www.pen.go.kr

2016학년도
수리논술 나침반 Ⅷ

부산광역시교육청
BUSAN METROPOLITAN CITY OFFICE OF EDUCATION

일러두기

- 본 수리논술나침반 8은 수리논술나침반 시리즈의 8번째 책으로 대입 수리논술을 준비하는 2016학년도 수험생 및 수학교사들을 위하여 부산수학나침반 수학교사 동아리에서 만들고 부산시교육청에서 발간하는 수리논술 관련 책자입니다.

- 본 교재는 2015년에 치러진 전국 각 대학의 모의 논술과 실제 입시에 출제된 수시 논술 기출문제 위주로 만들어진 책자입니다.

- 교재는 각 대학별 모의 수시 순으로 묶었으며, 각 대학별 모의 논술 및 수시 논술은 다음의 순서로 구성되어 있습니다.
  - 기출문제 : 2015년도 전국대학 모의 및 수시 논술 기출문제
  - 풀어보기 : 해당 대학의 논술 기출문제와 유사한 문제로서 주로 전국 모의고사나 수능에 나왔던 문제 또는 EBS에 있는 문제 위주로 발췌하여 학생들이 어려운 논술의 답안을 작성하기 전에 워밍업을 할 수 있도록 준비한 공간입니다.

- 학교에서 선생님들이 수업하실 때 편리하게 사용하시도록 대학의 해설 뿐 아니라 자체적으로 제작한 다른 풀이들을 가능한 많이 넣어 두었습니다.

C·o·n·t·e·n·t·s 차 례

01 가톨릭대학교 모의1)

[수학(가)] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(논제1, 논제2)에 답하시오.

(ㄱ) 자동차의 연비는 1리터(L)의 휘발유로 자동차가 달릴 수 있는 거리를 의미하고 단위는 ㎞/L이다.

(ㄴ) 휘발유의 가격은 1리터(L)에 1500이다.

(ㄷ) A지점에서 B지점까지 자동차로 가는 데에 드는 비용은 사용하는 만큼의 휘발유 가격에 유료도로, 유료터널 등을 지날 때에 지불하는 통행료를 더한 것이다.

(ㄹ) 가홍이가 A지점에서 B지점까지 자동차로 갈 수 있는 두 가지 경로가 있다. 거리가 40㎞인 경로 1에서 가홍이는 $v_1 = 50$㎞/h의 일정한 속력으로 자동차를 운행할 수 있고, 거리가 48㎞인 경로 2에서 가홍이는 v_2[㎞/h]의 일정한 속력으로 자동차를 운행할 수 있다. 그리고 경로 2에는 유료터널이 있어서 오전 7시부터 오후 9시까지는 1000원의 통행료를 지불해야 한다. A지점에서 B지점까지 자동차를 운행하는 동안에 신호등에 걸리거나 통행료를 지불하는 등의 이유로 자동차의 속력이 잠시 변할 수도 있지만, 가홍이는 자동차의 속력이 경로에 따라 각각 일정하다고 가정하고 어느 경로로 가는 것이 비용이 적게 드는지 판단하려고 한다. 한편, 가홍이가 운전하는 자동차의 연비 f[㎞/L]는 자동차의 속력 v[㎞/L]의 함수이고 $f(v) = 16 - \frac{1}{5}|80 - v|$ 이다.

논제1

제시문 (ㄹ)에서 가홍이가 오전 5시에 A지점을 출발할 경우, 경로 2를 택할 때의 비용이 경로 1을 택할 때의 비용보다 적으려면 v_2가 어떤 범위에 있어야 하는지 논술하시오. (10점)

1) 가톨릭대학교 홈페이지

논제2

제시문 (ㄹ)에서 가홍이가 오후 5시에 A 지점을 출발할 경우, 경로 2를 택할 때의 비용이 경로 1을 택할 때의 비용보다 적으려면 v_2가 어떤 범위에 있어야 하는지 논술하시오. (10점)

[수학(나)] 제시문 (ㄱ)~(ㅁ)을 읽고 문제(논제1, 논제2)에 답하시오.

(ㄱ) 닫힌 구간 $[0,1]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 그 구간에서의 최댓값을 $\max_{[0,1]} f(x)$라고 쓴다.

(ㄴ) 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $d(f,g)$를 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 $|f(x)-g(x)|$의 최댓값으로 정의한다. 이를 수식으로 쓰면 다음과 같다.

$$\boxed{d(f,g)=\max_{[0,1]}|f(x)-g(x)|}$$

(ㄷ) 닫힌 구간 $[0,1]$에서 정의된 연속함수를 원소로 하는 집합 A에 대하여, 집합 $C(\mathrm{A})$를 다음과 같이 정의한다.

$$\boxed{C(\mathrm{A})=\{(x,y)\in R^2 \mid y=f(x), 0\le x\le 1, f\in \mathrm{A}\}}$$

(ㄹ) 모든 일차함수의 집합을 P라고 하자. 어떤 다항함수 $f(x)$에 대하여 집합 D_f를 다음과 같이 정의한다.

$$\boxed{D_f=\{g \mid d(f,g)\le 1, g\in P\}}$$

(ㅁ) "두 실수 a, b의 최댓값이 r보다 작거나 같다"와 동치인 명제는 "$a\le r$이고 $b\le r$"이다.

논제1

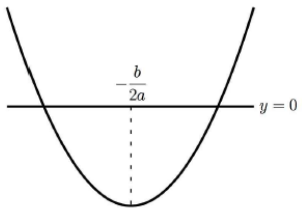
$f(x)=x$라고 할 때, D_f에 대하여 제시문 (ㄷ)의 정의에 따라 만들어진 영역 $C(D_f)$의 면적이 무엇이 되는지 논술하시오. (20점)

논제2

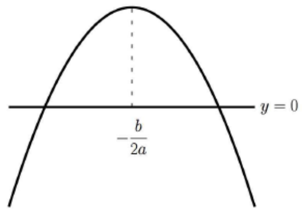
$x=0$ 에서 0 이 되는 모든 일차함수의 집합을 P_0 이라고 하자. $f(x)=2x^2$ 라고 할 때, D_f 와 P_0 의 교집합 $D_f \cap P_0$ 에 대하여 제시문 (ㄷ)의 정의에 따라 만들어진 영역 $C(D_f \cap P_0)$ 의 면적이 무엇이 되는지 논술하시오. (20점)

[수학(다)] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제1, 논제2)에 답하시오.

(ㄱ) $f(x)=ax^2+bx+c$ (단, $a,b,c \in R, a \neq 0$)라고 하면 a 의 부호에 따라 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래의 그림과 같은 형태를 갖는다. 이 그래프에서 유추할 수 있듯이, 방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 두 개의 실수해를 갖기 위한 필요충분조건은 $af\left(-\dfrac{b}{2a}\right)<0$ 이다. 그런데, $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=-\dfrac{b^2}{4a}+c$ 이므로, 이 조건은 $b^2-4ac>0$ 이 된다.

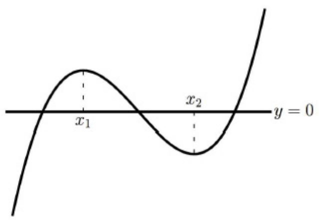


$a>0$

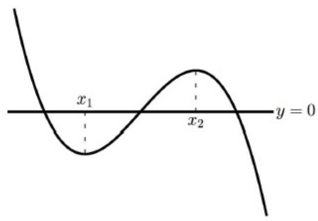


$a<0$

(ㄴ) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (단, $a,b,c,d \in R, a \neq 0$)라고 하면, a 의 부호에 따라 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래의 그림과 같은 형태를 갖는다. 이 그래프에서 유추할 수 있듯이, 방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 개의 실수해를 갖기 위한 필요충분조건은 "방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실수해 x_1, x_2 를 갖고, $f(x_1)f(x_2)<0$ "이다.



$a>0$



$a<0$

(ㄷ) 집합 A 와 B를 다음과 같이 정의한다.

$A=\{(\alpha,\beta)\,|$ 이차방정식 $x^2+\alpha x+\beta=0$ 이 실수해를 갖지 않는다.$\}$
$B=\{(\alpha,\beta)\in R^2\,|$ 삼차방정식 $x^3-3\alpha x+2\beta=0$ 이 서로 다른 세 실수해를 갖는다.$\}$

논제1

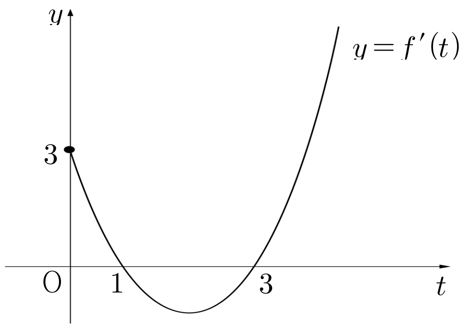
방정식 $x^3+ax+b=0$이 서로 다른 세 개의 실수해를 갖기 위한 필요충분조건이 $27b^2+4a^3<0$임을 제시문 (ㄴ)을 바탕으로 논술하시오. (단, $a,b \in R$) (20점)

논제2

제시문 (ㄷ)의 두 집합의 교집합 $A \cap B$이 나타내는 영역의 면적을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (20점)

풀어보기 [문제1]

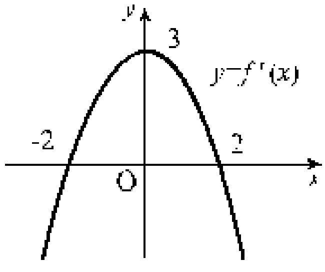
원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $f(t)$에 대하여 이차함수 $y=f'(t)$의 그래프는 그림과 같다.



점 P가 출발할 때의 운동 방향에 대하여 반대 방향으로 움직인 거리를 d라 할 때, $12d$의 값을 구하시오.

풀어보기 [문제2]

삼차함수 $y=f(x)$ 의 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$f(0)=0$ 일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=kx$ 가 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

예시답안

풀어보기 [문제1]

점 P가 출발할 때의 운동방향에 대하여 반대방향으로 움직인 시간은 $t=1$에서부터 $t=3$이고, $f'(t)=(t-1)(t-3)$이므로,
반대방향으로 실제 움직인 거리 d는 다음과 같다.

$$d=\int_{1}^{3}|f'(t)|\,dt=\frac{4}{3}$$

$$\therefore\ 12d=16$$

풀어보기 [문제2]

$f'(x)=a(x-2)(x+2)$ 에서 $a=-\frac{3}{4}$ ($\because f'(0)=3$)

$$\therefore\ f(x)=-\frac{3}{4}\int(x^2-4)dx=-\frac{1}{4}x^3+3x\ (\because f(0)=0\ )$$

삼차방정식 $-\frac{1}{4}x^3+3x=kx, x\{x^2+4(k-3)\}=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+4(k-3)=0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. $k\neq 3$ 이고 $\frac{D}{4}=0-4(k-3)>0$ 이어야 하므로 $k<3$ 이다.

다른 풀이

도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 y축 대칭이고 $f(0)=0$ 이므로 $f(x)$ 의 그래프는 원점대칭이다. 이때, 원점에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=3$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=kx$ 가 서로 다른 세 점에서 만나려면 $k<3$ 이어야 한다.

수학(가) 논제1

가홍이가 경로 1을 택할 때는 추가 비용이 들지 않고 일정한 속력 $v = 50$ ㎞/h로 운행하므로 이때의 연비는 $f(50) = 10$ ㎞/L이다. 총 40㎞를 운행했으므로 연료는 4L가 필요하고 제시문 (ㄴ)에서 휘발유의 가격이 리터당 1500원이라고 했기 때문에 6000원의 비용이 든다. 따라서 경로 2의 비용이 6000원보다 적은 경우를 찾으면 된다.

이제 경로 2를 택할 때 드는 비용을 계산해 보자. $v_2 \leq 50$ 이면, 운행 거리는 더 멀면서 연비가 10 이하가 되어서 휘발유 비용만 6000원이 넘게 된다. $v_2 > 50$ 이면 48㎞의 거리를 가는데 최소 $0.96\left(=\frac{48}{50}\right)$ 시간이 걸리는데, 오전 5시에 출발하였으므로 이때 통행료는 지불하지 않는다. 따라서 이때 드는 비용은 $\frac{48}{16-\frac{1}{5}|80-v_2|} \times 1500$ 이고, 경로 1을 택할 때보다 비용이 적게 들려면 $\frac{48}{16-\frac{1}{5}|80-v_2|} \times 1500 < 6000$ 이 성립해야 한다. 식을 정리하면,

$$\frac{1}{5}|80-v_2| > 4$$

$$|80-v_2| < 20$$

$$\therefore\ 60 < v_2 < 100$$

그러므로 $60 < v_2 < 100$ 인 경우에 경로 2를 선택하게 된다.

수학(가) 논제2

논제 1에서와 같이 B 지점에 도착하는데 1시간이 걸리지 않으므로, 오후 5시에 출발하면 반드시 통행료 1000원을 지불해야 한다. 이때 드는 비용은 $\frac{48}{16-\frac{1}{5}|80-v_2|} \times 1500 + 1000$ 이고, 경로 1을 택할 때보다 비용이 적게 들려면 $\frac{48}{16-\frac{1}{5}|80-v_2|} \times 1500 + 1000 < 6000$ 이 성립해야 한다. 식을 정리하면,

$$\frac{48}{16-\frac{1}{5}|80-v_2|} < \frac{5000}{1500}$$

$$16-\frac{1}{5}|80-v_2| > \frac{72}{5}$$

$$\frac{1}{5}|80-v_2| < \frac{8}{5}$$

$$|80-v_2| < 8$$

$\therefore\ 72 < v_2 < 88$

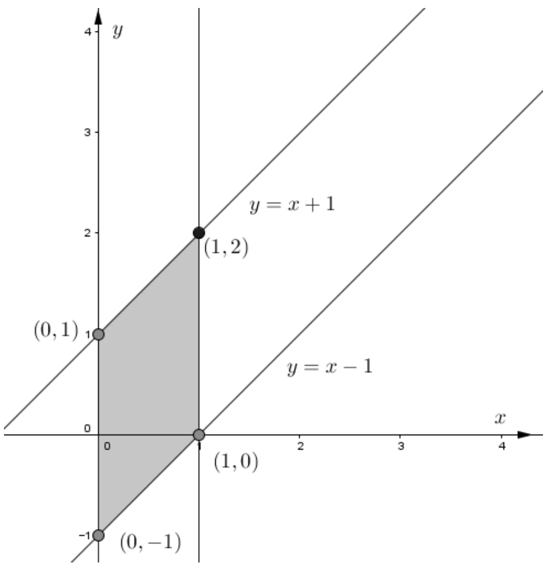
그러므로 $72 < v_2 < 88$ 일 때, 경로 2를 선택하게 된다.

수학(나) 논제1

$f(x)=x$ 일 때, 제시문 (ㄹ)에 의해 닫힌구간 $[0,1]$ 에서 $f(x) \le 1$ 이고, $g(x) \le 1$ 이다. 임의의 일차함수 $g(x)$ 에 대하여 $d(f,g) \le 1$ 이 성립해야 하므로 제시문 (ㄷ)의 정의에 따라 만들어지는 영역 $C(D_f)$ 는 닫힌구간 $[0,1]$ 에서 함수 $y=x$ 를 y 축의 양, 음의 방향으로 1만큼 평행이동해서 얻어진 함수 $y=x+1, y=x-1$ 로 둘러싸인 영역이다. $f(x) \le 1$ 이고, $g(x) \le 1$ 이라 했으므로, 그림과 같은 평행사변형의 면적을 의미하고 이를 구하면 그 면적은 2이다.

다른 풀이

제시문 (ㄴ)과 (ㄹ)에 의해서 모든 $x \in [0, 1]$ 에 대하여 $|f(x)-g(x)|=|x-g(x)| \le 1$ 이고 이를 정리하면 모든 $x \in [0, 1]$ 에 대하여 $x-1 \le g(x) \le x+1$ 이다. 한편, $g(x)$ 는 일차함수이므로 $C(D_f)$ 의 영역은 닫힌구간 $[0,1]$ 에서 $y=x+1,\ y=x-1$ 로 둘러싸인 영역이다. 따라서 영역의 넓이는 2 이다.

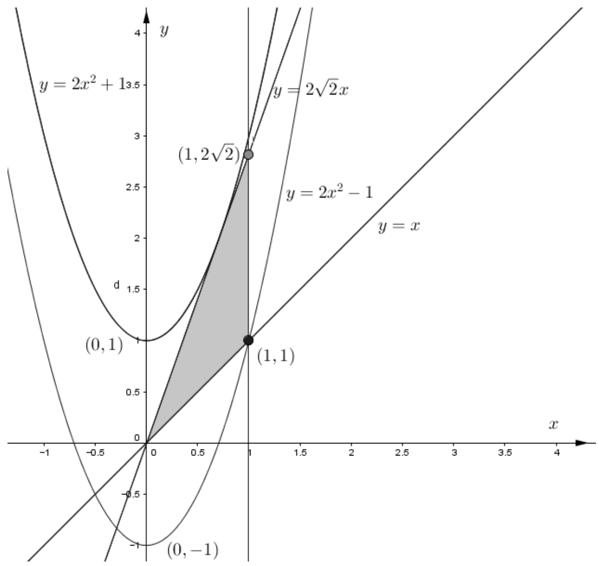


수학(나) 논제2

제시문 (ㄴ)과 (ㄹ)에 의해서 모든 $x\in[0,\,1]$ 에 대하여

$$|f(x)-g(x)|=|2x^2-g(x)|\le 1$$

이고 이를 정리하면, 모든 $x\in[0,\,1]$ 에 대하여 $2x^2-1\le g(x)\le 2x^2+1\cdots$ ☆ 이다.
따라서 D_f 의 영역은 다음과 같다.
 한편, g는 원점을 지나는 일차함수이므로 $g(x)=ax$ 라고 하자.
$y=ax$ 와 $y=2x^2+1$ 는 $a=2\sqrt{2}$ 일 때 접하고, 이때의 접점의 좌표는 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\,2\right)$ 이므로 x 의 좌표가 닫힌구간 $[0,\,1]$ 에 포함된다. 따라서 ☆ 를 만족시키는 일차함수 g 가 만드는 영역은 다음과 같다.



그러므로 영역의 넓이는 $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}$ 이다.

수학(다) 논제1

함수 $f(x)=x^3+ax+b$ 라 하자. 제시문 (ㄴ)에 의해 방정식 $x^3+ax+b=0$ 이 서로 다른 세 개의 실수해를 가지는 필요충분조건은 방정식 “$f'(x)=3x^2+a=0$ 이 서로 다른 두 실수해 $x_1,\,x_2$ 를 갖고, $f(x_1)f(x_2)<0$ ”이 성립해야 한다.
먼저 $f'(x)=3x^2+a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지기 위해서는 $D>0$ 이 되어야 하므로 $-12a>0$ 이므로 $a<0\cdots$ ① 이다.
방정식 $f'(x)=3x^2+a=0$ 의 두 실근을 $x_1=\sqrt{-\dfrac{a}{3}}\,,x_2=-\sqrt{-\dfrac{a}{3}}$ 라 두면,

$f(x_1) = \sqrt{-\frac{a}{3}} \times \frac{2}{3}a + b$, $f(x_2) = -\sqrt{-\frac{a}{3}} \times \frac{2}{3}a + b$ 이고

$f(x_1)f(x_2) < 0$ 이기 위해서는

$$\left(\sqrt{-\frac{a}{3}} \times \frac{2}{3}a + b\right)\left(-\sqrt{-\frac{a}{3}} \times \frac{2}{3}a + b\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow -\left(-\frac{a}{3}\right) \times \frac{4}{9}a^2 + b^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{27}a^2 + b^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^3 + 27b^2 < 0 \cdots ②$$

이다. 따라서 ①, ②를 모두 만족하려면 $4a^3 + 27b^2 < 0$ 이다.

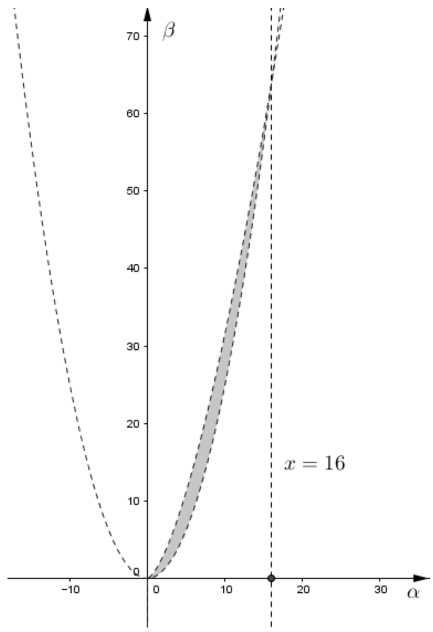
수학(다) 논제2

이차방정식 $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ 이 실수해를 갖지 않기 위해서는 제시문 (ㄱ)에 의해 $\alpha^2 - 4\beta < 0$ 을 만족해야 한다. 따라서 $\beta < \frac{1}{4}\alpha^2 \cdots$ ① 이다.

또한 삼차방정식 $x^3 - 3\alpha x + 2\beta = 0$ 이 서로 다른 세 실수해를 갖기 위해서는 논제 1 에 의해 $27(2\beta)^2 + 4(-3\alpha)^3 < 0$, 즉 $\beta^2 - \alpha^3 < 0$ 이다. 따라서 $\beta < \alpha^{\frac{3}{2}} \cdots$ ② 이다.

$$\frac{\alpha^2}{4} = \alpha^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \alpha^4 = 16\alpha^3 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ 또는 } \alpha = 16$$

이므로 ①, ② 모두를 만족하는 영역은 다음과 같다.



따라서 영역의 넓이는 $\int_0^{16}\left(x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{4}\right)dx = \frac{1024}{15}$ 이다.

02 건국대학교 모의[2]

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

다음은 건국이와 수학선생님의 대화를 옮긴 것이다.

건국이 : 선생님, 탄젠트함수나 사인함수로 치환해서 정적분의 값을 구하는 경우, 그 피적분함수의 부정적분은 무엇인지 잘 모르겠어요. 예를 들어, 탄젠트함수로 치환해서 정적분의 값을 구하는 분수함수 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 의 부정적분은 무엇인가요? $x=\tan\theta$ 로 치환하면 이 함수의 적분은 θ 만 남잖아요?

선생님 : 네, 맞아요. 문제는 θ 를 x 에 대한 식으로 나타내는 것이지요.

건국이 : 음… 어떻게 나타내나요?

선생님 : 역함수를 한번 생각해 보세요.

건국이 : 아, $x=\tan\theta$ 이니까 θ 를 x 에 대한 함수로 보면 탄젠트함수의 역함수가 되는 거군요.

선생님 : 그렇지요. 즉 분수함수 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 의 부정적분은 탄젠트함수의 역함수란 말이지요.

문제1-1(단답형)

정적분 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1+4x^2}\right)dx$ 의 값을 구하여 답만 쓰시오.

문제1-2(서술형)

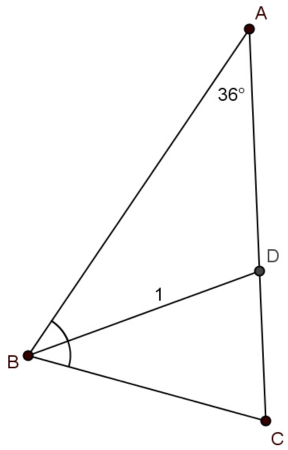
정적분 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ 의 값을 구하되, 풀이 과정도 함께 쓰시오.

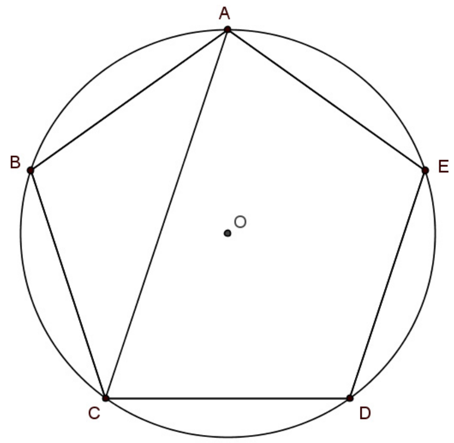
2) 건국대학교 홈페이지

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[가] 눈금 없는 자와 컴퍼스만으로 일부 정다각형을 작도하는 방법은 오래전부터 알려져 있었다. 그 중에서 정삼각형, 정사각형, 정육각형의 작도 방법은 간단하지만, 정오각형의 작도는 조금 복잡하다. 정오각형을 작도할 수 있다는 사실은 눈금없는 자와 컴퍼스만을 사용하여 36°를 작도할 수 있다는 것이다.

[나] 다음의 왼쪽 삼각형에서 $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ 이고 $\angle \mathrm{BAC}=36^\circ$ 이며, $\mathrm{AD}=\mathrm{BD}=1$ 이다. 또, 오른쪽 그림에서 정오각형 ABCDE는 중심 O이고 반지름이 1인 원에 내접한다.





문제2-1(단답형)

$0<\theta<\pi$ 이고 $\sin\theta=2\sin2\theta$ 일 때, $\sin\theta$ 의 값을 구하여 답만 쓰시오.

문제2-2(서술형)

위의 제시문 [나]의 왼쪽 삼각형을 이용하여 $\cos72^\circ$ 값을 계산하되, 계산과정도 함께 쓰시오.

문제2-3(서술형)

위의 제시문 [나]의 오른쪽 그림에서 점 O에서 선분 AB까지의 거리를 d_1, 점 O에서 선분 AC까지의 거리를 d_2라고 할 때, d_1-d_2 의 값을 계산하되, 계산과정도 함께 쓰시오.

풀어보기 [문제1]

$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-(n+k)^2}}$ 의 값은? [2011년 7월 전국연합]

① $\frac{\pi}{12}$ ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

풀어보기 [문제2]

두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $g(e^x) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x < 1) \\ g(e^{x-1})+5 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$ 를 만족시키고, $\int_1^{e^2} g(x)\,dx = 6e^2+4$ 이다. $\int_1^{e} f(\ln x)\,dx = ae+b$ 일 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 정수이다.) [2013년 9월 평가원]

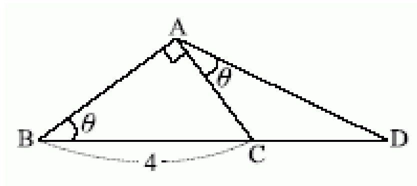
풀어보기 [문제3]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}} = 4$, $\angle\mathrm{BAC} = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC 에서 선분 BC 의 연장선 위에 $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{CAD}$ 가 되도록 점 D 를 잡는다. $\angle\mathrm{ABC} = \theta$ 라 할 때, 다음 중 선분 AD 의 길이를 나타내는 것은? (단, $\angle\mathrm{ABC} < 45^\circ$ 이다.) [2005년 전국연합]

① $2\tan\theta$ ② $2\tan 2\theta$ ③ $\cos 2\theta$ ④ $2\cos 2\theta$ ⑤ $4\sin\theta$

예시답안

풀어보기 [문제1]



$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-(n+k)^2}}$$

$$=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{3}$$

풀어보기 [문제2]

$e^x=t$ 로 치환하면 $g(t)=\begin{cases}f(\ln t) & (1\le t\le e)\\ g\left(\frac{t}{e}\right)+5 & (e\le t\le e^2)\end{cases}$ 이므로

$$\int_1^{e^2}g(x)\,dx=\int_1^e f(\ln x)\,dx+\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+5\right\}dx \quad \cdots\cdots ①$$

우변의 두 번째 적분식에서 $\frac{x}{e}=u$ 로 치환하면 $dx=e\,du$ 이므로

$\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+5\right\}dx=e\int_1^e\{g(u)+5\}du=e\int_1^e f(\ln x)\,dx+5e(e-1)$ 이다. 따라서 ①에서

$$\begin{aligned}(e+1)\int_1^e f(\ln x)\,dx&=\int_1^{e^2}g(x)dx-5e(e-1)\\&=6e^2+4-5e^2+5e\\&=e^2+5e+4\\&=(e+1)(e+4)\end{aligned}$$

이므로 $\int_1^e f(\ln x)\,dx=e+4$ 이고 따라서 $a=1,\ b=4$ 이므로 $a^2+b^2=17$ 이다.

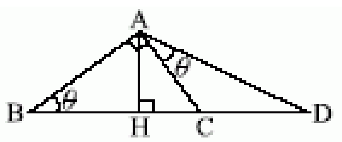
풀어보기 [문제3]

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}\sin\theta=4\sin\theta$ 이고 점 A 에서 밑변 BC 에 내린 수선의 발을 H 라고 하면

$\angle\mathrm{CAH}=\theta$ 이므로 $\overline{\mathrm{AD}}\cos2\theta=\overline{\mathrm{AH}}$,

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AC}}\cos\theta=4\sin\theta\cos\theta=2\sin2\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AD}}=\frac{2\sin2\theta}{\cos2\theta}=2\tan2\theta$



문제1-1

$2x = \tan\theta$ 로 치환하면 $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ 이므로 $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ 이고

$$\frac{1}{1+4x^2} = \frac{1}{1+\tan^2\theta}\ ,\ 2dx = \sec^2\theta\, d\theta$$

이므로 주어진 적분은

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1+4x^2}\right) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{1}{2}\sec^2\theta\right) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\} = \frac{\pi}{4}$$

이다.

(대학답안) $2x = t$ 로 치환하면 문제의 적분은 $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt$ 가 된다. 이때

$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ 이므로 구하는 값은 $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$

문제1-2

$x = 2\sin\theta$ 로 치환하면 $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \theta$ 인데, $0 = 2\sin 0$, $1 = 2\sin\frac{\pi}{6}$ 이므로 구하는 적분은

$\frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$ 이다.

문제2-1

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 이므로 주어진 식은 $\sin\theta = 4\sin\theta\cos\theta$ 이고 $0 < \theta < \pi$ 이므로 $\sin\theta > 0$ 이다.

따라서 $\cos\theta = \frac{1}{4}$ 이고 $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ 이다.

(대학답안) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 이므로 $x = \sin\theta$ 라고 하면 주어진 식은 $x = 4x\sqrt{1-x^2}$.

이 방정식을 풀면 $x = 0, \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$ 인데, $0 < \theta < \pi$ 이므로 $\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$ 이다.

문제2-2

(대학답안) 그림의 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{BC}=1$이고
$\angle ABC=\angle ACB=72^\circ$, $\angle BAC=\angle ABD=36^\circ$ 이다.

이등변삼각형 ABC와 BCD가 닮은 삼각형이므로 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$ 이다. $\overline{CD}=x$ 라 하면,

$(1+x)x=1$ 이다.

이 방정식을 풀면, $x>0$이므로 $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 이다.

그런데 $\overline{BC}=1$ 이므로 $\cos72^\circ=\dfrac{1}{2}\overline{CD}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ 이다.

문제2-3

(대학답안1) $d_1=\cos36^\circ$, $d_2=\cos72^\circ$ 이다. 앞의 풀이에서 $\cos72^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ 이다.

반각공식을 사용하면 $\cos36^\circ=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ 이므로

$$d_1-d_2=\cos36^\circ-\cos72^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{1}{2}$$

(대학답안2)
정오각형에서 $d_1=\cos36^\circ$, $d_2=\cos72^\circ$ 이다. 이제 왼쪽 그림의 삼각형에서
$\angle ABC=\angle ACB=\angle BDC=72^\circ$ 이고 $\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{DC}=1+\overline{DC}$ 인데
$\overline{AB}=2\cos36^\circ$ 이고 $\overline{DC}=2\cos72^\circ$ 이므로 $2\cos36^\circ=1+2\cos72^\circ$ 이다. 따라서

$$d_1-d_2=\cos36^\circ-\cos72^\circ=\frac{1}{2}$$

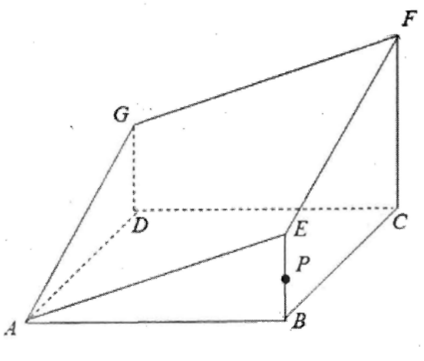
이다.

03 건국대학교 수시3)

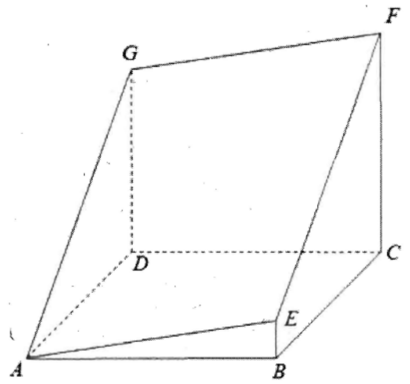
다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】 두 평면 α와 β가 직선 l에서 만난다 하자. 평면 α위에 있고 직선 l위에 있지 않은 점 P에 대하여 P에서 평면 β와 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 Q, O라 할 때, $\angle$POQ의 크기가 두 평면 α와 β가 이루는 이면각의 크기이다.

【나】 다음 그림 각각은 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD를 밑면으로 갖는 사각기둥을 적당한 평면으로 잘라 얻은 입체도형이다. (사각기둥의 옆면은 밑면과 수직이다.)



[그림 1]



[그림 2]

문제1-1(단답형)

[그림1]에서 $\overline{BE}=\overline{DG}=1$이다. 선분 $\overline{BE}$의 중점 P에서 평면 AEFG와 평면 ABCD의 교선에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 PH의 길이를 구하여 답만 쓰시오.

