2021학년도 수리논술 적중사례

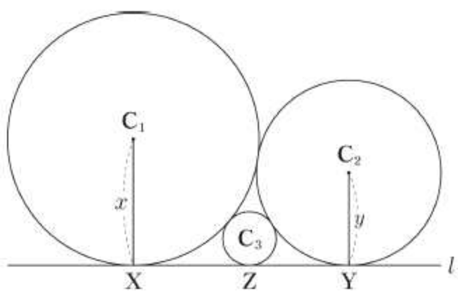
서울시립대

[파이널 수업내용]
기본적인 조건부 확률이 출제되고 $2 \le X \le 5$이고 사건 A는 $2 \le X \le 4$인 경우이므로 이런 경우 여사건을 이용하여 계산한다는 접근법 설명
[기출문제]
동전 5개가 앞면 2개, 뒷면 3개로 보여져 있다. 이때, 동전이 모두 같은 면이 되도록 뒤집는 시행의 확률변수를 X라 할 때, X가 4 이하인 사건을 A, 첫 번째 시행에서 앞면인 동전을 뒤집는 사건을 B라 할 때, $P(B|A)$를 구하시오.

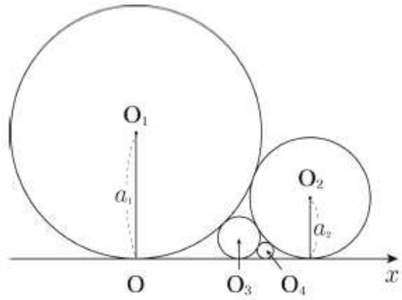
[수업내용]
문제 1. 자연수 n에 대하여 $0 < x < 2n, 4n < x < 6n, 8n < x < 10n$을 만족하는 집합 S_n에 대하여 $p, q, \dfrac{p+q}{2}$가 모두 집합 S_n에 속하는 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하여라
수업과정에서 $\dfrac{p+q}{2}$가 자연수가 되려면 p, q가 각각 홀수 또는 짝수가 되는 경우로 나누어서 구하는 방법을 설명. 기출문제도 조건 (다)를 풀면 $1 \le a < b < c \le 3n$을 만족해야 하고 (나)의 조건을 만족하려면 a, c가 각각 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누게 된다. 결국 두 짝수와 두 홀수를 선택하는 방법의 수가 된다.
문제 2. $a+b+c=0, |a|+|b|+|a+b| \le 2n$을 만족하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하여라.
아니면 문제 2가 a, b가 결정되면 c는 고정되므로 기출문제도 $1 \le a < c \le 3n$을 만족하는 격자점 (a, c)의 개수를 구하면 된다.
[기출문제]
자연수 n에 대하여, 다음 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.
(가) $1 \le a < b < c \le 6n$
(나) $a+c=2b$
(다) $\sin\left(\dfrac{\pi a}{6n}\right) < \sin\left(\dfrac{\pi b}{6n}\right) < \sin\left(\dfrac{\pi c}{6n}\right)$

경희대 의예

[파이널 수업내용]
동시에 접하는 세 원의 반지름의 점화식 유도(피보나치 수열)와 일반항 구하는 문제
xy평면상의 두 원 $C_0 : x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}, C_1 : (x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$에 대하여 C_2를 x축 및 C_0, C_1에 접하는 원이라 하자. 이어서, $n=2, 3, \cdots$에 대하여 C_{n+1}은 x축 및 C_{n-1}, C_n에 접하는 원이며 C_{n-2}와는 다르다. C_n의 반지름을 r_n, C_n과 x축과의 교점을 $(x_n, 0), q_n=\dfrac{1}{\sqrt{2r_n}}, p_n=q_nx_n$으로 놓자.
논제 1. q_n은 정수임을 보여라.
논제 2. p_n도 정수이며, p_n과 q_n은 서로소임을 보여라.
[기출문제]
논제 2. 각 원의 중심은 다른 원의 내부에 포함되지 않는다고 할 때, 다음 질문에 답하시오.



