3. 생활과학계열, 미디어기술콘텐츠학과 논술전형 문제

※ 문항 1, 문항 2는 생략함(인문사회계열 논술전형 A유형 문제와 동일)

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) 실수 a, b, c에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 방정식 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$가 나타내는 도형은 이 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 도형과 동일하다.

(2) 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$는 극댓값과 극솟값을 갖고 두 값의 차는 4이다.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$와 실수 k에 대하여 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $g(x)$ $(-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2})$가 다음을 만족한다.

$$-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\text{인 모든 } x\text{에 대하여 } g(x) = kxf(x)$$

논제 1. 제시문 (ㄱ)의 a, b, c의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (20점)

논제 2. 제시문 (ㄴ)의 k의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (20점)

[문항 3] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

출제의도

가) 대칭이동의 의미를 알고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.

나) 도함수를 활용하여 함수의 극대 극소를 판별할 수 있는지 확인한다.

다) 확률밀도함수의 의미를 이해하고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.

문항해설

- 대칭이동과 도함수의 성질을 이용하여 함수의 계수를 구할 수 있는지를 평가한다.
- 연속확률변수의 성질을 이해하고 조건을 만족하는 상수를 구할 수 있는지를 평가한다.

평가기준

논제 1 [20점]

<table>
<tr><td>방정식 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $y = x^3 - ax^2 + bx - c$이다. 따라서 $a = 0$이고 $c = 0$이다.</td><td>5점</td></tr>
<tr><td>삼차함수 $f(x) = x^3 + bx$의 도함수 $f'(x) = 3x^2 + b$.
$b \geq 0$이면 삼차함수 $f(x)$의 극대, 극소가 존재하지 않으므로 $b < 0$이다.</td><td>5점</td></tr>
<tr><td>$f'(x) = 0$을 만족시키는 x의 값은 $x = \frac{\sqrt{-3b}}{3}$또는 $x = -\frac{\sqrt{-3b}}{3}$이고
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

<table>
<tr><td>x</td><td>$\cdots$</td><td>$-\frac{\sqrt{-3b}}{3}$</td><td>$\cdots$</td><td>$\frac{\sqrt{-3b}}{3}$</td><td>$\cdots$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>↗</td><td>극댓값</td><td>↘</td><td>극솟값</td><td>↗</td></tr>
</table>

제시문 (ㄱ)의 조건 (2)로부터 다음을 얻을 수 있다.
$f\left(-\frac{\sqrt{-3b}}{3}\right) - f\left(\frac{\sqrt{-3b}}{3}\right) = -\frac{4b\sqrt{-3b}}{9} = 4$
따라서 $b = -3$이다. 제시문 (ㄱ)의 a, b, c는 다음과 같다.
$a = 0, \ b = -3, \ c = 0$</td><td>10점</td></tr>
</table>

논제 2 [20점]

$kxf(x)\left(-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\right)$이 확률밀도함수 이므로 구간$\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$에서 $kxf(x) \ge 0$이고 $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} kxf(x)\,dx = 1$이어야 한다.	6점
$-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$인 x에 대하여 $xf(x) = x^2\left(x^2-3\right) \le 0$이므로 $k \le 0$이다.	6점
또한 $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} k\left(x^4 - 3x^2\right)dx = k\left(\frac{8}{5}\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\right) = 1$이므로 $k = -\frac{5}{24}\sqrt{2}$	8점

4. 자연과학·공학계열, 간호학과(자연) 논술전형 문제

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) 실수 a, b, c에 대하여 좌표평면 위의 방정식 $y = ax^2 + bx + 2$가 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $y = -x^2 + 4x + c$이다.

(ㄴ) 좌표평면 위의 직선 l_1과 l_2는 다음 조건을 만족한다.

(1) l_1의 기울기는 음수이고 l_2의 기울기는 양수이다.

(2) l_1과 l_2는 모두 제시문 (ㄱ)의 곡선 $y = ax^2 + bx + 2$에 접한다.

