2. 자연계열

[단국대학교 문항카드 7]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) 문항번호	자연계열, 오전 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분, 수학, 수학 II
	핵심개념 및 용어	접선의 방정식, 함수의 극대와 극소, 적분법, 정적분
예상 소요 시간	70분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(\mathrm{a},\mathrm{f}(\mathrm{a}))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

(나) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서

(1) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$

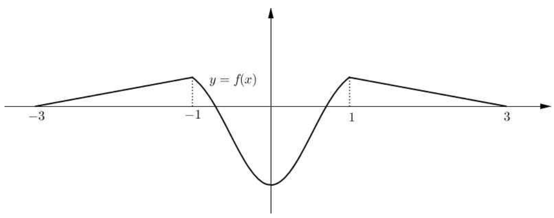
(2) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$

(다) 두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능하고 $f'(x), g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[\, f(x)g(x) \,\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2e}(x+3) & (-3\le x<-1) \\ (2x^2-1)e^{-x^2} & (-1\le x<1) \\ -\dfrac{1}{2e}(x-3) & (1\le x\le 3) \end{cases}$$



$-3\le a\le 3$에 대하여, 함수 $F(x)$는

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (-3 \le x \le 3)$$

[논제 1] $\int_0^1 f(t)dt$의 값을 구하시오. (15점)

[논제 2] $-3 \le x \le 3$에서 곡선 $y = F(x)$와 x축이 한 점에서 만나도록 하는 a의 값을 모두 구하시오. (20점)

[논제 3] $g(x) = x - x^2 + |x - x^2|$에 대하여

$$h(x) = 16\,g\left(\frac{x}{4}\right) + 8\,g\left(\frac{x}{2} - 2\right)$$

라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 실수 t의 값을 모두 구하시오. (20점)

각 t에 대하여, x에 대한 방정식 $t\,h(x) = x\,h(t)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

3. 출제 의도

[논제 1] 적분법을 이해하고 있는지를 평가
[논제 2] 극값의 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가
[논제 3] 함수의 개념과 접선의 성질을 이해할 수 있는지를 평가

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취기준

문항 및 제시문		학습내용 성취기준
제시문 (가, 나, 다)	교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - 3 도함수의 활용 - [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. - [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 - [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법- [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

<table>
<tr><th colspan="2">문항 및 제시문</th><th>학습내용 성취기준</th></tr>
<tr><td></td><td>성취기준·성취수준</td><td>[미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용
- [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
- [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
[수학 Ⅱ] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 - [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
[미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법- [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">논제 1-1</td><td>교육과정</td><td>[미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법- [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법- [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">논제 1-2</td><td>교육과정</td><td>[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 - [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
[수학 Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 - [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용 - [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
[수학 Ⅱ] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 - [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">논제 1-3</td><td>교육과정</td><td>[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용
- [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
- [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용
- [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
- [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	고성은 외	좋은책신사고	2020	214-216
	수학	류희찬 외	천재교과서	2020	224-226
	수학 Ⅱ	고성은 외	좋은책신사고	2020	30-34, 72-74, 119-121
	미적분	박교식 외	동아출판(주)	2020	101-107, 127-144

5. 문항 해설

▹ [논제 1]에서 적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 평가하고, [논제 2]에서는 극값의 개념을 이용하여 함수의 그래프를 그릴 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다. 그리고 [논제 3]에서는 함수의 개념과 접선의 성질을 이해할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	적분함수 $-xe^{-x^2}$ 을 제시	10
	정답을 제시	5
1-2	적분함수 $F(x)$ 를 제시	12
	정답을 제시	8
1-3	$h(x)$의 그래프 등 관계식을 제시	8
	정답을 제시	12

7. 예시 답안

[논제 1] 부분적분법에 의하여

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,dt &= \int_0^1 2t^2e^{-t^2}dt - \int_0^1 e^{-t^2}dt \\ &= \int_0^1 (-t)\cdot(-2te^{-t^2})dt - \int_0^1 e^{-t^2}dt \\ &= \left[-te^{-t^2}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-t^2}dt - \int_0^1 e^{-t^2}dt = -\frac{1}{e}\end{aligned}$$