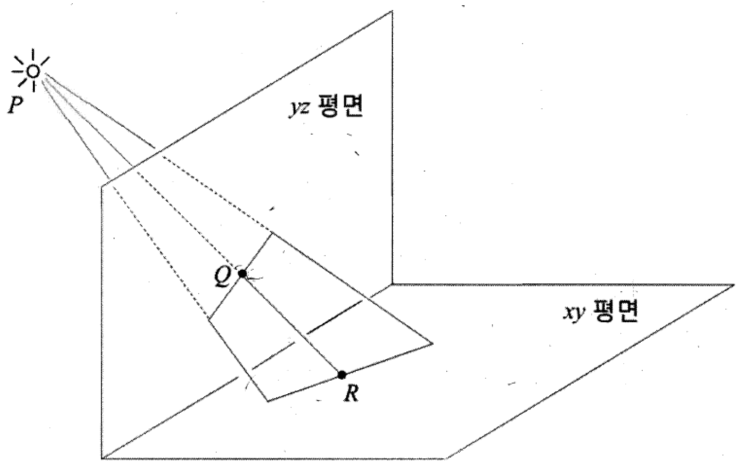
문제1-2(서술형)

[그림2]에서 $\overline{DG}-\overline{BE}=2$이다. s는 사각형 AEFG의 넓이이고, t는 삼각형 ABE, 삼각형 ADG, 사각형 BCFE, 사각형 CFGD의 넓이의 합이라 할 때, $t=2s$이다. 평면 AEFG와 평면 ABCD가 이루는 이면각의 크기가 θ일 때, $\cos\theta$의 값을 구하고 풀이 과정도 함께 쓰시오.

3) 건국대학교 홈페이지

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

광원이 점 P$(-1, 0, 1)$에 놓여 있다. yz평면 위의 점들의 xy평면에서의 그림자를 살펴보자. [그림3]에서 점 Q의 그림자는 직선 PQ와 xy평면의 교점 R이다. (단, Q의 z좌표는 0보다 크고 1보다 작다.)



[그림 3]

문제2-1(단답형)

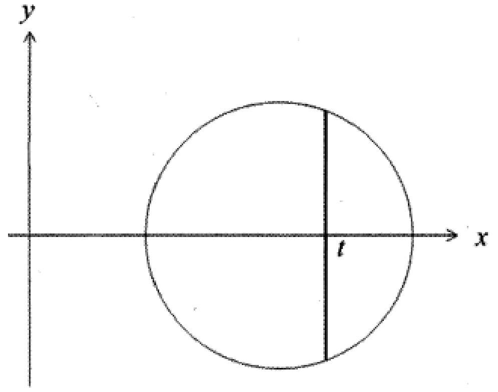
xy평면 위의 두 점 A$(7, 4, 0)$, B$(7, 6, 0)$을 잇는 선분을 그림자로 갖는 yz평면 위의 선분의 길이를 구하여 답만 쓰시오.

문제2-2(서술형)

xy평면 위의 두 직선 m과 n의 방정식이 각각 $y=7$, $y=x+3$이라 하자 (단, $x>0$). 직선 m과 n을 그림자로 갖는 yz평면 위의 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\tan\theta$의 절댓값을 구하고 풀이 과정도 함께 쓰시오.

문제2-3(서술형)

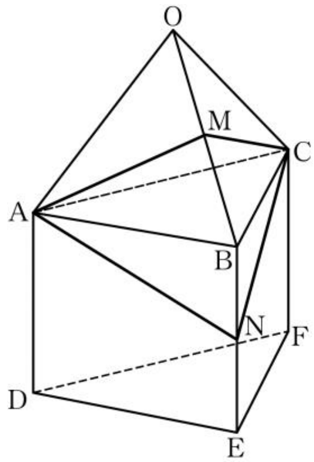
[그림4]는 xy평면에서 y축에 평행한 직선 $x=t$와 원 $(x-2)^2+y^2=1$이 만나서 생기는 선분을 나타낸 것이다. 이런 선분들을 그림자로 갖는 yz평면 위의 선분들의 길이를 비교하면, xy평면 위의 직선이 $x=t_0$일 때 그 길이가 가장 크다. t_0의 값을 구하고 풀이 과정도 함께 쓰시오.



[그림 4]

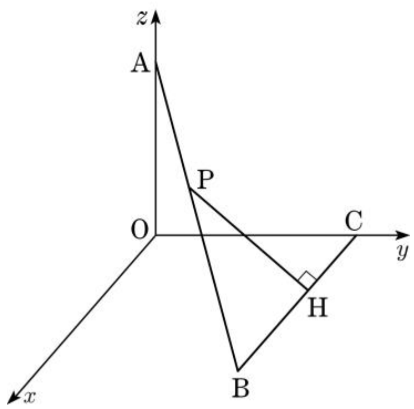
풀어보기 [문제1]

그림은 모든 모서리의 길이가 2인 정삼각기둥 ABC−DEF의 밑면 ABC와 모든 모서리의 길이가 2인 정사면체 OABC의 밑면 ABC를 일치시켜 만든 도형을 나타낸 것이다. 두 모서리 OB, BE의 중점을 각각 M, N이라 하고, 두 평면 MCA, NCA가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오. (2014년 10월 전국연합)



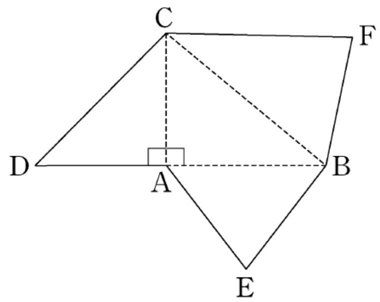
풀어보기 [문제2]

그림과 같이 좌표공간에 세 점 A(0, 0, 3), B(5, 4, 0), C(0, 4, 0)이 있다. 선분 AB 위의 한 점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{PH}=3$이다. 삼각형 PBH의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 구하시오. (2013년 10월 전국연합)



풀어보기 [문제3]

그림은 $\overline{AC}=\overline{AE}=\overline{BE}$이고 $\angle DAC=\angle CAB=90^\circ$ 인 사면체의 전개도이다.



이 전개도로 사면체를 만들 때, 세 점 D, E, F가 합쳐지는 점을 P라 하자. 사면체 PABC에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2011년 9월 평가원)

[보 기]

ㄱ. $\overline{CP}=\sqrt{2}\cdot\overline{BP}$

ㄴ. 직선AB와 직선 CP는 꼬인 위치에 있다.

ㄷ. 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, 직선 PM과 직선 BC는 서로 수직이다.

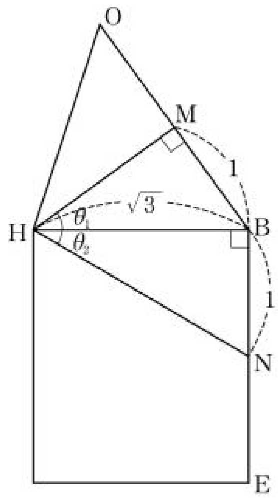
① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예시답안

풀어보기 [문제1]

점 M에서 모서리 AC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 주어진 도형을 평면 OBH로 자른 단면은 그림과 같다.

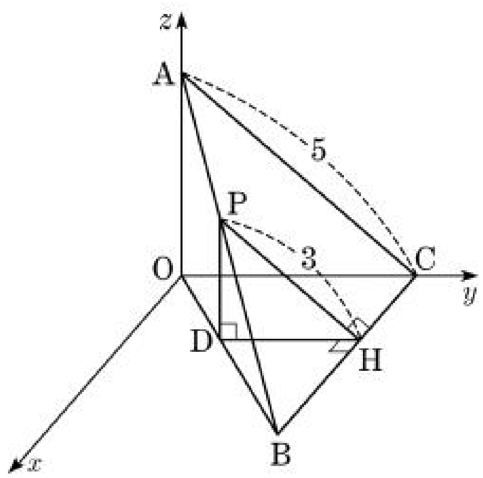


$\overline{MB}=1$, $\overline{HB}=\sqrt{3}$, $\overline{HM}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1}=\sqrt{2}$, $\overline{HN}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=2$

$\cos\theta_1=\dfrac{\overline{HM}}{\overline{BH}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\theta_2=\dfrac{\overline{BH}}{\overline{HN}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$

풀어보기 [문제2]



$\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{AC}\perp\overline{BC}$이므로 평면 ABC와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$이다.

두 직각삼각형 ABC, PBH는 서로 닮은 도형이고 $\overline{BH}:\overline{BC}=\overline{PH}:\overline{AC}=3:5$ 이므로 $\overline{BH}=\dfrac{3}{5}\overline{BC}=3$이다.

$$\therefore\ \triangle PBH=\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{9}{2}$$

따라서 삼각형 PBH의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 S라 하면

$$S=\triangle PBH\cdot\cos\theta=\frac{9}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{18}{5}$$ 이다.

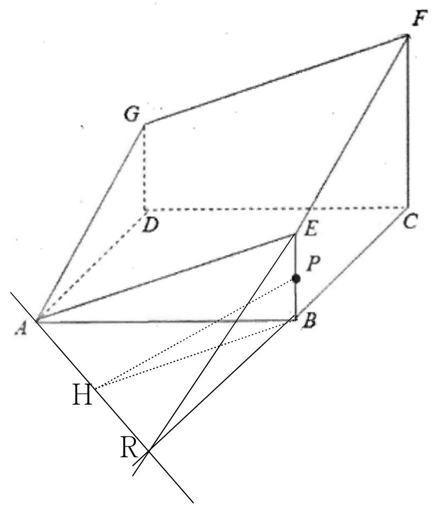
풀어보기 [문제3]

ㄱ. $\overline{AC}\perp\overline{AD}$, $\overline{AC}\perp\overline{AB}$ 이므로 $\overline{AC}\perp$(평면ABP)
   따라서 삼각형 ACP는 $\overline{AC}=\overline{AP}$ 이고 $\angle\cap=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로
   $\overline{CP}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{AP}^2}=\sqrt{2\overline{AP}^2}=\sqrt{2\overline{BP}^2}=\sqrt{2}\,\overline{BP}$ (참)

ㄴ. 세 점 A,B,C는 한 평면 위에 있으면서 일직선 위에 있지 않고, 점 P는 그 평면 위의 점이 아니므로 직선 AB와 직선 CP는 만나지 않는다. 즉, 직선 AB와 직선 CP는 꼬인 위치에 있다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 $\overline{AC}\perp$(평면ABP) 이므로 $\overline{AC}\perp\overline{PM}$. 또한, $\overline{PM}\perp\overline{AB}$ 이므로 $\overline{PM}\perp$(평면ABC). 따라서 직선 PM과 직선 BC는 서로 수직이다. (참)

문제1-1



그림과 같이 직선 FE 와 CB 의 교점을 R 라 하면 직선 AR 은 평면 AEFG 와 평면 ABCD 의 교선이다. 점 P 에서 직선 AR 에 내린 수선의 발을 H 라 하자. 사각형 AEFG 가 마름모이므로 삼각형 RCF 와 삼각형 RBE 의 닮음비가 $2:1$ 이고 $\overline{RB}=3$ 이다. 따라서 삼각형 ABR 은 직각이등변삼각형이므로 $\overline{HB}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ 이다.

그러므로 $\overline{PH}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$ 이다.

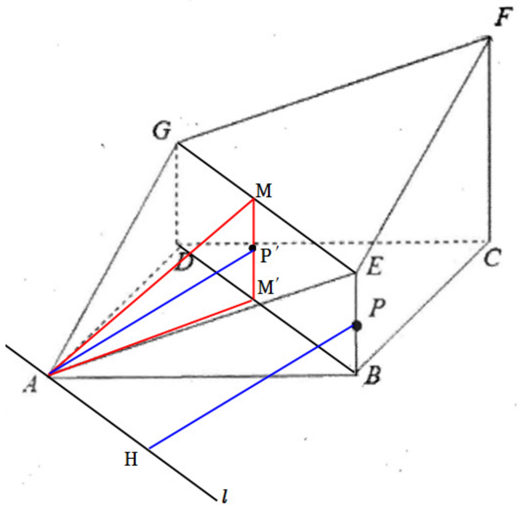
다른 풀이1

A(0, 0, 0), G(0, 3, 1), E(3, 0, 1) 이라 두면 평면 AEFG 의 방정식은

$-x-(y-3)+3(z-1)=0$ 이고 평면 ABCD 와의 교선은 $y=-x$ 이다. 따라서 $\overline{HB}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ 이므로 $\overline{PH}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$ 이다.

다른 풀이2

선분 EG 와 선분 BD 가 평행하므로 평면 AEFG 와 평면 ABCD 의 교선 l 은 직선 EG, 직선 BD 와 각각 평행하다. 그러므로 선분EG 와 선분 BD 의 중점을 각각 M, M′이라두고, 선분 MM′의 중점을 P′이라 두면 $\overline{PH}=\overline{P'A}$ 이다.



$\overline{MM'}=1$, $\overline{P'M'}=\dfrac{1}{2}$, $\overline{AM'}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 이므로 피타고라스 정리에 의해

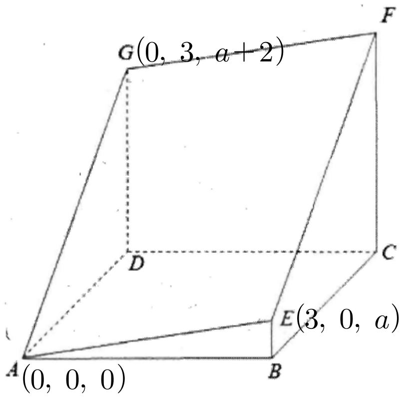
$$\overline{P'A}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{19}}{2}$$

즉, 선분PH 의 길이는 $\dfrac{\sqrt{19}}{2}$ 이다.

문제1-2

s는 사각형 AEFG의 넓이이므로 $s\cos\theta=9$이다. $\overline{BE}=a$라 두면 $\overline{GD}=a+2$이다. 사각형 AEFG가 평행사변형이므로 삼각형 ABE와 사각형 CFGD을 합치고, 삼각형 ADG와 사각형 BCFE을 합치면 가로와 세로의 길이가 3, $2(a+1)$인 직사각형이 되므로 $t=12(a+1)$이다. 따라서 $12(a+1)=\dfrac{18}{\cos\theta}$이고

$$\cos\theta=\frac{3}{2(a+1)} \cdots ① \quad \text{이다.}$$



그림과 같이 A(0, 0, 0), G(0, 3, $a+2$), E(3, 0, a)라 두자. 두 벡터 $(0, 3, a+2)$와 $(3, 0, a)$에 수직인 벡터를 구하면 $(a, a+2, -3)$이므로 평면 AEFG의 법선벡터는 $(a, a+2, -3)$이다. 평면 AEFG와 평면 ABCD가 이루는 이면각의 크기는 두 벡터 $(a, a+2, -3)$와 $(0, 0, 1)$이 이루는 예각의 크기와 같다. 따라서

$$\cos\theta=\frac{3}{1\times\sqrt{a^2+(a+2)^2+(-3)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2a^2+4a+13}} \cdots ②$$

이다. ①, ②에 의해

$$2(a+1)=\sqrt{2a^2+4a+13}=\sqrt{2(a+1)^2+11}$$

$$2(a+1)^2=11$$

$$2(a+1)=\sqrt{22} \ (\because a>0)$$

이다. 따라서 $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{22}}=\dfrac{3\sqrt{22}}{22}$이다.

문제2-1

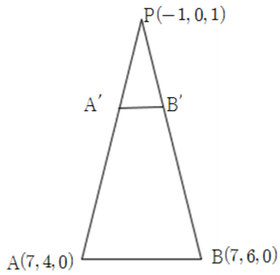
선분 PA, 선분 PB가 yz평면과 만나는 교점을 각각 A′, B′이라 두면, 점 A′은 선분 PA를 1:7로, 점 B′은 선분 PB를 1:7로 내분하는 점이다. 따라서

$$A'=\left(0, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}\right),\ B'=\left(0, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$$

이므로 $\overline{A'B'}=\dfrac{1}{4}$ 이다.

다른 풀이1

선분 PA, 선분 PB 가 yz 평면과 만나는 교점을 각각 A′, B′ 이라 두면 $\overline{AB} // \overline{A'B'}$ 이고 삼각형 PA′B′ 과 삼각형 PAB 의 닮음비가 1 : 8 이므로 $\overline{A'B'} = \frac{1}{8}\overline{AB} = \frac{1}{8} \times 2 = \frac{1}{4}$ 이다.



다른 풀이2

직선 PA 의 방정식 $\frac{x+1}{8} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-1}$ 과 yz 평면의 교점은 $\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{7}{8}\right)$ 이다.

직선 PB 의 방정식 $\frac{x+1}{8} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{-1}$ 과 yz 평면의 교점은 $\left(0,\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8}\right)$ 이다. 따라서 yz 평면 위의 선분의 길이는 $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 이다.

문제2-2

직선 n 위의 두 점 A(1, 4, 0), B(0, 3, 0)에 대하여 선분PA, 선분PB 가 yz 평면과 만나는 점은 각각 $A'\left(0, 2, \frac{1}{2}\right)$, $B' = B(0, 3, 0)$ 이므로 직선A′B′ 의 방향벡터는 $\overrightarrow{A'B'} = \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)$ 이다. 따라서 yz 평면에서 직선A′B′ 의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

직선 m 위의 두 점 C(1, 7, 0), D(0, 7, 0) 에 대하여 선분PC, 선분PD 가 yz 평면과 만나는 점은 각각 $C'\left(0, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $D' = D(0, 7, 0)$ 이므로 $\overrightarrow{C'D'} = \left(0, \frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 이다. 따라서 yz 평면에서 직선 C′D′ 의 기울기는 $-\frac{1}{7}$ 이다. 그러므로 직선A′B′ 와 직선C′D′ 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 두면

$$|\tan\theta| = \left| \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{7}}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{7}\right)} \right| = \frac{1}{3}$$ 이다.

다른 풀이1

$\overrightarrow{A'B'}=\left(0,1,-\frac{1}{2}\right)$ 이므로 직선 A′B′ 의 방향벡터를 $\vec{u}=(0,2,-1)$,$\overrightarrow{C'D'}=\left(0,\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 이므로 직선 C′D′ 의 방향벡터를 $\vec{v}=(0,7,-1)$ 이라 둘 수 있다.

$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{15}{\sqrt{5}\sqrt{50}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$ 이므로 $|\tan\theta|=\frac{1}{3}$ 이다.

다른 풀이2

m과 n의 교점 C(4, 7, 0)에 대하여 직선 PC의 방정식 $\frac{x+1}{5}=\frac{y}{7}=\frac{z-1}{-1}$ 과 yz평면의 교점은 $\left(0,\ \frac{7}{5},\ \frac{4}{5}\right)$이다. 그러므로 직선 m을 그림자로 갖는 yz평면위의 직선의 방향벡터는 $(0,\ 7,\ 0)-\left(0,\ \frac{7}{5},\ \frac{4}{5}\right)=\left(0,\ \frac{28}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$ 와 평행하므로 방향벡터 $\overrightarrow{h_m}=(0,\ 28,\ -4)$ 라 하자. 이때 y축과 이루는 각의 크기를 α라 하면 $\tan\alpha=-\frac{1}{7}$ 이다.

같은 방법으로 직선 n을 그림자로 갖는 yz평면위의 직선의 방향벡터는 $(0,\ 3,\ 0)-\left(0,\ \frac{7}{5},\ \frac{4}{5}\right)=\left(0,\ \frac{8}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$ 와 평행하므로 방향벡터 $\overrightarrow{h_m}=(0,\ 8,\ -4)$ 라 하자. 이때, y축과 이루는 각의 크기를 β라 하면 $\tan\beta=-\frac{1}{2}$ 이다. $\tan\theta$ 의 절댓값은

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{14}}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$ 이다.

문제2-3

$(x-2)^2+y^2=1$ 에서 $y=\pm\sqrt{1-(x-2)^2}=\pm\sqrt{-x^2+4x-3}$ 이므로 $x=t$일 때 $y=\pm\sqrt{-t^2+4t-3}$ 이다. 따라서 [그림4]의 선분의 양 끝점의 좌표를 각각 A,B라 두면 $A\left(t,\sqrt{-t^2+4t-3},0\right)$, $B\left(t,-\sqrt{-t^2+4t-3},0\right)$ 이다. 선분 PA, 선분 PB 가 yz평면과 만나는 교점을 각각 A′, B′이라 두면, 점 A′은 선분 PA를 $1:t$로, 점 B′은 선분 PB를 $1:t$로 내분하는 점이다. 따라서

$$A'\left(0,\frac{\sqrt{-t^2+4t-3}}{1+t},\frac{t}{1+t}\right),\ B'\left(0,\frac{-\sqrt{-t^2+4t-3}}{1+t},\frac{t}{1+t}\right)$$

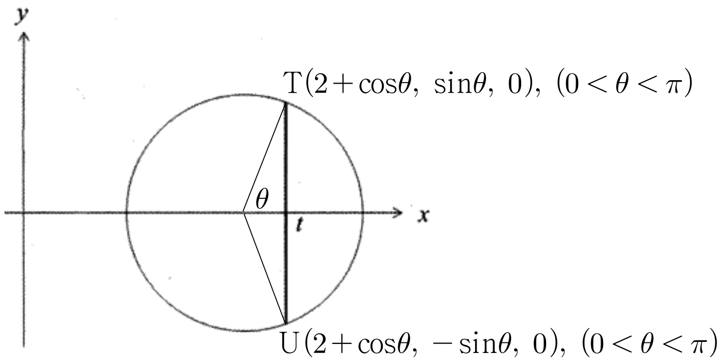
이다. 그러므로 선분 $\overline{A'B'}=\frac{2\sqrt{-t^2+4t-3}}{1+t}$ 이다.

이제 $y=\dfrac{2\sqrt{-t^2+4t-3}}{1+t}$ $(1\le t\le 3)$ 라 두고 미분하여 y의 최댓값을 구하면 된다.

$y'=\dfrac{2(-3t+5)}{(1+t)^2\sqrt{-t^2+4t-3}}$ 이므로 $t=\dfrac{5}{3}$ 에서 극댓값이자 최댓값을 갖는다.

그러므로 $t_0=\dfrac{5}{3}$ 이다.

다른 풀이



[그림 4]

점 P$(-1,\ 0,\ 1)$에 대하여 직선 PT의 방정식 $\dfrac{x+1}{3+\cos\theta}=\dfrac{y}{\sin\theta}=\dfrac{z-1}{-1}$ 과 yz평면의 교점은 V$\left(0,\ \dfrac{\sin\theta}{3+\cos\theta},\ 1-\dfrac{1}{3+\cos\theta}\right)$ 이다. 같은 방법으로 점 P$(-1,\ 0,\ 1)$에 대하여 직선 PU의 방정식 $\dfrac{x+1}{3+\cos\theta}=\dfrac{y}{-\sin\theta}=\dfrac{z-1}{-1}$ 과 yz평면의 교점은

W$\left(0,\ \dfrac{-\sin\theta}{3+\cos\theta},\ 1-\dfrac{1}{3+\cos\theta}\right)$ 이다.

그러므로 yz평면 위의 선분의 길이 $\overline{\mathrm{VW}}=\dfrac{2\sin\theta}{3+\cos\theta}$ 이다.

$f(\theta)=\dfrac{2\sin\theta}{3+\cos\theta}$, $(0<\theta<\pi)$ 라 두면

$f'(\theta)=\dfrac{2\cos\theta(3+\cos\theta)+2\sin^2\theta}{(3+\cos\theta)^2}=\dfrac{2\cos\theta(3+\cos\theta)+2(1-\cos^2\theta)}{(3+\cos\theta)^2}=\dfrac{2(3\cos\theta+1)}{(3+\cos\theta)^2}$

이므로 $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ 일 때, xy평면위의 그림자 선분의 길이가 가장 크다. 따라서

$$t_0=2+\cos\theta=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$ 이다.

04 경희대학교 모의[4)]

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[가] 최대 최소의 정리: 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이면, $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능하며, a와 b사이의 점 $x=c$에서 최댓값 혹은 최솟값을 가지면 $f'(c)=0$이다.

[나] 롤의 정리: 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.
롤의 정리를 일반화해서 다음의 평균값 정리를 얻을 수 있다.

평균값 정리 : 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나는 존재한다.

평균값 정리에 의해, 열린 구간 (a,b)의 모든 x에 대해 $f'(x)\le 0$이면 구간 (a,b)의 $x_1 \le x_2$인 임의의 두 수 x_1, x_2에 대해 $f(x_1)\ge f(x_2)$를 얻는다. 즉, 함수 $f(x)$는 증가하지 않는 함수이다.

[다] 만약 주어진 함수 $f(x)$가 두 번 미분가능하다면, 이계도함수 $f''(x)$로부터 함수 $f(x)$의 그래프의 모양을 알 수 있다. 어떤 구간에서 $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하고, $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.

4) 경희대학교 홈페이지

논제 I-1

구간 $0 \le x \le 3$에서 아래와 같이 정의된 함수 $f(x)$가 있다.

$$f(x)=\begin{cases}-2x+4, & 0 \le x \le 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \\ 2x-2, & 2 \le x \le 3\end{cases}$$

$0 \le k \le 5$인 k에 대해, 구간 $0 \le x \le 3$에서 함수 $g(x)=f(x)-kx$의 최댓값을 $M(k)$, 최솟값을 $m(k)$라 하자.

함수 $F(k)=M(k)-m(k)$의 최댓값과 최솟값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (15점)

논제 I-2

함수 $f(x)$가 열린 구간 $(-1,1)$에서 미분가능하다. 구간 $(-1,1)$의 모든 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$에 대해 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$ 이면 구간 $(-1,1)$의 모든 x에 대해 $f'(x) > 0$인지 답하고 그 근거를 논술하시오. (9점)

논제 I-3

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대해 두 번 미분가능하다. 그리고 $f(x)$는 구간 $[-1,1]$에서 상수함수가 아니며, 모든 실수 x에 대해 $f''(x) \le 0$이고 $f(-1)=f(1)=0$이다. 함수 $f(x)$에 대한 주어진 조건을 이용해 그래프의 모양을 생각해보면 $f'(1)$의 부호를 알 수 있다. 다음 중 맞는 답을 고르고 그 이유를 논술하시오. (18점)

① $f'(1) > 0$　　② $f'(1) < 0$　　③ $f'(1) = 0$

논제 I-4

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대해 두 번 미분가능하다. 모든 실수 x에 대해 $f''(x) \le 0$이고 $f(-1)=-1$, $f(1)=1$이다. 구간 $(-1,1)$의 모든 점 x에 대해 $f(-1) < f(x)$임을 보이고 그 이유를 논술하시오. (18점)

풀어보기 [문제1]

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x < 1$일 때, $g(x)=f(x)$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2010년 대수능 가형)

<보 기>

ㄱ. $f(-1)=f(1)$이고 $f'(-1)=f'(1)$이면, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면, $f'(0)f'(1)<0$이다.
ㄷ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f'(1)>0$이면, 구간 $(-\infty, -1)$ 에 $f'(c)=0$인 c가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀어보기 [문제2]

함수$f(x)=\ln(2x^2+1)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?(2012년 4월 전국연합 B형)

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=-f'(x)$ 이다.
ㄴ. $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다.
ㄷ. 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $|f(x_1)-f(x_2)| \le \sqrt{2}\,|x_1-x_2|$ 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀어보기 [문제3]

양수 a와 두 실수 b, c에 대하여 함수

$$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 갖는다.
(나) $0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1 \ge 0$이다.

세 수 a, b, c의 곱 abc의 최댓값을 $\dfrac{k}{e^3}$라 할 때, $60k$의 값을 구하시오.(2016년 9월 모평 B형)

예시답안

풀어보기 [문제1]

ㄱ. 사차함수 $f(x)$에 대하여 주기가 2인 주기함수 $g(x)$가 실수전체의 집합에서 미분가능하기 위한 필요충분조건은 $f(1)=f(-1)$, $f'(1)=f'(-1)$ (참)

ㄴ. $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 하면

$f(1)=1+a+b+c+d$, $f(-1)=1-a+b-c+d$, $f(1)=f(-1)$이므로 $a+c=0$, $c=-a$

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$이고 $f'(1)=4+3a+2b+c$, $f'(-1)=-4+3a-2b+c$

$f'(1)=f'(-1)$이므로 $4+2b=0$, $\therefore\ b=-2$

즉, $f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+d$이고 $f'(x)=4x^3+3ax^2-4x-a$이다.

$f'(0)=-a$, $f'(1)=4+3a-4-a=2a$이므로 $f'(0)f'(1)=-2a^2\le 0$ (거짓)

ㄷ. $f'(-1)=f'(1)=2a$ 이고 $f'(1)>0$이므로 $a>0$. $f'(0)=-a<0$이므로 중간값 정리에 의해 구간 $(-\infty, -1)$에 $f'(c)=0$인 c가 존재한다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이므로 정답은 ③이다.

풀어보기 [문제2]

ㄱ. $f'(x)=\dfrac{4x}{2x^2+1}$ 이므로 $f'(-x)=\dfrac{-4x}{2x^2+1}=-\dfrac{4x}{2x^2+1}=-f'(x)$ (참)

ㄴ. $f''(x)=\dfrac{4(2x^2+1)-4x\cdot 4x}{(2x^2+1)^2}=\dfrac{4(1-2x^2)}{(2x^2+1)^2}$, $f''(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$\sqrt{2}$	↘

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$ 이므로 $y=f'(x)$의 최댓값은 $\sqrt{2}$ 이다. (참)

ㄷ. i) $x_1=x_2$일 때, 주어진 부등식은 성립한다.

ii) $x_1\ne x_2$일 때, $[x_1, x_2]$에서 평균값의 정리에 의하여 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(c)$ 인 c가 (x_1, x_2)에서 적어도 하나 존재한다.

ㄱ, ㄴ에 의하여 $-\sqrt{2}\le f'(x)\le\sqrt{2}$ 이므로 $\left|\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|=|f'(c)|\le\sqrt{2}$ 이다.

∴ i), ii)에 의하여 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$|f(x_1)-f(x_2)| \le \sqrt{2}\,|x_1-x_2|$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이므로 정답 ⑤이다.

풀어보기 [문제3]

$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ 을 x 에 대하여 미분하면 $f'(x)=(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x$ 인데 $f(x)$ 가 $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$ 에서 극값을 가지므로 $ax^2+(2a+b)x+b+c=0$의 근이 $x=\sqrt{3}\,,-\sqrt{3}$ 이다. 근과 계수의 관계에서 $-\dfrac{2a+b}{a}=0$, $\dfrac{b+c}{a}=-3$ 이므로 $b=-2a$, $c=-a$ 이다.

따라서 $f'(x)=a(x^2-3)e^x$, $f(x)=a(x^2-2x-1)e^x$ 이다.

$0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1)-f(x_2)+x_2-x_1 \ge 0$ 이므로

양변을 $x_2-x_1(>0)$ 로 나누어 식을 정리하면 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1} \ge -1$ 이다. $f(x)$ 가 $x \ge 0$ 에서 연속이고 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

인 $c\left(0 \le x_1 < c < x_2\right)$ 가 존재하고 $f'(c) \ge -1$ 이다. 즉, $x \ge 0$ 에서 $f'(x) \ge -1$ 이 항상 성립하게 하는 a의 범위를 구하면 된다.

$$f''(x)=a(x^2+2x-3)e^x=a(x+3)(x-1)e^x$$

이므로 $f'(x)$의 증감표는 아래와 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$		↘	$-2ea$	↗

증감표에 의해 $f'(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 $-2ea$ 를 갖는다. 따라서

$$-2ea \ge -1,\ a \le \frac{1}{2e}$$

이므로 a 의 최댓값은 $\dfrac{1}{2e}$ 이고 $abc=a\times(-2a)\times(-a)=2a^3$ 의 최댓값은 $\dfrac{1}{4e^3}$ 이다. 따라서 $k=\dfrac{1}{4}$ 이고 $60k=15$ 이다.

논제 I-1

구간 $0 \le x \le 3$에서 $f(x)$가 연속이므로, $g(x)$도 연속이다. 따라서 최대 최소의 정리에 의해 구간 $0 \le x \le 3$에서 $g(x)$도 최솟값, 최댓값을 갖는다.

구간 $0 \le x \le 3$에서 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} -(2+k)x+4, & 0 \le x \le 1 \\ -kx+2, & 1 \le x \le 2 \\ (2-k)x-2, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

이다.

① $0 \le x \le 1$에서 $g(x)$는 감소함수이므로 최솟값 $g(1)=2-k$, 최댓값 $g(0)=4$ 를 갖는다.

② $1 \le x \le 2$에서

(a) $k \ne 0$ 이면 $g(x)$는 감소함수이므로 최솟값 $g(2)=2-2k$, 최댓값 $g(1)=2-k$ 를 갖는다.

(b) $k=0$ 이면 상수함수이므로 최솟값, 최댓값 모두 2를 갖는다.

③ $2 \le x \le 3$에서

(a) $2<k \le 5$에서 $g(x)$는 감소함수이므로 최솟값 $g(3)=4-3k$, 최댓값 $g(2)=2-2k$을 갖는다.

(b) $k=2$ 이면 상수함수이므로 최솟값, 최댓값 모두 -2를 갖는다.