(3) l_1과 l_2는 모두 제시문 (ㄱ)의 곡선 $y = -x^2 + 4x + c$에 접한다.

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 곡선 $y = ax^2 + bx + 2$ 및 제시문 (ㄴ)의 두 직선 l_1, l_2로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 하자.

논제 1. 제시문 (ㄱ)의 a, b, c의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (10점)

논제 2. 제시문 (ㄷ)의 S의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (20점)

[문항 1] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

출제의도

본 문제는 도형의 이동, 미분 및 적분의 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다.

논제 1. 도형의 대칭이동과 평행이동을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

논제 2. 이차함수에 접하는 접선과 도형으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 방법을 이해하고 활용할 수 있으며 이를 논술할 수 있는 지를 평가하는 문제이다.

문항해설

논제 1. 도형의 대칭이동과 평행이동을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.

논제 2. 이차함수에 접하는 접선과 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.

평가기준

논제 1 [10점]

방정식 $y=ax^2+bx+2$가 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $-y=a(-x)^2+b(-x)+2$, 즉 $y=-ax^2+bx-2$이다.	5점
이 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $y=-a(x-1)^2+b(x-1)-2-6=-ax^2+(b+2a)x-a-b-8$이고, 방정식 $y=-x^2+4x+c$와 같으므로 $a=1, b=2, c=-11$이다.	5점

논제 2 [20점]

$f(x)=x^2+2x+2$라고 하면 $f'(x)=2x+2$ 곡선 $y=x^2+2x+2$위의 점 $(t, f(t))$에서 접선의 방정식은 $y=2(t+1)(x-t)+t^2+2t+2=2(t+1)x+2-t^2$	5점
또한 이 직선이 곡선 $y=-x^2+4x-11$에 접하면, 방정식 $2(t+1)x+2-t^2=-x^2+4x-11$, 즉 $x^2-2(t-1)x-t^2+13=0$은 중근을 가지고, $\frac{D}{4}=(t-1)^2-t^2-13=0$, 즉 $2t^2-2t-12=0$이다.	5점

$(t-3)(t+2)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=3$이므로 l_1의 방정식은 $y=-2x-2$, l_2의 방정식은 $y=8x-7$이다.	5점
l_1과 l_2의 교점의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이므로 $S=\int_{-2}^{\frac{1}{2}}(x^2+2x+2-(-2x-2))dx+\int_{\frac{1}{2}}^{3}(x^2+2x+2-(8x-7))dx$ $=\int_{-2}^{\frac{1}{2}}(x^2+4x+4)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{3}(x^2-6x+9)dx$ $=[\frac{x^3}{3}+2x^2+4x]_{-2}^{\frac{1}{2}}+[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x]_{\frac{1}{2}}^{3}=\frac{125}{12}$	5점

4. 자연과학·공학계열, 간호학과(자연) 논술전형 문제

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) 계수가 실수인 삼차함수 $f(x)$는 다음을 만족한다.

(1) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{4}$

(2) 실수 a에 대하여 $f(a)=0$이고 $f''(a)=-12$이다.

(단, $f''(x)$는 $f(x)$의 이계도함수이다.)

(3) 복소수 z에 대하여 $2z+9$, $-z-\frac{3}{4}i$는 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 허근이다.
(단, $i=\sqrt{-1}$)

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$에 대하여 정의역이 $\{x|1\le x\le 2\}$인 다음 함수 $g(x)$의 최댓값은 M, 최솟값은 m이다.

$$g(x)=f(x)+\frac{36}{f(x)}$$

논제 1. 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$를 구하고 그 근거를 논술하시오. (15점)

논제 2. 제시문 (ㄴ)의 M과 m의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (15점)

[문항 2] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

출제의도

가) 주어진 조건을 활용하여 함수의 계수를 구할 수 있는지 확인한다.

나) 도함수를 활용하여 함수의 증가와 감소를 판별 할 수 있는지 확인한다.

