Ⅱ. 자연계열 문항카드

2021학년도 수시모집 논술고사 문항해설 및 채점기준(자연계열)

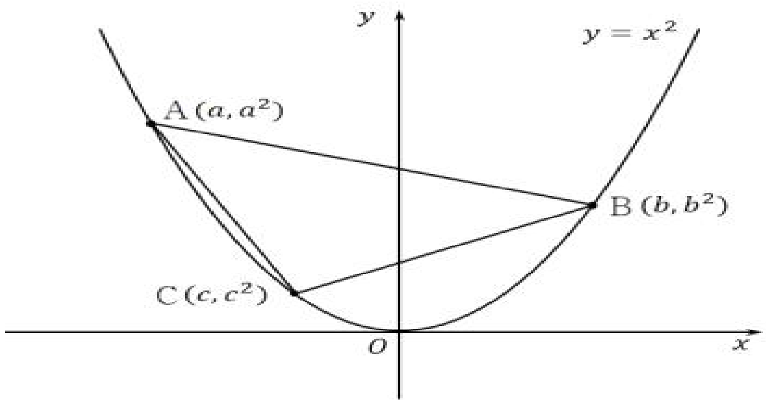
[덕성여자대학교 문항정보 1]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항번호 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학II
	핵심개념 및 용어	인수분해, 접선의 방정식, 점과 직선과의 거리, 최댓값과 최솟값, 두 곡선 사이의 넓이
예상 소요 시간	45분 / 90분	

2. 문항 및 제시문

아래 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위에 세 점 $\mathrm{A}(a,a^2)$, $\mathrm{B}(b,b^2)$,$\mathrm{C}(c,c^2)$이 있다. (단, $a<c<b$이다.)



【문제 1-1】

삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되는 점 C의 x좌표 c를 a, b로 나타내시오. **[20점]**

【문제 1-2】

[문제 1-1]에서 구한 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. **[40점]**

【문제 1-3】

선분 AB와 곡선 $y = x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자. S_1을 정적분을 활용하여 구하시오.

[문제 1-2]에서 구한 삼각형 ABC의 넓이를 S_2라고 할 때, $\dfrac{S_1}{S_2}$이 a, b와 관계없이 일정함을 보이시오. **[40점]**

3. 출제 의도

곡선 위에 주어진 점들로 구성된 삼각형의 넓이를 최대로 하는 조건은 선택된 두 점을 밑변으로 할 때 삼각형의 최대 높이는 나머지 한 점에서 주어진 곡선에 그은 접선의 기울기와 선택된 두 점을 지나는 직선의 기울기가 같다는 것을 알고 있는지 평가한다. 주어진 조건에서 삼각형의 넓이를 구하는 다양한 방법을 알고 있는지 평가한다. 정적분을 이용하여 두 곡선 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지 평가하고 비례식을 찾을 수 있는지 평가한다.

[문제 1-1]

두 점을 잇는 직선의 기울기를 구할 수 있으며, 곡선 위의 다른 한 점에서의 접선의 기울기를 미분을 이용하여 구할 수 있는지 평가한다. 또한 삼각형의 넓이는 밑변이 일정할 때 높이가 최대일 때 최대 넓이를 갖고, 주어진 문제에서 접선의 기울기가 밑면을 잇는 직선의 기울기와 같을 때 최대 높이가 됨을 알고 있는지 평가한다.

[문제 1-2]

주어진 삼각형의 넓이를 평행사변형의 넓이를 이용하여 구하거나 직선과 직선위에 있지 않는 한 점과의 거리를 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 1-3]

두 곡선 사이로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있으며, 넓이들의 관계를 찾을 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

문항 및 제시문		학습내용 성취 기준
제시문	교육 과정	수학]-문자와 식-방정식과 부등식-이차방정식과 이차함수 [수학]-기하-도형의 방정식-평면좌표
	성취 기준	[수학]-(1) 문자와 식-$\boxed{5}$ 이차방정식과 이차함수 10수학01-10 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해한다. [수학]-(2) 기하-$\boxed{5}$ 직선의 방정식 10수학02-03 직선의 방정식을 구할 수 있다.
문제1-1	교육 과정	[수학]-기하-도형의 방정식-직선의 방정식 [수학]-기하-도형의 방정식-평면좌표 [수학II]-해석-미분-도함수 [수학II]-해석-미분-도함수의 활용
	성취 기준	[수학]-(2) 기하-$\boxed{2}$ 직선의 방정식 10수학02-03 직선의 방정식을 구할 수 있다. 10수학02-04 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다. [수학II]-(2) 미분-$\boxed{2}$ 도함수 12수학II02-04 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다. [수학II]-(2) 미분-$\boxed{3}$ 도함수의 활용 12수학II02-06 접선의 방정식을 구할 수 있다.
문제1-2	교육 과정	[수학]-문자와 식-다항식-인수분해 [수학]-기하-도형의 방정식-직선의 방정식
	성취 기준	[수학]-(1) 문자와 식-$\boxed{3}$ 인수분해 10수학01-04 다항식의 인수분해를 할 수 있다. [수학]-(2) 기하-$\boxed{2}$ 직선의 방정식 10수학02-05 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.
문제1-3	교육 과정	[수학]-문자와 식-다항식-인수분해 [수학]-기하-도형의 방정식-직선의 방정식 [수학II]-해석-미분-도함수 [수학II]-해석-미분-도함수의 활용 [수학II]-해석-적분-정적분 [수학II]-해석-적분-정적분의 활용
	성취 기준	[수학]-(1) 문자와 식-$\boxed{3}$ 인수분해 10수학01-04 다항식의 인수분해를 할 수 있다. [수학]-(2) 기하-$\boxed{2}$ 직선의 방정식 10수학02-03 직선의 방정식을 구할 수 있다. [수학II]-(2) 미분-$\boxed{2}$ 도함수 12수학II02-04 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.