(c) $0 \le k < 2$ 이면 $g(x)$는 증가함수이므로 최솟값 $g(2)=2-2k$, 최댓값 $g(3)=4-3k$을 갖는다.

따라서 $M(k)=4$, 그리고 $m(k)$를 구하기 위해서는 $2-2k$와 $4-3k$만 비교하면 된다.

$2-2k \ge 4-3k$이면 $k \ge 2$ 이 되어 $m(k)=4-3k$

$2-2k \le 4-3k$이면 $k \le 2$ 이 되어 $m(k)=2-2k$

따라서 $F(k)=\begin{cases} 2+2k, & 0 \le k \le 2 \\ 3k, & 2 \le k \le 5 \end{cases}$ 가 되어 최댓값은 $k=5$일 때 15, 최솟값은 $k=0$일 때 2 이다.

논제 I-2

구간 $(-1,1)$의 모든 x에 대해 $f'(x)>0$ 이 성립하지 않는다.

다음과 같은 반례를 들 수 있다.

$f(x)=x^3$ 인 경우 구간 $(-1,1)$의 모든 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$에 대해

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{{x_2}^3-{x_1}^3}{x_2-x_1}={x_2}^2+x_2x_1+{x_1}^2>0$$

가 성립한다. 하지만 $f'(x)=3x^2$ 이므로 $f'(0)=0$이다.

논제 I-3

$f(x)$는 모든 실수 x에 대해 미분가능하고 $f(-1)=f(1)$이므로 롤의 정리에 의해 $f'(c)=0$인 c가 -1와 1 사이에 적어도 하나 존재한다. 모든 실수 x에 대해 $f''(x)\le 0$이므로 제시문 <나>에서 의하여 $-1<c<1$이면 $f'(-1)\ge f'(c)\ge f'(1)$가 되어 $f'(1)\le 0$이다.
만약 $f'(1)=0$이라고 하자.
$-1<x<1$이면 $f'(-1)\ge f'(x)\ge f'(1)$가 되어 $f'(x)\ge 0$이다.
$f'(x)\ge 0$이므로 $-1<x<1$이면 $f(-1)\le f(x)\le f(1)$이고 $f(-1)=f(1)$이다.
따라서 $f(x)$는 상수함수가 되어 모순이다. $\therefore f'(1)<0$

논제 I-4

구간 $(-1,1)$의 어떤 점 x_0에 대해 $f(-1)\ge f(x_0)$라고 하자. 평균값 정리에 의해
$\dfrac{f(x_0)-f(-1)}{x_0-(-1)}=f'(c)$ 인 c가 -1와 x_0 사이에 적어도 하나는 존재한다.
한편 $f''(x)\le 0$이므로 $c<x<1$인 모든 x에 대해 $f'(c)\ge f'(x)\ge f'(1)$이 되어 $f'(x)\le 0$이 성립한다.
또 $f'(x)\le 0$이므로 $c<x_0<1$인 모든 x_0에 대해 $f(c)\ge f(x_0)\ge f(1)$ ⋯②
①, ②에 의해 $-1=f(-1)\ge f(x_0)\ge f(1)=1$ 이 되어 모순이다.
그러므로 구간 $(-1,1)$의 모든 점 x에 대해 $f(-1)<f(x)$

05 경희대학교 수시(의학계열)5)

Ⅰ. 다음 제시문과 그림을 참조하여 논제에 답하시오. (60점)

[가] x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 β에 한없이 가까워지면 β를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 좌극한이라고 하며, 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a-0} f(x)=\beta$$

[나] 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a, x=b$로 둘러싸인 도형을 x축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여 보자. x좌표가 x인 점을 지나 x축에 수직인 평면으로 이 회전체를 자르면 그 단면은 반지름의 길이가 $|f(x)|$ 인 원이 된다. 그 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$$S(x)=\pi y^2=\pi f(x)^2$$

이다. 따라서 구하는 회전체의 부피 V는 다음과 같다.

$$V=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b \pi y^2 dx=\pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

[다] 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$에 대하여 극한값 $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$가 존재하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다. 이때, 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 순간변화율 또는 미분계수라 하고 기호 $f'(a)$로 나타낸다.

[라] 미분가능한 두 함수 $y=f(z), z=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는 다음과 같다.

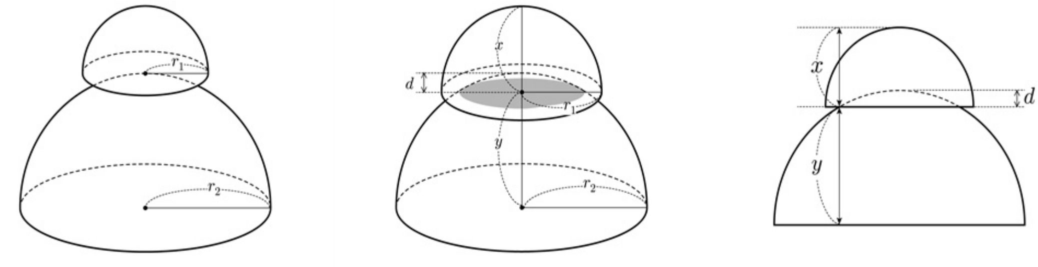
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} \text{ 또는 } y'=f'(g(x))g'(x)$$

[마] 미분가능한 함수 $y=f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때

(1) $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌면, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

(2) $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀌면, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

5) 경희대학교 홈페이지



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

논제 I

아래 상황 1과 상황2를 읽고 논제에 답하시오.

상황1 : 반지름이 각각 $r_1 = 1, r_2 = 2$인 서로 다른 물질로 만들어진 두 반구가 [그림1]과 같이 서로 접하면서 놓여있고, 시간 $t\,(t \geq 0)$가 지남에 따라 각 반구의 반지름 r_1이 $1-t$로, r_2가 $2-3t$로 변한다. 여기서 항상 두 밑면은 평행하고, 윗반구 밑면의 중심이 아래 반구와 접한다. 단, 각 반구의 반지름이 0이 되면, 그 반구는 녹아 없어진 것으로 생각한다. (여기서 반구는 구와 구의 중심을 지나는 평면으로 둘러싸인 한 쪽 입체도형을 말한다.)

상황2 : 반지름이 $r_1 = 1$인 얼음으로 만들어진 반구와 $r_2 = 2$인 눈으로 만들어진 반구가 [그림1]과 같이 서로 접하면서 놓여있고, 시간 $t\,(t \geq 0)$가 지남에 따라 각 반구의 반지름 r_1이 $1-t$로, r_2가 $2-3t$로 변한다. 여기서 항상 두 밑면은 평행하지만 [그림2]처럼 얼음 반구와 눈 반구의 공통부분이 생긴다고 하자. 이때 얼음 반구는 항상 반구의 형태를 유지하지만, 눈 반구에서는 공통 부분에 해당하는 부분이 계속 녹아 없어진다. 두 반구의 밑면 사이의 거리와 r_2의 차를 d라 하고, d는 시간 t에 따라 변하는 일차식 $d = t$로 주어진다고 하자. 두 반구의 밑면의 중심을 지나는 평면으로 자른 단면은 각각 반원(밑변 포함)으로 둘러싸인 영역으로 [그림3]과 같다. 입체를 옆에서 관찰하였을 때, 얼음과 눈으로 구분되어 보이는 경계 부분에서 얼음 반구의 최고점까지의 높이를 x, 눈 반구의 밑면으로부터 그 경계까지의 높이를 y라고 하자. 즉, [그림3]에서와 같이, 두 반원(밑변 포함)의 교점과 아래 반원의 밑변 사이의 거리가 y, 전체 도형의 높이에서 y를 뺀 것이 x이다. 단, 눈으로 이루어진 부분이 남아 있을 때에만 d와 x, y를 정의한다. (상황1은 모든 t에 대해 $d = 0$인 경우에 해당한다.)

논제 Ⅰ-1

상황1에서 제시된 입체의 부피를 V_0이라 하자. 두 반구가 모두 녹아 없어질 때까지의 입체의 부피 V_0를 t의 식으로 표현하고, 그 근거를 논술하시오. (5점)

논제 Ⅰ-2

상황2에서 눈으로 이루어진 부분이 완전히 녹아 없어질 때의 시각을 t_0이라 하자. x와 y를 t의 함수로 표현하고, t_0과 $\lim_{t \to t_0 - 0} x$, $\lim_{t \to t_0 - 0} y$를 구하시오. 그리고 그 근거를 논술하시오. (20점)

논제 Ⅰ-3

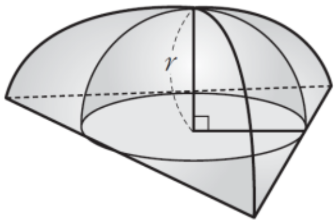
상황2에서 제시된 입체의 부피를 V라 하고, V가 0이 되는 시각을 t_1이라 하자. 이때, t_1을 구하고 $0 \le t \le t_1$에서의 V를 r_1, r_2, x, y를 이용하여 표현하시오. 그리고 그 근거를 논술하시오. (V는 시간의 구간마다 다르게 표현될 수 있고, 각 변수는 정의되는 범위에서만 이용한다.) (15점)

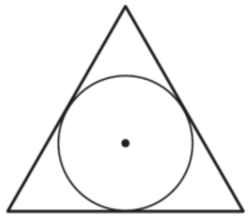
논제 Ⅰ-4

V_0와 V를 각각 [논제Ⅰ-1]과 [논제Ⅰ-3]에서 구한 입체의 부피라 하고, t_1을 [논제Ⅰ-3]에서의 V가 0이 되는 시각이라고 하자. 이때, 제시문 [라]와 [마]를 참조하여 구간 $[0, t_1]$에서 $V_0 - V$의 값이 최대가 되는 시각을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (20점)

풀어보기 [문제1]

그림은 반지름의 길이가 r인 반구에 외접한 입체도형이다. 이 입체도형을 밑면에 평행한 평면으로 자른 단면이 항상 반구의 단면인 원에 외접하는 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피를 r로 나타낸 것은?
(단, 입체도형의 밑면과 반구의 밑면은 한 평면 위에 있다.)





단면

① πr^3　② $\frac{4}{3}\pi r^3$　③ $\sqrt{3}\pi r^3$　④ $2\sqrt{3}r^3$　⑤ $4\sqrt{3}r^3$

풀어보기 [문제2]

자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{n+b}+2x-1}{x^n+1}\,(x>0)$이 $x=1$에서 미분 가능할 때, $a+10b$의 값을 구하시오.

예시답안

풀어보기 [문제1]

높이가 y일 때 반구의 단면의 반지름의 길이를 x라 하면 $x=\sqrt{r^2-y^2}$.
그러므로 높이가 y일 때 반구에 외접하는 입체도형의 단면의 넓이 $S(y)$는

$$S(y)=3\sqrt{3}\times\left(\sqrt{r^2-y^2}\right)^2=3\sqrt{3}\left(r^2-y^2\right)$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^r S(y)dy=\int_0^r 3\sqrt{3}\left(r^2-y^2\right)dy=3\sqrt{3}\left[r^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^r=2\sqrt{3}r^3$$

(**다른 풀이**) 높이가 y일 때 반지름의 길이가 x이면 원의 넓이 $U(x)$는
$U(x)=\pi x^2$이고, 이 원에 외접하는 정삼각형의 넓이 $T(x)$는 $T(x)=3\sqrt{3}\,x^2$이다.
그러므로 반지름의 길이가 x일 때, $T(x)=\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}U(x)$
이 입체도형의 높이 y는 $0\le y\le r$이므로 부피는

$$\int_0^r \frac{3\sqrt{3}}{\pi}U(x)\,dy=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\int_0^r U(x)\,dy$$

그런데 $\displaystyle\int_0^r U(x)\,dy$는 반구의 부피이므로 $\dfrac{2}{3}\pi r^3$이다.

따라서 이 입체도형의 부피는 $\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}\times\dfrac{2}{3}\pi r^3=2\sqrt{3}\,r^3$이다.

풀어보기 [문제2]

음함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제로,
$x^3-3xy^2+y^3=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$3x^2-\left(3y^2+6xyy'\right)+3y^2y'=0$이고, 정리하면 ;

$$3x^2-3y^2+\left(3y^2-6xy\right)y'=0$$

$$\therefore y'=\frac{x^2-y^2}{2xy-y^2}\quad(\text{단, } 2xy\neq y^2)$$

따라서 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{2^2-(-1)^2}{2\times2\times(-1)-(-1)^2}=-\dfrac{3}{5}$ 이다.

논제 Ⅰ-1

구간 $0 \le t < \frac{2}{3}$ 에서 각 반구의 부피가 $\frac{2}{3}\pi r_1^3, \frac{2}{3}\pi r_2^3$ 이므로, 입체의 부피는 $V_0 = \frac{2}{3}\pi(r_1^3 + r_2^3) = \frac{2}{3}\pi((1-t)^3 + (2-3t)^3)$ 이다.

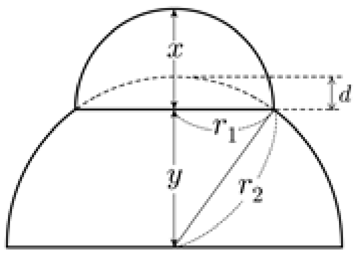
구간 $\frac{2}{3} \le t \le 1$ 에서는 아래 반구가 없어지므로,

입체의 부피는 $V_0 = \frac{2}{3}\pi {r_1}^3 = \frac{2}{3}\pi(1-t)^3$ 이 된다. 이를 정리하면,

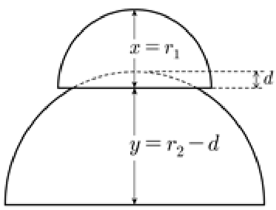
$$V_0 = \begin{cases} \frac{2}{3}\pi(r_1^3 + r_2^3) = \frac{2}{3}\pi((1-t)^3 + (2-3t)^3) & (0 \le t < \frac{2}{3}) \\ \frac{2}{3}\pi r_1^3 = \frac{2}{3}\pi(1-t)^3 & (\frac{2}{3} \le t \le 1) \end{cases}$$

이다.

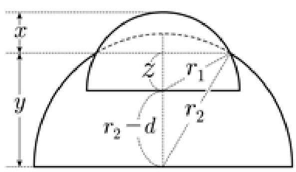
논제 Ⅰ-2



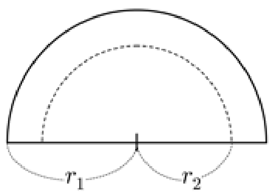
적어도 하나의 반지름이 0보다 크거나 같아야 하므로, $0 \le t \le 1$ 인 t 에 대해서만 고려하도록 한다. 다음으로, 두 반구의 위치관계를 이해하기 위해서 그림에서와 같이 ${r_2}^2 = {r_1}^2 + y^2$ 이 되는 시각 t 를 구한다.



(그림 1)



(그림 2)



(그림 3)

${r_2}^2 = {r_1}^2 + y^2 \Rightarrow 8t^2 - 6t + 1 = 0 \Rightarrow (4t-1)(2t-1) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{4}$ 또는 $t = \frac{1}{2}$

두 반구의 형태는 $0 \le t \le \frac{1}{4}$ 인 경우 (그림1), $\frac{1}{4} < t < \frac{1}{2}$ 인 경우 (그림2), $\frac{1}{2} \le t \le 1$ 인 경우 (그림3) 의 3가지로 표현된다.

(i) $0 \le t \le \frac{1}{4}$ 인 경우, $x = r_1 = 1 - t$ 이고, $y = r_2 - d = 2 - 4t$ 이다.

(ii) $\frac{1}{4} < t < \frac{1}{2}$ 인 경우, (그림2)와 같이 변수 z를 설정하면 $y = r_2 - d + z$ 이고 $x = r_1 - z$ 가 된다. 피타고라스 정리를 적용하여 방정식 ${r_1}^2 - z^2 = {r_1}^2 - (r_2 - d + z)^2$ 을 풀면,

$$z = \frac{2r_2 d - {r_1}^2 - d^2}{2(r_2 - d)} = t - 1$$

따라서 $x = r_1 - z = \frac{5}{4} - 2t$ 이고, $y = r_2 - d + z = 2 - 4t + t - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} - 3t$ 이다.

(iii) $\frac{1}{2} \le t \le 1$ 인 경우, (그림3)에서와 같이 눈 반구가 얼음 반구에 완전히 포함되므로 눈 반구가 모두 녹아 없어진다. 따라서 x와 y는 정의하지 않는다.
이를 모두 정리하면,

$$x = \begin{cases} 1 - t & (0 \le t \le \frac{1}{4}) \\ \frac{5}{4} - 3t & (\frac{1}{4} < t < \frac{1}{2}) \end{cases}, \quad y = \begin{cases} 2 - 4t & (0 \le t \le \frac{1}{4}) \\ \frac{7}{4} - 3t & (\frac{1}{4} < t < \frac{1}{2}) \end{cases}$$

이고, 눈으로 이루어진 부분이 완전히 녹아 없어질 때의 시각은 $t_0 = \frac{1}{2}$ 이고, 이때 x와 y의 좌극한은 $\lim_{t \to t_0 - 0} x = \lim_{t \to t_0 - 0} y = \frac{1}{4}$ 이다.

논제 I -3

$t = 1$ 이후에는 두 반구 모두 녹아 없어지므로 $t_1 = 1$ 이다. $0 \le t < \frac{1}{2}$ 인 경우에 얼음과 눈으로 구분되어 보이는 경계를 반구의 밑면과 평행하게 자르면 각각 높이가 x, y 인 두 개의 입체를 생각할 수 있다. 이때 높이를 x로 갖는 입체의 부피를 V_1, 높이를 y로 갖는 입체의 부피를 V_2라 하자.

(i) $0 \le t \le \frac{1}{4}$ 인 경우, V_1은 반지름이 r_1인 반구의 부피이므로 $V_1 = \frac{2}{3}\pi {r_1}^3$ 이고, V_2는 높이가 $\sqrt{{r_2}^2 - u^2}$ $(0 \le u \le y)$ 인 평면도형의 u축에 대한 회전체의 부피이므로 $V_2 = \frac{2}{3}\pi({r_2}^2 y - \frac{1}{3}y^3)$ 이다. 따라서 부피는 $V = V_1 + V_2 = \pi(\frac{2}{3}{r_1}^3 + {r_2}^2 y - \frac{1}{3}y^3)$ 이다.

(ii) $\frac{1}{4} < t < \frac{1}{2}$ 인 경우, V_1은 높이가 $\sqrt{{r_1}^2 - u^2}$ $(r_1 - x \le u \le r_1)$ 인 평면도형의 u축에 대한 회전체의 부피이므로 $V_1 = \frac{2}{3}\pi {r_1}^3 - \pi({r_1}^2(r_1 - x) - \frac{1}{3}(r_1 - x)^3)$ 이고, $V_2 = \frac{2}{3}\pi({r_2}^2 y - \frac{1}{3}y^3)$ 이다. 따라서 구하고자 하는 부피 V는

$$V= V_1+V_2=\pi(\frac{2}{3}{r_1}^3-{r_1}^2(r_1-x)+\frac{1}{3}(r_1-x)^3+({r_2}^2y-\frac{1}{3}y^3))=\pi(r_1x^2-\frac{1}{3}x^3+{r_2}^2y-\frac{1}{3}y^3)$$

이다.

(iii) $\frac{1}{2}\le t\le 1$ 인 경우, 반지름이 r_1 인 얼음 반구만 생각하면 되므로 $V=\frac{2}{3}\pi{r_1}^3$ 이다.

그러므로 입체의 부피는

$$V=\begin{cases}\pi(\frac{2}{3}{r_1}^3+{r_2}^3-\frac{1}{3}y^3) & (0\le t\le\frac{1}{4})\\ \pi(r_1x^2-\frac{1}{3}x^3+{r_2}^2y-\frac{1}{3}y^3) & (\frac{1}{4}<t<\frac{1}{2})\\ \frac{2}{3}\pi{r_1}^3 & (\frac{1}{2}\le t\le 1)\end{cases}$$

이다.

논제 I -4

$V_d=V_0-V$라 하자.

(i) $0\le t\le\frac{1}{4}$ 인 경우, $V_d=\pi(\frac{2}{3}{r_2}^3-{r_2}^2y+\frac{1}{3}y^3)$ 이고, $\frac{dr_2}{dt}=-3,\ \frac{dy}{dt}=-4$ 이므로, 합성함수의 미분법을 사용하여 V_d를 t로 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{dV_d}{dt}&=\pi(2{r_2}^2(-3)-2r_2(-3)y-{r_2}^2(-4)+y^2(-4))\\&=-2\pi(r_2-y)(r_2-2y)=2\pi t(2-5t)\ge 0\end{aligned}$$

이 되어 V_d는 증가한다.

(ii) $\frac{1}{4}<t<\frac{1}{2}$ 인 경우, $V_d=\pi(\frac{2}{3}{r_1}^3+\frac{2}{3}{r_2}^3-r_1x^2+\frac{1}{3}x^3-{r_2}^2y+\frac{1}{3}y^3)$ 이고,

$\frac{dr_1}{dt}=-1,\ \frac{dr_2}{dt}=-3,\ \frac{dx}{dt}=-2,\ \frac{dy}{dt}=-3$ 이므로 합성함수의 미분법을 사용하여 V_d를 t로 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{dV_d}{dt}&=\pi(2{r_1}^2(-1)+2{r_2}^2(-3)-)-(-1)x^2\\&\qquad -2r_1x(-2)+x^2(-2)-2r_2(-3)y-{r_2}^2(-3)+y^2(-3))\\&=\pi(2t^2-4t+\frac{5}{4})\end{aligned}$$

따라서 $\frac{dV_d}{dt}$는 이 범위에서 한 개의 실근 $t_*=1-\sqrt{\frac{3}{8}}=1-\frac{\sqrt{6}}{4}$ 을 갖는다.

$\frac{1}{4}<t<t_*$ 일 때는 $\frac{dV_d}{dt}>0$ 이고, $t_*<t<\frac{1}{2}$ 일 때는 $\frac{dV_d}{dt}<0$ 이므로, 이 구간에서는 $t=t_*$ 에서 최댓값을 갖는다.

(iii) $\frac{1}{2} \le t \le 1$ 인 경우에는 상황1에서의 아래 반구가 있을 때와 없을 때로 나누어 생각해야 한다.

$\frac{1}{2} \le t \le \frac{2}{3}$ 인 경우 : $V_d = \frac{2}{3}\pi {r_2}^3$ 이고, r_2 가 시간 t 에 따라서 감소하므로, V_d 는 항상 감소한다.

$\frac{2}{3} \le t \le 1$ 인 경우 : $V_d = 0$ 이다.

V_d 는 연속함수이므로, 위의 (i), (ii), (iii)에 의해 $t = t_* = 1 - \frac{\sqrt{6}}{4}$ 에서 V_d 는 최댓값을 갖는다.

06 경희대학교(자연계열 오전)6)

Ⅰ. 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오. (60점)

[가]

함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 이면 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k 에 대하여 $f(c) = k$ 인 c 가 열린 구간 (a, b) 에서 적어도 하나 존재한다. 이와 같은 연속함수의 성질을 중간값의 정리라고 한다.

[나]

반지름의 길이가 r 인 원 O 의 중심에서 어떤 직선까지의 거리를 d 라 할 때, 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

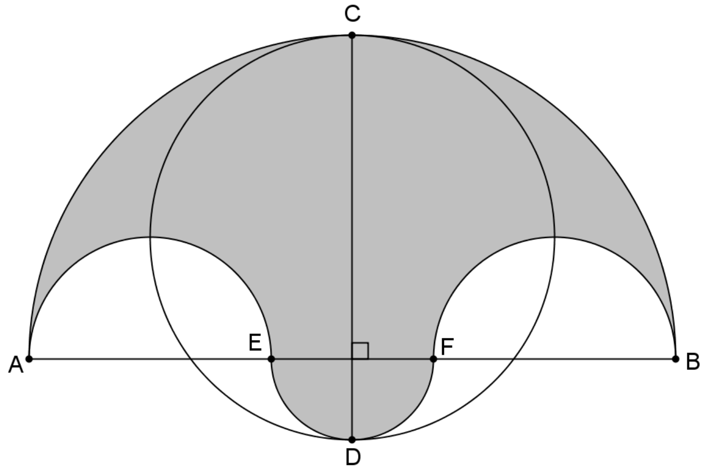
(1) $d > r$ 이면 원과 직선은 만나지 않는다.

(2) $d = r$ 이면 원과 직선은 한 점에서 만난다(접한다).

(3) $d < r$ 이면 원과 직선은 두 점에서 만난다.

[다]

고대 그리스의 학자 아르키메데스는 “보조정리집”에서 여러 가지 도형의 성질을 설명하였다. 셀리논(Salinon)이라 이름붙인 도형은 아래 그림의 색칠한 부분과 같이 선분 AB, 선분 AE, 선분 EF, 선분 FB를 각각 지름으로 하는 네 개의 반원으로 둘러싸인 도형이며, 이 때 $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{FB}}$ 이다. 셀리논의 넓이는 선분 AB를 수직이등분하는 선분 CD가 지름인 원의 넓이와 같다.



6) 경희대학교 홈페이지

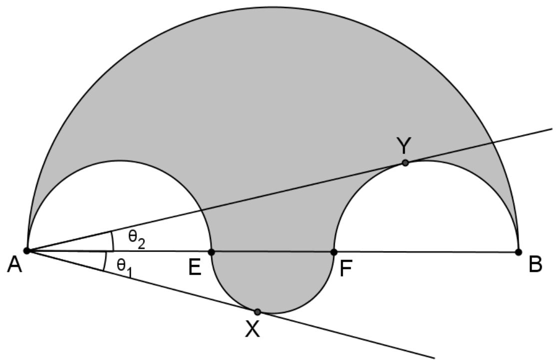
(논제Ⅰ) 제시문 [가], [나], [다]를 읽고 다음 질문에 답하시오.

논제 Ⅰ-1

좌표평면 위의 점 $(p, 0)$ $(0 < p < 2)$을 지나고 x축과 이루는 각이 $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{6}\right)$인 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$과 두 점에서 만난다. 이 두 점 사이의 거리를 p와 θ를 이용하여 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

논제 Ⅰ-2

아래 그림의 색칠된 도형은 제시문 [다]의 셀리논이다. 점 A를 지나는 직선이 호 EF에 접할 때 그 접점을 X라 하고, 호 FB에 접할 때 그 접점을 Y라 하자. 여기서 각 XAB의 크기를 θ_1, 각 YAB의 크기를 θ_2라 하자. 그리고 $\overline{\mathrm{AB}} = 6$ 이다. 이때 다음 질문에 답하시오.



(1) 다음 등식이 성립함을 논술하시오.

$$(\sin\theta_1 + 3)(\sin\theta_2 + 1) = 4$$

그리고 $\theta_1 = \theta_2$인 경우 선분 EF의 길이를 구하고, 그 과정을 서술하시오. (15점)

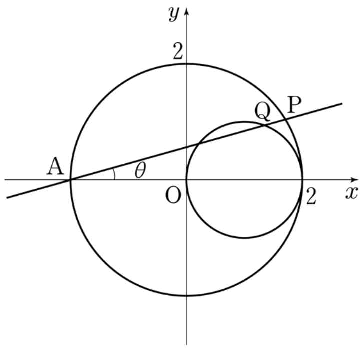
(2) 임의의 양의 실수 α에 대하여 다음 방정식을 만족하는 θ_1, θ_2가 존재함을 제시문 [가]의 중간값의 정리를 이용하여 보이고, 그 근거를 논술하시오. (20점)

$$\sin\theta_1 = \alpha \sin\theta_2$$

(3) 점 A를 지나는 직선이 호 AB와 점 A 이외의 점에서 만날 때, 이 직선과 선분 AB가 이루는 각의 크기를 θ라 하고, 이 직선이 셀리논에 포함되는 부분의 길이를 $L(\theta)$ 하자. 이때 포함되는 부분이 여러 개의 선분으로 나누어지는 경우 $L(\theta)$는 각 선분 길이의 합으로 한다. $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{EF}} = \overline{\mathrm{FB}}$인 경우 $L(\theta)$를 θ의 식으로 나타내고, $L(\theta)$의 최댓값을 구하시오. 그리고 그 과정과 근거를 논술하시오. (15점)

풀어보기 [문제1]

그림과 같이 점 A$(-2, 0)$과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P에 대하여 직선 AP가 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 P에 가까운 점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{OAP}=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta^2}$의 값은? [2012년 9월 평가원]

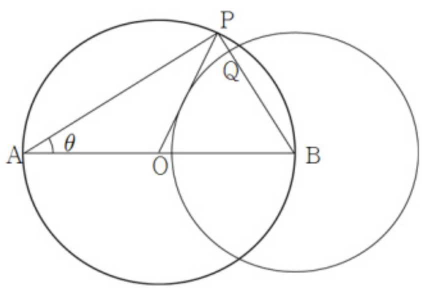


① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

풀어보기 [문제2]

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 점 O인 원 C_1이 있다. 원 C_1 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 하고, 선분 OP에 접하고 중심이 점 B인 원 C_2를 그린다. 원 C_2와 선분 BP의 교점을 점 Q라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta^3}$의 값은?

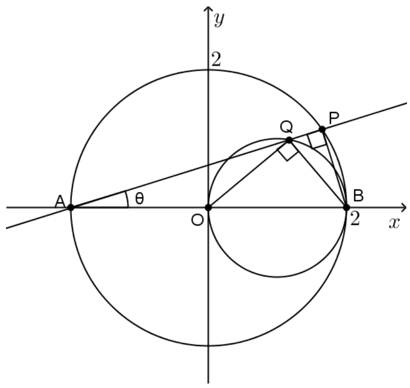
$\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ [2013년 7월 전국연합]

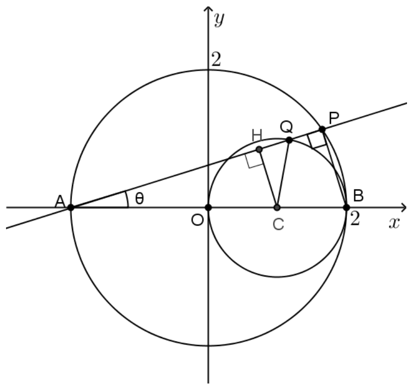


① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

예시답안

풀어보기 [문제1]





위의 왼쪽 그림과 같이 B(2, 0)이라 하면, $\overline{AP}=4\cos\theta$, $\overline{BP}=4\sin\theta$이고 $\overline{OQ}=a$, $\overline{BQ}=b$, $\overline{PQ}=x$라 하면

$$a^2+b^2=4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다. 한편,

$$b^2=x^2+(4\sin\theta)^2=x^2+16\sin^2\theta$$

$$a^2=2^2+(4\cos\theta-x)^2-2\times2\times(4\cos\theta-x)\cos\theta=x^2-4x\cos\theta+4$$

이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$$(x^2-4x\cos\theta+4)+(x^2+16\sin^2\theta)=4$$

$$x^2-2x\cos\theta+8\sin^2\theta=0$$

$$\therefore\ x=\overline{PQ}=\cos\theta-\sqrt{\cos^2\theta-8\sin^2\theta}\ (\because 0<\cos\theta<1)\ )$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{PQ}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos\theta-\sqrt{\cos^2\theta-8\sin^2\theta}}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\sin^2\theta}{\theta^2(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta-8\sin^2\theta})}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}8\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{1}{\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta-8\sin^2\theta}}=8\times1^2\times\frac{1}{2}=4$$

다른 풀이

위의 오른쪽 그림에서 $\overline{AP}=4\cos\theta$, $\overline{AH}=3\cos\theta$, $\overline{HQ}=\sqrt{1-(3\sin\theta)^2}$ 이므로

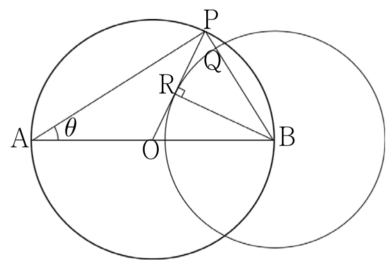
$$\overline{PQ}=4\cos\theta-3\cos\theta-\sqrt{1-9\sin^2\theta}=\cos\theta-\sqrt{1-9\sin^2\theta}$$

이다. 따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{PQ}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos\theta-\sqrt{1-9\sin^2\theta}}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos^2\theta-1+9\sin^2\theta}{\theta^2\left(\cos\theta+\sqrt{1-9\sin^2\theta}\right)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{8\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{1}{\cos\theta+\sqrt{1-9\sin^2\theta}}\right)=4$$

풀어보기 [문제2]

원 C_2 와 선분 OP 의 접점을 점 R 라 하자.