[논제 2] $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \int_0^x f(t)dt - \int_0^a f(t)dt$ 이므로 $F_0(x) = \int_0^x f(t)dt$라 하면

$$F(x) = F_0(x) - F_0(a)$$

이다. $F_0(x)$는

(i) $-3 \le x < -1$인 경우:

$$F_0(x) = \int_0^{-1}(2t^2-1)e^{-t^2}dt + \int_{-1}^x \frac{1}{2e}(t+3)\,dt = \frac{1}{2e}\left(\frac{1}{2}x^2+3x\right) + \frac{9}{4e}$$

(ii) $-1 \le x < 1$인 경우: $F_0(x) = \int_0^x f(t)dt = -xe^{-x^2}$

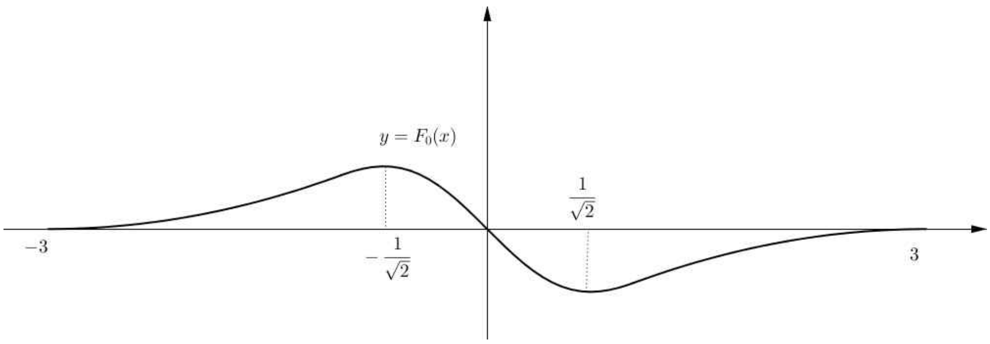
(iii) $1 \le x \le 3$인 경우:

$$F_0(x) = \int_0^1 (2t^2-1)e^{-t^2}dt + \int_1^x -\frac{1}{2e}(t-3)dt = -\frac{1}{2e}\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right) - \frac{9}{4e}$$

함수 $F_0(x)$의 증감표를 조사하면

x	-3	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	3
$F_0{}'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F_0(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	0

이므로 함수 $F_0(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

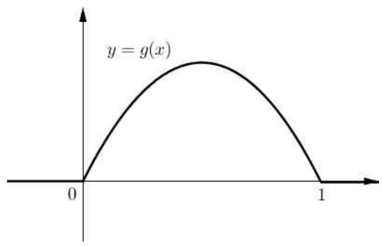


곡선 $y = F(x)$와 x축이 한 점에서 만나는 경우는 곡선 $y = F_0(x)$와 직선 $y = F_0(a)$가 한 점에서 만나는 경우와 같다. 따라서 그래프로부터 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

[논제 3] $x - x^2 \ge 0$ 이면 $g(x) = 2(x - x^2)$ 이고 $x - x^2 < 0$ 이면 $g(x) = 0$ 이므로

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ -2x(x-1) & (0 \le x \le 1) \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

이다.



이 식으로부터,

$$16g\left(\frac{x}{4}\right) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ -2x(x-4) & (0 \le x \le 4) \\ 0 & (x > 4) \end{cases} \quad \text{--------------------------------}(1)$$

이고

$$8g\left(\frac{x}{2}-2\right)=\begin{cases} 0 & (x<4) \\ -4(x-4)(x-6) & (4\le x\le 6) \\ 0 & (x>6) \end{cases} \qquad \text{------------------------}(2)$$

이다.

(1)과 (2)에 의하여

$$h(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ -2x(x-4) & (0\le x<4) \\ -4(x-4)(x-6) & (4\le x\le 6) \\ 0 & (x>6) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여, x에 대한 방정식

$$t\,h(x)=x\,h(t) \qquad \text{--------------------------------------}(3)$$

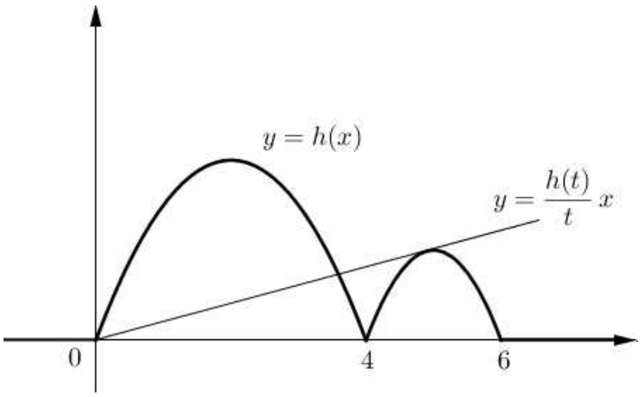
을 풀면 다음과 같다.