[그림 3]



[그림 4]

(1) [그림 3]과 같이 반지름의 길이가 각각 x와 y인 원 C_1과 원 C_2가 서로 한 점에서 만나고, 동시에 직선 l에 점 X와 점 Y에서 각각 접한다. 반지름의 길이가 z인 원 C_3가 원 C_1과 원 C_2에 각각 한 점에서 만나고, 동시에 점 Z에서 직선 l에 접한다. 이때 선분 YZ의 길이와 원 C_3의 반지름의 길이를 x와 y에 관한 식으로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (단, $x > y > z$)

(2) 좌표평면에서 원 O_1은 반지름의 길이가 1이고 원점 O에서 x축에 접한다. [그림 4]와 같이 반지름의 길이가 $\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}$인 원 O_2는 원 O_1과 한 점에서 만나고 동시에 x축에 접한다. 원 O_3는 원 O_1, 원 O_2와 각각 한 점에서 만나고 동시에 x축에 접한다. 원 O_4는 원 O_2, 원 O_3와 각각 한 점에서 만나고 동시에 x축에 접한다. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째로 얻은 원 O_n의 반지름의 길이를 a_n, 중심의 x좌표를 x_n이라 하자. 이때 a_N과 $\lim_{n\to\infty} x_n$을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (단, $x_n \geq 0$이고 $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \cdots$)

한양대

[한양대 파이널 수업내용] 함수의 대소관계를 이용한 정적분의 대소관계 증명문제

논제 1. $f(0)=0, f(1)=1$일 때, 아래 부등식을 증명하여라.

$$\sqrt{2} \leq \int_0^1 \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt \leq 2$$

논제 2. 함수 $y=f(x)$가 $[a,b]$에서 최솟값 m, 최댓값 M을 가질 때 다음 부등식을 증명하여라.

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

[기출문제]

실수 k에 대하여 곡선 $y=e^x \left(k \leq x \leq k+\frac{1}{e^k}\right)$의 길이를 $g(k)$라 할 때, $\lim_{k\to\infty} g(k)$의 값을 구하시오.

[한양대 파이널 수업내용] 평균값의 정리를 이용한 부등식 유도문제

[기출문제]

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{F(2x)}{e^x}$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$이다.)

한양대 의예

[수업내용]

xy평면상의 두 원 $C_0 : x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, $C_1 : (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$에 대하여 C_2를 x축 및 C_0, C_1에 접하는 원이라 하자. 이어서, $n=2, 3, \cdots$에 대하여 C_{n+1}은 x축 및 C_{n-1}, C_n에 접하는 원이며 C_{n-2}와는 다르다. C_n의 반지름을 r_n, C_n과 x축과의 교점을 $(x_n, 0)$, $q_n=\frac{1}{\sqrt{2r_n}}$, $p_n=q_nx_n$으로 놓자.

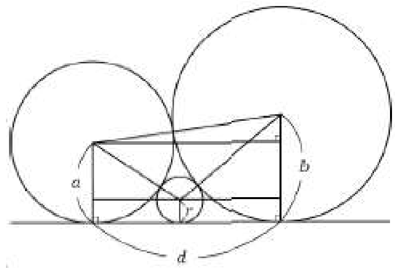
논제 1. q_n은 정수임을 보여라.

논제 2. p_n도 정수이며, p_n과 q_n은 서로소임을 보여라.

[기출문제]

(가) 평면 위에 반지름이 1인 원 C와 D가 서로 접하고 있다. 원 C와 D는 각각 직선 l과 서로 다른 점에서 접한다. 원 C, D, 직선 l에 둘러싸인 영역을 A라 하자.

논제 1. 제시문 (가)에서 직선 l에 접하면서 영역 A에 들어갈 수 있는 가장 큰 원을 C_1이라 하자. 영역 A에서 원 $C_1, \cdots, C_n$의 내부를 제외한 영역에 들어가고, 그 중심이 원 $C_1, \cdots, C_n$의 중심과 다르며, 직선 l에 접하는 가장 큰 원 하나를 택하여 C_{n+1}이라 하자. 원 C_{12}의 반지름을 구하시오.