다) 합성함수의 의미를 파악하고 있는지 확인한다.

문항해설

- 복소수의 성질과 근과 계수와의 관계를 이용하여 주어진 함수를 구할 수 있는지를 평가한다.
- 도함수를 활용하여 주어진 구간에서의 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 평가한다.
- 합성함수의 의미를 알고 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 평가한다.

평가기준

논제 1 [15점]

<table>
<tr><td>

$z=\alpha+\beta i(\alpha, \beta$는 실수)라 하자. $2z+9, -z-\dfrac{3}{4}i$가

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 허근이므로 다음을 만족한다.

$\overline{2z+9}=2\alpha+9-2\beta i=-\alpha-\left(\beta+\dfrac{3}{4}\right)i=-z-\dfrac{3}{4}i$

따라서, $\alpha=-3,\ \beta=\dfrac{3}{4}$ 이고, 방정식 $f(x)=0$의 두 허근은 $3+\dfrac{3}{2}i,\ 3-\dfrac{3}{2}i$이다.

</td><td>6점</td></tr>
<tr><td>

방정식 $f(x)=0$의 실근을 a라고 하면 함수 $f(x)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$f(x)=b(x-a)\left(x^2-6x+\dfrac{45}{4}\right)$(단, $b\neq 0$)

제시문 (ㄱ)의 조건 (1)로 부터

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{17}{2}b\left(\dfrac{1}{2}-a\right)=\dfrac{17}{4}$ 이므로 $b=\dfrac{1}{1-2a}$

이것과 제시문 (ㄱ)의 조건 (2)로 부터

$f''(a)=2b(2a-6)=-12$ 이므로 $a-3=-3(1-2a)$

따라서 $a=0,\ b=1$이고, 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$f(x)=x\left(x^2-6x+\dfrac{45}{4}\right)=x^3-6x^2+\dfrac{45}{4}x$

</td><td>9점</td></tr>
</table>

논제 2 [15점]

$f(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{45}{4}x$이면

$f'(x) = 3x^2 - 12x + \frac{45}{4} = 3\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$

이 때, $f'(x) = 0$을 만족시키는 x의 값은 $x = \frac{3}{2}$ 또는 $x = \frac{5}{2}$이다.

닫힌구간 $[1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{25}{4}$	$\nearrow$	$\frac{27}{4}$	$\searrow$	$\frac{26}{4}$

따라서 $1 \le x \le 2$일 때, 함수 $f(x)$는 다음의 범위를 갖는다.

$\frac{25}{4} \le f(x) \le \frac{27}{4}$

7점

함수 $h(t) = t + \frac{36}{t}$라고 하면, $g(x) = h(f(x))$이다.

따라서, 제시문 (ㄴ)의 최댓값 M은 닫힌구간 $\left[\frac{25}{4}, \frac{27}{4}\right]$에서 함수 $h(t)$의

최댓값과 같고 최솟값 m은 닫힌구간 $\left[\frac{25}{4}, \frac{27}{4}\right]$에서 함수 $h(t)$의 최솟값과 같다.

$\frac{25}{4} \le t \le \frac{27}{4}$일 때, $h'(t) = 1 - \frac{36}{t^2} > 0$이므로

함수 $h(t)$는 닫힌구간 $\left[\frac{25}{4}, \frac{27}{4}\right]$에서 증가한다.

따라서 함수 $g(x)$의 최댓값 M과 최솟값 m은 다음과 같다.

$M = h\left(\frac{27}{4}\right) = \frac{27}{4} + \frac{16}{3} = \frac{145}{12}$, $m = h\left(\frac{25}{4}\right) = \frac{25}{4} + \frac{144}{25} = \frac{1201}{100}$

8점

4. 자연과학·공학계열, 간호학과(자연) 논술전형 문제

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) 수열 $\{a_n\}$의 각 항은 양의 정수이고 모든 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$a_{n+2} = \begin{cases} 3(a_n + a_{n+1}) + 1 & (a_n + a_{n+1}\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2} & (a_n + a_{n+1}\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 수열 $\{a_n\}$과 자연수 k에 대하여 명제 p는 다음과 같다.

p : a_k와 a_{k+2}가 모두 홀수이면

$n \le k+2$인 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 홀수이다.

