라. 문항카드4

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연 계열(수학) / 문항 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학II
	핵심 개념 및 용어	최대 최소의 정리, 이차방정식과 이차함수, 함수의 연속
예상 소요 시간	30분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

【문항 1】 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(나) 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(ⅰ) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.
(ⅱ) 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.
(ⅲ) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

한편, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이라고 한다.

양수 t에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 함수 $f(x)=|5x^2-2tx|$의 최댓값을 $g(t)$라 하자.

[1-1] 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $y=|5x^2-20x|$의 최댓값을 구하시오. (10점)

[1-2] 함수 $g(t)$를 구하시오. (15점)

[1-3] 실수 a에 대하여 직선 $y=a$와 함수 $y=g(t)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(a)$라 하자. 함수 $h(a)$가 $a=k$에서 불연속인 모든 k의 값의 합을 구하시오. (10점)

3. 출제 의도

본 문항에서는 주어진 함수 $y=f(x)$를 완전제곱 형태로 변형하여 t의 범위에 따라 최댓값 $g(t)$을 찾고, 이와 관련된 새로운 함수 $h(a)$를 정의한 후 특정 지점에서 함수의 연속과 불연속을 판단할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[1-1] 함수의 그래프 개형을 통해 최댓값을 구할 수 있는지를 판단하는 문항이다.

[1-2] 주어진 함수 $y=f(x)$를 이차식의 완전제곱 형태로 변형하여 양수 t의 범위에 따라 최댓값 $g(t)$을 구하는 문항이다.

[1-3] [1-2]에서 구한 결과를 이용하여 직선 $y=a$과 함수 $y=g(t)$의 그래프의 교점의 개수로 정의된 함수 $y=h(a)$가 불연속이 되는 a의 값들을 정확히 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정		교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문		학습내용 성취기준
제시문 (가)	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (나) 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (중) 연속함수에 관한 최대.최소 정리와 사잇값 정리를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.
제시문 (나)	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (나) 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. (중) 주어진 점에서 함수의 연속성을 판별할 수 있다.
[1-1]	적용교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{5}$ 이차방정식과 이차함수 [10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학] - (1) 문자와 식 - (마) 이차방정식과 이차함수 [10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. (중) x의 범위가 주어진 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구할 수 있다.
[1-2]	적용교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{5}$ 이차방정식과 이차함수 [10수학01-09] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다. [10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학] - (1) 문자와 식 - (마) 이차방정식과 이차함수 [10수학01-09] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다. (상) 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다. [10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. (상) 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 다양한 문제를 해결할 수 있다.
[1-3]	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (나) 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. (상) 주어진 구간에서 함수의 연속성을 판별할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2017	31-39
	수학Ⅱ	고성은 외	좋은책 신사고	2017	30-37
	수학Ⅱ	김원경 외	비상교육	2017	31-37
	수학	황선욱 외	미래엔	2017	70-71 75-78
	수학	배종숙 외	금성출판사	2017	67-69 74-76
	수학	박교식 외	동아출판	2017	59-61 64-67

5. 문항 해설

본 문항은 닫힌구간에서 정의된 함수 $y=f(x)$를 완전제곱식으로 변형한 후 t의 범위에 따른 최댓값 $g(t)$을 구할 수 있는지를 평가하고, 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수를 나타내는 함수 $y=h(a)$의 연속성과 불연속성을 판단할 수 있는지를 평가한다.

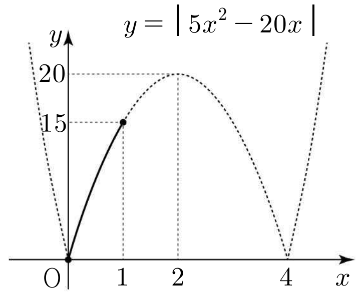
6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	함수 $y=\left\|5x^2-20x\right\|=\left\|5(x-2)^2-20\right\|$ 으로 나타낼 수 있다.	4
	최댓값을 구할 수 있다.	6
[1-2]	$t \geq 5$일 때 함수 $g(t)$를 구할 수 있다.	4
	$g(\alpha)=\dfrac{t^2}{5}$ 되는 α를 구할 수 있다.	3
	$5(\sqrt{2}-1) \leq t < 5$일 때, 함수 $g(t)$를 구할 수 있다.	4
	$0 < t < 5(\sqrt{2}-1)$일 때, 함수 $g(t)$를 구할 수 있다.	4
[1-3]	$a < 15-10\sqrt{2}$ 일 때, 함수 $h(a)$를 구할 수 있다.	2
	$a = 15-10\sqrt{2}$ 일 때, 함수 $h(a)$를 구할 수 있다.	2
	$15-10\sqrt{2} < a < 5$일 때, 함수 $h(a)$를 구할 수 있다.	2
	$a \geq 5$일 때, 함수 $h(a)$를 구할 수 있다.	2
	함수 $h(a)$가 $a=k$에서 불연속인 모든 k의 값의 합을 구할 수 있다.	2