$\overline{BP}=2\sin\theta$, $\angle ROB=2\theta$ 이므로 $\overline{BR}=\sin2\theta=\overline{BQ}$ 이고

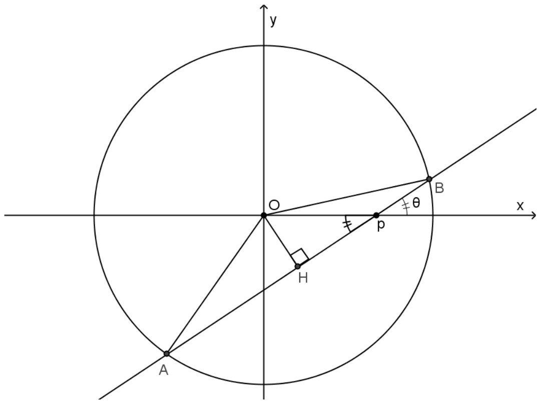
$$\overline{PQ}=\overline{PB}-\overline{BQ}$$
$$=2\sin\theta-\sin2\theta$$
$$=2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta$$
$$=2\sin\theta(1-\cos\theta)$$
$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{PQ}}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3}$$
$$=2\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)$$
$$=2\times1\times\frac{1}{2}=1$$

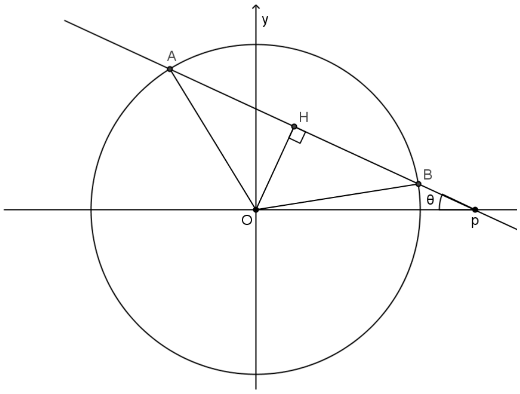
논제 Ⅰ-1

아래 왼쪽 그림은 $0<p\le1$ 인 경우이고 오른쪽 그림은 $1<p<2$ 인 경우이다. 점 O 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 두 가지 경우 모두 $\overline{OH}=p\sin\theta$ 이고 따라서

$$\overline{AB}=2\times\sqrt{1-(p\sin\theta)^2}=2\sqrt{1-p^2\sin^2\theta}$$

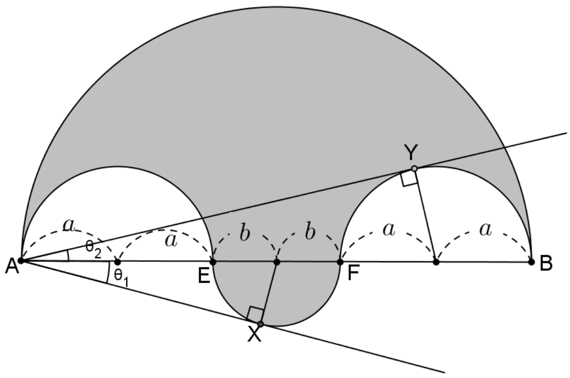
이다.





논제 I -2

(1) 다음 그림과 같이 $\overline{AE}=\overline{FB}=2a$, $\overline{EF}=2b$ 라고 하면, $2a+b=3$ 이다.



이때, $\sin\theta_1=\dfrac{b}{3}$, $\sin\theta_2=\dfrac{a}{3a+2b}$ 이고 따라서,

$$
\begin{aligned}
(\sin\theta_1+3)(\sin\theta_2+1) &= \left(\frac{b}{3}+3\right)\left(\frac{a}{3a+2b}+1\right) \\
&= \left(\frac{3-2a}{3}+3\right)\left(\frac{a}{3a+(6-4a)}+1\right) \\
&= \frac{2(6-a)}{3}\cdot\frac{6}{6-a}=4
\end{aligned}
$$

또한 $\theta_1=\theta_2$ 라면 $\sin\theta_1=\sin\theta_2$ 이므로 $\dfrac{b}{3}=\dfrac{a}{3a+2b}$ 이고 $a=\dfrac{3-b}{2}$ 를 대입하면

$$\frac{b}{3}=\frac{3-b}{9+b}$$

$$b^2+12b-9=0$$

이것을 풀면, $b=-6\pm3\sqrt{5}$ 이고 $b>0$ 이므로 $b=-6+3\sqrt{5}$ 이다. 따라서

$$\overline{EF}=2b=2(-6+3\sqrt{5})=6(\sqrt{5}-2)$$

이다.

다른 풀이

$\theta_1=\theta_2$ 이므로 $\sin\theta_1=\sin\theta_2$ 이다. 이를 등식에 대입하면

$$(\sin\theta_1+3)(\sin\theta_2+1)=(\sin\theta_1+3)(\sin\theta_1+1)=4$$

정리하면 $\sin^2\theta_1+4\sin\theta_1-1=0$ 이고 $\sin\theta_1=-2\pm\sqrt{5}$ 이다. $\sin\theta_1>0$ 이므로

$$\sin\theta_1=-2+\sqrt{5}\left(=\frac{b}{3}\right)$$

이다. 따라서 $\overline{\mathrm{EF}}=2b=2\times3(\sqrt{5}-2)=6(\sqrt{5}-2)$ 이다.

(2)

$\sin\theta_1=\alpha\sin\theta_2$ 이고 $\sin\theta_1=\dfrac{b}{3}$, $\sin\theta_2=\dfrac{a}{3a+2b}$ 이므로 (1)에서와 같이 $a=\dfrac{3-b}{2}$ 를 대입하면

$$\frac{b}{3}=\alpha\cdot\frac{3-b}{9+b}$$

이다. 이것을 b에 관해 정리하면

$$b^2+(9+3\alpha)b-9\alpha=0$$

이고, 이때 $0<b<3$ 이다. $f(b)=b^2+(9+3\alpha)b-9\alpha$ 라 두면,

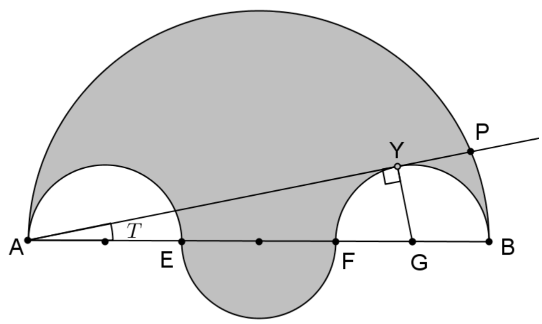
$$f(0)=-9\alpha<0\ ,\ f(3)=9+27+9\alpha-9\alpha=36>0$$

이므로 제시문 [가]의 중간값 정리에 의해 $f(b)=0$ 이 되는 c가 0과 3 사이에 적어도 하나 존재한다. 또한, $0<c<3$ 이므로

$$0<\sin\theta_1=\frac{c}{3}<1\ ,\ 0<\sin\theta_2=\frac{3-c}{9+c}<1$$

이 되어 모든 양의 실수 α 에 대하여 주어진 방정식을 만족하는 θ_1, θ_2 가 존재한다.

(3)

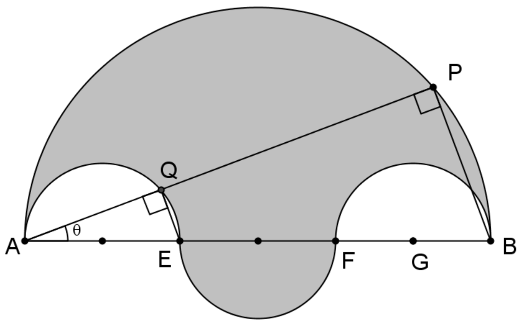


그림과 같이 점 A를 지나는 직선이 호 AB와 점 A 이외의 점 P에서 만난다고 하자. 이 직선이 호 FB에 접하는 경우의 접점을 Y라 하고 선분 FB의 중점을 G라 하고 이때의 θ의 값을 T라 하면

$$\sin T = \frac{\overline{\mathrm{GY}}}{\overline{\mathrm{AG}}} = \frac{1}{5}$$

이다.

i) $T \le \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때



그림과 같이 선분 AP 가 호 AE 와 만나는 점을 Q 라 하면

$$L(\theta) = \overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{AP}} - \overline{\mathrm{AQ}}$$
$$= 6\cos\theta - 2\cos\theta = 4\cos\theta$$

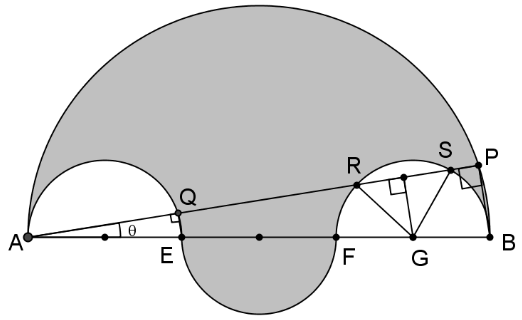
$4\cos\theta$ 는 $T \le \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 감소하므로 $\theta = T$ 에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $L(\theta)$ 의 최댓값은

$$L(T) = 4\cos T = 4\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{8\sqrt{6}}{5}$$

이다.

ii) $0 \le \theta \le T$ 일 때



그림과 같이 선분 AP 가 호 AE 와 만나는 점을 Q 라 하고 호 FB 와 만나는 두 점을 각각 R, S 라 하면

$$L(\theta)=\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{AQ}}-\overline{\mathrm{RS}}$$
$$=6\cos\theta-2\cos\theta-2\sqrt{1-(5\sin\theta)^2}$$
$$=4\cos\theta-2\sqrt{1-25\sin^2\theta}$$

이것을 미분하면,

$$L'(\theta)=-4\sin\theta-2\frac{-50\sin\theta\cos\theta}{2\sqrt{1-25\sin^2\theta}}=2\sin\theta\left(\frac{25\cos\theta}{\sqrt{1-25\sin^2\theta}}-2\right)$$
$$>2\sin\theta\left(\frac{25\cos\theta}{\sqrt{25-25\sin^2\theta}}-2\right)=2\sin\theta\left(\frac{25\cos\theta}{5\cos\theta}-2\right)$$
$$=6\sin\theta\geq 0$$

따라서 $L(\theta)$ 는 증가함수이고 $\theta=T$ 일 때, 최댓값은 $\dfrac{8\sqrt{6}}{5}$ 이다.

i), ii)에 의해서 $L(\theta)$ 의 최댓값은 $\dfrac{8\sqrt{6}}{5}$ 이다.

07 경희대학교 수시(자연계열 오후)7)

Ⅰ. 다음 제시문과 그림을 참조하여 논제에 답하시오. (60점)

[가] 임의의 실수 a에 대하여

$$a+0=0+a=a, a\times 1=1\times a=a$$

을 만족하는 실수 $0, 1$이 존재한다. 이때 0을 덧셈에 대한 항등원, 1을 곱셈에 대한 항등원이라고 한다. 한편 임의의 실수 a에 대하여

$$a+(-a)=(-a)+a=0, a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=1\ (a\neq 0)$$

을 만족하는 실수 $-a, \frac{1}{a}\ (a\neq 0)$이 존재한다. 이때 $-a$를 a의 덧셈에 대한 역원, $\frac{1}{a}$를 a의 곱셈에 대한 역원이라고 한다.

[나] 수학적 귀납법은 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명하는 한 방법으로, 다음 (ⅰ), (ⅱ)를 증명하면 된다.

(ⅰ) $p(1)$이 성립한다.

(ⅱ) $p(k)$가 성립한다고 가정하면 $p(k+1)$이 성립한다.

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 m 이상의 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 앞의 수학적 귀납법 (ⅰ)에서 $p(1)$ 대신 $p(m)$이 성립함을 보이면 된다.

[다] 일반적으로 수열에서 첫째항과 임의의 이웃하는 두 항 사이의 관계식이 주어지면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항을 구할 수 있다. 이와 같이 a_1의 값과 a_n에서 a_{n+1}을 구할 수 있는 관계식을 이용하여 수열 $\{a_n\}$을 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라고 한다. 이때 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 점화식이라고 한다. 무한수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 수 α에 수렴한다고 한다. 이때 α를 무한수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라고 하고, 기호로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$와 같이 나타낸다.

[라] 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때, 이 함수의 평균변화율의 극한값 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$이 존재하면, 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 하며, 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 또는 순간변화율이라 한다. 또, 함수 $y=f(x)$가 어떤 구간 안의 모든 점 x에서 미분가능하면, 이 함수는 그 구간에서 미분가능하다고 한다.

7) 경희대학교 홈페이지

[마] 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $f(x) \le g(x)(a \le x \le b)$일 때, 다음 부등식

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

이 성립하고, 이 부등식은 여러 가지 부등식을 증명할 때 많이 이용한다.

논제1

제시문 [가]~[마]를 읽고 다음 질문에 답하시오.

양의 실수 a, b에 관하여, 연산 $*$을 다음과 같이 정의하자.

$$a * b = \frac{ab}{a+b}$$

그리고 실수 a, b에 관하여 $\min\{a, b\}$를 $a \le b$이면 $\min\{a, b\} = a$이고, $a > b$이면 $\min\{a, b\} = b$라고 정의하자.

논제 Ⅰ-1

양의 실수 a, b에 관하여, $a * b \le \min\{a, b\}$이고, $a * b = (a^{-1} + b^{-1})^{-1}$임을 보이고 그 근거를 논술하시오. (단, a^{-1}는 곱셈에 대한 a의 역원을 나타낸다.) (8점)

논제 Ⅰ-2

양의 실수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 연산 $*$을 계속 적용하여,

$$a_1 * a_2, (a_1 * a_2) * a_3, ((a_1 * a_2) * a_3) * a_4, \cdots, ((\cdots(a_1 * a_2) * a_3) * \cdots) * a_{n-1}) * a_n$$

을 얻을 수 있다. 이때 다음 등식이 2이상의 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 [논제Ⅰ-1]의 결과와 수학적 귀납법을 이용하여 논술하시오. (12점)

$$((\cdots(a_1 * a_2) * a_3) * \cdots) * a_{n-1}) * a_n = (a_1{}^{-1} + a_2{}^{-1} + \cdots + a_n{}^{-1})^{-1} \ (n \ge 2)$$

논제 Ⅰ-3

양의 실수 x가 주어질 때, 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 귀납적으로 정의하자.

$$a_1 = x^{-1},\, a_{n+1} = a_n * (x^{-1})^{n+1} \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

위 수열 $\{a_n\}$의 극한값을 x에 대응시키면 함수 $f(x)$를 만들 수 있다. 이때 함수 $f(x)$를 구하고, $f(x)$의 미분가능성을 조사하시오. 그리고 그 근거를 논술하시오. (20점)

논제 Ⅰ-4

구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 함수 $f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ (\sin x) * (\cos x) & (0 < x < \frac{\pi}{2}) \\ 0 & (x = \frac{\pi}{2}) \end{cases}$ 에 관하여 다음 부등식

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \leq 2 - \sqrt{2}$$

이 성립함을 논술하시오. (20점)

풀어보기 [문제1]

다음은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $\sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

자연수 n 에 대하여 $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}$ 이라 할 때, $a_n > 1$ 임을 보이면 된다.

(1) $n=1$ 일 때 $a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$ 이다.

(2) $n=k$ 일 때 $a_k > 1$ 이라고 가정하면 ;

$$n=k+1 \text{ 일 때, } a_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+4}$$

$$= a_k + \left(\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}\right) - \boxed{\text{(가)}}$$

한편, $(3k+2)(3k+4)$ $\boxed{\text{(나)}}$ $(3k+3)^2$ 이므로

$$\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} > \boxed{\text{(다)}}$$

그런데 $a_k > 1$ 이므로 $a_{k+1} > a_k + (\frac{1}{3k+3} + \boxed{\text{(가)}}) > 1$

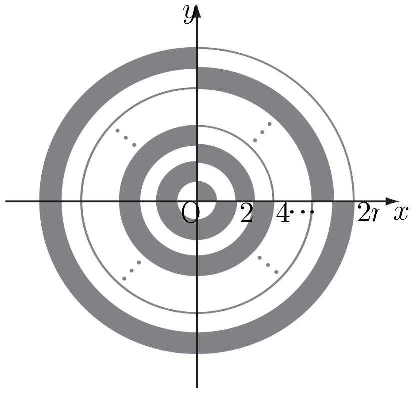
그러므로 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 1$ 이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{k+1}$	$>$	$\frac{2}{3k+3}$
②	$\frac{1}{k+1}$	$<$	$\frac{2}{3k+3}$
③	$\frac{1}{k+1}$	$<$	$\frac{4}{3k+3}$
④	$\frac{2}{k+1}$	$>$	$\frac{4}{3k+3}$
⑤	$\frac{2}{k+1}$	$<$	$\frac{1}{k+1}$

풀어보기 [문제2]

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1, 2, 3, …, $2n$인 동심원이 있다.



< 다 음 >

<1단계> 반지름의 길이가 1인 원 내부의 1사분면에 검은색을 칠하고, 반지름의 길이가 1인 원과 반지름의 길이가 2인 원 사이의 2, 3, 4사분면에도 검은색을 칠한다.
<2단계> 반지름의 길이가 2인 원과 반지름의 길이가 3인의 원사이의 1사분면에 검은색을 칠하고, 반지름의 길이가 3인 원과 반지름의 길이가 4인 원 사이의 2, 3, 4사분면에도 검은색을 칠한다.

⋮

<n단계> 반지름의 길이가 $2n-2$인 원과 반지름의 길이가 $2n-1$인원 사이의 1사분면에 검은색을 칠하고, 반지름의 길이가 $2n-1$인 원과 반지름의 길이가 $2n$인 원 사이의 2, 3, 4사분면에도 검은색을 칠한다.

이와 같이 n단계까지 검은색으로 칠한 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$의 값은?

① $\frac{3}{4}\pi$ ② π ③ $\frac{4}{3}\pi$ ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ 2π

예시답안

풀어보기 [문제1]

$n=k$일 때, $a_k>1$이라고 가정하면 $a_k=\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}+\ldots+\dfrac{1}{3k+1}>1$이 성립한다.

$$n=k+1\text{일 때, } a_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{3k+4}$$

$$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1}\right)$$

$$+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}$$

$$=a_k+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}\right)-\boxed{\frac{1}{k+1}}$$

한편, $(3k+2)(3k+4)=9k^2+18k+8$

$(3k+3)^2=9k^2+\boxed{18}k+9$이므로

$(3k+2)(3k+4)<(3k+3)^2$이고

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}=\frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)}>\frac{6k+6}{(3k+3)^2}=\frac{\boxed{2}}{3k+3}$$

그런데 $a_k>1$이므로,

$$a_{k+1}>a_k+\left(\frac{1}{3k+3}+\boxed{\frac{2}{3k+3}}\right)-\boxed{\frac{1}{k+1}}=a_k>1$$

따라서, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>1$이다.

풀어보기 [문제2]

n단계에서 색칠하는 부분의 넓이를 a_n이라 하면

$$a_1=\frac{1}{4}\pi(1^2-0^2)+\frac{3}{4}\pi(2^2-1^2)$$

$$a_2=\frac{1}{4}\pi(3^2-2^2)+\frac{3}{4}\pi(4^2-3^2)$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{1}{4}\pi\left\{(2n-1)^2-(2n-2)^2\right\}+\frac{3}{4}\pi\left\{(2n)^2-(2n-1)^2\right\}$$

$$S_n=\frac{1}{4}\pi\left\{\sum_{k=1}^{n}(4k-3)\right\}+\frac{3}{4}\pi\left\{\sum_{k=1}^{n}(4k-1)\right\}=\frac{1}{4}\pi(2n^2-n)+\frac{3}{4}\pi(2n^2+n)$$

$$=\frac{\pi}{2}(4n^2+n)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}(4n^2+n)}{n^2}=2\pi$$

논제 I -1

$a*b=\frac{ab}{a+b}=(\frac{a}{a+b})b=a(\frac{b}{a+b})$ 이다. $\frac{a}{a+b}<1$ 이고 $\frac{b}{a+b}<1$ 이므로, $a*b\le a$ 이고 $a*b\le b$ 이다. 따라서 $a*b\le\min\{a,b\}$ 이다.

역원의 정의를 이용하여 $(a*b)(a^{-1}+b^{-1})=1$ 임을 보이자.

$$\begin{aligned}(a*b)(a^{-1}+b^{-1})&=(ab(a+b)^{-1})(a^{-1}+b^{-1})\\&=(ab(a+b)^{-1})((a+b)(ab)^{-1})\\&=(ab(ab)^{-1})((a+b)^{-1}(a+b))\\&=1\end{aligned}$$

논제 I -2

먼저 $b_n=((\cdots(a_1*a_2)*a_3)*\cdots)*a_{n-1})*a_n$ 으로 두자.

$n=2$ 일 때, [논제 I -1]로부터 명제가 성립한다.

$n=k$ 일 때, 성립한다고 가정하면,

$b_k=((\cdots(a_1*a_2)*a_3)*\cdots)*a_{k-1})*a_k$ 이므로, $b_{k+1}=b_k*a_{k+1}=({b_k}^{-1}+{a_{k+1}}^{-1})^{-1}$ 이다.

$n=k$ 일 때 성립하므로, ${b_k}^{-1}={a_1}^{-1}+{a_2}^{-1}+\cdots+{a_k}^{-1}$ 이고, 이를 이용하면

${b_{k+1}}^{-1}=({a_1}^{-1}+{a_2}^{-1}+\cdots+{a_k}^{-1}+{a_{k+1}}^{-1})^{-1}$ 이므로 $n=k+1$ 일 때에도 성립한다.

논제 I -3

$a_n=(x+x^2+\cdots+x^n)^{-1}$ 이므로 $x=1$ 일 때, $a_n=\frac{1}{n}$ 이다.

$x\ne1$ 일 때, $x+x^2+\cdots+x^n=\frac{x(1-x^2)}{1-x}$ 이므로, $a_n=\frac{x(1-x^n)}{1-x}$ 이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 극한값을 계산하면 ;

$x=1$ 일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

$0<x<1$ 일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1-x}{x}$

$x>1$ 일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}a_n=0$

함수 $f(x)$ 는 $0<x<1$ 구간에서 분모가 0 이 아닌 유리함수이므로 미분가능하고, $x>1$ 에서 상수함수이므로 미분가능하다.

$x=1$ 에서 미분가능한지의 여부를 보이기 위해서 다음 극한값들을 구해보면,

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{\frac{1-(1+h)}{1+h}-0}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-1}{1+h}=-1$$

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{0-0}{h}=0$$

이고, 위에서 좌극한값과 우극한값이 다르기 때문에 극한값은 존재하지 않는다. 따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

논제 I -4

$f(x)\le\sin x$, $(0\le x\le\frac{\pi}{4})$, $f(x)\le\cos x$, $(\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2})$ 이다.

그리고 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 에서 $\sin x\le\cos x$ 이고, $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos x\le\sin x$ 이므로,

$\sin x+\cos x\le 2\cos x$ $(0\le x\le\frac{\pi}{4})$ 이고 $\cos x+\sin x\le 2\sin x$ $(\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2})$ 이다.

이를 이용하면, 각 구간에서 $\frac{1}{2}\le\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}$, $\frac{1}{2}\le\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ 이므로

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 에서 $\frac{1}{2}\sin x\le f(x)$ 이고 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$ 에서 $\frac{1}{2}\cos x\le f(x)$ 이다.

따라서,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=2-\sqrt{2}$$

이고

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx\ge\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\sin x dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos x dx=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이므로, 부등식이 성립한다.

08 고려대학교 수시[8)]

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】 함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(ㄱ) $f(0)=1$　　(ㄴ) $\frac{1}{4}\leq f'(x)\leq\frac{1}{2}$

이때 부등식 $y-f(x)\leq 0,\ x-f(y)\leq 0,\ x\geq 0,\ y\geq 0$ 이 나타내는 영역을 A라 한다.

【나】 연속함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(ㄱ) $f(2x)=5f(x)$　　(ㄴ) $\int_0^1 f(x)dx=1$

이때 자연수 n에 대하여 a_n을 다음과 같이 정의한다.

$$a_n=\int_0^{2^{-n}} f(x)dx$$

【다】 증가함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(ㄱ) 함수 $y=f(x)$는 두 번 미분가능하고, 이계도함수 $y=f''(x)$는 연속함수이다.

(ㄴ) $f(0)=0$ 이고 $f(1)=f'(1)=2$ 이다.

(ㄷ) $\int_0^1 x^3 f''(x)dx=1$ 이다.

【라】 송이와 민준이가 다음과 같은 규칙을 지켜가며 하나의 동전을 반복해서 던진다.

(ㄱ) 송이가 먼저 동전을 던진다.

(ㄴ) 앞면이 나오면 같은 사람이 계속해서 던지고 뒷면이 나오면 다른 사람이 이어서 던진다.

(ㄷ) 앞면이 n번 나오면 동전을 더 이상 던지지 않는다. 단, n은 자연수이다.

【마】 사면체 OABC에 대하여 $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=\frac{\pi}{2}$ 이고 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}=1$ 이다. 삼각형 ABC를 포함하는 평면을 α, 삼각형 OAB를 포함하는 평면을 β, 삼각형 OBC를 포함하는 평면을 γ라 한다. 자연수 n에 대하여 도형 T_n이 아래 성질을 만족한다.

(ㄱ) T_1은 삼각형 ABC이다.

(ㄴ) 자연수 n을 4로 나눈 나머지가 1이면 T_{n+1}은 T_n을 평면 β 위로 내린 정사영이다.

(ㄷ) 자연수 n을 4로 나눈 나머지가 3이면 T_{n+1}은 T_n을 평면 γ 위로 내린 정사영이다.

(ㄹ) 자연수 n이 짝수이면 T_{n+1}은 T_n을 평면 α위로 내린 정사영이다.

8) 고려대학교 홈페이지

논제1. 제시문 【가】에서 영역 A가 가질 수 있는 넓이의 최솟값과 최댓값을 구하시오.

논제2. 제시문 【나】의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 무한급수의 합 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$을 구하시오.

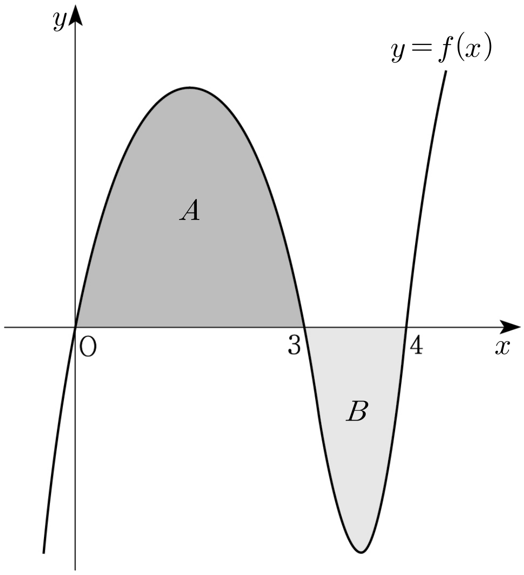
논제3. 제시문 【다】의 함수 $y=f(x)$의 역함수를 $y=g(x)$라 할 때, 적분값 $\int_0^2 (g(x))^2 dx$를 구하시오.

논제4. 제시문 【라】에서 마지막에 동전을 던진 사람이 송이일 확률을 n으로 나타내시오. (단, 동전을 던졌을 때 앞면이 나올 확률과 뒷면이 나올 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이다.)

논제5. 제시문 【마】에서 T_n의 넓이를 a_n이라 할 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$을 구하시오.

풀어보기 [문제1]

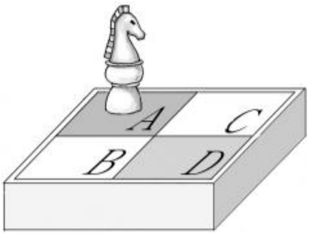
연속함수 $f(x)$ 의 그래프가 x축과 만나는 세 점의 x좌표는 0, 3, 4이다. 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 와 x축으로 둘러싸인 두 부분 A, B의 넓이가 각각 6, 2일 때, $\int_0^2 f(2x)dx$ 의 값은? (2013년 10월 전국연합)



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

풀어보기 [문제2]

그림과 같은 말과 말판이 있다. 말은 한 번에 한 칸씩 인접한 칸으로 움직이는 데 인접한 각 칸으로 이동할 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이다. 예를 들어 A에 있던 말이 A와 인접한 칸인 B, C로 이동할 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이다. 최초 A에 있던 말이 n번 이동하여 처음으로 D에 도착할 확률을 P_n이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2011년 3월 전국연합)



< 보 기 >

ㄱ. $P_2 = \frac{1}{2}$

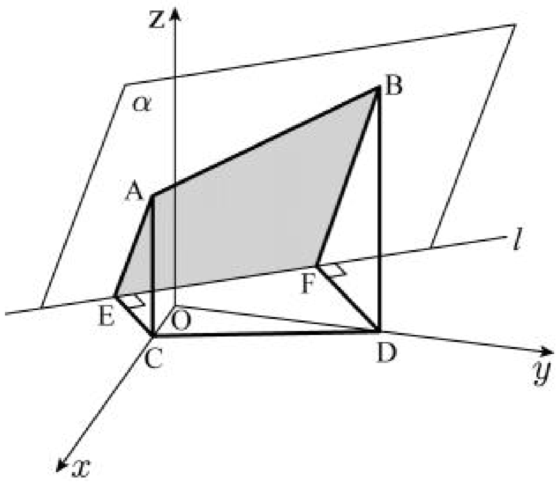
ㄴ. $P_{2n+2} = \frac{1}{2} P_{2n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} P_k = \frac{1023}{1024}$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀어보기 [문제3]

좌표공간에서 평면 $\alpha : 12x+9y-5\sqrt{3}z+3=0$ 위의 두 점 A, B 에서 xy 평면에 내린 수선의 발은 각각 $C(1,0,0)$, $D(0,3,0)$ 이다. 평면 α 와 xy 평면의 교선을 l 이라 하고, 두 점 C, D 에서 교선 l 에 내린 수선의 발을 각각 E, F 라 하자. 이때, 사각형 AEFB 의 넓이를 구하시오. (2011년 10월 전국연합)



예시답안

풀어보기 [문제1]

$2x=t$라 하면 $2=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$\int_0^2 f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^4 f(t)dt=\frac{1}{2}\left\{\int_0^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx\right\}=\frac{1}{2}\{6+(-2)\}=2$$

풀어보기 [문제2]

ㄱ. $P_2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$ (참)

ㄴ. 짝수 번을 이동하면 말은 A 또는 D 에 도착하게 된다. 말이 $(2n+2)$번째에 처음으로 D 에 도착하려면 처음 2번을 이동한 후 A에 있고 그 이후 $2n$번을 이동하여 처음으로 D에 도착해야 하므로 $P_{2n+2}=\dfrac{1}{2}P_{2n}$ (참)

ㄷ. $P_{2n-1}=0$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}P_k=P_2+P_4+P_6+P_8+P_{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}=\frac{31}{32}$$

이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

풀어보기 [문제3]

$A(1,\ 0,\ \sqrt{3})$, $B(0,\ 3,\ 2\sqrt{3})$이므로 $\overline{AC}=\sqrt{3}$, $\overline{BD}=2\sqrt{3}$

$l: 4x+3y+1=0$, $z=0$에서 $\overline{CE}=1$, $\overline{DF}=2$ $\therefore \overline{EF}=3$. $\overline{AE}=2$, $\overline{BF}=4$ 이므로

$\square AEFB=\dfrac{1}{2}\times(2+4)\times 3=9$

논제1

양수 x에 대하여 함수 $y=f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ x]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ x)$에서 미분 가능하므로 평균값의 정리에 의해 다음을 만족하는 적당한 실수 c_x가 0과 x사이에서 존재한다.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c_x)$$

$$f(x)=xf'(c_x)+1$$

따라서 $\frac{1}{4}x+1 \le f(x) \le \frac{1}{2}x+1$ 이다. 즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $x \ge 0,\ y \ge 0$ 영역에서는 $y \le \frac{1}{2}x+1$ 과 $y \ge \frac{1}{4}x+1$ 사이에 있어야 한다.

그러므로 최댓값은 $y=\frac{1}{2}x+1$, $x=\frac{1}{2}y+1$, x축, y축으로 둘러싸인 영역의 넓이이고 최솟값은 $y=\frac{1}{4}x+1$, $x=\frac{1}{4}y+1$, x축, y축으로 둘러싸인 영역의 넓이이다. 따라서 $M=2$, $m=\frac{4}{3}$ 이다.

논제2

$f(2x)=5f(x)$ 에서 $f(x)=\frac{1}{5}f(2x)$ 이므로 자연수 n에 대하여 $f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{5^n}f(x)$ 이다.

$a_n=\int_0^{2^{-n}} f(x)dx$ 에서 $2^n x=t$ 로 치환하면

$$a_n=\int_0^{2^{-n}} f(x)dx=\int_0^1 f\left(\frac{t}{2^n}\right)\frac{1}{2^n}dt=\frac{1}{10^n}\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{10^n}$$

이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9}$ 이다.

다른 풀이

$f(2x)=5f(x)$ 에서 $f(x)=\frac{1}{5}f(2x)$ 이므로 자연수 n에 대하여 $f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{5^n}f(x)$ 이다. 따라서 정적분의 정의에 의해

$$a_n=\int_0^{2^{-n}} f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{2^n n}\right)\frac{1}{2^n n}=\frac{1}{10^n}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{10^n}\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{10^n}$$

이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=9$ 이다.

논제3

$\int_0^2 (g(x))^2 dx$ 에서 $x=f(y)$ 로 치환하면

$$\int_0^2 (g(x))^2 dx = \int_0^1 (g(f(y))^2 f'(y)dy = \int_0^1 y^2 f'(y)dy$$

이다. $1 = \int_0^1 x^3 f''(x)dx = \left[x^3 f'(x)\right]_0^1 - 3\int_0^1 x^2 f'(x)dx = 2 - 3\int_0^1 x^2 f'(x)dx$ 에서

$\int_0^1 x^2 f'(x)dx = \frac{1}{3}$ 이므로 $\int_0^2 (g(x))^2 dx = \frac{1}{3}$ 이다.

논제4

앞면이 n번 나오면 동전을 더 이상 던지지 않을 때, 마지막에 동전을 던진 사람이 송이일 확률을 p_n이라 하자. 그러면 p_{n+1}은 다음 표와 같이 구할 수 있다.