(i) $t=0$이면 모든 실수 x가 방정식 (3)을 만족한다.

(ii) $t\neq 0$이면 x에 대한 방정식

$$h(x)=\frac{h(t)}{t}x$$

의 실근의 개수는 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=\dfrac{h(t)}{t}x$의 교점의 개수와 같다.



위의 그래프로부터 직선 $y=\dfrac{h(t)}{t}x$와 곡선 $y=h(x)$가 세 점에서 만나는 경우는 구간 $4\le x\le 6$에서 직선 $y=\dfrac{h(t)}{t}x$이 곡선 $y=h(x)$의 그래프에 접하는 경우이다. 실제로, 원점을 지나는 직선이 곡선 $y=-4(x-4)(x-6)$에 접하는 접점의 x좌표는 $x=\ 2\sqrt{6}$이므로 접선의 방정식은

$$y=(40-16\sqrt{6})x$$

이다. 또한 구간 $0\le x\le 4$에서 직선 $y=(40-16\sqrt{6})x$와 곡선 $y=h(x)$가 만나는 점의 x좌표는 $x=0$과 $x=8\sqrt{6}-16$이다. 결국 구하고자 하는 t의 값은

$$t=8\sqrt{6}-16 \quad \text{과} \quad t=\ 2\sqrt{6}$$

이다.

[단국대학교 문항카드 8]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) 문항번호	자연계열, 오전 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	독립사건, 이항분포
예상 소요 시간	50분 / 전체 120분	

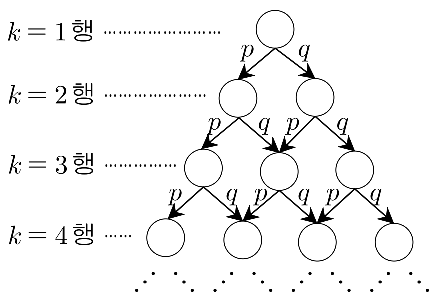
2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

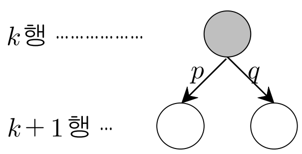
<제시문>

(가) n개 중에서 같은 것이 각각 a개, b개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{n!}{a!\,b!}$ (단, $n=a+b$)
(나) 두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ (단, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$)
(다) 확률 $\mathrm{P}(X=x)$의 증감을 파악하기 위하여 확률의 비 또는 차를 이용할 수 있다.

[그림 1]과 같이 k번째 행에는 k개의 분기점이 있는 삼각형 모양의 배열이 있다. ($k=1,2,\cdots,101$)



[그림 1]



[그림 2]

공은 다음 규칙에 따라 아래로 이동한다.

(1) 공은 k번째 행에서 화살표 방향을 따라 바로 아래의 $k+1$번째 행의 가장 가까운 두 분기점 중 한 곳으로 이동한다.([그림 2]) (2) 각 분기점에서 공이 바로 아래 행의 왼쪽 분기점으로 이동할 확률 $p=\frac{1}{5}$ 이고, 바로 아래 행의 오른쪽 분기점으로 이동할 확률 $q=\frac{4}{5}$ 이다. (3) 한 분기점에서 공의 이동 방향은 이전 분기점에서의 이동 방향에 영향을 받지 않는다.

공이 마지막으로 101번째 행에 도착하였을 때, 101번째 행의 분기점들에 왼쪽부터 차례로 $0, 1, 2, \cdots, 100$의 순번을 부여하였다. 공이 도착한 분기점의 번호를 확률변수 X라 하고, 공이 1행에서 출발하여 위의 규칙을 통하여 101번째 행의 x번 분기점에 도착할 확률을 $\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{x})$라 하자.