7. 예시 답안

[1-1]

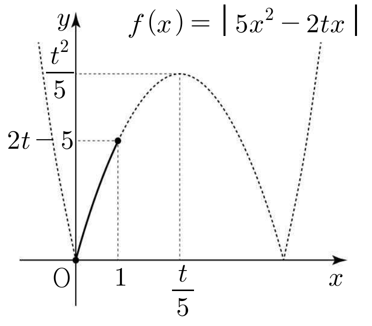
함수 $y=\left|5x^2-20x\right|=\left|5(x-2)^2-20\right|$이므로 함수의 그래프는 그림과 같다.
따라서 제시문 (가)에 의해 함수 $y=\left|5x^2-20x\right|$는 $x=1$에서 최댓값 15를 갖는다.



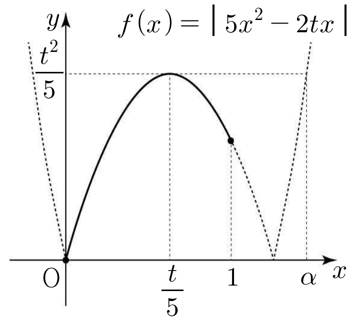
[1-2]

$f(x)=\left|5x^2-2tx\right|=\left|5\left(x-\frac{t}{5}\right)^2-\frac{t^2}{5}\right|$이다.

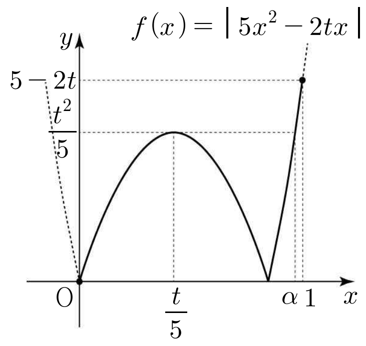
$\frac{t}{5}\geq 1$, $\frac{t}{5}<1\leq\alpha$, $\alpha<1$의 범위에 따라 다음과 같이 세 가지로 나뉜다.



$\frac{t}{5}\geq 1$의 경우



$\frac{t}{5}<1\leq\alpha$의 경우



$\alpha<1$의 경우

(i) $\frac{t}{5}\geq 1$, 즉 $t\geq 5$일 때 $g(t)=f(1)=\left|5-2t\right|=2t-5$이다.

(ii) $\frac{t}{5}<1\leq\alpha$일 때, 여기서 $5x^2-2tx=\frac{t^2}{5}$가 성립하는 x를 α라 두면 $5\alpha^2-2t\alpha=\frac{t^2}{5}$이다.

$25\alpha^2-10t\alpha-t^2=0$이고 근을 구하면

$$\alpha=\frac{5t\pm 5\sqrt{2}\,t}{25}=\frac{1\pm\sqrt{2}}{5}t$$

이다.

$\alpha>\frac{t}{5}$이므로 $\alpha=\frac{1+\sqrt{2}}{5}t$이다.

그러므로 $\frac{t}{5}<1\leq\frac{1+\sqrt{2}}{5}t$, 즉 $5(\sqrt{2}-1)\leq t<5$일 때

$$g(t)=f\left(\frac{t}{5}\right)=\left|-\frac{t^2}{5}\right|=\frac{t^2}{5}$$

이다.