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 = 19$이고 $a_6 = 22$일 때, 가능한 모든 a_1을 원소로 갖는 집합을 A라고 하자.

논제 1. 제시문 (ㄴ)의 명제 p의 참, 거짓을 판별하고 그 근거를 논술하시오. (20점)

논제 2. 제시문 (ㄷ)의 집합 A를 구하고 그 근거를 논술하시오. (20점)

[문항 3] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

출제의도

가) 수열의 뜻을 알고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.

나) 수열의 귀납적 정의를 알고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.

다) 명제의 뜻을 알고 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는지 확인한다.

문항해설

- 수열의 귀납적 정의를 이해하고 이를 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는지를 평가한다.
- 수열의 귀납적 정의를 이해하고 이를 이용하여 주어진 조건을 만족하는 수열을 구할 수 있는지를 평가한다.

평가기준

논제 1 [20점]

a_k와 a_{k+2}가 모두 홀수라고 하자. a_n이 홀수이고 a_{n+1}이 짝수이면 a_n+a_{n+1}이 홀수이므로 $a_{n+2}=3(a_n+a_{n+1})+1$은 짝수이다. 그런데 a_k와 a_{k+2}가 모두 홀수이므로 a_{k+1}은 홀수이다.	6점
또한, a_n이 짝수이고 a_{n+1}이 홀수이면 a_n+a_{n+1}이 홀수이므로 $a_{n+2}=3(a_n+a_{n+1})+1$은 짝수이다. 그런데 a_k와 a_{k+1}이 모두 홀수이므로 $k-1$이 자연수일 때 a_{k-1}도 홀수이다.	6점
그러면 $k-2$가 자연수일 때 a_{k-1}과 a_k가 모두 홀수이므로 a_{k-2}도 홀수이다. 이와 같이 계속하면 $a_{k-3}, \cdots, a_1$이 모두 홀수임을 얻는다.	6점
따라서 $n \le k+2$인 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 홀수이다. 그러므로 명제 p는 참이다.	2점

논제 2 [20점]

a_5가 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 생각하자.

i) a_5가 홀수인 경우 :

명제 p가 참이고 $a_3 = 19$이므로 명제 p에 의해 $a_1, a_2, \cdots, a_5$는 모두 홀수이다.

따라서 $(a_4 + a_5)/2 = a_6 = 22$이고 $a_5 = (a_3 + a_4)/2 = (19 + a_4)/2$이다.

그러므로 $a_4 + a_5 = 44$이고 $2a_5 = 19 + a_4$이다. 따라서 $a_5 = 21$이고 $a_4 = 23$이다.

그런데 $a_2 + a_3 = 2a_4$이므로 $a_2 = 2a_4 - a_3 = 46 - 19 = 27$이고,

$a_1 + a_2 = 2a_3$이므로 $a_1 = 2a_3 - a_2 = 38 - 27 = 11$이다.

따라서 수열 $11, 27, 19, 23, 21, 22, \cdots$이 주어진 조건을 만족하고 $a_1 = 11$이다.

9점

ii) a_5가 짝수인 경우 :

이 경우 a_4가 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 살펴보자.

1) a_4가 홀수인 경우 :

$a_5 = (a_3 + a_4)/2$이고 $a_6 = 3(a_4 + a_5) + 1$이 성립한다.

따라서 $2a_5 = 19 + a_4$, $a_4 + a_5 = 7$이다. 그러므로 $3a_5 = 26$이다. 이를 만족하는 양의 정수 a_5는 없으므로 주어진 조건을 만족하는 양의 정수 a_1은 없다.

2) a_4가 짝수인 경우 :

$a_5 = 3(a_3 + a_4) + 1$이고 $a_6 = (a_4 + a_5)/2$을 만족한다.