[논제 1] $\frac{\mathrm{P}(X=87)}{\mathrm{P}(X=88)}$ 을 구하시오. (20점)

[논제 2] $\mathrm{P}(X=x)$가 $x=a$에서 최댓값을 가질 때 a의 값을 구하시오. (25점)

3. 출제 의도

[논제 1] 독립시행의 개념을 이해하고 있는지를 평가
[논제 2] 이항분포의 개념을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

문항 및 제시문		학습내용 성취 기준
제시문 (가, 나, 다)	교육과정	[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ① 순열과 조합 - [12확통01-01] 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다. [확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률 - [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률 - [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - (가) 순열과 조합 - [12확통01-01] - [평가준거 성취기준 ③] 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다. [확률과 통계] - (2) 확률 - (나) 조건부확률 - [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [확률과 통계] - (2) 확률 - (나) 조건부확률 - [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

<table>
<tr><th colspan="2">문항 및 제시문</th><th>학습내용 성취 기준</th></tr>
<tr><td rowspan="2">논제 2-1</td><td>교육과정</td><td>[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - 1 순열과 조합 - [12확통01-01] 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
[확률과 통계] - (2) 확률 - 2 조건부확률 - [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - (가) 순열과 조합 - [12확통01-01] - [평가준거 성취기준 ③] 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
[확률과 통계] - (2) 확률 - (나) 조건부확률 - [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">논제 2-2</td><td>교육과정</td><td>[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - 1 순열과 조합 - [12확통01-01] 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
[확률과 통계] - (2) 확률 - 2 조건부확률 - [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - (가) 순열과 조합 - [12확통01-01] - [평가준거 성취기준 ③] 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
[확률과 통계] - (2) 확률 - (나) 조건부확률 - [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	권오남 외	교학사	2020	10-25, 67-77
	확률과 통계	고성은 외	좋은책신사고	2020	10-21, 63-75
	확률과 통계	박교식 외	동아출판	2020	10-27, 66-77

5. 문항 해설

▹ [논제 1]에서는 독립시행의 개념을 이해하고 있는지를 평가하고, [논제 2]에서는 이를 활용할 수 있는지를 평가하기 위한 실생활 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	공이 87번과 88번 분기점에 도착하는 확률을 제시	15
	정답을 제시	5
2-2	$P(X=x)$와 $P(X=x+1)$의 비 또는 차를 제시	7
	부등식 $\frac{4(100-x)}{x+1}>1$의 풀이 과정을 제시	8
	정답을 제시	10

7. 예시 답안

[논제 1] 공이 87번 분기점에 도착하는 사건이 발생하려면 100번 중 87번은 오른쪽으로, 13번은 왼쪽으로 이동하여야 한다. 공의 이동은 규칙 (3)에 의해 독립시행이므로

$$P(X=87)={}_{100}C_{87}\left(\frac{1}{5}\right)^{13}\left(\frac{4}{5}\right)^{87}=\frac{100!}{13!87!}\left(\frac{1}{5}\right)^{13}\left(\frac{4}{5}\right)^{87}$$

이고

$$P(X=88)={}_{100}C_{88}\left(\frac{1}{5}\right)^{12}\left(\frac{4}{5}\right)^{88}=\frac{100!}{12!88!}\left(\frac{1}{5}\right)^{12}\left(\frac{4}{5}\right)^{88}$$

이므로 정답은 $\frac{P(X=87)}{P(X=88)}=\frac{22}{13}$ 이다.

[논제 2] 공이 101번째 행의 x번 분기점에 도착할 확률

$$P(X=x)=\frac{100!}{x!(100-x)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{100-x}\left(\frac{4}{5}\right)^{x}$$

이므로

$$\frac{P(X=x+1)}{P(X=x)}=\frac{\frac{100!}{(x+1)!(100-x-1)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{100-x-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{x+1}}{\frac{100!}{x!(100-x)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{100-x}\left(\frac{4}{5}\right)^{x}}$$

$$=\frac{4(100-x)}{x+1} \qquad \text{--------------------}(*)$$

이다. (*)이 1보다 클 필요충분조건은 $399>5x$ 이므로

$x\le 79$일 때 $P(X=x+1)>P(X=x)$ 이고 $x\ge 80$일 때 $P(X=x+1)<P(X=x)$

이다. 즉, $x\le 80$일 때 $P(X=x)$는 증가하고 $x\ge 80$일 때 $P(X=x)$는 감소한다.

그러므로 구하고자 하는 a의 값은 80이다.