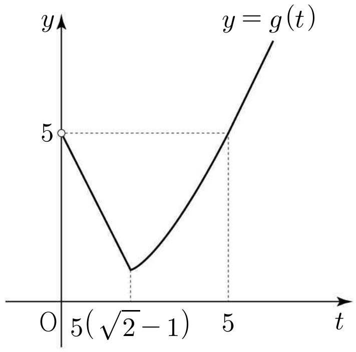
(ⅲ) $0 < \dfrac{1+\sqrt{2}}{5}t < 1$, 즉 $0 < t < 5(\sqrt{2}-1)$일 때

$g(t) = f(1) = |5-2t| = 5-2t$ 이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 함수 $g(t)$는

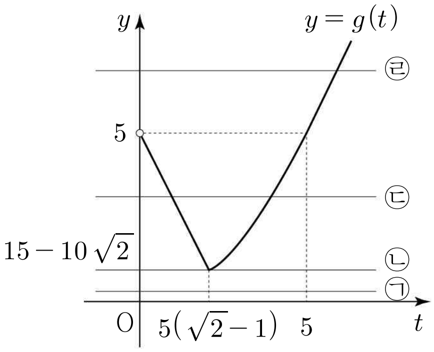
$$g(t)=\begin{cases} 5-2t & (0<t<5(\sqrt{2}-1)) \\ \dfrac{t^2}{5} & (5(\sqrt{2}-1)\le t<5) \\ 2t-5 & (t\ge 5) \end{cases}$$

이고 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



[1-3]

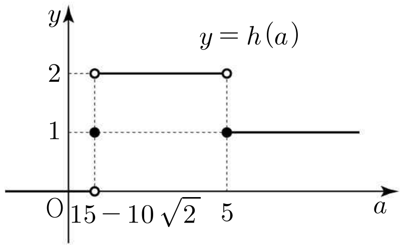
$t>0$에서 직선 $y=a$와 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=a$와 함수 $y=g(t)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 ㉠이면 0, ㉡이면 1, ㉢이면 2, ㉣이면 1이다. 함수 $h(a)$는

$$h(a)=\begin{cases} 0 & (a<15-10\sqrt{2}) \\ 1 & (a=15-10\sqrt{2}) \\ 2 & (15-10\sqrt{2}<a<5) \\ 1 & (a\ge 5) \end{cases}$$

이고 함수 $y=h(a)$의 그래프는 그림과 같다.



그러므로 함수 $h(a)$가 $a=k$에서 불연속이 되는 k의 값을 구하면 $k=15-10\sqrt{2}$ 또는 $k=5$이다.

따라서 모든 k의 값의 합은 $20-10\sqrt{2}$이다.

마. 문항카드5

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연 계열(수학) / 문항 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심 개념 및 용어	주기함수, 삼각함수의 덧셈정리, 정적분, 합성함수, 극대와 극소
예상 소요 시간	30분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

【문항 2】 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여

$$f(x+p)=f(x)$$

를 만족시키는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, 함수 $f(x)$를 주기함수라 한다.

(나) 두 각 α와 β에 대하여

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

(다) 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)\ \text{(단, } a<x<b\text{)}$$

(라) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖고 a를 포함하는 어떤 열린구간에서 미분가능하면

$$f'(a)=0$$

두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=3x^2+ax+b$$

가 있다. 함수 $g(x)=\pi+\cos x$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$h(x)=\int_0^x f(g(t))\,dt$$

가 $x=\frac{2}{3}\pi$에서 최솟값을 갖는다고 하자.

[2-1] 함수 $h(x)$가 주기함수임을 보이시오. (15점)

[2-2] $f(x)=0$을 만족하는 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값을 구하시오. (15점)

3. 출제 의도

본 문항에서는 합성함수와 정적분으로 정의된 함수의 성질을 미분과 적분을 활용하여 파악할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[2-1] 삼각함수와 이차함수의 합성함수에 대하여 정적분으로 정의된 함수의 최솟값이 존재할 때, 주기함수가 됨을 파악할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[2-2] 미분 가능한 함수가 최솟값을 가지기 위한 조건을 파악하고, 이를 활용하여 주어진 이차방정식의 두 근의 차를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정		교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문		학습내용 성취기준
제시문 (가)	적용교육과정	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. (상) 함수 $y=a\sin(bx+c)$, $y=a\cos(bx+c)+d$, $y=a\tan(bx+c)+d$의 그래프를 그릴 수 있고, 이를 문제해결에 활용할 수 있다.
제시문 (나)	적용교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
	성취기준·평가기준	[미적분] - (2) 미분법) - (가) 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. (상) 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
제시문 (다)	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - $\boxed{2}$ 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - (나) 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. (상) 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.
제시문 (라)	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. (상) 다항함수의 극댓값과 극솟값을 구하고, 구하는 과정을 설명할 수 있다.
[2-1]	적용교육과정	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [수학Ⅱ] - (3) 적분 - $\boxed{2}$ 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. (상) 함수 $y=a\sin(bx+c)$, $y=a\cos(bx+c)+d$, $y=a\tan(bx+c)+d$의 그래프를 그릴 수 있고, 이를 문제해결에 활용할 수 있다. [수학Ⅱ] - (3) 적분 - (나) 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. (상) 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법) - (가) 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. (상) 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