		[수학II]-(2) 미분-③ 도함수의 활용 12수학II02-06 접선의 방정식을 구할 수 있다. **[수학II]-(3) 적분-② 정적분** 12수학II03-03 정적분의 뜻을 안다. 12수학II03-03 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. **[수학II]-(3) 적분-③ 정적분의 활용** 12수학II03-05 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성
고등학교 교과서	수학	홍성록 외	지학사	2020	35, 71, 128, 134-135		
	수학II	권오남 외	교학사	2020	70, 80-81, 134, 146, 154		
	수학II	이준열 외	천재교육	2020	62, 74, 136-138		
	수학II	류희찬 외	천재교과서	2020	62, 67, 136		
	미적분	김원경 외	비상	2020	96, 149		
기타	EBS 수능특강	강인우 외	한국교육 방송공사	2020	50, 96		

5. 문항 해설

본 문항의 핵심적인 내용은 「수학II」의 정적분의 활용 단원에서 다루어진다. 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 문제가 요구하는 포물선 위의 두 점을 밑변으로 하는 삼각형의 넓이AB를 최대로 하는 곡선 위의 점을 구하기 위하여 미분을 이용하여 그 점에서 접선의 기울기가 밑변의 기울기와 같아야 한다는 것을 알고 있는지 평가하게 된다. 다항함수의 정적분을 활용하여 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다. 끝으로 두 넓이들의 특성과 그들의 비례식을 구할 수 있는지 평가한다.

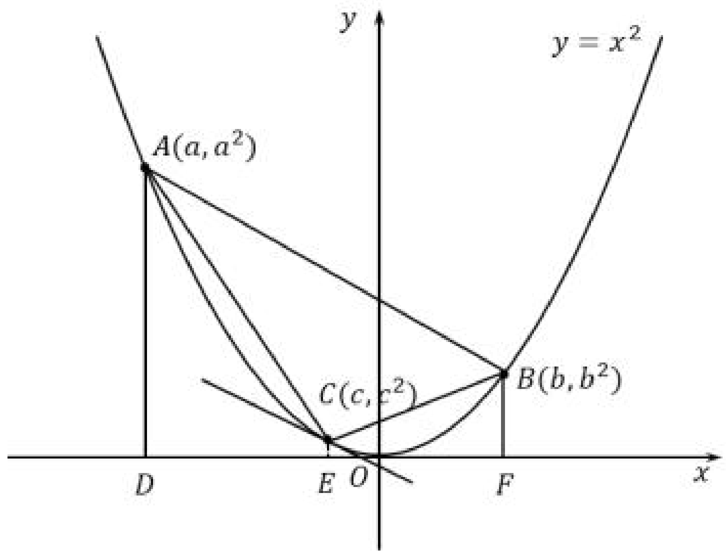
6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점	
문제1-1	△ABC의 넓이가 최대가 되기 위한 점을 구하는 방법 (1)을 알고 있다.	(A)	5
	모른다.	(E)	0
	두 점을 잇는 직선의 기울기를 구할 수 있다. (2)	(A)	5
	없다.	(E)	0
	접선의 기울기를 미분을 이용하여 구할 수 있다. (3)	(A)	5
	없다.	(E)	0
	두 기울기가 동일하다는 식을 이용하여 c의 값을 구할 수 있다. (4)	(A)	5
	없다.	(E)	0
문제1-1 (다른 풀이)	△ABC의 넓이를 구하는 방법 (21)-(23)을 알고 있다.	(A)	5
	모른다.	(E)	0
	다양한 방법으로 삼각형의 넓이를 구할 수 있다. (21)-(23)	(A)	5
	없다.	(E)	0
	△ABC의 넓이 S를 c의 함수로 나타낼 수 있다. (24)	(A)	5
	없다.	(E)	0
	넓이 $S(c)$가 최대가 되는 c의 값을 구할 수 있다. (25) 또는 (25‘)	(A)	5
	없다.	(E)	0
문제1-2	최대 넓이를 갖는 삼각형의 넓이를 계산하는 방법을 찾을 수 있다.(5)	(A)	5
	없다.	(E)	0
	△ABC의 밑변 AB의 거리를 구할 수 있다. (6)	(A)	5
	없다.	(E)	0
	점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식 (23) 또는 다른 방법 (22)으로을 정확히 알고 있다. (7)	(A)	5
	또는 (23) 없다.	(E)	0
	$c=\frac{a+b}{2}$의 값을 이용하여 선분 AB와 C 사이의 거리를 활용하거나 ((23)-(23′)) 다른 방법((22)-(22′))으로 삼각형의 최대 넓이를 정확하게 구할 수 있다. (9)	(A)	25
	간단하게 정리를 하지 못했다. (8)까지 구함.	(B)	22

	(8)의 과정에서 공식 적용에 오류가 있었다.	(C)	15
	삼각형의 밑변의 길이를 구하였다. (6)	(D)	10
	아무것도 하지 않았다.	(E)	0
문제1-2 (다른 풀이)	사다리꼴 ABFD의 넓이를 계산할 수 있다. (34)	(A)	5
	없다.	(E)	0
	사다리꼴 ACED의 넓이를 계산할 수 있다. (35)	(A)	5
	없다.	(E)	0
	사다리꼴 CBFE의 넓이를 계산할 수 있다. (36)	(A)	5
	없다.	(E)	0
	$\triangle$ABC의 넓이를 정확하게 구할 수 있다. (38)	(A)	25
	간단하게 정리를 하지 못했다. (37)	(B)	22
	(37)의 계산과정이 약간의 오류가 있어 끝내지 못했다.	(C)	15
	(37)의 계산과정이 많은 오류가 있어 끝내지 못했다.	(D)	10
	아무 것도 보이지 않았다.	(E)	0
문제1-3	두 점 A와 B를 잇는 직선의 식을 찾을 수 있다. (10)	(A)	5
	없다.	(E)	0
	선분 AB와 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분의 형태로 나타낼 수 있다. (11)	(A)	5
	없다.	(E)	0
	선분 AB와 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 정확히 계산할 수 있다.	(A)	25
	항등식 (12)를 사용하였으나 정확한 계산 결과를 얻지 못했다.	(B)	20
	항등식 (12)를 사용하지 못해 계산 결과를 얻지 못했다.	(C)	15
	정적분의 형태를 찾았으나 계산 결과가 없다.	(D)	5
	아무것도 하지 않았다.	(E)	0
	$\frac{S_1}{S_2}$의 결과와 a, b와 관계없음을 설명하였다.	(A)	5
	결과를 구하지 못했다.	(E)	0
			100