[단국대학교 문항카드 9]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) 문항번호	자연계열, 오후 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	독립사건, 조건부확률, 확률의 덧셈정리
예상 소요 시간	65분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A) > 0,\ \mathrm{P}(B) > 0)$$

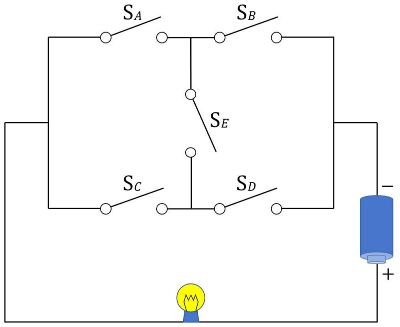
(나) 사건 B가 일어났을 때 사건 A의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \quad (\text{단, } \mathrm{P}(B) > 0)$$

(다) 두 사건 A와 B에 대하여

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap B^c)$$

그림과 같은 회로에서 독립적으로 작동하는 스위치 S_A, S_B, S_C, S_D, S_E가 닫힐 확률이 순서대로 $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{5}$, p 이다.



[논제 1] $p = 1$일 때, 전구가 켜질 확률을 구하시오. (15점)

[논제 2] $0 \le p < 1$ 일 때, 전구가 켜질 확률이 $\frac{a}{625}p + \frac{b}{625}$ 이다. 자연수 a 와 b 의 값을 구하시오. (20점)

[논제 3] 다음 조건을 만족시키는 p 의 최솟값과 최댓값을 구하시오. (20점)

전구가 켜졌을 때, S_E가 닫혀있을 확률은 $\frac{1}{2}$이상이고 전구가 켜졌을 때, S_E가 닫혀있지 않을 확률은 $\frac{1}{3}$이상이다.

3. 출제 의도

[논제 1] 확률의 기본개념을 이해하고 있는지를 평가
[논제 2] 확률의 곱셈정리를 이해하고 활용할 수 있는지를 평가
[논제 3] 조건부확률의 개념을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

문항 및 제시문		학습내용 성취 기준
제시문 (가, 나, 다)	교육과정	[확률과 통계] - (2) 확률 - 2 조건부확률 - [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. [확률과 통계] - (2) 확률 - 2 조건부확률 - [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [확률과 통계] - (2) 확률 - 1 확률의 뜻과 활용 - [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (2) 확률 - (나) 조건부확률 - [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. [확률과 통계] - (2) 확률 - (나) 조건부확률 - [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [확률과 통계] - (2) 확률 - (가) 확률의 뜻과 활용 - [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
논제 1-1	교육과정	[확률과 통계] - (2) 확률 - 2 조건부확률 - [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (2) 확률 - (나) 조건부확률 - [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.
논제 1-2	교육과정	[확률과 통계] - (2) 확률 - 2 조건부확률 - [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (2) 확률 - (나) 조건부확률 - [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

<table>
<tr><th colspan="2">문항 및 제시문</th><th>학습내용 성취 기준</th></tr>
<tr><td rowspan="2">논제 1-3</td><td>교육과정</td><td>[확률과 통계] - (2) 확률 - 1 확률의 뜻과 활용
- [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
- [12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.
[확률과 통계] - (2) 확률 - 2 조건부확률 - [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[확률과 통계] - (2) 확률 - (가) 확률의 뜻과 활용
- [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
- [12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.
[확률과 통계] - (2) 확률 - (나) 조건부확률 - [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	김원경 외	비상교육	2020	53-60
	확률과 통계	권오남 외	교학사	2020	62-70
	확률과 통계	박교식 외	동아출판	2020	61-69

5. 문항 해설

▹ [논제 1]과 [논제 2]에서는 확률의 기본개념과 곱셈정리를 이용할 수 있는지를 평가하고, [논제 3]에서는 조건부확률의 개념을 이해하고 활용할 수 있는지를 측정하는 실생활 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	정답의 분모를 제시	5
	정답을 제시	10
1-2	스위치 S_E가 열렸을 때의 조건부확률을 제시	10
	정답을 제시	10
1-3	조건부확률의 범위를 제시	10
	정답을 제시	10

7. 예시 답안

스위치 S_A, S_B, S_C, S_D, S_E가 닫힐 사건을 순서대로 A, B, C, D, E라고 하고, 전구에 불이 켜질 사건을 S라 하자. 각 사건의 확률을 순서대로 $\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B), \mathrm{P}(C), \mathrm{P}(D), \mathrm{P}(E)$, $\mathrm{P}(\mathrm{S})$라 하자.