[2-2]	적용교육과정	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	성취기준· 평가기준	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. (상) 함수 $y=a\sin(bx+c)$, $y=a\cos(bx+c)+d$, $y=a\tan(bx+c)+d$의 그래프를 그릴 수 있고, 이를 문제해결에 활용할 수 있다. [수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. (상) 다항함수의 극댓값과 극솟값을 구하고, 구하는 과정을 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅰ	김원경	비상	2017	76-80
	수학Ⅰ	류희찬	천재교과서	2017	84-86
	수학Ⅱ	고성은	신사고	2017	83-86, 119-122
	수학Ⅱ	황선욱	미래엔	2017	85-88, 122-128
	미적분	박교식	동아출판	2018	61-66
	미적분	홍성복	지학사	2018	61-66

5. 문항 해설

본 문항은 삼각함수와 이차함수의 합성함수에 대하여 정적분으로 정의된 함수가 최솟값을 가질 때, 주기함수가 됨을 식으로 표현할 수 있는지를 평가한다. 또한 특정한 값에서 최솟값을 가질 조건을 통해 이차함수에서 일차항의 계수와 상수항의 값이 결정되며, 이때 $f(x)=0$을 만족하는 두 근의 차를 구할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	$h(x)=\frac{3}{4}\sin 2x+(6\pi+a)\sin x+\left(3\pi^2+\pi a+b+\frac{3}{2}\right)x$ 로 나타낼 수 있다.	6
	함수 $h(x)$가 최솟값을 갖는 사실을 이용하여 $h(x)=\frac{3}{4}\sin 2x+(6\pi+a)\sin x$ 임을 나타낼 수 있다.	5
	함수 $h(x)$가 주기함수가 되는 이유를 설명할 수 있다.	4
[2-2]	$h'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=0$ 을 이용하여 a를 구할 수 있다.	6
	$f(x)=0$ 의 한 근이 $\pi-\frac{1}{2}$ 임을 구할 수 있다.	4
	$\lvert\alpha-\beta\rvert=\frac{3}{2}$ 을 구할 수 있다.	5

7. 예시 답안

[2-1]

함수 $h(x)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x \{3(\pi+\cos t)^2 + a(\pi+\cos t)+b\}dt \\ &= \int_0^x \{3\cos^2 t + (6\pi+a)\cos t + 3\pi^2 + \pi a + b\}dt \\ &= \int_0^x \left\{3\left(\frac{\cos 2t+1}{2}\right) + (6\pi+a)\cos t + 3\pi^2 + \pi a + b\right\}dt \\ &= \int_0^x \left\{\frac{3}{2}\cos 2t + (6\pi+a)\cos t + 3\pi^2 + \pi a + b + \frac{3}{2}\right\}dt \\ &= \left[\frac{3}{4}\sin 2t + (6\pi+a)\sin t + \left(3\pi^2 + \pi a + b + \frac{3}{2}\right)t\right]_0^x \\ &= \frac{3}{4}\sin 2x + (6\pi+a)\sin x + \left(3\pi^2 + \pi a + b + \frac{3}{2}\right)x \end{aligned}$$

한편, $3\pi^2 + \pi a + b + \frac{3}{2} \neq 0$ 이면 함수 $h(x)$의 그래프는 주기를 가지면서 직선 $y = \left(3\pi^2 + \pi a + b + \frac{3}{2}\right)x$에 의해 증가 형태 또는 감소 형태이므로 함수 $h(x)$는 실수 전체에서 최솟값을 가지지 않는다.

따라서 $3\pi^2 + \pi a + b + \frac{3}{2} = 0$ 이고 함수 $h(x)$ 는 다음과 같다.

$$h(x) = \frac{3}{4}\sin 2x + (6\pi+a)\sin x$$

사인함수의 성질에 의해

$$\begin{aligned} h(x+2\pi) &= \frac{3}{4}\sin(2x+4\pi) + (6\pi+a)\sin(x+2\pi) \\ &= \frac{3}{4}\sin 2x + (6\pi+a)\sin x \\ &= h(x) \end{aligned}$$

이므로 $h(x)$ 는 주기함수이다.