따라서 $a_5 = 3a_4 + 58$, $a_4 + a_5 = 44$이다. 그러므로 $4a_4 + 14 = 0$이다. 이를 만족하는 양의 정수 a_4는 없으므로 주어진 조건을 만족하는 양의 정수 a_1은 없다.

9점

따라서 $A = \{11\}$이다.

2점

5. 의예과 논술전형 문제

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하시오. (170점)

(ㄱ) 수아와 은우는 게임을 연속으로 2번 먼저 이기는 사람이 승자가 되는 시합을 한다.

(ㄴ) 제시문(ㄱ)의 시합에서 게임을 이길 확률은 각각 다음과 같다.

	첫 번째 게임	수아가 이긴 다음 게임	은우가 이긴 다음 게임
수아가 이길 확률	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$
은우가 이길 확률	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 시합에 대하여 확률 p와 q는 다음과 같다.

p : 수아가 승자가 될 확률

q : 2020번째 게임에서 시합이 끝났을 때, 수아가 승자가 될 확률

논제. 제시문 (ㄷ)의 확률 p와 q의 값을 각각 구하고 그 근거를 논술하시오. (170점)

[문항 1] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

출제의도

본 문제는 확률, 조건부확률 및 수열과 급수의 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다.
확률의 합의 법칙과 무한급수를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
또 조건부확률을 구하는 방법을 이해하고 활용할 수 있으며 이를 논술할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

문항해설

- 확률의 계산과 무한급수를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.
- 조건부확률을 구할 수 있는지를 평가한다.

평가기준

시합이 짝수번의 게임에서 끝날 경우와 홀수번의 경우에서 끝날 때로 나누어 생각한다. (1) $2n$번에 게임에서 수아가 승리할 경우는 (○는 수아 승리, ×는 은우 승리) ○×○×○···×○○(×○가 $n-1$번) 이므로 그 확률은 $\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}\right)^{n-1}\frac{3}{5}=\frac{9}{25}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1},\ (n\geq 1)$	40점
(2) $2n+1$번에 게임에서 수아가 승리할 경우는 ×○×○···×○○(×○가 n번)이므로 그 확률은 $\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}\right)^{n}\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\left(\frac{2}{15}\right)^{n}\quad(n\geq 1)$	40점
따라서 구하는 확률 p는 $p=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{25}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5}\left(\frac{2}{15}\right)^{n}=\frac{9}{25}\frac{1}{1-\frac{2}{15}}+\frac{3}{5}\frac{\frac{2}{15}}{1-\frac{2}{15}}=\frac{33}{65}$	10점
또 2020번의 게임에서 시합이 끝났을 때 수아가 승리할 확률은 위 (1)에서 $\frac{9}{25}\left(\frac{2}{15}\right)^{1009}$ 이고,	20점

은우가 승리할 경우는 ×○×○⋯×○××(×○가 1009번) 이므로 그 확률은 $(\frac{2}{5}\times\frac{1}{3})^{1009}\frac{2}{5}\frac{2}{3} = \frac{4}{15}(\frac{2}{15})^{1009}$	40점
따라서 구하는 조건부확률 q는 $q=\dfrac{\frac{9}{25}(\frac{2}{15})^{1009}}{\frac{9}{25}(\frac{2}{15})^{1009}+\frac{4}{15}(\frac{2}{15})^{1009}}=\dfrac{27}{47}$ 이다.	20점

5. 의예과 논술전형 문제

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하시오. (170점)

(ㄱ) 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3x^{3n+2}+3x^{2n}+x+5}{x^{3n}+1}\qquad(x\neq-1)$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=\sqrt{a(x+b)}+3$은 한 점에서 공통인 접선을 가진다. (단, $a>0$, $b>1$)

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$와 제시문 (ㄴ)을 만족하는 a, b에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=\sqrt{2b(x+a)}+\frac{5}{2}$의 교점의 개수를 m이라 하자.