[논제 1] $p=1$ 이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{S}|\mathrm{E})=\mathrm{P}(\mathrm{S})$이고,

$$\mathrm{P}(S)=[1-\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(C^c)][1-\mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(D^c)]=\left[1-\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\right]\left[1-\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\right]=\frac{19^2}{5^4}=\frac{361}{625}$$

(별해) $\mathrm{P}(S)=\mathrm{P}((A\cup C)\cap \mathrm{P}(B\cup D))$

$$=[\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap C)][\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(D)-\mathrm{P}(B\cap D)]=\left[\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{6}{25}\right]^2=\frac{361}{625}$$

[논제 2] S_E가 닫혀있지 않을 때 전구가 켜질 확률

$$\mathrm{P}(S|E^c)=1-[1-\mathrm{P}(A|B)][1-\mathrm{P}(C\cap D)]$$

$$=1-\left[1-\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\right]\left[1-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\right]=1-\left(\frac{21}{25}\right)\left(\frac{16}{25}\right)=\frac{289}{625}$$

이고, [논제 1]에서 $\mathrm{P}(S|E)=\dfrac{361}{625}$이므로

$$\mathrm{P}(S)=\mathrm{P}(S\cap E)+\mathrm{P}(S\cap E^c)=\mathrm{P}(S|E)\,\mathrm{P}(E)+\mathrm{P}(S|E^c)\,\mathrm{P}(E^c)$$

$$=\frac{361}{625}p+\frac{289}{625}(1-p)=\frac{72}{625}p+\frac{289}{625}$$

결국 $a=72$, $b=289$ 이다.

(별해) $\mathrm{P}(S|E^c)=\mathrm{P}((A\cap B)\cup(C\cap D))$

$$=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(C\cap D)-\mathrm{P}(A\cap B\cap C\cap D)$$

$$=\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{289}{625}$$

[논제 3] 주어진 조건으로부터 $\dfrac{1}{2}\le \mathrm{P}(E|S)$, $\dfrac{1}{3}\le \mathrm{P}(E^c|S)$ 이므로 $\mathrm{P}(E|S)+\mathrm{P}(E^c|S)=1$에서

$$\frac{1}{2}\le \mathrm{P}(E|S)\le\frac{2}{3}$$

이고

$$\frac{1}{2}\le \mathrm{P}(E|S)=\frac{\mathrm{P}(S\cap E)}{\mathrm{P}(S)}=\frac{\frac{361}{625}\cdot p}{\frac{361}{625}p+\frac{289}{625}(1-p)}\le\frac{2}{3}$$

이므로 $\dfrac{289}{650}\le p\le\dfrac{578}{939}$이다. 따라서 p의 최솟값은 $\dfrac{289}{650}$, 최댓값은 $\dfrac{578}{939}$ 이다.

(별해) $\dfrac{1}{3}\le \mathrm{P}(E^c|S)\le\dfrac{1}{2}$을 이용하여 $\dfrac{289}{650}\le p\le\dfrac{578}{939}$임을 유도할 수 있다.

[단국대학교 문항카드 10]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) 문항번호	자연계열, 오후 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분, 수학, 수학 II
	핵심개념 및 용어	함수의 극대와 극소, 적분법, 정적분의 활용
예상 소요 시간	55분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

<제시문>

(가) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서
$f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대,
$f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

(나) 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 닫힌구간 $[\alpha,\beta]$에서 연속이고, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면

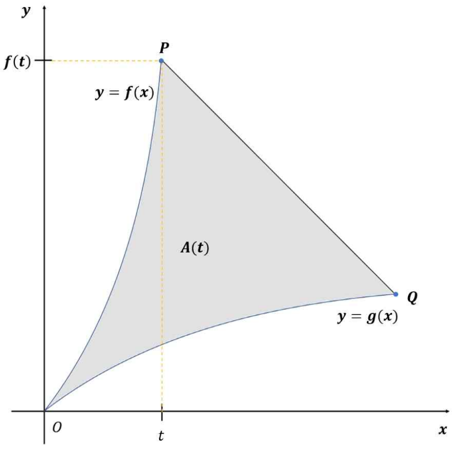
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

(다) 두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능하고 $f'(x), g'(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[\ f(x)g(x)\ \Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

- 음이 아닌 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$는 다음 (1), (2)를 만족시킨다.
  (1) $f(0)=0$
  (2) $x>0$에서 $f'(x)>1$
- 함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.
- 함수 $h(x)$는 다음 (3), (4), (5)를 만족시킨다.
  (3) 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수
  (4) $x=1, 2$에서 극값을 갖고 $h(1)h(2)=0$
  (5) $\displaystyle\int_0^3 h(x)dx = \frac{3}{2}$

$t>0$ 에 대하여, 곡선 $y=f(x)$, 곡선 $y=g(x)$
그리고 두 점 $\mathrm{P}(t,f(t))$ 와 $\mathrm{Q}(f(t),t)$ 를 잇는 직선으로
둘러싸인 영역의 넓이를 $A(t)$ 라고 하자.