[2-2]

함수 $h(x)=\frac{3}{4}\sin 2x+(6\pi+a)\sin x$ 는 미분가능하고, $x=\frac{2}{3}\pi$에서 최솟값을 가지므로 $h'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=0$ 이다.

$$h'(x)=\frac{3}{2}\cos 2x+(6\pi+a)\cos x$$

이고,

$$h'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}(6\pi+a)=-3\pi-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}a=0$$

이므로 $a=-6\pi-\frac{3}{2}$이다.

$3\pi^2+\pi\left(-6\pi-\frac{3}{2}\right)+b+\frac{3}{2}=0$ 이므로 $b=3\pi^2+\frac{3}{2}\pi-\frac{3}{2}$이다.

또한,

$$h'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=f\left(g\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)=f\left(\pi-\frac{1}{2}\right)=0$$

이므로 $f(x)=0$ 은 $\pi-\frac{1}{2}$ 을 근으로 갖는다.

한편, $f(x)=3x^2+ax+b$이므로 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면, 이때 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha+\beta=-\frac{a}{3}=2\pi+\frac{1}{2}, \ \alpha\beta=\frac{b}{3}=\pi^2+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$$

이고,

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(2\pi+\frac{1}{2}\right)^2-4\left(\pi^2+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

이다. 따라서 $|\alpha-\beta|=\frac{3}{2}$ 이다.

바. 문항카드6

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연 계열(수학) / 문항 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 확률과 통계
	핵심 개념 및 용어	조합, 조건부확률, 이항분포
예상 소요 시간	40분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

【문항 3】 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 \le r \le n)$$

(나) 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A) \neq 0)$$

(다) 일반적으로 각각의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 이때, 확률변수 X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x)$는

$$\mathrm{P}(X=x) = {}_n\mathrm{C}_x\, p^x q^{n-x} \quad (\text{단, } q=1-p,\ x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이다. 이와 같은 확률변수 X의 확률분포를 이항분포라 하고, 기호로 $\mathrm{B}(n,\ p)$와 같이 나타낸다.

감염자 Z가 비감염자와 접촉할 때, 비감염자 중 마스크 착용자와 미착용자는 각각 $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{2}$의 확률로 바이러스에 감염된다고 하자. 장소 A에 3명, 장소 B에 2명, 장소 C에 1명이 있고 이들은 모두 비감염자이다. 그리고 장소 A에 있는 3명은 모두 마스크 미착용자이다. Z는 장소 A, B, C를 이 순서대로 한 번씩 방문하여 6명 모두와 접촉한다. 바이러스 감염은 Z와의 접촉을 통해서만 발생할 수 있고, 비감염자 6명이 각각 바이러스에 감염되는 사건은 서로 독립이라 하자.
(단, 한 장소에서의 접촉시간, 접촉횟수, 접촉순서는 고려하지 않는다.)

[3-1] 장소 B와 C에 있는 비감염자가 마스크를 착용할 확률은 $\frac{1}{2}$이라 하자. 장소 A, B, C 중 2개의 장소에서만 각각 1명씩 감염자가 발생할 확률이 $\frac{3^2 \times 7}{2^6 \times 5^3} \times \alpha$일 때, α의 값을 구하시오. (15점)

[3-2] 다음 조건을 만족시킬 때, 장소 A, B, C 중 2개의 장소에서만 각각 1명씩 감염자가 발생하는 경우의 수를 구하시오. (20점)

(ⅰ) 장소 B에서 Z가 접촉한 2명 중 적어도 1명은 마스크 착용자이다. (ⅱ) 마스크 착용자 중에서 1명 이하의 감염자가 발생한다.