논제. 제시문 (ㄷ)의 m의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (170점)

[문항 2] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

출제의도

가) 수열의 극한을 이해하고 극한으로 정의된 함수를 이해하는지를 확인한다.

나) 함수의 연속을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.

다) 접선의 개념을 이해하고 활용할 수 있는지를 확인한다.

문항해설

- 함수의 연속성을 이해하고, 이를 활용해 접선의 개념을 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

평가기준

극한으로 정의된 함수 $f(x)$는 $|x|<1$, $|x|>1$, $x=1$에서 각각 다음과 같다.

① $|x|<1$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3x^{3n+2}+3x^{2n}+x+5}{x^{3n}+1}=x+5$$

② $|x|>1$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3x^{3n+2}+3x^{2n}+x+5}{x^{3n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3x^2+\frac{3}{x^n}+\frac{1}{x^{3n-1}}+\frac{5}{x^{3n}}}{1+\frac{1}{x^{3n}}}=3x^2$$

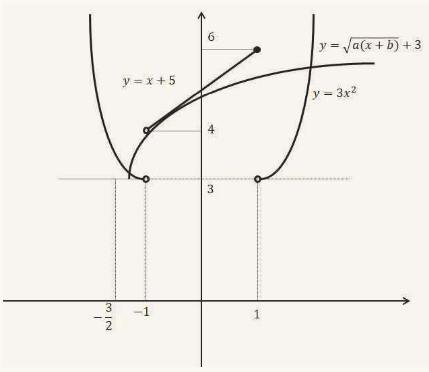
③ $x=1$

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{3(1)^{3n+1}+3(1)^{2n}+1+5}{(1)^{3n}+1}=6$$

50점

한편, 양수 a와 1보다 큰 실수 b에 대하여 제시문 (ㄴ)을 만족하기 위해서는 곡선

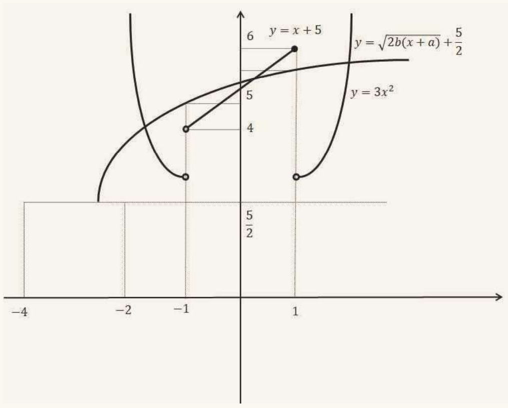
$y=\sqrt{a(x+b)}+3$과 곡선 $y=f(x)$가 아래의 그림과 같이 $-1<x\le 1$에서 접해야 한다.



즉, 접점을 $(t, t+5)$라 하면 실수 t는 다음을 만족한다.

$$\frac{a}{2\sqrt{a(t+b)}}=1,\quad t+5=\sqrt{a(t+b)}+3$$

60점

이를 t에 관해서 풀면, $a=8-4b$임을 알고, $-1<t\le 1$와 $a>0$, $b>1$에 의해 제시문 (ㄴ)을 만족하는 a, b의 관계식은 다음과 같다. $a=8-4b \ \left(1<b<\frac{3}{2}\right)$	
제시문 (ㄷ)의 m값을 구하기 위해 $x=-1, 1$에서의 $y=\sqrt{2b(x+a)}+\frac{5}{2}$의 함숫값을 살펴보자. 앞서 구한 a와 b의 관계식 $a=8-4b \ \left(1<b<\frac{3}{2}\right)$을 이용하면 $x=-1,\ 1$에서의 $y=\sqrt{2b(x+a)}+\frac{5}{2}$의 함숫값인 $\sqrt{2b(-1+a)}+\frac{5}{2}$, $\sqrt{2b(1+a)}+\frac{5}{2}$에 대해 다음의 부등식을 얻는다. $4<\frac{5}{2}+\sqrt{3}<\sqrt{2b(-1+a)}+\frac{5}{2}=\sqrt{2b(7-4b)}+\frac{5}{2}<\frac{5}{2}+\sqrt{6}<5$ $5<\frac{5}{2}+3<\sqrt{2b(1+a)}+\frac{5}{2}=\sqrt{2b(9-4b)}+\frac{5}{2}<\frac{5}{2}+\frac{9}{2\sqrt{2}}<6$ 함수 $y=\sqrt{2b(x+a)}+\frac{5}{2}$는 $x\ge -a$에서 연속이고 $2<a<4$이므로 위 두 부등식에 의해 $m=3$이다. (아래 그림 참고)  	60점