[논제 1] $f(1)=2$ 이고 $\int_0^2 x\,g'(x)\,dx=1$ 일 때, $A(1)$ 의 값을 구하시오. (20점)

[논제 2] $A(2)=2\int_0^2 f(x)dx-\frac{7}{2}$ 일 때, $0\le x\le 3$ 에서 곡선 $y=h(g(x))$ 와 직선 $y=\frac{1}{2}$ 의 교점의 개수를 구하시오. (25점)

3. 출제 의도

[논제 1] 부분적분법을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가
[논제 2] 극대, 극소의 개념을 이해하고 있는지를 평가

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

문항 및 제시문		학습내용 성취 기준
제시문 (가),(나),(다) 및 문제설명	교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 - [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 - [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. - [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 - [12수학II02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용 - [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

문항 및 제시문		학습내용 성취 기준
	성취기준·성취수준	[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 - [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법 - [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. - [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 - [12수학II02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - (나) 정적분의 활용 - [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
논제 2-1	교육과정	[미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 - [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법 - [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분] - (3) 적분법 - (나) 정적분의 활용 - [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법 - [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
논제 2-2	교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 - [12수학II02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법 - [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. - [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 - [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 - [12수학II02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법 - [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. - [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용 - [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	홍성복 외	지학사	2020	219-231
	수학 II	권오남 외	교학사	2020	88-93
	미적분	홍성복 외	지학사	2020	150-155, 164-165

5. 문항 해설

▹ [논제 1]에서는 부분적분법을 활용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하고, [논제 2]에서는 극대, 극소의 개념과 치환, 부분적분법을 활용하여 방정식 문제를 해결할 수 있는지를 측정하는 미적분 활용문제이다.

6. 채점 기준

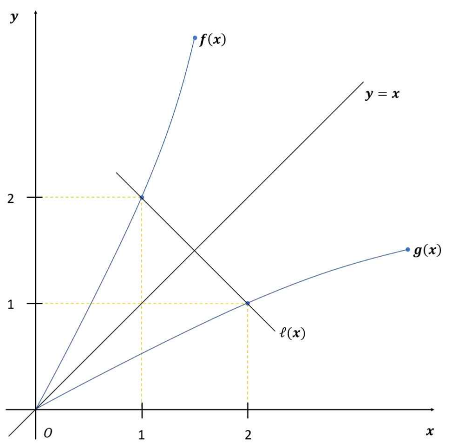
하위 문항	채점 기준	배점
2-1	$\int_0^2 g(s)ds = 1$ 임을 제시 또는 $\int_0^1 f(s)ds = 1$임을 제시	10
	정답을 제시	10
2-2	$h(x)$를 제시	10
	$g(3) = 2$를 제시	10
	정답을 제시	5

7. 예시 답안

조건 (2)에 의하여 함수 $f(x)$는 증가함수이고, $k(x) = x - f(x)$ 라고 하면 $k'(x) = 1 - f'(x) < 0$이므로 $k(x)$는 감소함수이다.
따라서 $x > 0$에서

$$x < f(x) \qquad \text{---------} \ (\star)$$

이다.
곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = x$의 위치는 오른쪽 그림과 같다.



두 점 $P(t, f(t))$와 $Q(f(t), t)$를 지나는 직선의 방정식은 $\ell(x) = -x + t + f(t)$이므로

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^t (f(s)-g(s))ds + \int_t^{f(t)} (\ell(s)-g(s))ds \\ &= \int_0^t f(s)ds - \int_0^{f(t)} g(s)ds - \frac{1}{2}((f(t))^2-t^2)+tf(t)-t^2+(f(t))^2-tf(t) \\ &= \int_0^t f(s)ds - \int_0^{f(t)} g(s)ds + \frac{1}{2}((f(t))^2-t^2) \end{aligned} \quad \text{-------- } (**)$$

이다. 또한 $u=g(s)$라 치환하면 $ds=f'(u)du$ 이고 부분적분법에 의하여

$$\int_0^{f(t)} g(s)ds = \int_0^t uf'(u)du = tf(t) - \int_0^t f(u)du \quad \text{------- } (***)$$

이다.