사람	동전	사람	동전	사람	동전	사람	동전
송이	앞	송이	앞	송이	앞	송이	앞
송이	앞	송이	뒤	송이	뒤	송이	뒤
		민준	뒤	민준	뒤	민준	뒤
		송이	앞	송이	뒤	송이	뒤
				민준	뒤	민준	뒤
				송이	앞	송이	뒤
						민준	뒤
						송이	앞
$p_n \times \frac{1}{2}$		$p_n \times \frac{1}{2^3}$		$p_n \times \frac{1}{2^5}$		$p_n \times \frac{1}{2^7}$	

$\cdots$

또는

사람	동전	사람	동전	사람	동전	사람	동전
민준	앞	민준	앞	민준	앞	민준	앞
민준	뒤	민준	뒤	민준	뒤	민준	뒤
송이	앞	송이	뒤	송이	뒤	송이	뒤
		민준	뒤	민준	뒤	민준	뒤
		송이	앞	송이	뒤	송이	뒤
				민준	뒤	민준	뒤
				송이	앞	송이	뒤
						민준	뒤
						송이	앞
$(1-p_n)\times\frac{1}{2^2}$		$(1-p_n)\times\frac{1}{2^4}$		$(1-p_n)\times\frac{1}{2^6}$		$(1-p_n)\times\frac{1}{2^8}$	

$\cdots$

위 표에 의해 다음의 점화식이

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{2}{3} + (1-p_n)\times\frac{1}{3} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}, \; p_1 = \frac{2}{3}$$

이 성립한다.

점화식을 풀면

$$\left(p_{n+1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

$$p_n=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\ ,\ (n\geq 1)$$

이다.

논제5

세 점 A(0, 0, 1), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0)라 하면 평면 α의 법선벡터는 $\overrightarrow{u_\alpha}=(1,\ 1,\ 1)$이고 평면 β의 법선벡터는 $\overrightarrow{u_\beta}=(0,\ 1,\ 0)$이다. 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{u_\alpha}\circ\overrightarrow{u_\beta}}{|\overrightarrow{u_\alpha}||\overrightarrow{u_\beta}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이다. 평면 α와 β, 평면 α와 γ가 이루는 예각 θ의 크기는 같다.

a_1은 T_1의 넓이이므로 $a_1=\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

a_2는 T_2의 넓이이고 T_2는 T_1을 평면 β 위로 내린 정사영이다. 따라서

$$a_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

이다. a_3는 T_3의 넓이이고 T_3는 T_2를 평면 α 위로 내린 정사영이다. 따라서

$$a_3=\frac{1}{2}\times\cos\theta=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

이다. a_4는 T_4의 넓이이고 T_4는 T_3를 평면 γ 위로 내린 정사영이다. 따라서

$$a_4=\frac{1}{2\sqrt{3}}\times\cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{6}$$

이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이고 공비가 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$인 등비수열이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}-1}=\frac{3}{4}(1+\sqrt{3})$$

이다.

09 광운대학교 수시 모의논술9)

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (50점)

1. 모든 정수들의 집합과 모든 실수들의 집합을 각각 Z와 R로 나타낸다. 또한 집합 X와 Y는 R의 부분집합이다.
2. 집합 $M_2(\mathrm{X})$는 크기가 2×2이고 모든 성분이 집합 X의 원소인 행렬 전체의 집합이다. 또한 자연수 n에 대하여 집합 $S_n(\mathrm{X})$와 $T_2(\mathrm{X})$를 다음과 같이 정의한다.
   $S_n(\mathrm{X})=\{A\in M_2(\mathrm{X})\,|\,A^n=O\}$ (단, O는 크기가 2×2인 영행렬이다.)
   $T_2(\mathrm{X})=\{A\in M_2(\mathrm{X})\,|\,A$ 는 역행렬을 갖는다 $\}$
3. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in M_2(\mathrm{R})$ 에 대하여 $\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 이다.
4. 두 행렬 $A, B\in M_2(\mathrm{R})$에 대하여 $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ 이다.
5. 함수 $f:X\to X$와 자연수 n에 대하여 $f^{(n)}$은 f를 n번 합성한 함수이다. 즉, 원소 $x\in X$에 대하여 $f^{(n)}(x)=(f\circ f\circ\cdots\circ f)(x)$ 이다.
6. 함수 $f:X\to Y$에 대하여 (성질 P)를 다음과 같이 정의한다.
   모든 $x_1, x_2\in X$에 대하여 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$ 이다.

문항1

교집합 $S_{2015}(\mathrm{R})\cap \mathrm{T}_2(\mathrm{R})$를 구하고 이를 설명하시오. (5점)

문항2

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in S_{2015}(\mathrm{R})$ 일 때, $a_{11}+a_{22}$의 값을 구하시오. (12점)

9) 광운대학교 홈페이지

문항3

[문항2]를 이용하여 집합 $G=\{A\in S_{2015}(\mathrm{R})\,|\,(A^2+E)(A+E)=E\}$ 를 구하고 이를 설명하시오.(단, E는 크기가 2×2인 단위행렬이다.) (8점)

문항4

임의의 실수 a에 대하여 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in S_{2015}(\mathrm{R})$인 실수 b, c, d가 존재한다. 함수 $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$를 $f(a)=d$ 로 정의할 때 극한값 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\{f^{(n)}(x)\}^2}$을 구하고 이를 설명하시오. (9점)

문항5

$f(0)\neq 0, f(1)>1$ 인 함수 $f:\mathrm{Z}\to\mathrm{R}$ 가 (성질 P)를 만족시킬 때 다음 명제를 증명하시오.

(1) $n, m\in\mathrm{Z}$에 대하여 $m<n$이면 $f(m)<f(n)$ 이다. (11점)

(2) 함수 $g:M_2(\mathrm{Z})\to M_2(\mathrm{R})$를 $g\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{f(a_{11}a_{22})}{f(1)} & \frac{f(a_{12}a_{21})}{f(1)} \end{pmatrix}$ 로 정의하면 $g(\mathrm{T}_2(\mathrm{Z}))\subset \mathrm{T}_2(\mathrm{R})$ 이다. (5점)

[문제2] 다음 제시문을 이용하여 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (50점)

[정적분의 정의] 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \quad \left(\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x\right)$$

[정적분의 성질1] 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속일 때

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (\text{단, } k\text{는 상수})$$

$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \quad (\text{복부호 동순})$$

[정적분의 성질2] 임의의 실수 a, b, c 를 포함하는 구간에서 함수 $f(x)$ 가 연속일 때

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

또한, 수학적 귀납법에 의해 임의의 실수 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 을 포함하는 구간에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$\int_{c_1}^{c_n} f(x)dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dx$$

[정적분과 부등식] 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 $f(x) \le g(x)$ 일 때

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

[실수의 삼각부등식] 임의의 실수 a, b 에 대하여

$$|a+b| \le |a| + |b| \quad (\text{단, 등호는 } ab \ge 0 \text{ 일 때 성립})$$

또한, 수학적 귀납법에 의해 임의의 실수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \quad \text{또는} \quad \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

[최대·최소의 정리] 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

[평균값의 정리] 함수 $y = f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a,b) 에서 미분가능하면

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

인 점 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

문항1

정적분의 정의에 의하여 $\int_0^1 e^x\,dx = e-1$ 임을 보이시오. (9점)

문항2

다음 극한값을 정적분 $\int_0^1 h(x)\,dx$ 를 이용하여 구한다고 할 때, 함수 $h(x)$와 극한값을 구하시오. (8점)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+n}\right)$$

문항3

함수 $f(x)$가 실수 $a, b\,(a<b)$를 포함하는 구간에서 연속이면 다음이 성립함을 증명하시오. (6점)

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \quad \cdots\cdots \quad ①$$

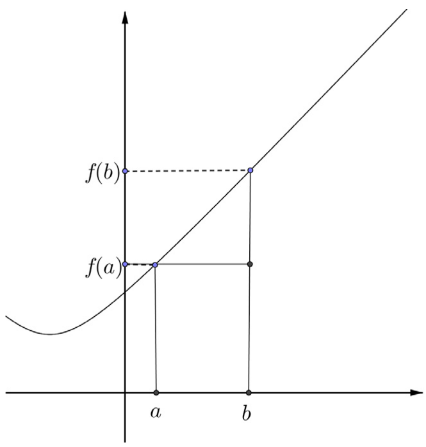
문항4

함수 $f(x)$가 실수 $a, b\,(a<b)$를 포함하는 구간에서 미분가능하고 $f(x) \ge 0$이며, 그의 도함수 $f'(x)$가 연속이다. 이때 구간 $[a, b]$에서 $|f'(x)|$의 최댓값을 T라 하자.

(1) $x \in [a, b]$에 대하여 다음이 성립함을 보이시오. (4점)

$$|f(x)-f(a)| \le T(x-a)$$

(2) 정적분 $\int_a^b f(x)dx$를 높이가 $f(a)$, 밑변의 길이가 $b-a$인 직사각형의 넓이 $(b-a)f(a) = \int_a^b f(a)dx$ 로 택하는 경우에 생기는 오차 $\left|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(a)\right|$ 에 대해 다음 부등식이 성립함을 보이시오.
(<그림1> 참조) (6점)



〈그림1〉

$$\left|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(a)\right| \le \frac{T}{2}(b-a)^2 \quad \cdots\cdots \quad ②$$

문항5

함수 $g(x)$는 실수 $c, d(c<d)$를 포함하는 구간에서 미분가능하며, 그의 도함수 $g'(x)$가 연속이다. 이때 구간 $[c, d]$를 N등분하고 $w=\dfrac{d-c}{N}$, $x_k=c+k\cdot w$,

$k=0,\ 1,\ 2, \cdots, N$이라 하고, 또한 M을 구간 $[c, d]$에서 $|g'(x)|$의 최댓값이라 하자.

이제 각 소구간 $[x_{k-1}, x_k]$, $k=0,1,2,\cdots,N$에 대해 [문항4]에서와 같이 높이가 함숫값 $g(x_{k-1})$, 밑변의 길이가 $w=(x_k-x_{k-1})$인 직사각형의 넓이 $w\cdot g(x_{k-1})$을 생각하고 그들을 모두 합하면 다음 식 ③과 같다.

$$w\sum_{k=1}^{N} g(x_{k-1})=w\{g(x_0)+g(x_1)+\cdots+g(x_{N-1})\}\cdots\cdots \quad ③$$

한편 제시문의 [정적분의 성질2]에 의하면 $\displaystyle\int_c^d g(x)dx=\sum_{k=1}^{N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)dx$가 성립한다. 따라서, 식 ③의 값을 정적분 $\displaystyle\int_c^d g(x)dx$의 근삿값으로 택할 수 있다.

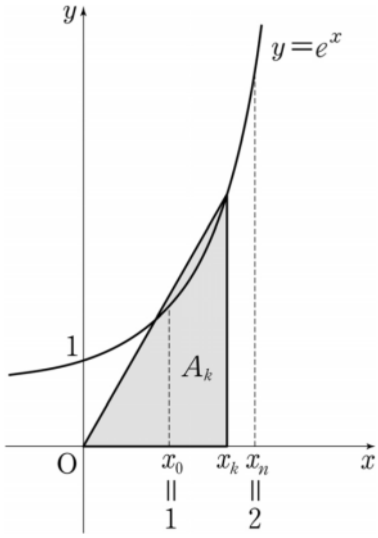
(1) 이 경우에 발생하는 오차 $\left|\displaystyle\int_a^b g(x)dx-w\sum_{k=1}^{N} g(x_{k-1})\right|$ 의 한계에 대해 다음이 성립함을 보이시오. (12점)

$$\left|\int_a^b g(x)dx-w\sum_{k=1}^{N} g(x_{k-1})\right|\le \frac{M}{2N}(d-c)^2\cdots\cdots \quad ④$$

(2) [문항2]에서 찾은 함수 $h(x)$의 정적분 $\displaystyle\int_0^1 h(x)dx$의 근삿값을 구간 $[0, 1]$을 N등분한 후에 식 ③을 함수 $h(x)$에 적용하여 얻는 값으로 택하려고 한다. 이때 오차의 한계가 $\dfrac{1}{200}$ 이하가 되도록 하는 자연수 N의 최솟값을 부등식 ④를 이용하여 구하시오. (5점)

풀어보기 [문제1]

함수 $f(x)=e^x$ 이 있다. 2 이상인 자연수 n 에 대하여 닫힌 구간 $[1, 2]$ 를 n 등분한 각 분점 (양 끝점도 포함)을 차례로 $1=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n=2$ 라 하자. 세 점 $(0, 0)$, $(x_k, 0)$, $(x_k, f(x_k))$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 A_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k$ 의 값은? (2014년 6월 모의평가 B형)



① $\frac{1}{2}e^2-e$ ② $\frac{1}{2}(e^2-e)$ ③ $\frac{1}{2}e^2$ ④ e^2-e ⑤ $e^2-\frac{1}{2}e$

풀어보기 [문제2]

연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=1$
(나) $\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{4}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$ 의 값은? (2013 10월 전국연합 B형)

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{6}{7}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

예시답안

풀어보기 [문제1]

정답) ③

$x_k = 1+\dfrac{k}{n}$라 하면 $A_k = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)f\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right)\\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_1^2 xe^x dx\\ &= \frac{1}{2}\left\{[xe^x]_1^2 - \int_1^2 e^x dx\right\} = \frac{1}{2}e^2\end{aligned}$$

풀어보기 [문제2]

정답) ⑤

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$ 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)\right\}+\frac{2}{n}\left\{f\left(\frac{4}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)\right\}+\frac{3}{n}\left\{f\left(\frac{6}{n}\right)-f\left(\frac{4}{n}\right)\right\}+\cdots+\frac{n}{n}\left\{f\left(\frac{2n}{n}\right)-f\left(\frac{2n-2}{n}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{n}f(0)-\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{n}f\left(\frac{4}{n}\right)-\cdots-\frac{1}{n}f\left(\frac{2n-2}{n}\right)+f(2) = f(2)-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$\dfrac{k}{n}=x_k$라 하면 $\dfrac{1}{n}=\Delta x$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(2x_k)\Delta x = \int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n &= \lim_{n\to\infty}\left\{f(2)-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}\\ &= f(2)-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}\\ &= 1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}\end{aligned}$$

문제1

문항1(대학발표 예시답안)

$A \in S_{2015}(\mathrm{R})$ 이면 $A^{2015} = O$ 이고 $\det(A^{2015}) = \det(O)$ 이다.

그런데 $\det(A^{2015}) = \{\det(A)\}^{2015}$ 이고 $\det(O) = 0$ 이므로 $\det(A) = 0$ 이다.

따라서 A는 역행렬을 갖지 않으므로 $A \notin T_2(R)$ 이다.

그러므로 $S_{2015}(\mathrm{R}) \cap \mathrm{T}_2(\mathrm{R}) = \varnothing$ 이다.

문항2(대학발표 예시답안)

$A^2 - (a_{11} + a_{22})A + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})E = O$ 이고

[문항1]에서 $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ 이므로 $A^2 = (a_{11} + a_{22})A$ 이다.

따라서 $A^{2015} = (a_{11} + a_{22})^{2014}A$ 이고 $A \in S_{2015}(\mathrm{R})$ 이므로 $(a_{11} + a_{22})^{2014}A = O$ 이다.

그러므로 $a_{11} + a_{22} = 0$ 또는 $A = O$ 이다. 그런데 $A = O$ 이면 $a_{11} + a_{22} = 0$ 이므로 모든 행렬 $A \in S_{2015}(\mathrm{R})$ 에 대하여 $a_{11} + a_{22} = 0$ 이다.

문항3(대학발표 예시답안)

$A \in G$ 이면 $A \in S_{2015}(\mathrm{R})$ 이므로 [문항2]의 결과를 이용하면 $A^2 = (a_{11} + a_{22})A = O$ 이다. 따라서 $(A^2 + E)(A + E) = A + E$ 이고 $A \in G$ 이면 $(A^2 + E)(A + E) = E$ 이므로 $A + E = E$ 이 되어 $A = O$ 이다. 그러므로 $G = \{O\}$ 이다.

문항4(대학발표 예시답안)

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S_{2015}(\mathrm{R})$ 이면 [문항2]의 결과에 의하여 $d = -a$ 이므로 $f(a) = -a$ 이다.

이때 a는 임의의 실수이므로 모든 $x \in \mathrm{R}$ 에 대하여 $f(x) = -x$ 이다.

그러므로 $f^{(n)}(x) = (-1)^n x$ 이다.

따라서 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{\{f^{(n)}(x)\}^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ 이다.

문항5(대학발표 예시답안)

(1) $f(0) = f(0+0) = \{f(0)\}^2$ 이므로 $f(0)\{f(0) - 1\} = 0$ 이다. 그런데 $f(0) \neq 0$ 이므로 $f(0) = 1$ 이다.

또한 임의의 자연수 n 에 대하여 $f(n) = f(1+1+\cdots+1) = \{f(1)\}^n$ 이고

$1 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n)f(-n)$ 이므로 $f(-n) = \dfrac{1}{f(n)} = \dfrac{1}{\{f(1)\}^n} = \{f(1)\}^{-n}$ 이다.

따라서 모든 $n \in \mathrm{Z}$ 에 대해 $f(n) = \{f(1)\}^n$ 이다.

그런데 $m < n$ 이면 $f(0) = 1$, $f(1) > 1$ 이므로 $f(n) - f(m) =$ $f(n) - f(m) = \{f(1)\}^n - \{f(1)\}^m > 0$ 이다. 즉, $f(m) < f(n)$ 이다.

(2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in T_2(Z)$ 이라면 $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 이므로

$\det(g(A)) = f(a_{11}a_{22})f(1) - f(a_{12}a_{21})f(1) = f(1)^{a_{11}a_{22}}f(1) - f(1)^{a_{12}a_{21}}f(1)$ 이다.

그런데 $f(1) > 1$ 이고 $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$ 이므로 $\det(g(A)) \neq 0$ 이 되어 $g(A)$ 의 역행렬이 존재한다.

따라서 $g(A) \in T_2(\mathrm{R})$ 이다. 그러므로 포함관계 $g(\mathrm{T}_2(\mathrm{Z})) \subset \mathrm{T}_2(\mathrm{R})$ 가 성립한다.

문제2

문항1(대학발표 예시답안)

주어진 구간 $[0, 1]$ 을 n 등분하면 $\Delta x = \dfrac{1}{n}, x_k = 0 + k\Delta x = \dfrac{k}{n}, k = 1, 2, \cdots, n$ 이므로

$f(x) = e^x$ 라고 하면

$$f(x_k) = e^{x_k} = e^{\frac{k}{n}} = \left\{e^{\frac{1}{n}}\right\}^k, k = 1, 2, \cdots, n$$

여기서 정적분의 정의와 무한등비급수의 부분합을 이용하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{e^{\frac{1}{n}}\right\}^k \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}}\right)\frac{1}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}\left(\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1\right)}{e^{\frac{1}{n}} - 1}\frac{1}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}}(e - 1) \times \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}\end{aligned}$$

한편 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = e^0 = 1$ 이므로 다음을 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{e^{1/n}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{e^{1/n}-1}{1/n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{f(1/n)-f(0)}{1/n}}=1$$

또 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{1/n}=1$ 이므로 극한의 성질에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{e^{1/n}\cdot(e-1)\cdot\times\dfrac{1/n}{e^{1/n}-1}\right\}=e-1$

이다. 그러므로 $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx=e-1$ 이다.

문항2(대학발표 예시답안)

주어진 식을 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2+\dfrac{1}{n}}+\frac{1}{2+\dfrac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{2+\dfrac{k}{n}}+\cdots+\frac{1}{2+\dfrac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\dfrac{k}{n}}$$

구간을 $[0,1]$, $\triangle x=\dfrac{1}{n}$, $x_k=0+k\cdot\dfrac{1}{n}$, $k=1,2,\cdots,n$ 이라 하자. 제시문의 [정적분의 정의]에 따르면 구하는 함수는 $h(x)=\dfrac{1}{2+x}$ 이다.

따라서 함수 $h(x)$의 정적분 $\displaystyle\int_0^1 h(x)dx$ 를 이용하면 구하는 극한값은 다음과 같이 $\ln\dfrac{3}{2}$ 이다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}h(x_k)\triangle x$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2+x}dx=\Big[\ln|2+x|\Big]_0^1=\ln\frac{3}{2}$$

문항3

제시문의 [정적분의 정의]와 [실수의 삼각부등식]에 의해 다음이 성립한다.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\triangle x\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\right|\triangle x$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)|\triangle x=\int_a^b|f(x)|dx$$

따라서 $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right|\le\displaystyle\int_a^b|f(x)|dx$ 이다.

(대학발표 예시답안)

구간 $[a,b]$ 에서 명백히 다음이 성립한다.

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \quad , \ x \in [a,b]$$

제시문의 [정적분의 성질1]과 [정적분과 부등식]을 이용하여 다음을 얻는다

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

따라서 다음을 얻는다.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

문항4(대학발표 예시답안)

(1) $x=a$ 이면 자명하다.

만일 $x \in (a,b]$ 라면 구간 $[a,x]$ 에 대하여 제시문의 [평균값의 정리]를 적용하면 다음 식을 만족시키는 점 c가 a와 x 사이에 적어도 하나 존재한다.

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$$

이때 T가 구간 $[a,b]$ 에서 $|f'(x)|$ 의 최댓값이므로 다음이 성립한다.

$$|f(x)-f(a)| \le |f'(c)(x-a)| \le T(x-a), \quad x \in [a,b]$$

(2) $(b-a)f(a)=\int_a^b f(a)dx$ 이므로 $\left|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(a)\right|=\left|\int_a^b \{f(x)-f(a)\}dx\right|$ 이다. 이제 [문항3]의 부등식 ①, 제시문의 [정적분과 부등식]과 (1)의 부등식으로부터 다음을 얻는다.

$$\left|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(a)\right|=\left|\int_a^b \{f(x)-f(a)\}dx\right| \le \int_a^b |f(x)-f(a)|dx$$

$$\le \int_a^b T(x-a)dx=\frac{T}{2}(b-a)^2$$

문항5(대학발표 예시답안)

(1) 구간 $[c,d]$ 를 N등분하면 $\int_c^d g(x)dx=\sum_{k=1}^{N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)dx$ 이 성립하므로 부등식 ④의 왼쪽 항의 절댓값 기호 안을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_c^d g(x)dx-w\sum_{k=1}^{N} g(x_{k-1})=\sum_{k=1}^{N}\left\{\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)dx-wg(x_{k-1})\right\}$$

이제 M_k를 소구간 $[x_{k-1}, x_k]$ 에서 $|g'(x)|$ 의 최댓값이라 하고 문항4의 식 ②를 적용하고, M이 구간 $[c,d]$ 에서 $|g'(x)|$ 의 최댓값임을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)dx-wg(x_{k-1})\right| \le \frac{M_k}{2}w^2 \le \frac{M}{2}w^2 \ , \ k=1, 2, \cdots, N$$

이를 제시문의 [실수의 삼각부등식]과 결합하고 $w=\dfrac{d-c}{N}$ 임을 이용하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\left|\int_c^d g(x)dx-w\sum_{k=1}^{N}g(x_{k-1})\right| &= \left|\sum_{k=1}^{N}\left\{\int_{x_{k-1}}^{x_k}g(x)dx-wg(x_{k-1})\right\}\right| \\ &\le \sum_{k=1}^{N}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}g(x)dx-wg(x_{k-1})\right| \\ &\le \sum_{k=1}^{N}\frac{M}{2}w^2 = N\cdot\frac{M}{2}\left(\frac{d-c}{N}\right)^2=\frac{M}{2N}(d-c)^2\end{aligned}$$

(2) [문항2]에서 구한 함수는 $h(x)=\dfrac{1}{2+x}$ 이다. 따라서 식 ③을 이용하여 정적분 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2+x}dx=\ln\frac{3}{2}$ 의 근삿값을 구한다면, $c=0$, $d=1$ 이고, 또 $f'(x)=\dfrac{-1}{(2+x)^2}$ 에서 $M=\dfrac{1}{4}$ 이다.

식 ④에 의한 오차한계가 $\dfrac{1}{200}$ 이하가 되게 하는 N의 최솟값은 다음 식에서 보인 것과 같이 25 이다.

$$\frac{M}{2N}(d-c)^2=\frac{1}{8N}(1-0)^2\le\frac{1}{200} \text{ 에서 } N\ge 25$$

10 단국대학교 모의10)

[문제1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 지수의 성질에 의하여 $2^x=8$을 만족시키는 x의 값은 3이지만 $2^x=5$를 만족시키는 x의 값은 유리수 범위에 없다. 일반적으로, $a>0$, $a\neq1$일 때, 임의의 양수 N에 대하여

$$a^x=N$$

을 만족시키는 실수 x는 오직 하나 존재한다. 이 때, x를 a를 밑으로 하는 N의 로그라 하고, 기호로

$$\log_a N$$

과 같이 나타낸다. 일상생활에서 흔히 사용하는 수는 십진법의 수이므로 로그의 계산에서도 10을 밑으로 하는 로그를 사용하면 편리하다. 이렇게 10을 밑으로 하는 로그를 상용로그라 하고, 상용로그 $\log_{10}N$은 흔히 밑 10을 생략하여

$$\log N$$

과 같이 나타낸다.

(나) 임의의 양수 x는 10의 거듭제곱을 이용하여

$$x=A\times10^n \ \ (1\le A<10,\ n\text{은 정수})$$

의 꼴로 나타낼 수 있다. 이 식의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log x=n+\log A$$

이며, $1\le A<10$이므로 $0\le\log A<1$이다. 이때 정수 n을 $\log x$의 지표, $\log A$를 $\log x$의 가수라고 한다.

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 [논제1]과 [논제2]의 물음에 답하시오.

논제1

수열 $\{\log a_n\}$이 등차수열이면 $\{a_n\}$은 등비수열임을 설명하시오. (10점)

10) 단국대학교 홈페이지

논제2

양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $g(x)$라고 하자. 수열 $\{\log a_n\}$은 공차가 d(단, $-1<d<0$)인 등차수열이고

$$g(a_{22})-g(a_2)=-\frac{1}{2}$$

일 때, d의 최댓값과 최솟값을 구하시오. (20점)

[문제2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표평면에서 일차변환은 2×2행렬로 나타내어진다. 예를 들어 일차변환 f를 나타내는 행렬을 A라고 하면 좌표평면의 점 P가 f에 의하여 옮겨지는 점은

$$f(P)=AP \ \cdots \ (*)$$

와 같이 나타낸다. 즉, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 식 (*)을

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

와 같이 이해하여 행렬의 곱을 통하여 $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$를 계산할 수 있다.

(나) 좌표평면에서의 기하 문제는 대부분 좌표의 대수적 계산으로 해결할 수 있다. 그러나 경우에 따라서는 문제 상황을 나타내는 그림을 생각하며 문제를 해결하면 대수적 계산이 적은 풀이를 할 수 있다. 예를 들어 일차변환 $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$은 주어진 점을 원점에서부터 그 점에 이르는 방향으로 원점과의 거리가 3배만큼 멀리 떨어진 점으로 이동시킨다. 이러한 기하학적인 의미를 이용하면 일차변환 $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$은 $(1,2)$를 $(3,6)$으로 이동시킨다는 사실을 직관적으로 알 수 있다.

일차변환 $f_1,\ f_2,\ g,\ h$를 나타내는 행렬을 각각

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이라 하자. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)

$P_1=f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$이라 하고 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} P_{2n}=(f_1 \circ g)(P_{2n-1}) \\ P_{2n+1}=(f_2 \circ h)(P_{2n}) \end{cases}$$

이라 할 때, [논제1]과 [논제2]의 물음에 답하시오.

논제1

좌표평면에서 일차변환 $f_1 \circ g$와 $f_2 \circ h$가 나타내는 기하학적 의미를 각각 설명하시오.(10점)

논제2

삼각형 OP_2P_7의 넓이가 삼각형 OP_4P_7의 넓이의 4배일 때, 삼각형 $P_2P_4P_7$의 넓이를 구하시오.(단, O는 원점이다.) (25점)

[문제3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $y=f(x)$에서

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}$$

를 x의 값이 a에서 $a+\triangle x$까지 변할 때 함수 $y=f(x)$의 평균변화율이라 하며, 이 값은 두 점 $(a, f(a))$와 $(a+\triangle x, f(a+\triangle x))$를 지나는 직선의 기울기이다. 또한 $\triangle x \to 0$일 때 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\triangle x \to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{\triangle x \to 0}\frac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}$$

가 존재하면 이 극한값을 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 또는 순간변화율이라 하고 기호로 $f'(a)$와 같이 나타낸다.

(나) 미분 가능한 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 곱의 미분법 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 으로부터 $f(x)g'(x)=\{f(x)g(x)\}'-f'(x)g(x)$ 이다. 이 등식의 양변을 적분하면

$$\int f(x)g'(x)dx \ =f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

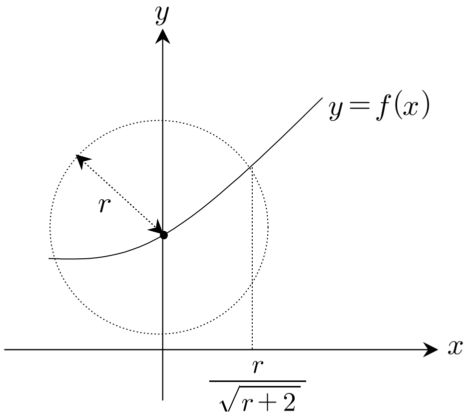
를 얻는다. 이와 같은 적분 방법을 부분적분법이라 한다. 예를 들어,

$$\int e^{-t}\sin t\,dt=-e^{-t}\sin t+\int e^{-t}\cos t\,dt$$

이다.

논제3-1

실수 전체의 집합에서 연속인 증가함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하다. 모든 양수 r에 대하여, 중심이 $(0, f(0))$이고 반지름의 길이가 r인 원이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 x 좌표 중의 하나가 $\dfrac{r}{\sqrt{r+2}}$이다. 이때, $f'(0)$의 값을 구하시오. (15점)

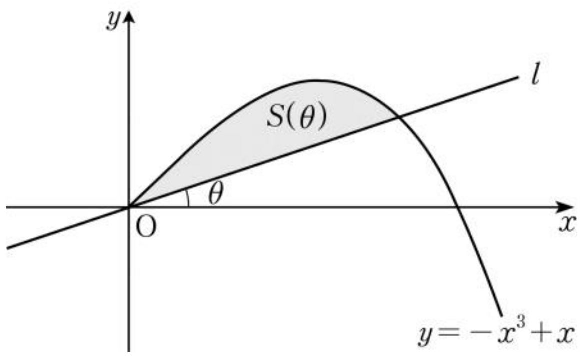


논제3-2

함수 $g(x)=2\int_0^x e^{t-x}\sin(x-t)\,dt$ 에 대하여, 방정식 $g(x)=1$의 모든 양의 해를 작은 것부터 크기 순서대로 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} g'(x_n)$의 값을 구하시오. (20점)

풀어보기 [문제1]

그림과 같이 원점을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\theta\left(0 \le \theta < \frac{\pi}{4}\right)$인 직선을 l이라 하자. 곡선 $y=-x^3+x\ (x \ge 0)$과 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-0} \frac{S(\theta)}{\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)^2}$ 의 값은? (2014년 10월 전국연합 B형)



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

풀어보기 [문제2]

연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1} f(t)dt$이다. $f(1)=1$일 때, $\pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx$의 값은?
(2014 대입 대수능 B형)

① $2(\pi-2)$ ② $2\pi-3$ ③ $2(\pi-1)$ ④ $2\pi-1$ ⑤ 2π

예시답안

풀어보기 [문제1]

직선 l 의 방정식은 $y=(\tan\theta)x$ 이므로 $-x^3+x=(\tan\theta)x$ 에서 $x(x^2+\tan\theta-1)=0$

$x\geq 0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{1-\tan\theta}$ 이다.

따라서 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S(\theta)=\int_0^{\sqrt{1-\tan\theta}}\{(-x^3+x)-(\tan\theta)x\}\,dx=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}(1-\tan\theta)x^2\right]_0^{\sqrt{1-\tan\theta}}$$

$$=\frac{1}{4}(1-\tan\theta)^2$$

이므로 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{S(\theta)}{\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)^2}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{1}{4}\left(\frac{\tan\theta-1}{\theta-\frac{\pi}{4}}\right)^2$ 이다. $f(\theta)=\tan\theta$ 라 하면 $f'(\theta)=\sec^2\theta$,

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ 이므로 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\tan\theta-1}{\theta-\frac{\pi}{4}}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{f(\theta)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\theta-\frac{\pi}{4}}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{S(\theta)}{\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}\left(f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2=\frac{1}{4}\times 2^2=1$

풀어보기 [문제2]

$f(x)=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_1^{x+1}f(t)\,dt$ 에서 양변을 x 에 관하여 미분하면 $f'(x)=\dfrac{\pi}{2}f(x+1)$

따라서

$$\pi^2\int_0^1 xf(x+1)\,dx=\pi^2\int_0^1\frac{2}{\pi}xf'(x)\,dx=2\pi\int_0^1 xf'(x)\,dx=2\pi\left\{[xf(x)]_0^1-\int_0^1 f(x)\,dx\right\}$$

$$=2\pi-2\pi\int_0^1 f(x)\,dx=2\pi-2\pi\int_0^1\frac{2}{\pi}f'(x-1)\,dx=2\pi-4[f(x-1)]_0^1$$

$$=2\pi-4[f(0)-f(-1)]$$

$y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $f(0)=0,\ f(-1)=-f(1)=-1$

$\therefore\ \pi^2\displaystyle\int_0^1 xf(x+1)\,dx=2\pi-4=2(\pi-2)$

논제1

수열 $\{\log a_n\}$ 이 등차수열이므로, 공차를 d 라 하면 $\log a_{n+1} - \log a_n = d$ 를 만족한다.
로그의 성질에 의하여

$$\log a_{n+1} - \log a_n = \log \frac{a_{n+1}}{a_n} = d \quad , \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = 10^d , \quad a_{n+1} = 10^d \cdot a_n$$

이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 a_1 이고 공비가 10^d 인 등비수열이다.