5. 의예과 논술전형 문제

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하시오. (180점)

(ㄱ) 20보다 큰 자연수 n에 대하여 2^n+61는 다음을 만족한다. (단, A, m_1, k_1는 자연수)

$$2^n+61=(2^n-2)(1+\frac{A}{m_1})(1+\frac{1}{2^n+k_1})$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 $1+\dfrac{A}{m_1}$은 다음을 만족한다. (단, B, m_2, k_2은 자연수)

$$1+\frac{A}{m_1}=(1+\frac{B}{m_2})(1+\frac{1}{2^{n-1}-k_2})$$

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 $1+\dfrac{B}{m_2}$은 다음을 만족한다. (단, C, m_3, k_3는 자연수)

$$1+\frac{B}{m_2}=(1+\frac{C}{m_3})(1+\frac{1}{2^{n-2}+k_3})$$

논제. 제시문 (ㄱ), (ㄴ), (ㄷ)을 모두 만족시키는 순서쌍(k_1, k_2, k_3)을 1개 구하고 그 근거를 논술하시오.
(단, $0<k_2<10<k_3<50<k_1<100$) (180점)

[문항 3] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

출제의도

본 문제는 다항식과 지수로 구성된 식의 사칙연산을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다.
식을 곱셈과 나눗셈을 통하여 원하는 형태로 나타낼 수 있는지 평가하는 문제이다.

문항해설

- 다항식과 지수로 구성된 식을 사칙연산을 통하여 주어진 형태로 변형하여 표현할 수 있는지 평가한다.

평가기준

$2^n+61=(2^n-2)(1+\frac{A}{m_1})(1+\frac{1}{2^n+k_1})$ 에서 $1+\frac{63}{2^n-2}=(1+\frac{A}{m_1})(1+\frac{1}{2^n+k_1})$ 양변에 2^n+k_1 을 곱하면 $(2^n+k_1)(1+\frac{63}{2^n-2})=(1+\frac{A}{m_1})(2^n+k_1+1)$	30점
(좌변)= $\frac{2^n+k_1}{2^n-2}(2^n+61)=(1+\frac{k_1+2}{2^n-2})(2^n+61)$ 이 되고 $k_1=60$이면 $\frac{A}{m_1}=\frac{31}{2^{n-1}-1}$이 되어 우변과 같아지고 주어진 조건을 만족한다.	30점
또한, $1+\frac{A}{m_1}=1+\frac{31}{2^{n-1}-1}=(1+\frac{B}{m_2})(1+\frac{1}{2^{n-1}-k_2})$ 에서 양변에 $2^{n-1}-k_2$를 곱하면 $(2^{n-1}-k_2)(1+\frac{31}{2^{n-1}-1})=(1+\frac{B}{m_2})(2^{n-1}-k_2+1)$이 되고	30점
이 식을 전개하여 정리하면 $(2^{n-1}-k_2)\frac{31}{2^{n-1}-1}=1+\frac{B(2^{n-1}-k_2+1)}{m_2}$이 된다. 따라서 $\frac{B}{m_2}=\frac{1}{2^{n-1}-k_2+1}(\frac{31(2^{n-1}-k_2)}{2^{n-1}-1}-1)$를 만족하고, $k_2=1$이면 $\frac{B}{m_2}=\frac{30}{2^{n-1}}=\frac{15}{2^{n-2}}$가 되어 주어진 조건을 만족한다.	30점