[논제 1] (**)로 부터

$$\begin{aligned} A(1) &= \int_0^1 f(s)ds - \int_0^{f(1)} g(s)ds + \frac{1}{2}((f(1))^2-1) \\ &= \int_0^1 f(s)ds - \int_0^{f(1)} g(s)ds + \frac{3}{2} \end{aligned} \quad \text{--------- } (1.1)$$

이다. 이제 $\int_0^1 f(s)ds$와 $\int_0^{f(1)} g(s)ds$를 계산하자. 먼저 $g(2)=1$이므로 부분적분법에 의하여

$$1 = \int_0^2 sg'(s)ds = 2g(2) - \int_0^2 g(s)ds = 2 - \int_0^2 g(s)ds$$

즉

$$\int_0^{f(1)} g(s)ds = \int_0^2 g(s)ds = 1 \quad \text{--------- } (1.2)$$

이다. 또한 (***)로 부터

$$1 = \int_0^{f(1)} g(s)ds = f(1) - \int_0^1 f(u)du$$

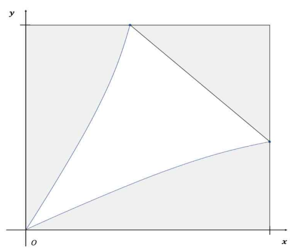
이고 $f(1)=2$ 이므로

$$\int_0^1 f(u)du = 1 \quad \text{-------------- } (1.3)$$

이다. (1.2)와 (1.3)를 (1.1)에 대입하면 $A(1)=\frac{3}{2}$ 이다.

(별해) $\int_0^2 g(s)ds = 1$이고 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대칭이므로

$$\begin{aligned} A(1) &= (\text{사각형의 넓이}) - 2\int_0^2 g(s)ds - (\text{삼각형의 넓이}) \\ &= 4-2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$



[논제 2] $h(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하자. 삼차함수 $h(x)$가 $x=1$, 2에서 극값을 가지므로

$$h'(x)=3a(x-1)(x-2)=3a(x^2-3x+2)$$

양변을 적분하면

$$h(x)=3a\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right)+C \qquad (C\text{는 적분상수})$$

이다. 조건 (4)에서 $h(x)$의 두 개의 극값 중 하나는 0이므로

$$h(1)=\frac{5}{2}a+C=0 \quad \text{또는} \quad h(2)=2a+C=0 \qquad \text{--------- (2.1)}$$

이다. 조건 (5)로부터

$$\frac{3}{2}=\int_0^3 h(x)dx=\int_0^3\left(ax^3-\frac{9}{2}ax^2+6ax+C\right)dx=\frac{27}{4}a+3C$$

이고 (2.1)에 대입하면 $a=2,\ -2$이다. $a>0$이므로 $a=2$이다. 따라서,

$$h(x)=2x^3-9x^2+12x-4$$

이다. 문제의 조건 $A(2)=2\int_0^2 f(s)ds-\frac{7}{2}$과 (**)로 부터

$$\int_0^2 f(s)ds-\int_0^{f(2)}g(s)ds+\frac{1}{2}((f(2))^2-4)=2\int_0^2 f(s)ds-\frac{7}{2}$$

이다. 여기서 (***)로 부터 $\int_0^{f(2)}g(s)ds=2f(2)-\int_0^2 f(s)ds$ 이므로

$$2\int_0^2 f(s)ds-2f(2)+\frac{1}{2}((f(2))^2-4)=2\int_0^2 f(s)ds-\frac{7}{2}$$

에서 $f(2)=1,3$를 얻는다. 그런데, (*)에 의하여 $f(2)=3$ 이고, 즉, $g(3)=2$이다.
그러므로 $\{g(x)\,|\,0\le x\le 3\}=[0,2]$이다.

아래 그림과 같이 $0\le t\le 2$ 에서 방정식 $h(t)=\frac{1}{2}$의 해는 2개이고 $g:[0,3]\to[0,2]$는 일대일대응이므로 $0\le x\le 3$에서 곡선 $y=h(g(x))$와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 개수는 2이다.