대학발표 예시답안

$\{\log a_n\}$을 공차가 d인 등차수열이라 하면 일반항은

$$\log a_n = \log a_1 + (n-1)d$$

이다. 따라서

$$\log a_n = \log a_1 + \log 10^{(n-1)d} = \log a_1 10^{(n-1)d}$$

이므로,

$$a_n = a_1 \times (10^d)^{n-1}$$

이다. 그러므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a_1이고 공비가 10^d인 등비수열이다.

논제2

양수 x 에 대하여 $\log x$ 의 지표를 $f(x)$ 라 하면, 논제에 의하여 $\log x = f(x) + g(x)$ 로 나타낼 수 있다.

$$\log a_{22} - \log a_2 = \{f(a_{22}) + g(a_{22})\} - \{f(a_2) + g(a_2)\}$$

$$= f(a_{22}) - f(a_2) + g(a_{22}) - g(a_2)$$

이고, 수열 $\{\log a_n\}$ 은 공차가 d 인 등차수열이므로 $\log a_{22} - \log a_2 = 20d$ 이다.
지표의 성질에 의하여 $f(a_{22}) - f(a_2) = N$ 은 정수이다.

$g(a_{22}) - g(a_2) = -\frac{1}{2}$ 이므로, $N = 20d + \frac{1}{2}$ …① 이고, $-1 < d < 0$ 에 의하여

$-19 \le N \le 0$ …② 이다.

따라서 ①, ②에 의하여 $-19 \le 20d + \frac{1}{2} \le 0$ 이므로 $-\frac{39}{40} \le d \le -\frac{1}{40}$ 이다.

그러므로 d 의 최댓값은 $-\frac{1}{40}$, 최솟값은 $-\frac{39}{40}$ 이다.

대학발표 예시답안

$\log x$의 지표를 $f(x)$라 하면

$$\log a_{22} = f(a_{22}) + g(a_{22}) = \log a_1 + 21d$$

$$\log a_2 = f(a_2) + g(a_2) = \log a_1 + d$$

이므로

$$20d = f(a_{22}) - f(a_2) + g(a_{22}) - g(a_2) = \{f(a_{22}) - f(a_2)\} - \frac{1}{2} = k - \frac{1}{2}$$

(단, $k = f(a_{22}) - f(a_2)$) 이다. 따라서 $-1 < d < 0$ 의 조건으로부터

$$-1 < \frac{k}{20} - \frac{1}{40} < 0$$

이고, k는 정수이므로 $-19 \le k \le 0$ 이다. 그러므로

$$d = \frac{k}{20} - \frac{1}{40}$$

에서 구하는 최댓값은 $-\frac{1}{40}$, 최솟값은 $-\frac{39}{40}$이다.

논제1

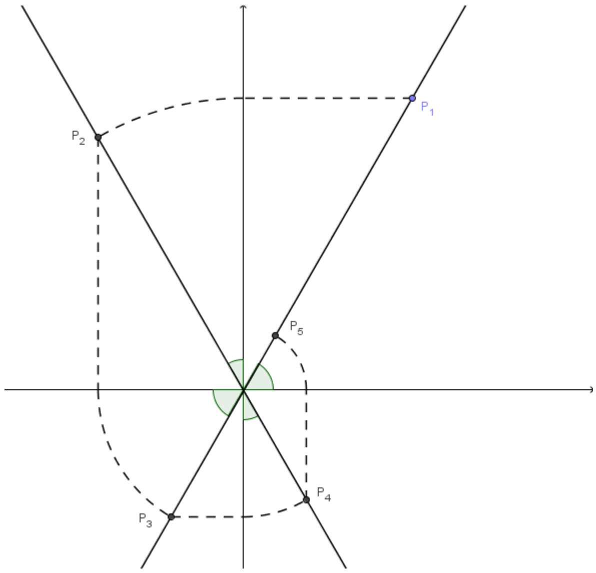
좌표평면에서 일차변환 $f_1 \circ g$ 가 나타내는 기하학적 의미는 주어진 점을 y축 위로 수선의 발을 내린 후 원점을 중심으로 θ 만큼 반시계방향으로 회전이동 시킨다.
좌표평면에서 일차변환 $f_2 \circ h$ 가 나타내는 기하학적 의미는 주어진 점을 x축 위로 수선의 발을 내린 후 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 만큼 반시계방향으로 회전이동 시킨다.

대학발표 예시답안

$f_1 \circ g$는 주어진 점을 y축 위로 수선의 발을 내린 후 원점을 중심으로 θ만큼 회전이동 시키고, $f_2 \circ h$는 주어진 점을 x축 위로 수선의 발을 내린 후 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{2} - \theta$만큼 회전이동 시킨다.

논제2

$P_1 = f_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$, $(0 < \theta < \frac{\pi}{4})$ 이므로, P_1 은 제 1사분면 위의 점이다.



주어진 일차변환에 의하여 자연수 n 에 대하여 P_{4n-3} , P_{4n-2} , P_{4n-1} , P_{4n} 은 각각 제 1, 2, 3, 4 사분면에 위치하며, P_{4n-3} 과 P_{4n-1} 은 기울기가 $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ 이고 원점을 지나는 직선위에 P_{4n-2} 과 P_{4n} 은 기울기가 $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ 이고 원점을 지나는 직선위에 위치한다.

또한, 선분 OP_{4n-2} 와 선분 OP_{4n} 의 길이는 P_{4n-3} 와 P_{4n-1} 의 y 좌표의 절댓값과 같고, 또한, 선분 OP_{4n-1} 와 선분 OP_{4n+1} 의 길이는 P_{4n-2} 와 P_{4n} 의 x 좌표의 절댓값과 같다. ($\overline{\mathrm{OP}_1}=1$)

그러므로,

$$\overline{\mathrm{OP}_{4n-2}}=\cos\theta\times\overline{\mathrm{OP}_{4n-3}}$$
$$\overline{\mathrm{OP}_{4n-1}}=\sin\theta\times\overline{\mathrm{OP}_{4n-2}}$$
$$\overline{\mathrm{OP}_{4n}}=\cos\theta\times\overline{\mathrm{OP}_{4n-1}}$$
$$\overline{\mathrm{OP}_{4n+1}}=\sin\theta\times\overline{\mathrm{OP}_{4n}}$$

을 만족한다.

삼각형 $\mathrm{OP}_2\mathrm{P}_7$의 넓이가 삼각형 $\mathrm{OP}_4\mathrm{P}_7$의 넓이의 4배이고, P_2 와 P_4 는 한 직선위의 점이므로, $\overline{\mathrm{OP}_2}:\overline{\mathrm{OP}_4}=4:1$ 이다. 따라서 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

삼각형 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4\mathrm{P}_7$의 넓이는 삼각형 $\mathrm{OP}_4\mathrm{P}_7$의 넓이의 5 배이고,

$\overline{\mathrm{OP}_4}=\sin\theta\cdot\cos^2\theta$, $\overline{\mathrm{OP}_7}=\sin^3\theta\cdot\cos^3\theta$

$$\triangle \mathrm{OP}_4\mathrm{P}_7 = \frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OP}_4}\cdot\overline{\mathrm{OP}_7}\cdot\sin 2\theta$$

$$= (\sin\theta\cdot\cos\theta)^5\cos\theta$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^5\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2^{12}}$$

이므로 삼각형 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4\mathrm{P}_7$의 넓이는 $\frac{5}{2^{12}}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ 이다.

대학발표 예시답안

[논제1]로부터 음이 아닌 정수 n에 대하여 P_{4n+1}, P_{4n+2}, P_{4n+3}, P_{4n+4}은 차례대로 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면에 위치하게 됨을 알 수 있다. 또한 P_{4n+1}과 P_{4n+3}은 원점을 지나고 기울기가 $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$인 직선 위에 놓여 있고, P_{4n+2}와 P_{4n+4}는 원점을 지나고 기울기가 $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$인 직선 위에 놓여 있다. 이러한 기하학적인 고찰로부터

$$\overline{\mathrm{OP}_{4n+1}} = \sin\theta\times\overline{\mathrm{OP}_{4n}}$$
$$\overline{\mathrm{OP}_{4n+2}} = \cos\theta\times\overline{\mathrm{OP}_{4n+1}}$$
$$\overline{\mathrm{OP}_{4n+3}} = \sin\theta\times\overline{\mathrm{OP}_{4n+2}}$$
$$\overline{\mathrm{OP}_{4n+4}} = \cos\theta\times\overline{\mathrm{OP}_{4n+3}}$$

이 성립함을 알 수 있다. 이제 조건으로부터

$$\frac{\triangle \mathrm{OP}_2\mathrm{P}_7}{\triangle \mathrm{OP}_4\mathrm{P}_7} = \frac{\overline{\mathrm{OP}_2}}{\overline{\mathrm{OP}_4}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta\cos^2\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = 4$$

이므로 $\theta = \frac{\pi}{12}$ 이다.

한편, $\overline{\mathrm{OP}_7} = \sin^3\theta\cos^3\theta$ 이므로

$$\triangle \mathrm{P}_2\mathrm{P}_4\mathrm{P}_7 = 5\times\triangle \mathrm{OP}_4\mathrm{P}_7 = \frac{5}{2}\sin^4\theta\ \cos^5\theta\ \sin 2\theta = \frac{5(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2^{12}}$$

이다.

논제3-1

제시문(가)에 의하여 $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ 이고, 교점의 x 좌표가 $x = \frac{r}{\sqrt{r+2}}$ 이므로 $x\to 0$ 일 때, $r\to 0$ 이다.

또한 논제에 의하여 주어진 원의 방정식은 $x^2+(f(x)-f(0))^2=r^2$ 이다.
따라서

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{r\to 0}\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{\frac{r}{\sqrt{r+2}}}=\lim_{r\to 0}\frac{\sqrt{r^2-\frac{r^2}{r+2}}}{\frac{r}{\sqrt{r+2}}}=\lim_{r\to 0}\sqrt{r+1}=1$$

대학발표 예시답안

문제의 조건에서 원의 방정식은 다음과 같다.

$$x^2+(f(x)-f(0))^2=r^2$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 0 부터 x까지의 평균변화율 $\frac{\triangle y}{\triangle x}$는

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{x}=\frac{r\sqrt{\frac{r+1}{r+2}}}{\frac{r}{\sqrt{r+2}}}=\sqrt{r+1}$$

이다. 한편, $\triangle x\to 0$일 때, $r\to 0$이므로, $x=0$에서의 미분계수 $f'(0)$은 다음과 같다.

$$f'(0)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{r\to 0}\sqrt{r+1}=1$$

논제3-2

$$\int e^{-t}\sin t\,dt=-e^{-t}\sin t+\int e^{-t}\cos t\,dt=-\frac{1}{2}e^{-t}(\cos t+\sin t)+C$$

(단, C는 적분상수)

이므로, $g(x)=1-e^{-x}(\sin x+\cos x)=1-\sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 이다.

따라서 방정식 $g(x)=1$ 의 모든 양의 해는 $x_n=n\pi-\frac{\pi}{4}$ (단, n 은 자연수)

또한 $g'(x)=2e^{-x}\sin x$ 이므로

$$g'(x_n)=2e^{-n\pi+\frac{\pi}{4}}\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^{n+1}\sqrt{2}e^{-n\pi+\frac{\pi}{4}}=-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}(-e^{-\pi})^n$$

$-1<-e^{-\pi}<0$ 이므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}g'(x_n)=\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}}{1+e^{-\pi}}=\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{1+e^{\pi}}$ 이다.

대학발표 예시답안

제시문 (나)의 예와 부분적분법을 사용하여, 주어진 $g(x)$에 관한 우변의 적분을 계산하면

$g(x)=1-e^{-x}(\sin x+\cos x)=1-\sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 이다.

그러므로 방정식 $g(x)=1$의 모든 양의 해는

$$\pi-\frac{\pi}{4},\ 2\pi-\frac{\pi}{4},\ 3\pi-\frac{\pi}{4},\cdots$$

이다. 즉, $x_n=n\pi-\frac{\pi}{4}$(단, n은 자연수)이다. 한편,

$$g'(x)=2e^{-x}\sin x$$

이므로

$$g'(x_n)=2e^{-n\pi+\frac{\pi}{4}}\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^{n+1}\sqrt{2}e^{-n\pi+\frac{\pi}{4}}=-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}(-e^{-\pi})^n$$

이다. 그러므로 $\left|-\frac{1}{e^{\pi}}\right|<1$ 이므로 무한등비급수의 합의 공식으로부터

$$\sum_{n=1}^{\infty}g'(x_n)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{-\pi}}{1-\left(-\frac{1}{e^{\pi}}\right)}=\frac{\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}}{1+e^{\pi}}$$

이다.

11 동국대학교 모의(자연계 온라인)[11]

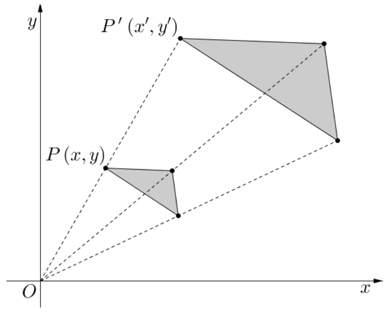
※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】 k가 0이 아닌 실수일 때, 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에서 점 $P(x,y)$를 점 $P'(x',y')$으로 옮기는 변환

$$f:(x,y)\rightarrow(kx,ky)$$

를 원점을 중심으로 하고 닮음비가 k인 닮음변환이라고 한다.

–『고등학교 수학』



【나】 함수 $f(x)$가 구간 (a,b)에서 미분가능하고 $f'(x)$가 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$의 길이 l은

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

–『고등학교 수학』

【다】 줄의 양 끝을 잡으면 팽팽히 잡아당겼다 하더라도 중력의 영향으로 늘어뜨려진 모양이 된다. 이러한 모양을 현수선이라고 한다. 현수선 위의 임의의 점 $(x,f(x))$에서의 접선의 기울기가 $f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$이고 $f(0)=0$이라고 하면, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-1$이다.

–『고등학교 수학』

문제1

제시문 【다】에서 주어진 현수선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(-a,f(-a))$와 $(a,f(a))$ 사이의 현수선의 길이를 제시문 【나】를 이용하여 구하시오. 길이가 $6m$인 줄의 양 끝을 같은 높이로 고정하였을 때 줄의 가운데가 양 끝 고정점에 비하여 $1m$ 아래로 늘어뜨려졌다고 가정하고, 이 줄의 모양이 제시문 【다】의 현수선 $y=f(x)$에 제시문 【가】에서 설명한 닮음변환에 의하여 얻어진 곡선과 같다고 할 때, 닮음비 k를 구하고 줄의 양 끝 고정점 사이의 거리를 계산하시오.

11) 동국대 홈페이지

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】 지면으로부터 일정한 각도로 던진 물체는 포물선 운동을 한다. 이 때 수평 방향으로는 등속운동을 하고 연직방향으로는 등가속도 운동을 한다. 수직선 위를 움직이는 점 P의 위치 x가 시각 t의 함수 $x=f(t)$로 나타내어질 때 시각 t에서 점 P의 속도 v와 가속도 a는 각각 다음과 같이 정의한다.

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t),\ a=\frac{dv}{dt}=f''(t)$$

–『고등학교 수학』

【나】 평면 위를 움직이는 물체의 속도와 가속도는 시각 t에서의 위치를 x축 방향과 y축 방향으로 나누어 구할 수 있다. 점 $P(x,y)$가 좌표평면 위를 움직일 때 x와 y는 각각 시각 t의 함수이므로 $x=f(t),\ y=g(t)$와 같이 나타낼 수 있다.

벡터 $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=(f'(t),g'(t))$를 시각 t에서 점 P의 속도라 하고, 벡터 $\vec{v}$의 크기

$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$ 을 점 P의 속력이라 한다.

그리고 $\vec{a}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2}\right)=(f''(t),g''(t))$을 시각 t에서 점 P의 가속도라 한다.

–『고등학교 수학』

【다】 시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x,y)$의 x와 y가 $x=f(t),y=g(t)$일 때 $t=a$에서 $t=b$까지 점 $P(x,y)$가 움직인 거리 s는 다음과 같다,

$$s=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

–『고등학교 수학』

문제1

시각 t에서 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x,y)$의 x와 y가 $x=e^{-t}\cos t,\ y=e^{-t}\sin t$일 때 시각 t에서 점 P의 속도와 가속도를 구하고 $t=2$에서 속력을 제시문 【나】를 이용하여 풀이과정과 답을 서술하시오. 그리고 $t=0$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리를 제시문 【다】를 이용하여 풀이과정과 답을 서술하시오.

풀어보기 [문제1]

방정식 $2^{x}+2^{5-x}=33$ 의 모든 실근의 합을 구하시오.

풀어보기 [문제2]

$x=0$ 에서 $x=6$ 까지 곡선 $y=\frac{1}{3}(x^{2}+2)^{\frac{3}{2}}$ 길이를 구하시오.

풀어보기 [문제3]

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 가지고 $f(0)=0,\ f(1)=\sqrt{3}$ 을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_{0}^{1}\sqrt{1+\{f'(x)\}^{2}}\,dx$ 의 최솟값을 구하시오.

풀어보기 [문제4]

원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q 의 시각 t 에서의 위치 $x_{\mathrm{P}}, x_{\mathrm{Q}}$ 는 다음과 같다.

$x_{\mathrm{P}}=t^{2}-at,\ x_{\mathrm{Q}}=\ln(t^{2}-t+1)$

두 점 P, Q 가 서로 반대 방향으로 움직이는 시각 t 의 범위가 $\frac{1}{2}<t<2$ 일 때, 실수 a 의 값을 구하시오.

예시답안

풀어보기 [문제1]

$2^x + 2^{5-x} = 33$에서 양변에 2^x을 곱하고 식을 정리하면

$(2^x)^2 - 33 \cdot 2^x + 32 = 0$

$(2^x - 1)(2^x - 32) = 0$

따라서 $2^x = 1$ 또는 $2^x = 32$ 이므로 $x = 0$ 또는 $x = 5$ 이다.

따라서 모든 실근의 합은 5이다.

풀어보기 [문제2]

$y = f(x)$ 라 하면 $f(x) = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ 이고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = x\sqrt{x^2+2}$$

따라서 $x = 0$ 에서 $x = 6$ 까지의 곡선의 길이 l 은

$$l = \int_0^6 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx = \int_0^6 \sqrt{1 + x^2(x^2+2)}\, dx$$

$$= \int_0^6 \sqrt{(x^2+1)^2}\, dx = \int_0^6 (x^2+1) dx \ (\because x^2+1 > 0)$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^6 = 78$$

풀어보기 [문제3]

$\int_0^1 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\, dx$ 는 $x = 0$ 에서 $x = 1$ 까지 $y = f(x)$ 의 그래프의 길이이다.

이때 $y = f(x)$ 의 그래프의 길이의 최솟값은 두 점 $(0, 0), (1, \sqrt{3})$ 을 잇는 선분의 길이와 같으므로 구하는 최솟값은 $\sqrt{(1-0)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = 2$

풀어보기 [문제4]

두 점 P, Q 의 시각 t 에서의 위치가 $x_{\mathrm{P}}=t^2-at,\ x_{\mathrm{Q}}=\ln\left(t^2-t+1\right)$ 이므로 속도는 각각 $v_{\mathrm{P}}=\dfrac{dx_{\mathrm{P}}}{dt}=2t-a,\ v_{\mathrm{Q}}=\dfrac{dx_{\mathrm{Q}}}{dt}=\dfrac{2t-1}{t^2-t+1}$ 이다.

두 점 P, Q 가 서로 반대 방향으로 움직일 때는 $v_{\mathrm{P}}v_{\mathrm{Q}}<0$ 이므로

$$(2t-a)\cdot\frac{2t-1}{t^2-t+1}<0$$

$$(2t-a)(2t-1)<0\ \left(\because t^2-t+1>0\right)$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}<t<\frac{a}{2}$$

따라서 $\dfrac{a}{2}=2$ 이므로 $a=4$

5월 문제1

(1) 현수선의 길이.

$y=f(x)$ 위의 두 점 $(-a, f(-a))$ 와 $(a, f(a))$ 사이의 현수선의 길이를 l 이라 하면 $f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 이므로 제시문 【나】 에 의하여

$$l=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx=\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}}\,dx=\int_{-a}^{a}\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_{-a}^{a}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=e^a-e^{-a}$$

이다.

(2) 닮음비와 두 고정점 사이의 거리.

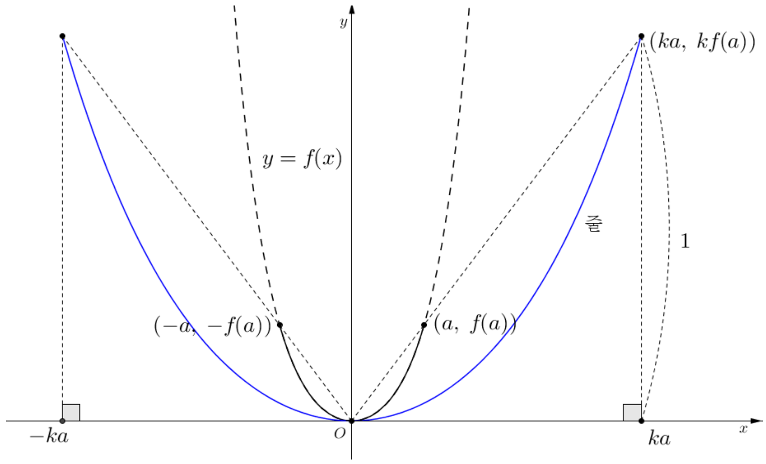
길이가 $6m$ 인 줄이 제시문 【다】에서 주어진 $y=f(x)$ 에 닮음비 k 인 닮음변환을 적용한 곡선이므로 두 곡선 위의 점들은 각각 대응된다.

따라서 길이가 $6m$ 인 줄의 양 끝점에 대응되는 $y=f(x)$ 위의 두 점을 각각 $(-a, f(-a))$ 와 $(a, f(a))$ 라고 하면 길이가 $6m$ 인 줄의 양 끝점의 점은 $(-ka, kf(-a))$ 와 $(ka, kf(a))$ 가 된다.

이때, $y=f(x)$ 위의 두 점 $(-a, f(-a))$ 와 $(a, f(a))$ 사이의 길이가 e^a-e^{-a} 이고 닮음비가 k 이므로 $6=k(e^a-e^{-a})\cdots$ ① 이다.

또한, 줄의 가운데와 대응되는 $y=f(x)$ 위의 점은 $(0,0)$ 이므로 이 줄의 가운데 역시 원점을 지나며, 줄의 가운데가 양 끝점보다 $1m$ 낮다고 했으므로 다음 식이 성립한다.

$$1=kf(a)=k\left(\frac{e^a+e^{-a}}{2}-1\right)\cdots ②$$



①, ② 를 연립하면 $e^a+2e^{-a}-3=0$ 이고 $e^a=t\,(t>0)$ 으로 치환하여 계산하면 $t=1, 2$ 가 된다. $t=1$ 이면 $a=0$ 이 되어 모순.
그러므로 $t=2$ 이고 $a=\ln 2$ 이다.
이를 ① 에 대입하면 $k=4$ 이고 줄의 양 끝점 사이의 거리는 $2ka=8\ln 2$ 가 된다.

7월 문제1

(1) 점 P의 속도와 가속도.

점 $P(x,y)$ 의 x 와 y 가 $x=e^{-t}\cos t,\ y=e^{-t}\sin t$ 일 때

$\dfrac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t$, $\dfrac{d^2x}{dt^2}=2e^{-t}\sin t$ 이고

$\dfrac{dy}{dt}=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-2e^{-t}\cos t$ 이다.

따라서 시각 t 에서 점 P 의 속도 $\vec{v}$ 와 가속도 $\vec{a}$ 는 제시문 【나】에 의하여
$\vec{v}=\left(-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t,\ -e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t\right)$
$\vec{a}=\left(2e^{-t}\sin t,\ -2e^{-t}\cos t\right)$ 이다.

(2) 시각 $t=2$ 에서의 속력.

한편, $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=2e^{-2t}$ 이므로 $t=2$ 에서의 속력 $|\vec{v}|$ 는

$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{2}\,e^{-t}\big|_{t=2}=\sqrt{2}\,e^{-2}$ 이다.

(3) $t=0$ 에서 $t=\pi$ 까지 점 P가 움직인 거리.

$t=0$ 에서 $t=\pi$ 까지 점 P가 움직인 거리 s 는

$s=\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\,e^{-t}dt=\left[-\sqrt{2}\,e^{-t}\right]_0^{\pi}=\sqrt{2}\left(1-e^{-\pi}\right)$ 이다.

12 부산대학교 수시 논술[12)]

【문항 1】

(가) 열린 구간 (a, b) 에서 정의된 함수 $f(x)$ 의 그래프 위에 있는 임의의 두 점 P, Q 에 대하여 P, Q 사이에 있는 그래프 부분이 선분 PQ 보다 아래쪽에 있으면 함수 $f(x)$ 의 그래프는 구간 (a, b) 에서 아래로 볼록하다고 한다.

(나) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ 를 잇는 선분 PQ 를 $m : n(m>0, n>0)$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

이다.

(다) 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β 는 실수)이고, a 를 포함하는 열린구간 내의 모든 x 에서 $f(x) \le g(x)$ 이면 $\alpha \le \beta$ 이다.

[문제] 열린 구간 (a, b) 에서 정의된 함수 $f(x)$ 의 그래프가 아래로 볼록하다고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

문제1-1

구간 (a, b) 에 속하는 임의의 p, q 와 $0 \le t \le 1$ 인 임의의 t 에 대하여 부등식
$f((1-t)p+tq) \le (1-t)f(p)+tf(q)$ 가 성립함을 보이시오. (10점)

문제1-2

함수 $f(x)$ 가 구간 (a, b) 에서 미분가능하다고 할 때, 이 구간에 속하는 임의의 p, q 에 대하여 부등식 $f(q) \ge f(p)+f'(p)(q-p)$
가 성립함을 보이시오. (20점)

12) 부산대학교 홈페이지

【문항 2】

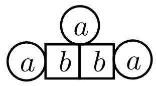
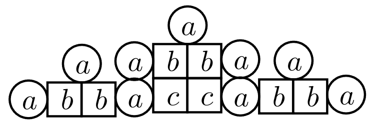
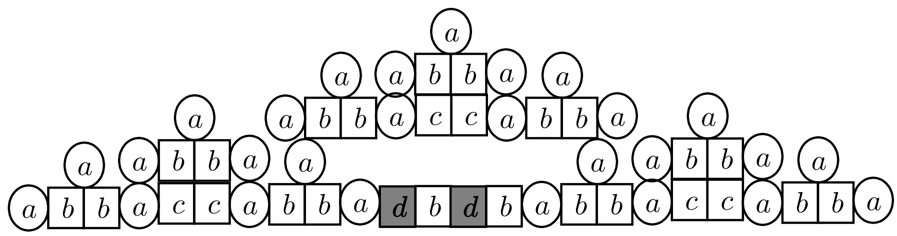
[제시문]

생물 세포의 성장을 모방하여 성장모델을 다음과 같은 방법으로 만들었다.
성장모델에서 각각의 세포는 매 단계마다 아래의 규칙들을 따라 분열하거나 바뀐다.
아래 규칙에서 a, $\boxed{b}$, $\boxed{c}$, $\boxed{d}$ 는 각각 한 개의 세포를 나타낸다.

[규칙 1] 세포 a 는 <그림 1> 과 같이 5개의 세포 a, a, a, $\boxed{b}$, $\boxed{b}$ 로 분열한다.
[규칙 2] 세포 $\boxed{b}$ 는 <그림 2> 와 같이 세포 $\boxed{c}$ 로 바뀐다.
[규칙 3] 세포 $\boxed{c}$ 는 <그림 3> 과 같이 2개의 세포 $\boxed{b}$, $\boxed{d}$ 로 분열한다.
[규칙 4] 세포 $\boxed{d}$ 는 <그림 4> 와 같이 더 이상 분열하지도, 바뀌지도 않는다.

<그림 1> <그림 2> <그림 3> <그림 4>

다음은 세포 a 의 성장과정을 규칙에 따라 [1단계]에서 [4단계]까지 나타낸 것이다.

		
[1단계]	[2단계]	[3단계]
		
[4단계]		

[문제] 1개의 세포 a 로부터 시작한 성장모델의 [n단계]에서 나타나는 a 의 개수를 A_n 이라 하고, $\boxed{b}$ 의 개수와 $\boxed{c}$ 의 개수, $\boxed{d}$ 의 개수의 합을 B_n 이라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

문제2-1 B_6 의 값을 구하시오. (15점)

문제2-2 $B_{n+2} = pB_n + qA_n + r$ (n은 짝수) 일 때, 상수 p, q, r 의 값을 구하시오.(20점)

【문항 3】

[제시문]

(가) 두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$과 $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$이 이루는 각의 크기를 $\theta(0 \le \theta \le \pi)$ 라고 할 때,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

이다.

(나) 좌표공간에서 원점 O(0, 0, 0)이 중심인 구 위의 임의의 두 점 A, B에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 각을 두 점 A와 B의 **사이각**이라고 하자.

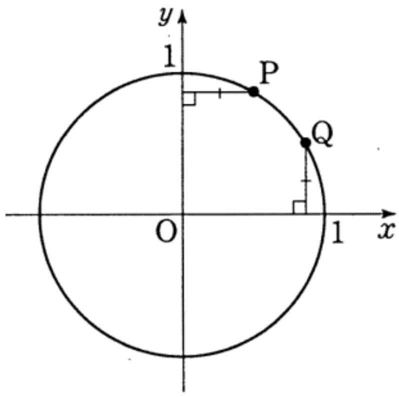
[문제] 좌표공간에서 원점 O가 중심이고 반지름이 1인 구 위의 두 점 N(0, 0, 1)과 E(1, 0, 0)에 대하여, 점 N과의 사이각이 $\frac{\pi}{4}$인 구 위의 점들 중에서 x좌표가 가장 큰 점을 P_0이라고 하고, 점 E와의 사이각이 $\frac{\pi}{4}$인 구 위의 점들 중에서 y좌표가 가장 큰 점을 Q_0이라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

문제3-1 두 점 P_0과 Q_0의 좌표를 각각 구하시오. (10점)

문제3-2 점 P는 P_0에서 출발하여 z축을 회전축으로 하여 일정한 각속도 ω $(\omega > 0)$로 한 바퀴 회전하고, 점 Q는 Q_0에서 출발하여 x축을 회전축으로 하여 점 P와 같은 각속도로 한 바퀴 회전한다. 움직이고 있는 두 점 P와 Q의 사이각의 크기의 최솟값을 α라 할 때, $\cos\alpha$의 값을 구하시오. (단, P와 Q는 동시에 출발하고, 점 P는 출발할 때 y좌표가 증가하는 방향으로, 점 Q는 출발할 때 z좌표가 증가하는 방향으로 움직인다.) (25점)

풀어보기 [문제1]

좌표평면에서 두 점 P, Q 가 점 $(1,\ 0)$을 동시에 출발하여 원 $x^2+y^2=1$ 위를 시계 반대 방향으로 돌고 있으며, 점 P 가 $2t$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ 만큼 움직일 때 점 Q는 t만큼 움직인다. 점 P에서 y축 까지의 거리와 점 Q 에서 x축까지의 거리가 같아지는 모든 t의 값의 합은?



풀어보기 [문제2]

$0 \leq x \leq \pi$ 일 때, $f(x)=\sin x+\cos x-2\sin x\cos x$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

예시답안

풀어보기 [문제1]

두 점을 $P(\cos 2t, \sin 2t)$, $Q(\cos t, \sin t)$ 라 하면 $|\cos 2t| = \sin t$ ⇨ $\cos 2t = \pm \sin t$

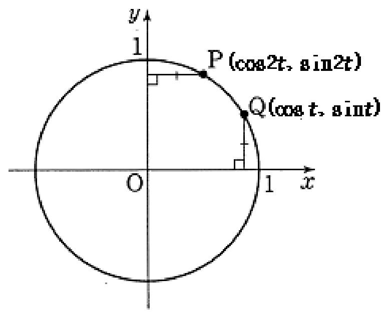
i) $\cos 2t = \sin t$ 에서 $2\sin^2 t + \sin t - 1 = 0$

$\therefore\ \sin t = \dfrac{1}{2}\ (0 \le t \le \pi)$ $\qquad \therefore\ t = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi$

ii) $\cos 2t = -\sin t$ 에서 $2\sin^2 t - \sin t - 1 = 0$

$\therefore\ \sin t = 1\ (0 \le t \le \pi)$ $\qquad \therefore\ t = \dfrac{\pi}{2}$

따라서 t 의 값의 합은 $\dfrac{1}{6}\pi + \dfrac{5}{6}\pi + \dfrac{1}{2}\pi = \dfrac{3}{2}\pi$



풀어보기 [문제2]

$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ 라 하면 $-1 \le t \le \sqrt{2}$ 이다.