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1-1]



<그림>

<그림>에서와 같이 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되기 위해서는 삼각형 ABC의 밑변 AB에서 높이가 최대가 되어야 한다. 따라서

곡선 $y=x^2$ 위의 점 C에서의 접선이 두 점 A와 B를 잇는 직선의 기울기와 같아야 한다. .... (1)

두 점 A와 B를 잇는 직선의 기울기는 다음과 같다.

$$\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{(b-a)(b+a)}{b-a}=b+a \qquad \text{..............} \quad (2)$$

또한 $y'=2x$이므로 점 $C(c,c^2)$에서 접선의 기울기는

$$y'|_{x=c}=2c \qquad \text{.........................} \quad (3)$$

가 된다. 따라서 다음을 얻는다.

$$b+a=2c \;\Rightarrow\; c=\frac{a+b}{2} \qquad \text{................} \quad (4)$$

(다른 풀이)

주어진 삼각형의 넓이를 구하는 다른 방법의 예는 아래와 같다. .... (21)

점과 직선 사이의 거리를 이용하여 삼각형의 넓이:
직선 AB의 방정식 $y=(a+b)x-ab$과 $\mathrm{C}(\mathrm{c},\mathrm{c}^2)$사이의 거리 d는

$$d=\frac{\left|(a+b)c+(-1)c^2-ab\right|}{\sqrt{(a+b)^2+1}} \qquad \text{............................} \quad (22)$$

따라서 삼각형의 넓이는

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\frac{\left|(a+b)c-c^2-ab\right|}{\sqrt{(a+b)^2+1}}\left(\sqrt{(b-a)^2+(b^2-a^2)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\left|(a+b)c-c^2-ab\right|}{\sqrt{(a+b)^2+1}}\left((b-a)\sqrt{1+(b+a)^2}\right) \qquad \text{....} \ (23) \\ &= \frac{1}{2}\left|(a+b)c-c^2-ab\right|(b-a)=\frac{1}{2}(b-c)(c-a)(b-a) \end{aligned}$$

S를 c의 함수로 나타내면

$$\begin{aligned} S(c) &= \frac{1}{2}\left[-(b-a)c^2+(b^2-a^2)c+a^2b-ab^2\right] \\ &= \frac{(b-a)}{2}\left[-c^2+(a+b)c-ab\right] \end{aligned} \qquad \text{..........} \quad (24)$$

<1>이나 <2> 또는 이와 같은 방법으로 구한 S의 최댓값을 구하기 위하여 미분을 이용하거나

$$S'(c)=\frac{(b-a)}{2}[-2c+(a+b)]=0 \quad \Rightarrow \quad c=\frac{a+b}{2} \qquad \text{.....................} \quad (25)$$

완전제곱꼴을 이용하여

$$\begin{aligned} S(c) &= \frac{(b-a)}{2}\left[-c^2+(a+b)c-ab\right] \\ &= \frac{(b-a)}{2}\left[-\left(c-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab\right] \end{aligned} \qquad \text{...................} \quad (25')$$

꼭짓점의 좌표 $c=\dfrac{a+b}{2}$이다.

[문제 1-2]

삼각형의 넓이를 구하기 위하여 삼각형의 밑변을 선분 AB로 하는 직삼각형의 높이를 구하면 된다. 주어진 삼각형의 높이는 직선과 직선 밖의 점 사이의 거리를 이용하여 구할 수 있다. .... (5)

먼저 삼각형의 밑변의 길이는 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(b-a)^2 + (b^2-a^2)^2} = (b-a)\sqrt{1+(a+b)^2} \qquad \text{......................} \qquad (6)$$

직선 AB의 방정식은 (10)에 의하여 $y=(a+b)x-ab$이다.

직선 AB와 점 $\mathrm{C}(\mathrm{c},\mathrm{c}^2) = \mathrm{C}\left(\frac{a+b}{2}, \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$ 사이의 거리는, 다음 공식에 의하여,

좌표평면 위의 점 $P(x_1, y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{..................................} \qquad (7)$$

다음과 같이 구할 수 있다. (직선 AB의 식은 $(a+b)x-y-ab=0$ 이다.)

$$\frac{\left|(a+b)\frac{(a+b)}{2}+(-1)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab\right|}{\sqrt{(a+b)^2+(-1)^2}}$$

$$= \frac{\left|\frac{(a+b)^2}{4}-ab\right|}{\sqrt{(a+b)^2+1}} \qquad \text{..................} \qquad (8)$$

$$= \frac{\left|\frac{(a-b)^2}{4}\right|}{\sqrt{(a+b)^2+1}} = \frac{(a-b)^2}{4\sqrt{(a+b)^2+1}}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}(b-a)\sqrt{1+(a+b)^2} \times \frac{(a-b)^2}{4\sqrt{(a+b)^2+1}} = \frac{(b-a)^3}{8} \qquad \text{................} \qquad (9)$$

(다른 풀이)

삼각형 ABC의 넓이는 <그림 2>에서 보듯이 사다리꼴 $ABFD$의 넓이에서 두 사다리꼴 $ACED$와 사다리꼴 $CBFE$의 넓이를 뺀 값으로 구할 수 있다. .... (33)
사다리꼴 $ABFD$의 넓이는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2)\times(b-a) \qquad \text{.....................} \qquad (34)$$

또한 사다리꼴 $ACED$와 사다리꼴 $CBFE$의 넓이는 다음과 같다.

