'(t))^2+f(t)^2(2t-2)^2}\,dt=\int_0^x e^t\sqrt{4(t^2-1)^2+(t+2)^2}\,dt$이므로

$\sqrt{(f'(x))^2+f(x)^2(2x-2)^2}=e^x\sqrt{4(x^2-1)^2+(x+2)^2}$ 이다.

따라서 모든 양의 실수 x에 대하여

$(f'(x))^2+f(x)^2(2x-2)^2=e^{2x}(4(x^2-1)^2+(x+2)^2)$이므로 $x=1$을 대입하면

$(f'(1))^2=9e^2$이고 $f'(1)=3e$이다.

(3-2) 위의 풀이 $(f'(x))^2+f(x)^2(2x-2)^2=e^{2x}(4(x^2-1)^2+(x+2)^2)$에서

$(f'(x))^2=-f(x)^2(2x-2)^2+e^{2x}(4(x^2-1)^2+(x+2)^2)$이다.

$(f'(x))^2-(x+2)^2e^{2x}=-f(x)^2(2x-2)^2+4e^{2x}(x^2-1)^2=(2x-2)^2(-f(x)^2+e^{2x}(x+1)^2)$이므로

$(f'(x)^2-(x+2)^2e^{2x})(f(x)^2-(x+1)^2e^{2x})=-(2x-2)^2(f(x)^2-(x+1)^2e^{2x})^2\le 0$이다.

$f'(x)+(x+2)e^x>0$이고 $f(x)+(x+1)e^x>0$이므로

$x\ge 0$일 때 $(f'(x)-(x+2)e^x)(f(x)-(x+1)e^x)\le 0$이다.

(3-3) $a>0$인 실수에 대하여

$$\int_0^a (f'(x)-(x+2)e^x)(f(x)-(x+1)e^x)dx \le 0$$이고

$$\int_0^a (f'(x)-(x+2)e^x)(f(x)-(x+1)e^x)dx = \left[\frac{1}{2}(f(x)-(x+1)e^x)^2\right]_0^a = \frac{1}{2}(f(a)-(a+1)e^a)^2 \le 0$$

이므로 $f(a)=(a+1)e^a$이고 $f(x)$의 연속성으로부터 모든 실수 $x\ge 0$에 대해

$f(x)=(x+1)e^x$이다.

[3-3 별해] $g(x)=(f(x)-(x+1)e^x)^2$라 할 때 $g(x)\ge 0$이다. (3-2)의 결과에 의해 양수 x에 대하여 $g'(x)=2(f'(x)-(x+2)e^x)(f(x)-(x+1)e^x)\le 0$이다.

$g(0)=0$이고 양수 x에 대하여 $g(x)$가 감소함수이므로 $g(x)\le 0$이다.

따라서 $g(x)=0$이다. 그러므로 모든 실수 $x\ge 0$에 대해 $f(x)=(x+1)e^x$이다.