$t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$ 이므로 $\sin x \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

따라서 $\sin x + \cos x - 2\sin x\cos x = t - (t^2 - 1) = -t^2 + t + 1\ (-1 \le t \le \sqrt{2}\ )$이므로

$t = \dfrac{1}{2}$ 일 때, 최댓값 $\dfrac{5}{4}$ 이고

$t = -1$ 일 때, 최솟값 -1 이다.

따라서 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은 $-\dfrac{5}{4}$ 이다.

문제1-1

ⅰ) $t=0, 1$ 일 때, $f(p)\le f(p)$, $f(q)\le f(q)$ 이므로 성립한다.
ⅱ) $0<t<1$ 일 때, 구간 (a, b) 에 속하는 임의의 p, q 가 $p<q$ 라고 하자.
제시문(나)에 의하여 좌표평면 위의 두 점 $(p, f(p)), (q, f(q))$ 를 잇는 선분을 $t:1-t$ 로 내분하는 점의 좌표는 $((1-t)p+tq, (1-t)f(p)+tf(q))$ 이다.
따라서 제시문(가)에 의하여 $f((1-t)p+tq)\le(1-t)f(p)+tf(q)$ 가 성립한다.

문제1-2

구간 (a, b) 에 속하는 임의의 p, q 가 $p<q$ 라고 하자.
$x\neq p$ 인 임의의 $x\in(a, q)$ 에 대하여 $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}\le\dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}$ 임을 보이자.

ⅰ) $p<x<q$ 일 때, $t=\dfrac{x-p}{q-p}$ 이라 하면 $0<t<1, 0<1-t<1$ 이고

$(1-t)p+tq=\left(1-\dfrac{x-p}{q-p}\right)p+\dfrac{x-p}{q-p}q=x$ 이므로 문제 1-1에 의하여

$f((1-t)x+tq)=f(x)\le\left(1-\dfrac{x-p}{q-p}\right)f(p)+\dfrac{x-p}{q-p}f(q)=f(p)+(x-p)\dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}$ 이다.

따라서 $x-p>0$ 이므로 $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}\le\dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}$ 이다.

ⅱ) $a<x<p$ 일 때, $t=\dfrac{p-x}{q-x}$ 이라 하면 $0<t<1, 0<1-t<1$ 이고 ⅰ)과 같은 과정을 반복하면 $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}\le\dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}$ 임을 알수 있다.

그러므로 $x\neq p$ 인 임의의 $x\in(a, q)$ 에 대하여 $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}\le\dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}$ 가 성립하고 제시문(다)에 의하여 $f'(p)=\lim\limits_{x\to p}\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}\le\dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}$ 가 성립한다.

다른 풀이

구간 (a, b) 에 속하는 임의의 p, q 가 $p<q$ 라고 하자.
편의상 열린 구간 (a,b) 에 속하는 임의의 두 점 p,q 가 $p<q$ 라고 하자.
문제1-1에 의하여 임의의 $t\in(0, 1)$ 에 대하여 부등식

$$f((1-t)p+tq)\le(1-t)f(p)+tf(q) \qquad \text{(식1)}$$

이 항상 성립한다. 따라서 (식1)의 양변을 t 로 나누어 정리하면 부등식

$$\frac{1}{t}\{f((1-t)p+tq)-f(p)\}\le f(q)-f(p) \qquad \text{(식2)}$$

가 성립한다.
여기서 열린 구간 $(0,1)$ 에서 정의된 함수

$$g(t)=\frac{1}{t}\{f((1-t)p+tq)-f(p)\}=\frac{1}{t}\{f(p+t(q-p))-f(p)\}$$

라 하자. 그러면 함수 $f(x)$ 가 열린구간 (a,b) 에서 미분가능하므로

$$\lim_{t\to 0}g(t)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{f(p+t(q-p))-f(p)\}=f'(p)(q-p) \text{ 이다.}$$

그러므로 제시문(다)와 (식2)에 의하여 $\lim_{t\to 0}g(t)=f'(p)(q-p)\le f(q)-f(p)$ 이다.

따라서 $f(q)\ge f(p)+f'(p)(q-p)$ 가 성립한다.

문제2-1

$A_1=1$ 이고, [n 단계]의 세포 ⓐ가 [규칙 1]에 의하여

[$n+1$ 단계]에서 그 개수가 3배로 분열되므로 $A_n=3^{n-1}$ 이다.

또, B_{n+1} 을 구하기 위해

[$n+1$ 단계]에서의

① 세포 $\boxed{b}$ 는

[n 단계]에서의 ⓐ가 성장하여 새롭게 나타나는 $\boxed{b}$ 와 ………… ⓘ

$\boxed{c}$ 가 성장하여 새롭게 나타나는 $\boxed{b}$ …………… ⓘⓘ

② 세포 $\boxed{c}$ 는

[n 단계]에서의 $\boxed{b}$ 가 바뀌어 나타나는 $\boxed{c}$ ………………………… ⓘⓘⓘ

③ 세포 $\boxed{d}$ 는

[n 단계]에서의 $\boxed{c}$ 가 성장하여 새롭게 나타나는 $\boxed{d}$ 와 ………… ⓘⓥ

$\boxed{d}$ 가 바뀌지 않고 그대로 있는 $\boxed{d}$ ……………… ⓥ

이므로 $B_{n+1}=$ ⓘ+ⓘⓘ+ⓘⓘⓘ+ⓘⓥ+ⓥ 이다.

ⓘ $=2A_n$, ⓘⓘⓘ+ⓘⓥ+ⓥ $=B_n$ 이고, ⓘⓘ $=$ [$n-1$ 단계]에서의 $\boxed{b}$ 의 개수 $=B_{n-1}-B_{n-2}$ 이므로

$$B_{n+1}=B_n+2A_n+B_{n-1}-B_{n-2}\ (n\ge 3) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

임을 알 수 있다.

따라서 $B_1=0, B_2=2, B_3=8$ 을 식 $(*)$에 차례로 적용하여 구하면

$B_6=270$ 이다.

문제2-2

$2A_n=B_{n+1}-B_n-B_{n-1}+B_{n-2}\ (n\ge 3)$ 에서

ⅰ) $n=2k-1$ (k 는 자연수)일 때

$2A_{2k-1}=B_{2k}-B_{2k-1}-B_{2k-2}+B_{2k-3}$ 이고 $2A_1=B_2-B_1$ 이므로

k에 차례로 $2, 3, 4, \cdots, k$ 를 대입하면

$$\begin{cases} 2A_{2k-1} = B_{2k} - B_{2k-1} - B_{2k-2} + B_{2k-3} \\ 2A_{2k-3} = B_{2k-2} - B_{2k-3} - B_{2k-4} + B_{2k-5} \\ \qquad\vdots \\ 2A_3 \quad = B_4 - B_3 - B_2 + B_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow B_{2k} = B_{2k-1} + 2A_{2k-1} + 2A_{2k-3} + \cdots + 2A_1$ ……… (**) 이다.

$A_n = 3^{n-1}$ 이므로 식 (**)에 대입하여 정리하면

$B_{2k} = B_{2k-1} + 2(3^{2k-2} + 3^{2k-4} + \cdots + 3^2 + 1) = B_{2k-1} + \dfrac{1}{4}(3^{2k} - 1)$ 이다.

ii) $n = 2k$ (k는 자연수)일 때, 같은 방법으로 $B_{2k+1} = B_{2k} + \dfrac{3}{4}(3^{2k} - 1)$ 임을 알 수 있다.

따라서 i), ii)에 의하여

$$\begin{aligned} B_{2k+2} &= B_{2k+1} + \frac{1}{4}(3^{2k+2} - 1) \\ &= \left(B_{2k} + \frac{3}{4}(3^{2k} - 1)\right) + \frac{1}{4}(3^{2k+2} - 1) \\ &= B_{2k} + 9 \cdot 3^{2k-1} - 1 \end{aligned}$$

이다.

그러므로 $B_{n+2} = B_n + 9A_n - 1$ 이다.

$\therefore p = 1, q = 9, r = -1$

문제3-1

원점이 중심이고 반지름이 1 인 구를 S라 하자.

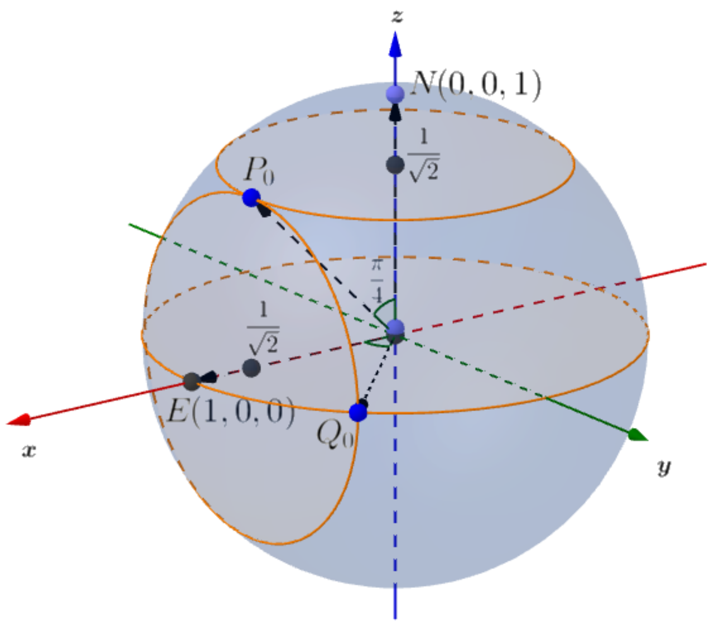
구 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x, y, z)$ 라 하면, 두 점 N, P 사이의 사이각이 $\dfrac{\pi}{4}$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ON}} = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{ON}}|\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{ON}}| = 1$ 이므로, $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이고 점 P_0 는 구 S를 평면 $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 으로 절단하여 평면 $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 위의 원 $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}$ 에서 x 좌표가 큰 점이다.

따라서 P_0 의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 이다.

위와 같은 방법으로 점 Q_0 의 x 좌표는 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이고, 점 Q_0 는 평면 $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 위의 원 $y^2 + z^2 = \dfrac{1}{2}$ 에서 y 좌표가 가장 큰 점이므로 $\mathrm{Q}_0 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$이다.



문제3-2

점 P 는 $P_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 에서 z 축을 회전축으로 하여 y 좌표가 증가하는 방향으로 일정한 각속도 ω (양수인 상수)로 한 바퀴 회전하므로 시각 t 에서의 위치는

$P(t)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\omega t), \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\omega t), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 이다. (단, $P(0)=P_0$)

점 Q 는 $Q_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ 에서 x 축을 회전축으로 하여 z 좌표가 증가하는 방향으로 각속도 ω 로 한 바퀴 회전하므로 시각 t 에서의 위치는

$Q(t)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\omega t), \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\omega t)\right)$ 이다. (단, $Q(0)=Q_0$)

움직이고 있는 두 점 $P(t)$, $Q(t)$ 의 사이각을 $0\le\theta(t)\le\pi$ 라 하자.

$\cos x$ 는 구간 $0\le x\le\pi$ 에서 감소함수이므로 사이각 $\theta(t)$ 의 크기의 최솟값 α 에 대한 $\cos\alpha$ 을 구하기 위해 $\cos(\theta(t))$ 의 최댓값을 구하면 된다.

$\overrightarrow{OP}(t)\cdot\overrightarrow{OQ}(t)=|\overrightarrow{OP}(t)||\overrightarrow{OQ}(t)|\cos(\theta(t))=\cos(\theta(t))$ 이고, $|\overrightarrow{OP}(t)|=|\overrightarrow{OQ}(t)|=1$ 이므로

$\cos(\theta(t))=\overrightarrow{OP}(t)\cdot\overrightarrow{OQ}(t)=\frac{1}{2}(\cos(\omega t)+\sin(\omega t)\cos(\omega t)+\sin(\omega t))$ 의 최댓값을 구하자.

$\cos(\omega t)+\sin(\omega t)=s$ 라 놓으면, $-\sqrt{2}\le s\le\sqrt{2}$, $\cos(\omega t)\sin(\omega t)=\frac{s^2-1}{2}$ 이고

$-\sqrt{2}\le s\le\sqrt{2}$ 에서 $\frac{1}{2}\left(s+\frac{s^2-1}{2}\right)$ 의 최댓값은 $\frac{1+2\sqrt{2}}{4}$ 이다.

따라서 $\cos\alpha=\frac{1+2\sqrt{2}}{4}$ 이다.

13 서강대학교 수시논술(자연계열)[13]

[문제1](40%) 제시문 [가], [나], [다]를 참고하여 다음에 답하시오.

[가] 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 미분가능하고 그 도함수가 연속이면 구간 $[a,b]$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이는 $\int_a^b \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$ 이다.

[나] 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때 자연수 $k=1,2,\cdots,n$에 대하여 $x_k=a+\dfrac{k}{n}(b-a)$ 라고 하자. 이때 $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\dfrac{b-a}{n}$ 라고 하면, $n\to\infty$일 때 S_n은 항상 일정한 값으로 수렴함이 알려져 잇다. 이 극한값을 a에서 b까지의 함수 $f(x)$의 정적분이라 하고, 이것을 기호로 $\int_a^b f(t)\,dt$와 같이 나타낸다. 또한, $a\le x\le b$에 대하여

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 로 정의하면 $F(x)$는 미분가능하고 $F'(x)=f(x)$ 이다.

[다] 극한값 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 이 존재한다는 것이 알려져 있고, 이 극한값을 e로 나타낸다. e는 무리수이고 그 값은 $e=2.71828182\cdots$이다. 로그의 밑이 e일 때, $\log_e x$를 자연로그라고 하고 이것을 간단히 $\ln x$로 나타낸다. 또한 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ (단, $x>0$) 이고, 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f(x)\neq 0$일 때 로그함수 $y=\ln|f(x)|$의 도함수는 $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 이다.

논제1-1

함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\infty)$에서 미분가능하고 $f'(x)$가 $(-\infty,\infty)$에서 연속이다. (단, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq -1$ 이고, $f(1)=1$, $f'(1)=\alpha$ 이다.) 임의의 실수 s에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(s, f(s))$에서의 접선에 수직이면서 점 P를 지나는 직선이 $y=x$와 만나는 점을 (t,t)라고 하자. 이때 극한값 $\lim_{s\to 1}\dfrac{t-1}{s-1}$을 α에 관한 식으로 나타내시오.

---

13) 서강대학교 홈페이지

논제1-2

문항 【1-1】에서 임의의 실수 s에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s, f(s))$에서 점 $(1,\ 1)$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이를 $L(s)$라고 하자. 이때 함수 $L(s)$의 $s=1$에서의 미분가능성을 조사하시오.

논제1-3

함수 $g(x)=\dfrac{c\ln x}{x}$ (단, $x>1$이고 c는 양의 상수)에 대하여 함수 $h(x)=\dfrac{g(g(x))}{x^2}$는 다음 조건을 만족한다.

$\displaystyle\int_e^{e^e} h(x)dx=0$ (여기서 e는 자연로그의 밑)

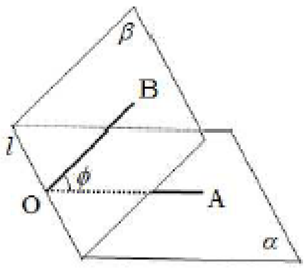
상수 c의 값을 구하고 함수 $h(x)$를 구하시오.

논제1-4

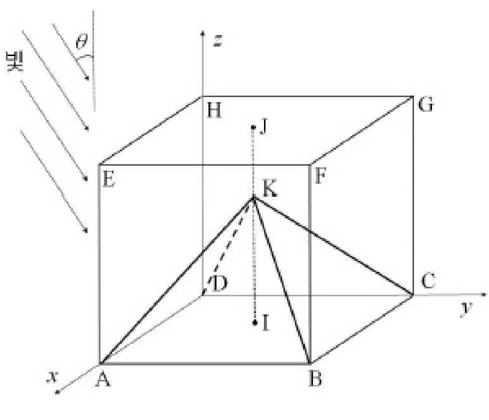
문항 【1-3】에서 구한 함수 $h(x)$에 대하여 방정식 $h(x)+\dfrac{1}{4}e^{-e-1}=0$ 은 구간 $(1,\ \infty)$에서 적어도 서로 다른 세 개의 실근을 가짐을 보이시오.

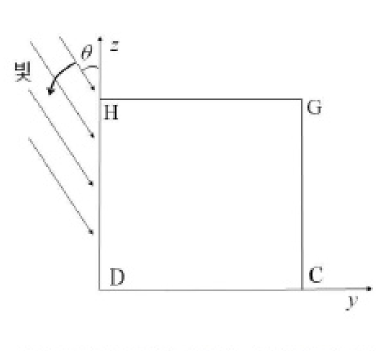
[문제2](60%) 제시문 [가], [나]를 참고하여 다음에 답하시오.

[가] 평면 위에 있는 한 직선은 그 평면을 두 부분으로 나누는데, 그 각각의 부분을 반평면이라고 한다. 직선 l을 공유하는 두 반평면 α, β로 이루어진 도형을 이면각이라 하고, 교선 l을 이면각의 변, 두 반평면 α, β를 이면각의 면이라고 한다. 오른쪽 그림에서 이면각의 변 l위의 한 점 O를 지나고 l에 수직인 반직선 OA,OB를 반평면 α, β 위에 각각 그으면 $\angle$AOB의 크기는 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이 각의 크기를 이면각의 크기라고 한다. 즉, 이면각의 크기 ϕ는 공간에서 두 평면이 이루는 각이 된다.



[나] 아래 그림과 같은 직교좌표축에 한 변의 길이가 2인 정육면체 ABCD−EFGH와 이 정육면체의 내부에 있는 사각뿔 K−ABCD를 생각하자. 이 사각뿔의 면 □ABCD는 정육면체 ABCD−EFGH의 밑면과 같고 꼭지점 K는 정육면체 밑면의 중심 I$(1,1,0)$와 윗면의 중심 J$(1,1,2)$를 잇는 선분 위에 있다. 사각뿔의 옆면인 △ADK를 포함하는 평면과 밑면인 □ABCD를 포함하는 평면이 이루는 이면각의 크기를 ϕ라 하자. 빛은 yz평면에 평행하게 xz평면으로 입사한다. 입사각 θ는 z축의 양의 방향에서 반시계 방향으로 측정한다. 그리고 빛은 서로 평행하게 도달한다고 가정한다.





x축의 양의 방향에서 바라본 yz평면과 θ의 방향

논제2-1

빛이 $\theta=\frac{\pi}{6}$로 입사할 때, 사각뿔 $\mathrm{K-ABCD}$의 꼭지점 K는 밑면 □ABCD의 중심 I에서 y축의 양의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 떨어진 점 $(1, \frac{3}{2}, 0)$에 그림자를 만든다. 이때 $\cos\phi$를 구하시오.

논제2-2

빛이 입사되는 각도 θ는 반시계 방향으로 증가하고 있으며, 그 각속도는 $\frac{2\pi}{24}h$(h는 시간)로 일정하다. 입사각이 θ(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)일 때 □ADHE가 xy평면에 만드는 그림자의 면적에서 3시간 후에 만드는 그림자의 면적을 뺀 값을 $f(\theta)$라고 하자. 이때 $\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)d\theta$를 구하시오.

(단, $0<\theta_1<\theta_2<\frac{\pi}{4}$)

좌표공간에 있는 점 Z는 $\overrightarrow{\mathrm{ZA}}+\overrightarrow{\mathrm{ZB}}+\overrightarrow{\mathrm{ZC}}+\overrightarrow{\mathrm{ZD}}+\overrightarrow{\mathrm{ZK}}=\vec{0}$ 을 만족한다. 사각뿔 $\mathrm{K-ABCD}$의 옆면들이 정삼각형일 때, 문항 【2-3】과 문항【2-4】에 답하시오.

논제2-3

$\overrightarrow{\mathrm{AZ}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 사잇각을 ρ_1, $\overrightarrow{\mathrm{AZ}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$의 사잇각을 ρ_2, $\overrightarrow{\mathrm{AZ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AK}}$의 사잇각을 ρ_3라 하자. 이때 $2\cos^2\frac{\rho_1}{2}-2\sin^2\frac{\rho_2}{2}+\cos^2\frac{\rho_3}{2}$를 구하시오.

논제2-4

사각뿔 $\mathrm{K-ABCD}$를 $\triangle\mathrm{ADZ}$를 포함하는 평면으로 자르면 윗부분에 K를 꼭지점으로 하는 사각뿔을 얻는다. 이 사각뿔 안에 들어가는 구 중에서 부피가 최대인 구의 표면적을 구하시오. (여기서 구는 사각뿔의 면들과 접할 수 있다.)

풀어보기 [문제1]

함수 $f(x)=\begin{cases}(x-2)^2e^x+k & (x\ge 0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$ 에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)|-f(x)$ 가 다음 조건을 만족하도록 하는 정수 k의 개수는?(2015 4월 전국연합 B형 4점)

(가) 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이다. (나) 함수 $g(x)$는 미분가능하지 않은 점이 2개다.

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

풀어보기 [문제2]

함수 $f(x)=\sin\pi x$ 와 이차함수 $g(x)=x(x+1)$ 에 대하여
실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$ 를

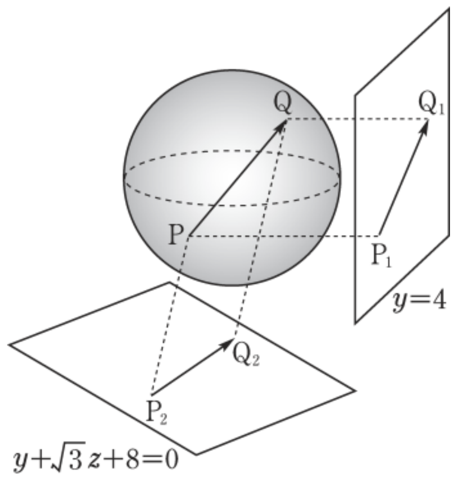
$$h(x)=\int_{g(x)}^{g(x+1)} f(t)\,dt$$

라 할 때, 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$ 에서 방정식 $h(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?(2015년 10월 전국연합 B형 4점)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

풀어보기 [문제3]

좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$에 내린 수선의발을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$라 하자. $2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2$ 의 최댓값을 구하시오. (2014년 대수능 B형(2013년 11월 시행) 4점))



예시답안

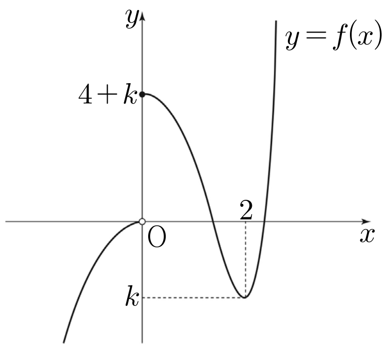
풀어보기 [문제1]

$x \geq 0$일 때

$f'(x) = x(x-2)e^x \ (x>0)$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=2$, $f(0)=4+k$

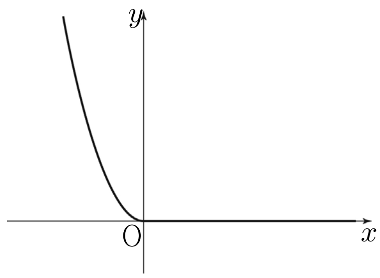
x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$4+k$	↘	k	↗

$y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(x) = \begin{cases} 0 & (f(x) \geq 0) \\ -2f(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$ 이므로 k의 값의 범위에 따라 $y=g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

ⅰ) $k \geq 0$일 때

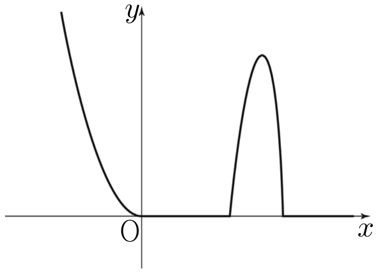


$x=0$에서 연속이고, $\lim_{x \to -0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \to -0} \frac{2x^2}{x} = 0$

$\lim_{x \to +0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \to +0} \frac{0}{x} = 0$ 이므로 $x=0$에서 미분가능하다.

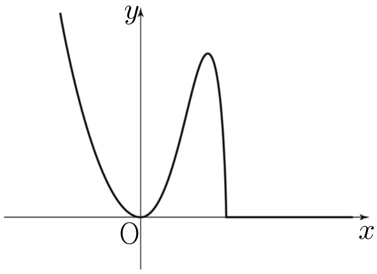
$\therefore$ 미분가능하지 않은 점의 개수는 0

ⅱ) $-4<k<0$일 때



$\therefore$ 미분가능하지 않은 점의 개수는 2

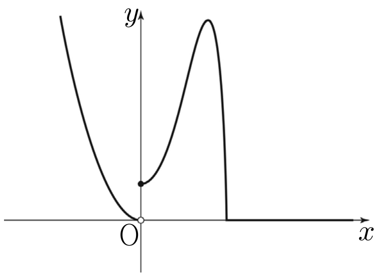
ⅲ) $k=-4$일 때



$x=0$에서 연속이고 $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$ 이므로 $x=0$에서 미분가능하다.

$\therefore$ 미분가능하지 않은 점의 개수는 1

ⅳ) $k<-4$일 때



$\therefore x=0$에서는 불연속이고, 연속이면서 미분가능하지 않은 점의 개수는 1

ⅰ)~ⅳ)에 의하여 $-4<k<0$이고 정수 k의 개수는 3

풀어보기 [문제2]

함수 $f(x)$는 주기가 2이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 실수 t와 정수 k에 대하여

$$\int_{t}^{t+2k} f(x)dx = 0,\ \int_{-t}^{t+2k} f(x)dx = 0$$

따라서 구간 $[-1, 1]$에서 방정식 $h(x)=0$, 즉 $\int_{g(x)}^{g(x+1)} f(t)\,dt = 0$을 만족시키려면

$g(x+1)-g(x)=2n$ (n은 정수)

또는 $g(x+1)+g(x)=2m$ (m은 정수)이어야 한다.

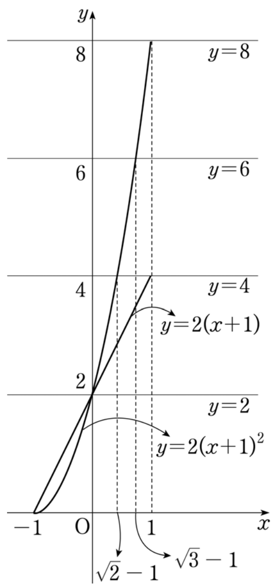
$g(x)=x(x+1)$이므로 $g(x+1)-g(x)=2(x+1)$

$g(x+1)+g(x)=2(x+1)^2$

구간 $[-1, 1]$에서 두 함수 $y=2(x+1)$, $y=2(x+1)^2$의 그래프는 그림과 같으므로

$2(x+1)=2n$(n은 정수)를 만족시키는 x의 값은 -1, 0, 1이고, $2(x+1)^2=2m$(m은 정수)를 만족시키는 x의 값은 -1, 0, $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{3}-1$, 1이다.

따라서 서로 다른 실근의 개수는 5



풀어보기 [문제3]

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(a,b,c)$라 하면 $a^2+b^2+c^2 \le 16$, 평면 $y=4$의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_1}=(0,1,0)$

평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_2}=\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$가 이루는 각을 각각 θ_1, θ_2라 하면,

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 평면 $y=4$, $y+\sqrt{3}z+8=0$이 이루는 각은 각각 $\frac{\pi}{2}-\theta_1$, $\frac{\pi}{2}-\theta_2$이므로

$|\overrightarrow{P_1Q_1}|=|\overrightarrow{PQ}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)=|\overrightarrow{PQ}|\sin\theta_1$, $|\overrightarrow{P_2Q_2}|=|\overrightarrow{PQ}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)=|\overrightarrow{PQ}|\sin\theta_2$

따라서

$2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2=|\overrightarrow{PQ}|^2(2-\sin^2\theta_1-\sin^2\theta_2) \quad =|\overrightarrow{PQ}|^2(\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2)$

이다. $|\overrightarrow{PQ}|^2\cos^2\theta_1=\left(\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2, |\overrightarrow{PQ}|^2\cos^2\theta_2=b^2$ 이므로

$$|\overrightarrow{PQ}|^2(\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2)=\left(\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2+b^2$$

$$=\frac{1}{4}(5b^2+3c^2+2\sqrt{3}bc)$$

$$=\frac{1}{4}\{6(b^2+c^2)-(b^2+2\sqrt{3}bc+3c^2)\}$$

$$=\frac{1}{4}\{6(b^2+c^2)-(b+\sqrt{3}c)^2\}\le\frac{3}{2}(b^2+c^2)$$

$$\le\frac{3}{2}(16-a^2)\le 24$$

따라서 $2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2$ 의 최댓값은 24이다.

논제1-1

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(\mathrm{s},\mathrm{f(s)})$ 에서의 접선에 수직이므로 기울기는 $-\frac{1}{f'(s)}$ 이다.

$y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(\mathrm{s},\mathrm{f(s)})$ 에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y-f(s)=-\frac{1}{f'(s)}(x-s)\cdots①$$

이다. $(t,\ t)$가 ①위의 점이므로 $t-f(s)=-\frac{1}{f'(s)}(t-s)\cdots②$

$$\left(1+\frac{1}{f'(s)}\right)t=f(s)+\frac{s}{f'(s)}$$

$\left(\frac{f'(s)+1}{f'(s)}\right)t=\frac{f(s)f'(s)+s}{f'(s)}$ 그런데, $f'(x)\neq-1$이므로

$$t=\frac{f(s)f'(s)+s}{f'(s)+1}$$

이다.

$$\lim_{s\to1}\frac{t-1}{s-1}=\lim_{s\to1}\frac{\frac{f(s)f'(s)+s}{f'(s)+1}-1}{s-1}=\lim_{s\to1}\frac{f(s)f'(s)+s-(f'(s)+1)}{(s-1)(f'(s)+1)}$$

$$=\lim_{s\to1}\frac{(f(s)-1)f'(s)+s-1}{(s-1)(f'(s)+1)}=\lim_{s\to1}\frac{(f(s)-1)f'(s)}{(s-1)(f'(s)+1)}+\lim_{s\to1}\frac{s-1}{(s-1)(f'(s)+1)}$$

이다. $f(x)$는 구간 $(-\infty,\infty)$ 에서 미분가능하고 $f'(x)$가 $(-\infty,\infty)$ 에서 연속이므로

$$\lim_{s\to1}\frac{t-1}{s-1}=\frac{f'(s)f'(s)}{f'(s)+1}+\frac{1}{(f'(s)+1)}=\frac{\alpha^2}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+1}=\frac{\alpha^2+1}{\alpha+1}$$

논제1-2

제시문 [가]에 의해 곡선의 길이는 $s<1$이면 $L(s)=\int_s^1\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt$ 이고,

$s>1$이면 $L(s)=\int_1^s\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt$이다.

$L(1)=0\cdots①$이고

$s<1$이면

$$\lim_{s\to1-}\frac{L(s)-L(1)}{s-1}=\lim_{s\to1-}\frac{1}{s-1}\int_s^1\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt$$

$$=-\lim_{s\to1-}\frac{1}{s-1}\int_1^s\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt$$

$$=-\sqrt{1+f'(1)^2}=-\sqrt{1+\alpha^2}\cdots② \qquad \left(\because \lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)\right)$$

$s>1$이면

$$\lim_{s\to1+}\frac{L(s)-L(1)}{s-1}=\lim_{s\to1+}\frac{1}{s-1}\int_1^s\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt=\sqrt{1+f'(1)^2}=\sqrt{1+\alpha^2}\cdots③$$

①, ②, ③에 의해 $L(s)$는 $s=1$에서 미분불가능하다.

논제1-3

$$g(g(x))=\frac{c\ln g(x)}{g(x)}=\frac{c\ln\frac{c\ln x}{x}}{\frac{c\ln x}{x}}=\frac{cx\ln\frac{c\ln x}{x}}{c\ln x}=\frac{x(\ln c+\ln(\ln x)-\ln x)}{\ln x}$$

$$h(x)=\frac{g(g(x))}{x^2}=\frac{\ln c+\ln(\ln x)-\ln x}{x\ln x}$$

여기서 $\ln x=t$라 두면 $\ln e=1$, $\ln e^e=e$ 이다. $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$\int_e^{e^e}h(x)dx=\int_1^e\frac{\ln c+\ln t-t}{t}dt=\left[\ln c\ln t+\frac{(\ln t)^2}{2}-t\right]_1^e=\left(\ln c+\frac{1}{2}-e\right)-(-1)$$

$$=\ln c+\frac{3}{2}-e=0$$

$\ln c=e-\frac{3}{2}$이다. 따라서 $c=e^{e-\frac{3}{2}}$이고 $h(x)=\dfrac{e-\frac{3}{2}+\ln(\ln x)-\ln x}{x\ln x}$이다.