$1+\frac{B}{m_2}=1+\frac{15}{2^{n-2}}=(1+\frac{C}{m_3})(1+\frac{1}{2^{n-2}+k_3})$ 에서 양변에 $2^{n-2}+k_3$을 곱하면 $(2^{n-2}+k_3)(1+\frac{15}{2^{n-2}})=(1+\frac{C}{m_3})(2^{n-2}+k_3+1)$ 이 되고	30점
(좌변)= $\frac{2^{n-2}+k_3}{2^{n-2}}(2^{n-2}+15)=(1+\frac{k_3}{2^{n-2}})(2^{n-2}+15)$ 이므로 $k_3=14$이면 $\frac{C}{m_3}=\frac{14}{2^{n-2}}=\frac{7}{2^{n-3}}$이 되어 주어진 조건을 만족한다. 따라서 $k_1=60, k_2=1, k_3=14$이다.	30점

5. 의예과 논술전형 문제

[문항 4] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 논제에 답하시오. (180점)

(ㄱ) 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x) = 2\int_{0}^{x} \tan\theta \sec^2\theta \, d\theta + 1$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 다음과 같다.

$$a_n = \frac{1}{4^n} f\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 S는 다음과 같다.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

(ㄹ) **[사인함수의 덧셈정리]**

1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

2) $\alpha = \beta$일 때, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

논제. 제시문 (ㄷ)의 S의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (180점)

[문항 4] 출제의도, 문항해설 및 평가기준

출제의도

가) 정적분의 치환적분법을 활용할 수 있는지를 확인한다.

나) 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 식을 분리할 수 있는지를 확인한다.

다) 삼각함수의 극한을 활용하여 급수의 합을 구할 수 있는지 확인한다.

문항해설

- 삼각함수의 성질과 정적분의 치환적분법을 이용하여 주어진 함수를 구할 수 있는지를 평가한다.
- 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 수열의 부분합을 구할 수 있는지를 평가한다.
- 삼각함수의 극한을 활용하여 주어진 급수의 합을 구할 수 있는지를 평가한다.

평가기준

치환적분법에 의해서 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$는 다음과 같다. $$f(x)=2\int_0^x \tan\theta(\tan\theta)'\,d\theta+1=\left[\tan^2\theta\right]_0^x+1=\tan^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$$	30점
따라서 제시문 (ㄴ)의 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 다음과 같다. $$a_n=\frac{1}{4^n\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$$	10점

사인함수의 덧셈정리에 의해서 $\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^2}\right)} = \frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{1+2}}\right)\times\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{1+2}}\right)}$ $= \frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{1+2}}\right)}+\frac{1}{4\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{1+2}}\right)} = \frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{1+2}}\right)}+a_1$ $\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{1+2}}\right)} = \frac{1}{4^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{2+2}}\right)}+\frac{1}{4^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{2+2}}\right)}$ $= \frac{1}{4^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{2+2}}\right)}+a_2$ $\vdots$ $\frac{1}{4^{n-2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n-2+2}}\right)} = \frac{1}{4^{n-1}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n-1+2}}\right)}+\frac{1}{4^{n-1}\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n-1+2}}\right)}$ $= \frac{1}{4^{n-1}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n-1+2}}\right)}+a_{n-1}$ $\frac{1}{4^{n-1}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n-1+2}}\right)} = \frac{1}{4^{n}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}+\frac{1}{4^{n}\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$ $= \frac{1}{4^{n}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}+a_n$	60점
모두 더하면 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^2}\right)} - \frac{1}{4^n\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$	20점
한편, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = \frac{16}{\pi^2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}\right)^2 = \frac{16}{\pi^2}$	40점
따라서 제시문 (ㄷ)의 S값은 다음과 같다. $S = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^2}\right)} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = 2-\frac{16}{\pi^2}$	20점