사다리꼴 $ACED$의 넓이: $\frac{1}{2}(a^2+c^2)\times(c-a)$ ..... (35)

사다리꼴 $CBFE$의 넓이: $\frac{1}{2}(c^2+b^2)\times(b-c)$ ..... (36)

따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(a^2+b^2)(b-a)-\left[\frac{1}{2}(a^2+c^2)(c-a)+\frac{1}{2}(c^2+b^2)(b-c)\right]\\
&=\frac{1}{2}(a^2+b^2)((b-c)+(c-a))-\left[\frac{1}{2}(a^2+c^2)(c-a)+\frac{1}{2}(c^2+b^2)(b-c)\right]\\
&=\frac{1}{2}(c-a)[(a^2+b^2)-(a^2+c^2)]+\frac{1}{2}(b-c)[(a^2+b^2)-(b^2+c^2)]\\
&=\frac{1}{2}(c-a)(b^2-c^2)+\frac{1}{2}(b-c)(a^2-c^2)\\
&=\frac{1}{2}(c-a)(b-c)(b+c)+\frac{1}{2}(b-c)(a-c)(a+c)\\
&=\frac{1}{2}(c-a)(b-c)[(b+c)-(a+c)]=\frac{1}{2}(c-a)(b-c)(b-a)
\end{aligned}$$

.... (37)

$c=\frac{a+b}{2}$를 (37)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(c-a)(b-c)(b-a)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{b+a}{2}-a\right)\left(b-\frac{b+a}{2}\right)(b-a) \qquad \text{...........................} \qquad (38)\\
&=\frac{1}{8}(b-a)(b-a)(b-a)=\frac{1}{8}(b-a)^3
\end{aligned}$$

[문제 1-3]

먼저 선분 AB와 곡선 $y=x^2$이 만나는 점을 구하기 위하여 두 점 A와 B를 잇는 직선의 식은 점 $A(a,a^2)$를 지나고 기울기가 $a+b$인 직선의 식과 같으므로 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} y-a^2 &= (a+b)(x-a) \\ y &= (a+b)x-a(a+b)+a^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (10) \\ y &= (a+b)x-ab \end{aligned}$$

선분 AB와 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이 S_1은 정적분을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left[((a+b)x-ab)-x^2\right]dx \\ &= \left[\frac{a+b}{2}x^2-abx-\frac{1}{3}x^3\right]_a^b \\ &= \left[\frac{a+b}{2}b^2-ab^2-\frac{1}{3}b^3\right]-\left[\frac{a+b}{2}a^2-a^2b-\frac{1}{3}a^3\right] \\ &= \frac{1}{6}\left[3(a+b)(b^2-a^2)-2(b^3-a^3)-6ab(b-a)\right] \quad \cdots\cdots \quad (11) \\ &= \frac{1}{6}(b-a)\left[3(a+b)^2-2(b^2+ab+a^2)-6ab\right] \\ &= \frac{1}{6}(b-a)[3a^2+6ab+3b^2-2b^2-2ab-2a^2-6ab] \\ &= \frac{1}{6}(b-a)(a^2-2ab+b^2) = \frac{1}{6}(b-a)(a-b)^2 \\ &= \frac{1}{6}(b-a)^3 \end{aligned}$$

여기서 우리는 다음 항등식을 이용하였다.

$$b^3-a^3=(b-a)(b^2+ab+a^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12)$$

또한 삼각형의 넓이 S_2는 (9)에서 보였듯이 $S_2=\frac{1}{8}(b-a)^3$이다.

(또는 (37)에 의하여 $c=\frac{a+b}{2}$를 대입하여 정리하면 S_2는 다음과 같다.)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(c-a)(b-c)(b-a)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{b+a}{2}-a\right)\left(b-\frac{b+a}{2}\right)(b-a) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (13)\\&=\frac{1}{8}(b-a)(b-a)(b-a)=\frac{1}{8}(b-a)^3\end{aligned}$$

따라서 구하는 값은

$$\frac{1}{6}(b-a)^3=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{8}(b-a)^3\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (14)$$

이므로 다음과 같다.

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{4}{3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (15)$$

따라서 a, b와 관계없이 일정하다.

2021학년도 수시모집 논술고사 문항해설 및 채점기준(자연계열)

[덕성여자대학교 문항정보 2]

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연계열 / 문항번호 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학, 수학Ⅰ, 미적분, 확률과 통계</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>부등식, 등비수열, 등비급수, 조합, 확률, 조건부확률, 독립시행, 임의추출, 확률변수, 확률분포</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">45분 / 90분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

[문2] 다음의 제시문을 읽고 아래의 문제에 답하시오.

(1) 한 개의 주사위를 한 번 던져 나오는 눈의 수를 l이라 한다.

(2) 1, 2, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있는 주머니에서 하나의 공을 임의추출 할 때, 추출된 공에 적힌 수를 m이라 한다. (단, 반복 시행 시 복원추출한다.)

(3) (1), (2)에서 추출된 순서쌍 $(l,\ m)$을 이용하여 등비수열 $a_n = k\left(\frac{m}{l}\right)^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$을 만든다. (단, $k>0$인 상수)

(4) (3)에서 만들어진 등비수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$가 수렴하고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$를 만족하면 성공이라 하고, 그렇지 않으면 실패라고 한다.

(5) (3)을 4회 반복 시행하면서 (4)에서 설명한 성공 여부를 판정한다. 단, 2회 성공하면 시행을 멈춘다.