3. 출제 의도

본 문항에서는 확률 및 경우의 수 계산이 실제 생활에서 일어날 수 있는 불확실한 문제들을 예측하여 해결하는 데 합리적으로 사용될 수 있는지를 평가하고자 한다.
[3-1] 최근 사회적으로 큰 문제가 되고 있는 바이러스 감염에 대해서 마스크 착용 여부에 따른 감염자가 발생할 확률을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.
[3-2] 여러 가지 경우의 수를 주어진 조건에 근거하여 정확하게 계산하고 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정		교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문		학습내용 성취기준
제시문 (가)	적용교육과정	[수학] - (5) 확률과 통계 - $\boxed{2}$ 순열과 조합 [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학] - (5) 확률과 통계 - (나) 순열과 조합 [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. (중) 조합의 뜻을 말하고, 조합의 수를 구할 수 있다.
제시문 (나)	적용교육과정	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{2}$ 조건부확률 [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - (나) 조건부확률 [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. (중) 조건부확률을 구할 수 있다.
제시문 (다)	적용교육과정	[확률과 통계] - (3) 통계 - $\boxed{1}$ 확률분포 [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[확률과 통계] - (3) 통계 - (가) 확률분포 [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. (상) 어떤 확률변수가 이항분포를 따르는지 판단하고, 이항분포를 따르는 여러 가지 확률변수의 확률, 평균, 표준편차를 구하고 그 과정을 설명할 수 있다.
[3-1]	적용교육과정	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{1}$ 확률의 뜻과 활용 [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{2}$ 조건부확률 [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. [확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{2}$ 조건부확률 [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - (가) 확률의 뜻과 활용 [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (상) 확률의 덧셈정리를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. [확률과 통계] - (2) 확률 - (나) 조건부확률

		[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. (상) 조건부확률을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다. [확률과 통계] - (2) 확률 - (나) 조건부확률 [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (상) 확률의 곱셈정리를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
[3-2]	적용교육과정	[수학] - (5) 확률과 통계 - $\boxed{1}$ 경우의 수 [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. [수학] - (5) 확률과 통계 - $\boxed{2}$ 순열과 조합 [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학] - (5) 확률과 통계 - (가) 경우의 수 [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. (상) 합의 법칙과 곱의 법칙을 활용하여 다양한 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다. [수학] - (5) 확률과 통계 - (나) 순열과 조합 [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. (상) 조합을 이용하여 다양한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외	교학사	2018	268-271
	수학	황선욱 외	미래엔	2018	270-272
	수학	홍성복 외	지학사	2018	267-270
	확률과 통계	류희찬 외	천재교과서	2019	59-68, 93-95
	확률과 통계	박교식 외	동아출판	2019	61-69, 93-94
	확률과 통계	김원경 외	비상교육	2019	53-60, 83-84

5. 문항 해설

본 문항의 핵심적인 내용은「수학」의 ‘경우의 수’ 및 ‘순열과 조합’ 단원과「확률과 통계」의 ‘조건부 확률’ 및 ‘이항분포’ 단원에서 다루어진다. 첫 번째 문항은 조건부 확률을 이용하여 마스크 착용 여부에 따른 감염자가 발생할 확률을 계산하는 것과 이렇게 계산된 확률을 이항분포를 이용하여 각각의 장소에서 감염자가 발생할 확률을 계산하는 것으로 두 가지의 확률 계산을 필요로 한다. 이를 위해서 조건부 확률과 이항분포를 적절하게 사용할 수 있는지를 평가한다. 두 번째 문항은 조합의 성질을 이용하여 마스크 착용 여부에 따른 감염자가 발생할 수 있는 여러 가지 경우의 수를 주어진 조건에 맞추어 정확하게 계산할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[3-1]	장소 B, C 에서 비감염자가 바이러스에 감염될 확률을 조건부확률과 확률의 곱셈정리를 이용해서 구할 수 있다.	3
	장소 A, B, C 에서 발생하는 감염자 수의 경우를 구별할 수 있다.	3
	이항분포를 이용하여 각각의 경우마다 감염자가 발생할 확률을 구할 수 있다.	9
[3-2]	장소 A, B, C 에서 발생하는 감염자 수의 경우를 구별하고 조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.	6
	감염자 발생 장소 따라 마스크 착용자의 수를 구별하여 경우의 수를 구할 수 있다.	10
	비감염자가 마스크 착용자인 경우와 미착용자인 경우를 구별하여 경우의 수를 구할 수 있다.	4

7. 예시 답안

[3-1]

장소 B와 장소 C의 비감염자가 바이러스에 감염되는 사건을 D, 비감염자가 마스크를 착용하는 사건을 M이라 하자.

$\mathrm{P}(M)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(D|M)=\frac{1}{10}$, $\mathrm{P}(D|M^C)=\frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D)&=\mathrm{P}(D\cap M)+\mathrm{P}(D\cap M^C)\\&=\mathrm{P}(D|M)\times\mathrm{P}(M)+\mathrm{P}(D|M^C)\times\mathrm{P}(M^C)\\&=\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{20}+\frac{1}{4}=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

이다.