서강대

[서강대 파이널 수업내용] 조건부 확률을 이용하여 판정을 양성으로 받은 사람이 실제 양성일 확률을 구하는 문제

특정 질병 D에 걸렸는지 진단하는 초음파 검사가 있다. 이 검사 방법으로 진단할 때, D에 걸린 사람을 D에 걸렸다고 정확하게 진단할 확률은 q이고, D에 걸리지 않은 사람을 D에 걸렸다고 오진할 확률은 0.02라고 한다. D에 걸린 사람의 비율이 10%인 어느 실험 집단에서 임의로 한 명을 택하여 이 초음파 검사를 한 결과 D에 걸렸다고 진단했을 때 실제로 D에 걸렸을 확률을 p라고 하자.

논 제. 제시문 (라)에서 q가 0.9일 때 p를 구하고 그 근거를 논술하시오.

[기출문제]

이 도시에 거주하는 사람을 임의로 한 명 선택하여 바이러스 감염 여부를 한 번 검사한다. 제시문을 참고하여 다음 물음에 답하시오.

논제 1. 양성 반응이 나타날 확률을 구하시오.

논제 2. 음성 반응이 나타났을 때, 실제로 감염되었을 확률을 구하시오.

2021학년도 수리논술 적중사례

연세대

[연세대 파이널 수업내용] 비율을 이용하여 수열의 최댓값을 구하는 문제

논제 1. $a_n = \dfrac{5^n}{n!}$의 최댓값을 구하시오.

논제 2. $(5+2x)^{60} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots + a_{60} x^{60}$에서 계수의 최댓값을 구하시오.

[기출문제]

100명의 학생 중 k명을 선정하여 두 명을 회장, 다른 다섯 명을 부회장, 나머지는 위원으로 임명하는 경우의 수가 최대가 되도록 하는 모든 k의 값을 구하시오. (단, $10 \le k \le 100$)

[연세대 파이널 수업내용] 동점이 두 개인 경우 도형의 최댓값 구하기

직선 $y = x+2$와 포물선 $y = x^2$의 두 교점을 P, Q라고 하자. 또 그림과 같이 직선 아래 영역에 속하고 포물선 $y = x^2$ 위를 움직이는 두 점 R, S를 잡자. 사각형 $PQRS$의 넓이가 최대일 때, R과 S의 좌표를 구하시오.

[기출문제]

논제 1. 사각형 $PQRS$의 넓이가 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이와 사각형 $PQRS$의 넓이의 차가 43이라 하자. 이때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

논제 2. 사각형 $P'Q'R'S'$이 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

(가) 사각형 $P'Q'R'S'$은 직사각형이고 네 꼭짓점은 삼각형 ABC와 사각형 $PQRS$의 변 위에 있다. 그리고 두 사각형 $PQRS$와 $P'Q'R'S'$의 내부가 서로 겹치는 부분은 없다.

(나) 두 사각형 $PQRS$와 $P'Q'R'S'$의 넓이의 합이 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이에서 두 사각형 $PQRS$와 $P'Q'R'S'$의 넓이의 합을 뺀 값은 47이다.

중앙대

[중앙대 파이널 수업내용] 무한급수를 정적분으로 변환하는 문제

제시문 (가)에서 $f(x) = \dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$일 때 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f_k\left(\frac{k}{2n}\right)$의 값을 구하시오.