【문제 2-1】
(3)처럼 추출된 순서쌍 $(l,\ m)$으로 만든 등비수열 $\{a_n\}$이 (4)에서 설명한 성공이 될 확률을 구하시오. **[30점]**

【문제 2-2】
(5)에서 설명한 반복 시행에서 실패한 시행의 횟수를 확률변수 X라 하자. [문제 2-1]의 결과를 이용하여 X의 확률분포를 구하시오. **[40점]**

【문제 2-3】
(5)에서 설명한 반복 시행에서 시행의 횟수를 확률변수 Y라 하자. [문제 2-2]의 결과를 이용하여 Y의 확률분포 구하시오. 또, 반복 시행을 4회까지 했을 때, 성공이 한 번일 확률을 X와 Y의 확률분포를 이용하여 구하시오. **[30점]**

3. 출제 의도

제시문 (1), (2)의 상황에서 추출된 l, m으로 제시문 (3)처럼 등비수열 $\{a_n\}$을 만들었을 때, 다음의 사항들을 해결할 수 있는지를 알아본다.

- 등비급수가 수렴하는 공비의 조건을 파악할 수 있는지를 알아본다.
- 제시되는 등비수열의 조건이 첫째항과 공비가 어떤 경우에 만족하는지를 파악할 수 있는지를 알아본다.
- 추출 가능한 모든 순서쌍 중 조건에 맞는 순서쌍이 어떤 것인지를 찾고 확률을 계산할 수 있는가를 알아본다.
- 반복 시행 시에 정의된 확률변수를 이해하고 독립시행의 확률 계산법으로 확률분포를 구할 수 있는지를 알아본다.
- 확률변수들의 관계를 이용하여 확률분포를 구할 수 있는지를 알아보고, 이를 이용해서 조건부확률을 구할 수 있는지를 알아본다.

각 소문항별 구체적인 출제의도는 다음과 같다.

【문제 2-1】

- 제시문 (3)에서 추출된 l, m으로 만들어진 등비수열 $\{a_n\}$의 등비급수가 수렴하는 공비의 조건을 알고 있는가?
- 제시되는 등비수열의 조건이 첫째항과 공비가 어떤 경우에 만족하는지를 수렴하는 등비급수의 계산법을 이용하여 구할 수 있는가?
- 추출 가능한 l, m의 모든 순서쌍 중 조건에 맞는 순서쌍이 어떤 것인지를 찾아 확률을 계산할 수 있는가?

【문제 2-2】

- 제시문 (5)에 설명되어 있는 반복 시행에 대한 의미를 알고 있는가?
- 반복 시행의 횟수에 따라 실패의 횟수가 어떻게 변하는 지를 파악할 수 있는가?
- 정의된 확률변수가 갖는 값을 모두 찾아 해당되는 확률을 독립 시행을 이용하여 계산할 수 있는가?
- 구해진 확률들을 이용하여 확률분포를 만들 수 있는가?

【문제 2-3】

- 반복 시행의 횟수를 확률변수로 하였을 때 반복 시행 중 실패의 횟수를 확률변수로 한 경우와의 관계를 찾을 수 있는가?

- 이들 관계를 이용하여 구해진 확률분포로 새로이 정의된 확률변수의 확률분포를 구할 수 있는가?
- 두 확률분포들을 이용하여 조건부확률을 계산할 수 있는가?

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

문항 및 제시문		학습내용 성취 기준
제시문	교육 과정	<수학>-(1) 문자와 식- $\boxed{6}$ 여러 가지 방정식과 부등식 <수학Ⅰ>-(3) 수열-$\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열 <수학Ⅰ>-(3) 수열-$\boxed{2}$ 수열의 합 <미적분>-(1)수열의 극한-$\boxed{2}$ 급수 <확률과 통계>-(3) 통계-$\boxed{2}$ 통계적 추정
	성취 기준	**<수학>-(1) 문자와 식- $\boxed{6}$ 여러 가지 방정식과 부등식** [10수학01-15] 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다. **<수학Ⅰ>-(3) 수열-$\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열** [12수학Ⅰ03-01] 수열의 뜻을 안다. [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. **<수학Ⅰ>-(3) 수열-$\boxed{2}$ 수열의 합** [12수학Ⅰ03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **<미적분>-(1) 수열의 극한-$\boxed{2}$ 급수** [12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. **<확률과 통계>-(3) 통계-$\boxed{2}$ 통계적 추정** [12확통03-05] 모집단과 표본의 뜻을 알고 표본추출의 원리를 이해한다.
문제2-1	교육 과정	<수학>-(1) 문자와 식- $\boxed{6}$ 여러 가지 방정식과 부등식 <수학Ⅰ>-(3) 수열-$\boxed{2}$ 수열의 합 <미적분>-(1) 수열의 극한-$\boxed{2}$ 급수 <확률과 통계>-(1) 경우의 수-$\boxed{1}$ 순열과 조합 <확률과 통계>-(2) 확률-$\boxed{1}$ 확률의 뜻과 활용 <확률과 통계>-(3) 통계-$\boxed{2}$ 통계적 추정
	성취 기준	**<수학>-(1) 문자와 식- $\boxed{6}$ 여러 가지 방정식과 부등식** [10수학01-15] 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다. **<수학Ⅰ>-(3) 수열-$\boxed{2}$ 수열의 합** [12수학Ⅰ03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. **<미적분>-(1) 수열의 극한-$\boxed{2}$ 급수** [12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. [12미적01-06] 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