장소 A 에서 비감염자가 바이러스에 감염되는 인원수를 확률변수 X_A, 장소 B 에서 비감염자가 바이러스에 감염되는 인원수를 확률변수 X_B라 하면 확률변수 X_A, X_B는 각각 이항분포 $\mathrm{B}\left(3,\frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(2,\frac{3}{10}\right)$를 따른다. 장소 C 에서 비감염자가 바이러스에 감염되는 인원수를 확률변수 X_C 라 하자.

(ⅰ) $X_A=1, X_B=1, X_C=0$ 인 경우

$$p_1={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)\times\frac{7}{10}=\frac{3}{2^3}\times\frac{2\times3\times7}{10^2}\times\frac{7}{10}=\frac{2\times3^2\times7^2}{2^6\times5^3}$$

(ⅱ) $X_A=1, X_B=0, X_C=1$ 인 경우

$$p_2={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_2\mathrm{C}_0\left(\frac{7}{10}\right)^2\times\frac{3}{10}=\frac{3}{2^3}\times\frac{7^2}{10^2}\times\frac{3}{10}=\frac{3^2\times7^2}{2^6\times5^3}$$

(ⅲ) $X_A=0, X_B=1, X_C=1$ 인 경우

$$p_3={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)\times\frac{3}{10}=\frac{1}{2^3}\times\frac{2\times3\times7}{10^2}\times\frac{3}{10}=\frac{2\times3^2\times7}{2^6\times5^3}$$

그러므로 구하는 확률은

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{2\times 3^2 \times 7^2}{2^6 \times 5^3} + \frac{3^2 \times 7^2}{2^6 \times 5^3} + \frac{2\times 3^2 \times 7}{2^6 \times 5^3} = \frac{3^2 \times 7}{2^6 \times 5^3} \times (14+7+2) = \frac{3^2 \times 7}{2^6 \times 5^3} \times 23$$

이다.

따라서 $\alpha = 23$ 이다.

[3-2]

(ⅰ) 감염자가 장소 A 에서 1 명, 장소 B 에서 1 명이 발생하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_1\mathrm{C}_0 = 6$ 이고

① 마스크 착용자 수가 1 명일 때의 경우의 수 : 장소 B 에만 있으므로 ${}_2\mathrm{C}_1 = 2$

② 마스크 착용자 수가 2 명일 때의 경우의 수 : ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$

③ 마스크 착용자 수가 3 명일 때의 경우의 수 : ${}_3\mathrm{C}_3 = 1$

따라서 $6\times(2+3+1) = 6 \times 6 = 36$

(ⅱ) 감염자가 장소 A 에서 1 명, 장소 C 에서 1 명이 발생하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_0 \times {}_1\mathrm{C}_1 = 3$ 이고

① 마스크 착용자 수가 1 명일 때의 경우의 수 : 장소 B 에만 있으므로 ${}_2\mathrm{C}_1 = 2$

② 마스크 착용자 수가 2 명일 때의 경우의 수 : ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$

③ 마스크 착용자 수가 3 명일 때의 경우의 수 : ${}_3\mathrm{C}_3 = 1$

따라서 $3\times(2+3+1) = 3 \times 6 = 18$

(ⅲ) 감염자가 장소 B 에서 1 명, 장소 C 에서 1 명이 발생하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_0 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_1\mathrm{C}_1 = 2$ 이고

① 마스크 착용자 수가 1 명일 때의 경우의 수 : 장소 B 에만 있으므로 ${}_2\mathrm{C}_1 = 2$

② 마스크 착용자 수가 2 명일 때의 경우의 수는

장소 B 에 2 명이 마스크 착용자인 경우의 수와 장소 B 의 비감염자와 장소 C 의 감염자가 마스크를 쓴 경우의 수의 합이므로 ${}_2\mathrm{C}_2 + {}_1\mathrm{C}_1 \times {}_1\mathrm{C}_1 = 2$

③ 마스크 착용자 수가 3 명일 때의 경우의 수는 마스크 착용자인 감염자 수가 2 명이므로 없음.

따라서 $2\times(2+2) = 2 \times 4 = 8$

그러므로 총 경우의 수는 $36+18+8 = 62$ 이다.