[기출문제]

논 제. 다음 극한값을 구하시오. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}+1)^4+(\sqrt{n}+2)^4+(\sqrt{n}+3)^4+\cdots+(\sqrt{n}+n)^4}{(n+1)^4+(n+2)^4+(n+3)^4+\cdots+(2n)^4}$

[중앙대 파이널 수업내용] 대칭성을 이용한 치환적분 문제

논제 1. 함수 $p(x), q(x)$에 대하여, $p(x)$는 $x = \dfrac{a}{2}$에 대칭이고 $q(x)+q(a-x) = k$가 성립할 때,

$\displaystyle\int_0^a p(x)q(x)dx = k\int_0^{\frac{a}{2}} p(x)dx$임을 보이시오. (단, $a \ne 0$이고 k는 상수)

논제 2. 다음 정적분의 값을 구하시오. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x^2-\pi x+\pi^2)\sin^2 x\,dx$

[기출문제]

논 제. 닫힌구간 $[0, 20]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 식을 만족한다.

$$f(20-x) = \sqrt{-x^2+20x-2(f(x))^2}$$

이때, 정적분 $\int_0^{10} xf(x)\,dx$의 값을 구하시오.

[중앙대 파이널 수업내용] 매개변수로 표현된 점의 속력의 최솟값 구하고 이동거리를 구하는 문제

O를 원점으로 하는 xy평면 위에 곡선 $C: x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$가 있다. C 위의 3개의 점 $A(1,0),\ B(0,1),\ Q(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$을 생각한다. 움직이는 점 P는 A를 출발하여, C의 위에서 B를 향하여 Q까지 속력 $\sqrt{3}$으로 움직이며, Q에서부터 선분 QO 위를 O까지 속력 1로 움직인다.

논제 1. 움직이는 점 P가 A를 출발하여 O에 도착할 때까지의 소요시간 $T(\theta)$를 구하시오.

논제 2. $T(\theta)$의 최솟값을 구하시오.

[기출문제]

논제 1. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x,y)가 $x=t,\ y=\frac{2}{3}(t^2-2t+2)^{\frac{3}{2}}$이다. 점 P의 속력이 최소가 되는 시각을 t_0이라 할 때, 시각 $t=0$에서 시각 $t=t_0$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

논제 2. 좌표평면 위에 원점 O가 중심이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 $A(\cos\theta, \sin\theta)$가 있다. 그리고 원점을 지나며 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 2θ인 직선과 곡선 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$의 교점을 B라 하고, 삼각형 AOB의 넓이의 최댓값을 M이라 하자. 삼각형 AOB의 넓이를 $\tan\theta$로만 표현된 함수로 나타내고, 이를 이용하여 M^2을 구하시오. (단, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$이다.)

이화여대

[이화여대 파이널 수업내용] 수열의 증가감소을 수학적 귀납법으로 증명하고 부등식 증명하는 문제

수열 $\{x_n\}, \{y_n\}$이 관계식 $x_1 \ge y_1 > 0,\ x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}+\frac{n}{2n+1},\ y_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}+\frac{n}{2n+1}\ (n=1,2,3,\cdots)$을 만족시킬 때, 다음 문제에 답하시오.

논제 1. 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \ge y_n$이 성립함을 보이시오.

논제 2. 모든 자연수 n에 대하여 $y_{n+1} > y_n$이 성립함을 보이시오.

논제 3. 모든 자연수 n에 대하여 $x_{n+1}-y_{n+1} \le \frac{1}{2}(x_n-y_n)$이 성립함을 보이시오.

논제 4. 두 수열 $\{x_n\}, \{y_n\}$이 모두 발산함을 보이시오.

[기출문제]

모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이 $a_1=2,\ b_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}^2=a_n+1,\ b_{n+1}=2-\frac{1}{b_n+1}$을 만족시킨다. 아래 물음에 답하시오.

논제 1. 부등식 $x^2 \le x+1$의 해가 $\alpha \le x \le \beta$일 때 α, β를 구하고, 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 함수 $f(x)=x+\frac{1}{x+1}$의 최댓값이 2임을 보이시오.

논제 2. β가 논제 1에서 정해질 때, 모든 자연수 n에 대하여 두 부등식 $a_n \geq \beta$와 $b_n \leq \beta$가 각각 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

논제 3. 모든 자연수 n에 대하여 두 부등식 $a_n \geq a_{n+1}$과 $b_n \leq b_{n+1}$이 각각 성립함을 보이시오.