		<확률과 통계>-(1) 경우의 수-$\boxed{1}$ 순열과 조합 [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다. **<확률과 통계>-(2) 확률-$\boxed{1}$ 확률의 뜻과 활용** [12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. [12확통02-02] 확률의 기본 성질을 이해한다. **<확률과 통계>-(3) 통계-$\boxed{2}$ 통계적 추정** [12확통03-05] 모집단과 표본의 뜻을 알고 표본추출의 원리를 이해한다.
문제2-2	교육과정	<확률과 통계>-(2) 확률-$\boxed{1}$ 확률의 뜻과 활용 <확률과 통계>-(2) 확률-$\boxed{2}$ 조건부확률 <확률과 통계>-(3) 통계-$\boxed{1}$ 확률분포
	성취기준	**<확률과 통계>-(2) 확률-$\boxed{1}$ 확률의 뜻과 활용** [12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. [12확통02-02] 확률의 기본 성질을 이해한다. [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다. **<확률과 통계>-(2) 확률-$\boxed{2}$ 조건부확률** [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **<확률과 통계>-(3) 통계-$\boxed{1}$ 확률분포** [12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
문제2-3	교육과정	<확률과 통계>-(2) 확률-$\boxed{1}$ 확률의 뜻과 활용 <확률과 통계>-(2) 확률-$\boxed{2}$ 조건부확률 <확률과 통계>-(3) 통계-$\boxed{1}$ 확률분포
	성취기준	**<확률과 통계>-(2) 확률-$\boxed{1}$ 확률의 뜻과 활용** [12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. [12확통02-02] 확률의 기본 성질을 이해한다. [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다. **<확률과 통계>-(2) 확률-$\boxed{2}$ 조건부확률** [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **<확률과 통계>-(3) 통계-$\boxed{1}$ 확률분포** [12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련자료	재구성
고등학교 교과서	수학	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2020	83~86		
	수학I	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2020	123~128		
	미적분	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2020	27~36		
	확률과 통계	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2020	11-18, 27~30, 43~62, 65~66, 79~83, 91~92, 110~111		
기타	EBS 수능특강 미적분	김형균 외 3인	EBS	2020	16~27		
	EBS 수능특강 확률과 통계	김경돈 외 3인	EBS	2020	58~73		

5. 문항 해설

- 제시문 (1)에서 추출될 수 있는 l의 결과를 파악하고, 각 결과들이 추출될 확률이 동일함을 인식한다.
- 제시문 (2)에서 추출될 수 있는 m의 결과를 파악하고, 각 결과들이 추출될 확률이 동일함을 인식한다.
- 추출 가능한 순서쌍 $(l,\ m)$의 전체 개수를 파악하고 각 순서쌍이 추출될 확률이 동일함을 인식한다.
- 등비급수가 수렴하고, 등비급수의 계산법으로 주어진 조건을 만족하는 공비의 조건을 파악한다.
- 반복 시행의 의미를 알고 주어진 반복 시행의 결과들을 파악한다.

【문제 2-1】
- 제시문 (3)의 추출된 l, m을 이용하여 만든 등비수열의 등비급수가 수렴하는 조건을 찾아낸다.
- 등비급수가 수렴할 경우에 수렴값의 계산식을 이용하여 그 값을 구한다.
- 일반항과 등비급수의 수렴값과의 관계인 제시문 (5)에 주어진 조건에 맞는 공비를 찾아낸다.
- 찾아낸 공비들의 조건에 맞는 순서쌍 $(l,\ m)$을 찾고, 그 확률을 각 순서쌍이 나올 확률이 동일함으로 전체 순서쌍 중에 차지하는 비율로 확률을 계산한다.

【문제 2-2】
- 제시문 (5)에 설명한 반복 시행이 최소 2회, 최대 4회 가능함을 파악한다.
- 반복 시행의 횟수에 따라 실패의 횟수가 어떻게 달라지는지를 파악하여 실패의 횟수인 X가 갖는 값을 찾아낸다.
- 독립시행의 확률 계산법을 이용하여 실패의 횟수에 따른 확률들을 계산한다.
- 구해진 확률들을 이용하여 X의 확률분포를 표로 만든다.

【문제 2-3】
- 제시문 (5)에 설명한 반복 시행의 횟수인 Y가 갖는 값을 파악한다.
- Y가 갖는 값과 X가 갖는 값과의 관계를 찾아낸다.
- X의 확률분포를 이용하여 Y가 갖는 값들의 확률들을 계산한다.
- 구해진 확률들을 이용하여 Y의 확률분포를 표로 만든다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 2-1	[문제2-1]의 예시 답안의 식 (10)까지 구하고 확률을 구할 수 있다. (A) • 추출된 l, m이 모두 자연수이므로 등비수열의 공비가 식 (1)임을 안다. • 등비급수가 수렴하기 위한 공비의 조건이 식 (2)임을 안다. • 수렴하는 등비급수의 계산법을 안다. • 계산된 등비급수의 값으로 주어진 조건을 식 (6)처럼 표시할 수 있다. • 부등식을 정리하여 식 (8)을 이끌어낼 수 있다. • 최종적으로 성공이 되는 공비의 조건이 식 (9)임을 안다. • 추출 가능한 $(l,\ m)$의 순서쌍 중 조건에 맞는 순서쌍이 무엇인지 안다. • 제시문 (1)과 (2)에 관련된 추출 확률을 알고 최종 확률을 구할 수 있다.	30
	[문제2-1]의 예시 답안의 식(9)까지 구할 수 있다. (B) • 추출된 l, m이 모두 자연수이므로 등비수열의 공비가 식 (1)임을 안다. • 등비급수가 수렴하기 위한 공비의 조건이 식 (2)임을 안다. • 수렴하는 등비급수의 계산법을 안다. • 계산된 등비급수의 값으로 주어진 조건을 식 (6)처럼 표시할 수 있다. • 부등식을 정리하여 식 (8)을 이끌어낼 수 있다. • 최종적으로 성공이 되는 공비의 조건이 식 (9)임을 안다.	25
	[문제2-1]의 예시 답안의 식(6)까지 구할 수 있다. (C) • 추출된 l, m이 모두 자연수이므로 등비수열의 공비가 식 (1)임을 안다. • 등비급수가 수렴하기 위한 공비의 조건이 식 (2)임을 안다. • 수렴하는 등비급수의 계산법을 안다. • 계산된 등비급수의 값으로 주어진 조건을 식 (6)처럼 표시할 수 있다.	15
	[문제2-1]의 예시 답안의 식 (1)과 (3)을 구할 수 있다. (D) • 추출된 l, m이 모두 자연수이므로 등비수열의 공비가 식 (1)임을 안다. • 등비급수가 수렴하기 위한 공비의 조건이 식 (2)임을 안다.	5

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">문제의 의미를 알지 못한다. (E)</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="6">문제
2-2</td><td colspan="2">[문제2-2]의 예시 답안의 ①~③을 알고 (11)과 확률분포를 구한다. (A)

• 반복 시행이 2회, 3회, 4회가 가능하다는 것을 안다.
• 반복 시행이 2~4회인 경우의 실패 횟수에 대한 ①~③에 대하여 안다.
• 독립 시행의 확률 계산법 등으로 (11)의 확률들을 계산하고 확률분포를 제시한다.</td><td>40</td></tr>
<tr><td colspan="2">[문제2-2]의 예시 답안의 ①~③을 안다. 확률 계산 과정이 부정확하다. (B)

• 반복 시행이 2회, 3회, 4회가 가능하다는 것을 안다.
• 반복 시행이 2~4회인 경우의 실패 횟수에 대한 ①~③에 대하여 안다.
• 독립 시행의 확률 계산법 등을 알지만 정확히 확률을 계산하지 못한다.</td><td>32</td></tr>
<tr><td colspan="2">[문제2-2]의 예시 답안의 ①~③을 정확히 생각하지 못한다. (C)

• 반복 시행이 2회, 3회, 4회가 가능하다는 것을 안다.
• 반복 시행이 2회, 3회인 경우의 실패 횟수에 대한 ①과 ②를 알지만 반복 시행 4회인 경우에 실패 횟수에 대한 ③의 경우는 정확히 알지 못한다.
• ③을 정확히 알지는 못하지만 확률(틀린 결과이지만)을 계산하는 정도이다.</td><td>20</td></tr>
<tr><td colspan="2">[문제 2-2]의 예시 답안의 ①과 ② 정도만 안다. (D)

• 반복 시행이 2회, 3회, 4회가 가능하다는 것을 안다.
• 반복 시행이 2회, 3회인 경우의 실패 횟수에 대한 ①과 ②를 알지만 반복 시행 4회인 경우에 실패 횟수에 대한 ③의 경우는 정확히 알지 못한다.</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="2">문제의 의미를 알지 못한다. (E)</td><td rowspan="2">0</td></tr>
<tr><td>[문제2-1]에서 확률이 틀렸을 경우</td><td>위 해당 등급에서 한 등급씩 하향 등급 부여</td></tr>
<tr><td>문제
2-3</td><td colspan="2">[문제2-3]의 예시 답안에서 (12), ①~③을 알고 이를 이용하여 (13) 혹은 (14)를 계산한다. (A)

• Y가 갖는 값이 (12)이 됨을 안다.</td><td>30</td></tr>
</table>

	• X와 Y의 관계와 확률 ①~③을 안다. • ①~③을 이용하여 식 (13) 혹은 (14)를 표현하고 계산한다.		
	[문제2-3]의 예시 답안에서 (12)과 ①~③을 안다. (B) • Y가 갖는 값이 (12)이 됨을 안다. • X와 Y의 관계와 확률 ①~③을 안다.		25
	[문제2-3]의 예시 답안에서 (12)과 ①, ② 정도만 안다. (C) • Y가 갖는 값이 (12)이 됨을 안다. • X와 Y의 관계와 확률 중 ①과 ② 정도만 안다.		15
	[문제2-3]의 예시 답안에서 Y가 갖는 값이 (12)인 정도만 안다. (D)		5
	문제의 의미를 알지 못한다. (E)		0
	[문제2-3]의 예시 답안에서 (14)를 먼저 계산하는 경우	[문제2-3]의 예시 답안에서 (14)를 계산하고 (12)과 ①, ② 정도만안다. (B) • X의 확률분포만으로 조건부확률을 (14)와 같이 구한다. • X와 Y의 관계와 확률 중 ①과 ② 정도만 안다.	25
		[문제2-3]의 예시 답안에서 (14)를 계산한다. (C) • X의 확률분포만으로 조건부확률을 (14)와 같이 구한다.	
	[문제2-1]에서 확률이 틀렸을 경우	[문제 2-2]를 정확히 풀이한 경우에만 위의 각 해당되는 등급 부여	15

7. 예시 답안 혹은 정답

【문제 2-1】

(3)에서 추출된 l, m은 모두 자연수이므로 추출된 순서쌍 $(l,\ m)$으로 만든 등비수열 $a_n = k\left(\frac{m}{l}\right)^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$의 공비 $\frac{m}{l}$은 0보다 크다. 즉,

$$\frac{m}{l} > 0 \qquad \text{-----------(1)}$$

이다. 여기서 $k>0$인 상수이다. (4)의 설명에서 $\{a_n\}$의 등비급수 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$이 수렴하기 위한 공비의 조건은

$$-1 < \frac{m}{l} < 1 \qquad \text{-----------(2)}$$

이다. 그러므로 부등식 (1)과 (2)에 의해서 등비급수 $\{a_n\}$이 수렴하기 위한 공비의 조건은

$$0 < \frac{m}{l} < 1 \qquad \text{-----------(3)}$$

이다. 부등식 (3)의 조건 하에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \ge \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$는

$$k\left(\frac{m}{l}\right)^{n-1} \ge \sum_{i=n+1}^{\infty} k\left(\frac{m}{l}\right)^{i-1} \qquad \text{-----------(4)}$$

이다. 부등식 (4)의 오른쪽 항은 초항이 $k\left(\frac{m}{l}\right)^{n}$이고 공비가 $\frac{m}{l}$인 등비급수이므로

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} k\left(\frac{m}{l}\right)^{i-1} = \frac{k\left(\frac{m}{l}\right)^{n}}{1-\frac{m}{l}} \qquad \text{-----------(5)}$$

이다. 따라서 식 (5)의 결과를 부등식 (4)에 대입하면 부등식 (4)는 다음과 같다.

$$k\left(\frac{m}{l}\right)^{n-1} \ge \frac{k\left(\frac{m}{l}\right)^{n}}{1-\frac{m}{l}} \qquad \text{-----------(6)}$$

부등식 (6)을 간략히 하면

$$1 \ge \frac{\frac{m}{l}}{1-\frac{m}{l}} \qquad \text{-----------(7)}$$

이므로 부등식 (7)은 $1-\frac{m}{l} \geq \frac{m}{l}$이 되고 이를 정리하면 $2\frac{m}{l} \leq 1$로

$$\frac{m}{l} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{-----------(8)}$$

이다. 따라서 부등식 (3)과 (8)에 의하면

$$0 < \frac{m}{l} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{-----------(9)}$$

이면 제시문 (4)에 설명한 성공의 조건이 된다. 한편, 제시문 (1)에서 추출될 수 있는 l의 결과는 1, 2, 3, 4, 5, 6이고 각 결과들이 추출될 확률은 $\frac{1}{6}$로 동일하다. 제시문 (2)에서 추출될 수 있는 m의 결과는 1, 2, 3이고 각 결과들이 추출될 확률은 $\frac{1}{3}$로 동일하다. 그러므로 추출 가능한 순서쌍 $(l,\ m)$의 개수는 $6 \times 3 = 18$개이며 각각의 순서쌍이 나올 확률은 $\frac{1}{18}$로 동일하다. 성공의 조건 (9)를 만족하는 순서쌍 $(l,\ m)$은 가능한 순서쌍 18개 중 다음과 같이 9개이다.

$$(2,1),\ (3,1),\ (4,1),\ (4,2),\ (5,1),\ (5,2),\ (6,1),\ (6,2),\ (6,3) \quad \text{---(10)}$$

그러므로 (4)에 설명한 성공의 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

【문제 2-2】

(5)에서 설명한 반복 시행에서 실패한 시행의 횟수를 확률변수 X라 하자. 성공을 “○”라 하고 실패를 “×”라 표시하면 X가 갖는 값은 다음과 같이 0, 1, 2, 3, 4이다.

① 두 번의 반복 시행만 했을 경우는 “○○”로 실패가 없으므로 $X=0$이다.

② 세 번의 반복 시행만 했을 경우는 첫 두 번의 반복 시행 중에서 한 번 성공하고 세 번째에서 성공하는 경우로 “○×○”, “×○○”이므로 $X=1$이다.

③ 네 번의 반복 시행까지 했을 경우는 다음과 같다.

- 두 번 성공한 경우는 “○××○”, “×○×○”, “××○○”이므로 $X=2$이다.
- 한 번 성공한 경우는 “○×××”, “×○××”, “××○×”, “×××○”이므로 $X=3$이다.
- 한 번도 성공하지 못한 경우는 “××××”이므로 $X=4$이다.

그러므로 [문제 2-1]에서 구한 성공의 확률이 $\frac{1}{2}$이고 각 반복 시행들이 독립시행이므로 X가 갖는 값에 대한 각각의 확률은 다음과 같다.

$$P(X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

$$P(X=1)={}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{2}{8}=\frac{1}{4},$$

$$P(X=2)={}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\left(\frac{1}{2}\right)=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{16},$$

$$P(X=3)={}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}=\frac{1}{4},$$

$$P(X=4)={}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}. \qquad \text{---------}(11)$$

그러므로 X의 확률분포는 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	1

【문제 2-3】

(5)에서 설명한 반복 시행에서 시행의 횟수를 확률변수 Y라 하자. (5)의 설명에 의하면 Y가 갖는 값은

$$2,\ 3,\ 4 \qquad ----------(12)$$

임이 자명하다. Y는 반복 시행의 횟수이고, X는 그 시행 중 실패한 횟수이므로 두 확률변수들의 관계와 [문제 2-2]에서 구한 X의 확률분포를 이용하면 Y가 갖는 값의 확률들은 다음과 같다.

① $Y=2$인 경우는 $X=0$이므로 $\mathrm{P(Y=2)=P(X=0)}=\frac{1}{4}$이다.

② $Y=3$인 경우는 $X=1$이므로 $\mathrm{P(Y=3)=P(X=1)}=\frac{1}{4}$이다.

③ $Y=4$인 경우는 $X=2,\ 3,\ 4$이므로

$$\mathrm{P(Y=4)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)}=\frac{3}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}\text{이다.}$$

그러므로 Y의 확률분포는 다음과 같다.

Y	2	3	4	합계
$\mathrm{P(Y=y)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

한편, 4번까지 반복 시행할 사건을 A라 하고 성공이 한 번일 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 4번 시행 중 성공이 한 번(실패가 세 번)일 사건이다. A의 확률은 Y의 확률분포에 의하면 $\mathrm{P(A)=P(Y=4)}$이고 X의 확률분포에 의하면 [문제 2-2]의 풀이의 ③에 의하여 $\mathrm{P(A)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)}$이다. 그리고 $A\cap B$의 확률은 X의 확률분포에 의하면 $\mathrm{P(A\cap B)=P(X=3)}$이다. 그러므로 사건 A가 일어났을 때 사건 B가 일어날 확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P(B|A)}=\frac{\mathrm{P(A\cap B)}}{\mathrm{P(A)}}=\frac{\mathrm{P(X=3)}}{\mathrm{P(Y=4)}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2} \qquad ----(13)$$

혹은

$$\mathrm{P(B|A)}=\frac{\mathrm{P(A\cap B)}}{\mathrm{P(A)}}=\frac{\mathrm{P(X=3)}}{\mathrm{P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2} \qquad --(14)$$