논제1-4

$h(x)+\frac{1}{4}e^{-e-1}$는 $(1,\infty)$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1+}\left(h(x)+\frac{1}{4}e^{-e-1}\right)=-\infty\cdots①$

$$h(e)+\frac{1}{4}e^{-e-1}=\frac{e-\frac{3}{2}+\ln(\ln e)-1}{e}+\frac{1}{4}e^{-e-1}$$

$$=\frac{e-\frac{5}{2}}{e}+\frac{1}{4}e^{-e-1}$$

$$=\frac{2e-5}{e}+\frac{1}{4e^{e+1}}>0\cdots②$$

$$h(e^e)+\frac{1}{4}e^{-e-1}=\frac{e-\frac{3}{2}+\ln e-e}{ee^e}+\frac{1}{4}e^{-e-1}=\frac{-\frac{1}{2}}{e^{e+1}}+\frac{1}{4e^{e+1}}=-\frac{1}{4e^{e+1}}<0\cdots③$$

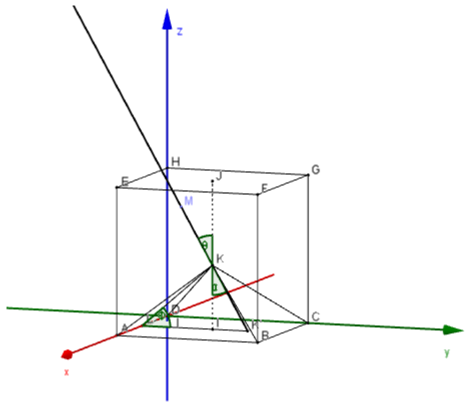
$h(x)=\dfrac{e-\frac{3}{2}+\ln(\ln x)-\ln x}{x\ln x}=\dfrac{\frac{e-\frac{3}{2}}{\ln x}+\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}-1}{x}$ 이므로 $\lim_{x\to\infty}h(x)=0$

따라서 $\lim_{x\to\infty}\left(h(x)+\frac{1}{4}e^{-e-1}\right)=\frac{1}{4}e^{-e-1}>0$ 이다.

그러므로 중간값 정리에 의하여 방정식 $h(x)+\frac{1}{4}e^{-e-1}=0$ 은 적어도 서로 다른 세 개의 실근을 갖는다.

논제2-1

밑면 □ABCD의 중심 $\mathrm{I}(1,1,0)$에서 x축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{L}(1,0,0)$, 점 K의 밑면 □ABCD으로의 그림자를 $\mathrm{K}'(1,\frac{3}{2},0)$이라 하자. $\triangle\mathrm{KIK}'$는 $\overline{\mathrm{IK}'}=\frac{1}{2}$이고 $\angle\mathrm{IKK}'=\theta=\frac{\pi}{6}$인 직각삼각형이 된다.



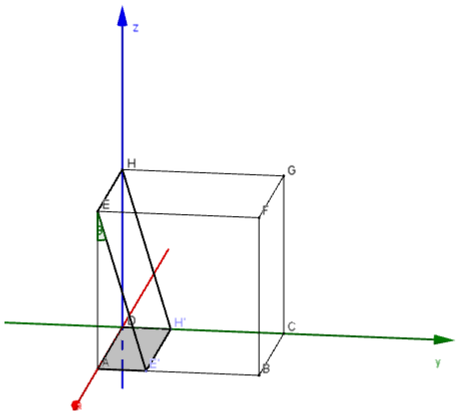
따라서 $\dfrac{\frac{1}{2}}{\overline{\mathrm{KI}}}=\tan30^{\circ}$ 가 되어 $\overline{\mathrm{KI}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이고 $\overline{\mathrm{KK'}}=1$이다.

그러므로 직각삼각형 KIL에서 $\overline{\mathrm{LI}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{KL}}=\sqrt{1^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$이다.

따라서 $\cos\phi=\dfrac{\overline{\mathrm{LI}}}{\overline{\mathrm{KL}}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$이다.

논제2-2

3시간 후 빛이 입사되는 각도 θ는 $\dfrac{2\pi}{24}\cdot 3=\dfrac{\pi}{4}$ 만큼 반시계방향으로 증가한다.



빛이 입사되는 각도 θ일 때 그림자의 면적은 $\overline{\mathrm{AD}}\,\overline{\mathrm{AE'}}=2\cdot 2\tan\theta=4\tan\theta$이다.

따라서 $f(\theta)=4\tan\theta-4\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=4\tan\theta-4\dfrac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}$

$$=4\tan\theta-4\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}$$

$$=-4\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan\theta}=-4\frac{\sec^2\theta}{1-\tan\theta}$$ 이다.

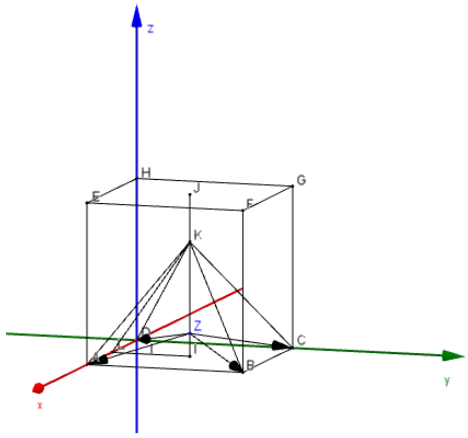
$0<\theta_1<\theta_2<\frac{\pi}{4}$ 일 때,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}-4\frac{\sec^2\theta}{1-\tan\theta}d\theta=\left[4\ln|1-\tan\theta|\right]_{\theta_1}^{\theta_2}=4\ln\left(\frac{1-\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1}\right)$$

이다.

논제2-3

$\triangle$ADK는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로 $\overline{KL}=\sqrt{3}$ 이고 $\overline{KI}=\sqrt{\overline{KL}^2-\overline{LI}^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$ 이다. 따라서 $K(1,1,\sqrt{2})$ 이다.



$Z=(a,b,c)$ 라 두면 $\overrightarrow{ZA}+\overrightarrow{ZB}+\overrightarrow{ZC}+\overrightarrow{ZD}+\overrightarrow{ZK}=\vec{0}$ 이므로

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OK}=5\overrightarrow{OZ}$

$(5,5,\sqrt{2})=5(a,b,c)$

이다. 따라서 $(a,b,c)=(1,1,\frac{\sqrt{2}}{5})$

$\overrightarrow{AZ}=(-1,1,\frac{\sqrt{2}}{5})$ 이므로 $|\overrightarrow{AZ}|=\frac{\sqrt{52}}{5}$

$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$ 이므로 $|\overrightarrow{AB}|=2$

$\overrightarrow{AD}=(-2,0,0)$ 이므로 $|\overrightarrow{AD}|=2$

$\overrightarrow{AK}=(-1,1,\sqrt{2})$ 이므로 $|\overrightarrow{AK}|=2$

$$\cos\rho_1=\frac{2}{\frac{\sqrt{52}}{5}\cdot 2}=\frac{5}{\sqrt{52}}=\frac{5\sqrt{52}}{52}=\frac{5\sqrt{13}}{26}$$

$$\cos\rho_2 = \frac{2}{\frac{\sqrt{52}}{5}\cdot 2} = \frac{5}{\sqrt{52}} = \frac{5\sqrt{52}}{52} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$$

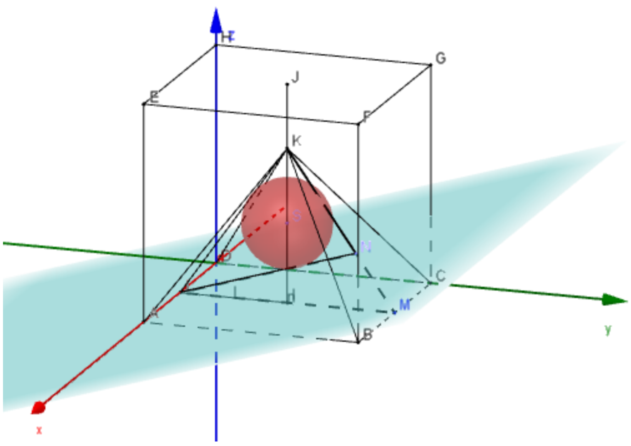
$$\cos\rho_3 = \frac{1+1+\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{52}}{5}\cdot 2} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{2\sqrt{52}}{5}} = \frac{6}{\sqrt{52}} = \frac{6\sqrt{52}}{52} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

따라서

$$\begin{aligned}
2\cos^2\frac{\rho_1}{2} - 2\sin^2\frac{\rho_2}{2} + \cos^2\frac{\rho_3}{2} &= 2\frac{1+\cos\rho_1}{2} - 2\frac{1-\cos\rho_2}{2} + \frac{1+\cos\rho_3}{2} \\
&= 1+\cos\rho_1 - (1-\cos\rho_2) + \frac{1+\cos\rho_3}{2} \\
&= \cos\rho_1 + \cos\rho_2 + \frac{1+\cos\rho_3}{2} \\
&= \frac{5\sqrt{13}}{26} + \frac{5\sqrt{13}}{26} + \frac{1+\frac{3\sqrt{13}}{13}}{2} \\
&= \frac{10\sqrt{13}}{26} + \frac{13+3\sqrt{13}}{26} \\
&= \frac{13+13\sqrt{13}}{26} = \frac{1+\sqrt{13}}{2}
\end{aligned}$$

이다.

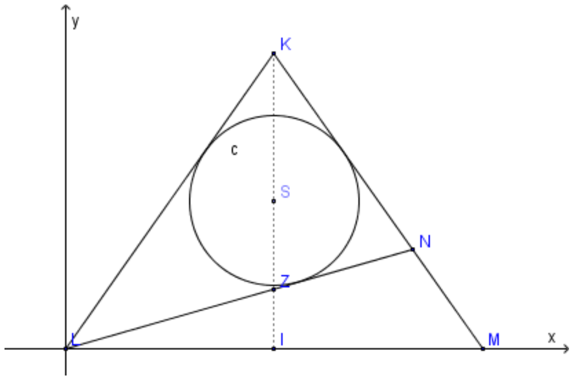
논제2-4



부피가 최대가 되게 하는 구의 중심을 S, 그 반지름의 길이를 r, $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 M, $\overline{\mathrm{LZ}}$의 연장선과 $\overline{\mathrm{KM}}$의 교점을 N이라 하자.

이 때, 평면 $x=1$로 자른 단면을 마지막 그림과 같이 좌표평면 위에 놓으면 L$(0,0)$, M$(2,0)$,

$K(1, \sqrt{2})$, $Z(1, \frac{\sqrt{2}}{5})$로 둘 수 있다.



점 N은 직선 LZ과 직선 KM의 교점이므로 직선 LZ의 방정식은 $y = \frac{\sqrt{2}}{5}x$, 직선 KM의 방정식은 $y = -\sqrt{2}(x-2)$이므로 교점은 $N\left(\frac{5}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$이다.

따라서

$$\overline{KL} = \sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{3}$$

$$\overline{LN} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$\overline{NK} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

이다.

$\alpha = \angle LKI$라 하면 $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이므로

$\triangle KLN = \frac{1}{2}\overline{KL}\,\overline{NK}\sin 2\alpha = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

또한 $\triangle KLN = \frac{1}{2}(\overline{KL} + \overline{NK} + \overline{LN})r = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)r = \frac{4\sqrt{3}}{3}r$이므로

$r = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$이 된다. 따라서 구의 표면적은 $4\pi r^2 = \frac{2\pi}{3}$이다.

14 서강대학교 수시 자연3[14)]

[문제1]

[가] 고대 그리스 시대의 수학자 아르키메데스는 도형의 면적이나 부피를 구하는데 오늘날의 적분과 유사한 방법을 사용하였다. 아르키메데스는 구분구적법을 이용하여 원, 구, 포물선의 면적과 부피를 구하는 증명을 제시하였다. 구분구적법 문제는 이후 오랫동안 별다른 진전을 보이지 못하였다가 르네상스 시기에 이르러 카발리에리가 무한의 개념을 도입하면서 진전이 있었다. 1622년 카발리에리는 곡선으로 둘러싸인 도형의 면적을 매우 폭이 좁은 직사각형들의 면적을 합한 것으로 이해할 수 있다는 착상을 내놓았다. 케플러는 포도주 통의 내측 부피를 구하기 위해 포도주 통을 이루는 입체도형을 얇은 막들의 집합으로 파악하여 합산하였다. 이와 같은 아이디어의 축적은 미적분학으로 발전하는데, 데카르트가 제시한 좌표 평면과 해석기하학의 출현은 이에 중요한 밑거름이 되었다. 뉴턴과 라이프니츠는 각자 독자적으로 미적분학을 수립하였으며 적분은 결국 미분의 역산으로 부정적분을 구하는 것과 같다는 사실을 발견하였다. 이를 미적분학의 기본정리라고 한다. 또한 미적분학의 기본정리로부터 정적분의 기본정리를 쉽게 이끌어 낼 수 있다. 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속일 때 이의 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$ 는 다음의 극한으로 정의된다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n}$$

[나] 코사인, 사인 함수의 덧셈정리는 다음의 행렬에 관한 식으로 요약될 수 있다.

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

이로부터 탄젠트 함수의 덧셈정리, 그리고 코사인, 사인, 탄젠트 함수의 배각의 공식 반각의 공식 등을 쉽게 이끌어 낼 수 있다.

[다] (중간값의 정리) 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$ 이면, $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k 에 대하여 $f(c)=k$ 를 만족하는 실수 c 가 열린 구간 (a,b) 에 적어도 하나 존재한다.

14) 서강대학교 입학처

3-1

제시문 [나]를 참고하여 $\sum_{k=0}^{n-1}\cos k\theta = \frac{1}{2}(1-\cos n\theta)+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin n\theta$ 임을 보이시오. 여기서 n은 자연수이고 θ는 $0<\theta<2\pi$인 실수이다.

3-2

문항 [3-1]을 참고하여 다음 등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이시오.

$(1-\cos\theta)(\cos(n+1)\theta+\cos n\theta)=\sin\theta(\sin(n+1)\theta-\sin n\theta)$ (단, θ는 임의의 실수)

3-3

제시문 [가]를 참고하여 $f(x)=\cos ax$ 의 정적분 $A(a)=\int_0^1 \cos ax\,dx$ 의 값을 정적분의 정의를 사용하여 구하시오. 여기서 a는 양의 실수이다.

3-4

제시문 [나], [다]를 참고하여 문항 [1-3]에서 구한 $A(a)$ (단, $\pi<a<\frac{3\pi}{2}$)는 열린 구간 $\left(\frac{12\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}\right)$에서 단 하나의 극소점을 가짐을 보이시오.

(단, $\tan\frac{\pi}{9} \fallingdotseq 0.364$, $\sqrt{3} \fallingdotseq 1.732$, $\pi \fallingdotseq 3.142$ 이다.)

[문제2]

[가] 자연수 n에 대하여 다항식 $(x+y)^n$을 전개하면 다음과 같다.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k y^{n-k}$$

이것을 다항식 $(x+y)^n$에 대한 이항정리라고 한다. 여기서 ${}_n\mathrm{C}_k$는 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 서로 다른 k개를 선택하는 경우의 수를 나타낸다. 이항정리를 이용하면 이항계수 사이에 성립하는 흥미로운 등식들을 이끌어 낼 수 있다. 예를 들어 위의 등식에서 $x=1, y=1$을 대입하면 $2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k$가 성립함을 알 수 있다. 또한 $y=1$을 대입하면 $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k$을 얻을 수 있으며 이 등식의 양변을 x에 관해 미분하거나 적분한 뒤 $x=1$을 대입하면 다른 등식들도 이끌어 낼 수 있다. y 대신에 상수가 아닌 변수를 대입할 수도 있는데 $y=1-x$를 대입하면 $1 = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k}$을 얻고 이로부터 여러 등식을 유도할 수 있다.

[나] 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합을 중복조합이라고 하며, 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수를 ${}_n\mathrm{H}_r$이라고 표기한다. 그러면 등식 ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$이 성립한다. 예를 들어 방정식 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ (단, n과 r은 자연수)의 음이 아닌 정수해의 개수는 ${}_n\mathrm{H}_r$이다. 또한 두 집합 $X = \{1, 2, \cdots, r\}$, $Y = \{1, 2, \cdots, n\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$ 중에서

$x_1, x_2 \in X$에 대하여 $x < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$

를 만족시키는 함수 f의 개수도 ${}_n\mathrm{H}_r$과 같다.

4-1

1보다 큰 자연수 n에 대하여 a_n은 곡선 $y=\sqrt{x}$ $(x \ge 0)$, 직선 $x=n^2$, 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역(단, 경계 포함)에 있는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 나타낸다. a_n을 n에 관한 식으로 나타내시오.

4-2

자연수 n에 대하여

$$A(n)=\left(6(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k \cdot {}_n\mathrm{C}_k}{k(k+1)}+5n+17\right)\cdot 2^{-n}$$

라고 하자. (여기서 $a_1=1$이고 $a_n(n \ge 2)$은 문항 [2-1]에서 주어진다.) 제시문 [가]를 참고하여 $A(n)$을 n에 관한 식으로 나타내시오.

4-3

l이 어떤 자연수라고 하자. l보다 큰 자연수 n에 대하여

$a_n=\sum_{k=1}^{n-l}(-1)^{n-k-l}{}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_{n-k}\mathrm{C}_l$ 이라고 할 때 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{a_{2n}}{a_n}$을 구하시오.

(제시문 [가] 참고)

4-4

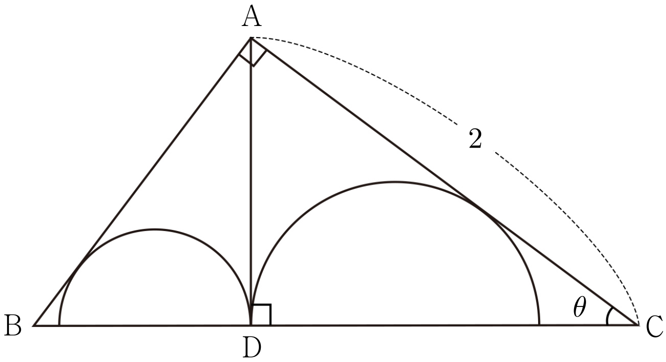
기차역인 A역과 B역 사이에는 총 r개의 역(단, A역과 B역은 제외)이 있다. A역에서 출발한 기차가 B역에 도착할 동안 이 r개의 역 중에서 n개의 역에만 정차한다고 한다. (여기서 n은 1보다 크고 r은 $\frac{n(n+1)}{2}$보다 큰 자연수이며, $(n+1)$번째 정차역은 B역이다.) 자연수 $i=1,2,\cdots,n-1$에 대하여 이 기차가 i번째 정차한 역과 $(i+1)$번째 정차한 역 사이에는 적어도 i개의 역(단, i번째 정차한 역과 $(i+1)$번째 정차한 역은 제외)이 있다고 한다. 가능한 총 운행 방법의 수를 ${}_s\mathrm{H}_t$ 형태로 나타낼 때 s와 t를 구하시오. (제시문 [나] 참고)

풀어보기 [문제1]

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ 의 값을 구하시오. (2015 7월 전국연합)

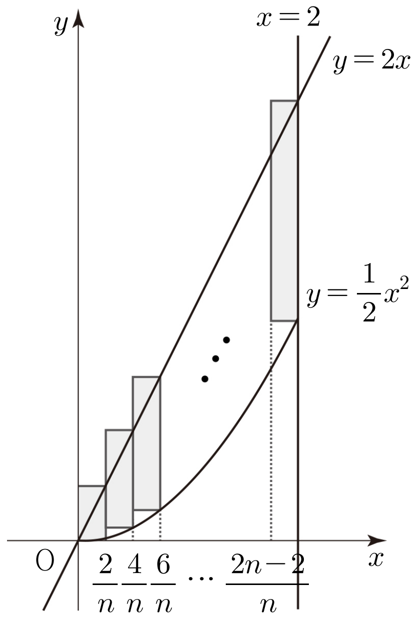
풀어보기 [문제2]

그림과 같이 선분 AC의 길이가 2이고 $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형 ABC에 대하여 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고 $\angle ACD = \theta$라 하자.
삼각형 ABD에서 변 BD 위에 지름이 놓여 있고 변 AB에 접하면서 점 D를 지나는 반원의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 ADC에서 변 DC위에 지름이 놓여 있고 변 AC에 접하면서 점 D를 지나는 반원의 넓이를 $T(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{S(\theta)}{\theta^2 \times T(\theta)} = \alpha$ 일 때, 60α의 값을 구하시오.(단, 두 반원의 호는 점 D에서 만난다.) (2015 11월 전국연합)



풀어보기 [문제3]

다음은 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ $(0 \leq x \leq 2)$과 두 직선 $y=2x$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 과정이다.



두 함수 $f(x)$와 $g(x)$를 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $g(x)=2x$라 하자.

그림과 같이 닫힌 구간 $[0, 2]$를 n등분하여 구간

$$\left[0, \frac{2}{n}\right], \left[\frac{2}{n}, \frac{4}{n}\right], \left[\frac{4}{n}, \frac{6}{n}\right], \cdots, \left[\frac{2n-2}{n}, 2\right]$$

를 얻는다.

각 구간에서 가로의 길이가 $\frac{2}{n}$이고 구간의 오른쪽 끝점에서의

두 함숫값의 차를 세로의 길이로 하는 직사각형을 만든다.

왼쪽에서 k번째 직사각형의 넓이를 S_k라 하면

$$S_k=\frac{8k}{n^2}-\boxed{\text{(가)}}\times k^2$$

직사각형 n개의 넓이의 합은

$$\sum_{k=1}^{n} S_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8k}{n^2}-\boxed{\text{(가)}}\times k^2\right)=\frac{4(n+1)}{n}-\boxed{\text{(나)}}$$

구하는 도형의 넓이는 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k=\frac{8}{3}$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $p(n)$, $q(n)$이라 할 때, $p(2) \times q(3)$의 값은?

(2015 11월 전국연합)

① $\frac{28}{27}$ ② $\frac{31}{27}$ ③ $\frac{34}{27}$ ④ $\frac{37}{27}$ ⑤ $\frac{40}{27}$

문제1

자연수 n에 대하여 $f(n)=\sum_{r=0}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_{r}\left(\frac{1}{9}\right)^{r}$ 일 때, $\log f(n)>1$을 만족시키는 n의 최솟값은? (단, $\log 3=0.4771$로 계산한다.) (2016 3월 전국연합)

① 18 ② 22 ③ 26 ④ 30 ⑤ 34

예시답안

풀어보기 [문제1]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=2$$

풀어보기 [문제2]

삼각형 ABD 의 내부의 반원의 중심을 O_1, 반지름의 길이를 r라 하고, 삼각형 ADC 의 내부의 반원의 중심을 O_2, 반지름의 길이를 R라 하자.
두 반원이 두 선분 AB, AC와 접하는 점을 각각 H_1, H_2라 하자.
삼각형 ADC 에서
$\overline{\mathrm{AH_2}}=\overline{\mathrm{AD}}=2\sin\theta$, $\overline{\mathrm{CH_2}}=2(1-\sin\theta)$ 이므로 $R=2\tan\theta(1-\sin\theta)$

$\therefore\ T(\theta)=2\pi(1-\sin\theta)^2\tan^2\theta$

삼각형 ABD 에서
$\overline{\mathrm{AH_1}}=\overline{\mathrm{AD}}=2\sin\theta$, $\overline{\mathrm{AB}}=2\tan\theta$, $\overline{\mathrm{BH_1}}=2(\tan\theta-\sin\theta)$

$\angle\mathrm{BO_1H_1}=\theta$ 이므로 $r=\dfrac{2(\tan\theta-\sin\theta)}{\tan\theta}=2(1-\cos\theta)$

$\therefore\ S(\theta)=2\pi(1-\cos\theta)^2$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2\times T(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\pi(1-\cos\theta)^2}{\theta^2\times 2\pi(1-\sin\theta)^2\tan^2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{\theta^2(1-\sin\theta)^2\tan^2\theta(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{\sin^4\theta}{\theta^4}\times\frac{\theta^2}{\tan^2\theta}\times\frac{1}{(1-\sin\theta)^2(1+\cos\theta)^2}\right\}$$

$$=1\times 1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

따라서 $60a=15$

풀어보기 [문제3]

구간 $[0,2]$를 n등분하면 k번째 구간의 오른쪽 끝점의 x좌표는 $\frac{2k}{n}$

왼쪽에서 k번째 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{2}{n}$,

세로의 길이는 $g\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k}{n}\right)=2\left(\frac{2k}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{2k}{n}\right)^2$

$S_k=\frac{2}{n}\left(\frac{4k}{n}-\frac{2k^2}{n^2}\right)=\frac{8k}{n^2}-\boxed{\frac{4}{n^3}}\ k^2$

$\therefore\ p(n)=\frac{4}{n^3}$

$$\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8k}{n^2}-\frac{4k^2}{n^3}\right)$$

$$=\frac{8}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{4}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{4(n+1)}{n}-\boxed{\frac{2(n+1)(2n+1)}{3n^2}}$$

$\therefore\ q(n)=\frac{2(n+1)(2n+1)}{3n^2}$

따라서 $p(2)\times q(3)=\frac{4}{2^3}\times\frac{2\times4\times7}{3\times3^2}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{56}{27}=\frac{28}{27}$$

풀어보기 [문제4]

$$f(n)={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{9}\right)^1+{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{9}\right)^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

$$=\left(1+\frac{1}{9}\right)^n=\left(\frac{10}{9}\right)^n$$

$$\log f(n)=\log\left(\frac{10}{9}\right)^n$$

$$=n(\log10-\log9)$$

$$=n(1-2\log3)$$

$$=n(1-2\times0.4771)$$

$$=0.0458n>1$$

$n > \dfrac{1}{0.0458} = 21.8\cdots$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 22이다.

3-1

(i) $n=1$ 일 때

(좌변) $=1$

(우변) $= \dfrac{1}{2}(1-\cos\theta)+\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin\theta = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}(1+\cos\theta)=1$

$\therefore$ $n=1$ 일 때 성립한다.

(ii) $n=i$ 일 때 성립한다고 가정하면 $n=i+1$ 일 때

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{i}\cos k\theta &= \sum_{k=0}^{i-1}\cos k\theta+\cos i\theta \\ &= \frac{1}{2}(1-\cos i\theta)+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin i\theta+\cos i\theta \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\cos\theta}((1-\cos\theta)(1-\cos i\theta)+\sin\theta\sin i\theta+2(1-\cos\theta)\cos i\theta) \\ &= \frac{1}{2}(1-\cos(i+1)\theta)+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin(i+1)\theta\end{aligned}$$

$\therefore$ $n=i+1$ 일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos k\theta = \frac{1}{2}(1-\cos n\theta)+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin n\theta$$

가 성립한다.

대학발표 예시답안

A을 2×2 행렬 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 라 하자. 제시문 [나]에 따르면 , 모든 자연수 n에 대하여

$$A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$

이다.

그러므로 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos k\theta$는 행렬 $S=I+A+A^2+\cdots+A^{n-1}$ 의 (1,1)성분과 같다. 한편,

$$(I-A)S=S-AS=(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1})-(A+A^2+\cdots+A^n)=I-A^n$$

이고, $0<\theta<2\pi$ 이므로 $I-A=\begin{pmatrix}1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}$ 는 역행렬

$$(I-A)^{-1}=\frac{1}{2-2\cos\theta}\begin{pmatrix}1-\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}$$

를 갖는다.
따라서

$$S=(I-A)^{-1}(I-A^n)=\frac{1}{2-2\cos\theta}\begin{pmatrix}1-\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\cos n\theta & \sin n\theta\\ -\sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}$$

이므로 $(1,1)$ 성분으로부터

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos k\theta=\frac{1}{2-2\cos\theta}((1-\cos\theta)(1-\cos n\theta+\sin\theta\sin n\theta)$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos n\theta)+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin n\theta$$

를 얻는다.

3-2

$S(n)=\sum_{k=0}^{n-1}\cos k\theta=\frac{1}{2}(1-\cos n\theta)+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin n\theta$ 라 하면

$$S(n+2)-S(n)$$

$$=\cos(n+1)\theta+\cos n\theta$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos(n+2)\theta)+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin(n+2)\theta-\frac{1}{2}(1-\cos n\theta)-\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin n\theta$$

$$=-\frac{1}{2}(\cos(n+2)\theta-\cos n\theta)+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}(\sin(n+2)\theta-\sin n\theta)$$

$$=-\frac{1}{2}(-2\sin(n+1)\theta\cdot\sin n\theta)+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}(2\cos(n+1)\theta\cdot\sin\theta)$$

$$\sin(n+1)\theta\cdot\sin\theta+\frac{\cos(n+1)\theta\cdot\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{1-\cos\theta}(\sin(n+1)\theta\cdot\sin\theta-\sin(n+1)\theta\cdot\sin\theta\cos\theta+\cos(n+1)\theta\cdot\sin^2\theta)$$

$$=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}(\sin(n+1)\theta-\sin(n+1)\theta\cdot\cos\theta+\cos(n+1)\theta\cdot\sin\theta)$$

$$=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}(\sin(n+1)\theta-\sin n\theta)$$

따라서 $(1-\cos\theta)(\cos(n+1)\theta+\cos n\theta)=\sin\theta(\sin(n+1)\theta-\sin n\theta)$ 가 성립한다.

(별해)

$$\begin{aligned}(1-\cos\theta)(\cos(n+1)\theta+\cos n\theta)&=(1-\cos\theta)(\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta+\cos n\theta)\\&=(1-\cos\theta)\{\cos n\theta(1+\cos\theta)-\sin n\theta\sin\theta\}\\&=\cos n\theta\sin^2\theta-\sin n\theta\sin\theta(1-\cos\theta)\\&=\sin\theta(\sin(n+1)\theta-\sin n\theta)\end{aligned}$$

이므로 $(1-\cos\theta)(\cos(n+1)\theta+\cos n\theta)=\sin\theta(\sin(n+1)\theta-\sin n\theta)$ 가 성립한다.

대학발표 예시답안

자연수 n에 대하여 $S_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\cos k\theta$ 라 하면, $0<\theta<2\pi$ 인 θ에 대하여 문항 [3-1]로부터

$\cos n\theta = S_n - S_{n-1}$

$$=\left[\frac{1}{2}\{1-\cos(n+1)\theta\}+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin(n+1)\theta\right]-\left[\frac{1}{2}(1-\cos n\theta)+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin n\theta\right]$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos n\theta-\cos(n+1)\theta\}+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\{\sin(n+1)\theta-\sin n\theta\}$$

이다. 이를 정리하면

$$\frac{1}{2}\{(\cos(n+1)\theta+\cos n\theta\}=\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\{\sin(n+1)\theta-\sin n\theta\}$$

이므로

$(*)$ $(1-\cos\theta)(\cos(n+1)\theta+\cos n\theta)=\sin\theta(\sin(n+1)\theta-\sin n\theta)$ 가 성립한다.

또한 $(*)$는 $\theta=0$ 인 경우에도 명백히 성립하고, 또한 사인 코사인 함수의 주기가 2π 이므로 $(*)$는 모든 실수에 대하여 성립한다.

3-3

$$A(a)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{ak}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{ak}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}(1-\cos a)+\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{a}{n}}{1-\cos\frac{a}{n}}\sin a\right)\quad\text{([3-1]에 의해)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\cos a}{2n}+\frac{1}{2}\sin a\frac{\sin\frac{a}{n}}{n(1-\cos\frac{a}{n})}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\cos a}{2n}+\frac{\sin a}{2}\frac{\sin\frac{a}{n}(1+\cos\frac{a}{n})}{n\sin^2\frac{a}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\cos a}{2n}+\frac{\sin a}{2}\frac{\frac{a}{n}(1+\cos\frac{a}{n})}{a\sin\frac{a}{n}}\right)$$

$$=0+\frac{\sin a}{2}\frac{2}{a}$$

$$= \frac{\sin a}{a}$$

이므로 $A(a) = \dfrac{\sin a}{a}$ 이다.

대학발표 예시답안

양의 실수 a에 대하여, 정적분의 정의로부터 $A(a) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\cos\left(\dfrac{ak}{n}\right)$ 이므로

$n > \dfrac{a}{2\pi}$ 인 자연수 n에 대하여 문항 [3-1]의 식에 $\theta = \dfrac{a}{n}$ 를 대입하면

$$(**)\ \sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{ak}{n}\right) = \frac{1-\cos a}{2} + \frac{\sin a}{2}\frac{\sin\frac{a}{n}}{1-\cos\frac{a}{n}}$$

를 얻는다.

따라서

$$A(a) = \frac{1-\cos a}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \frac{\sin a}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sin\frac{a}{n}}{1-\cos\frac{a}{n}}$$

$$= \frac{\sin a}{2}\lim_{n\to 0+}\frac{\frac{x}{a}\sin x}{1-\cos x}$$

$$= \frac{\sin a}{2a}\lim_{n\to 0+}\frac{x\sin x}{1-\cos x}\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{\sin a}{2a}\lim_{n\to 0+}\frac{1+\cos x}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$= \frac{\sin a}{2a}\cdot\frac{1+1}{1}$$

$$= \frac{\sin a}{a}$$

이다.

3-4

대학발표 예시답안

$A(a)=\dfrac{\sin a}{a}$ (a는 양의 실수)이므로

$$A'(a)=\frac{a\cos a-\sin a}{a^2}=\frac{\cos a(a-\tan a)}{a^2}=0$$

는 $a=\tan a\,(\pi<a<\frac{3\pi}{2})$ 일 때만 가능하다. 이제 $h(a)=\tan a-a\,(\pi<a<\frac{3\pi}{2})$ 라 하면 $A'(a)$와 $h(a)$의 부호는 항상 같다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

을 이용하면,

$$\tan\frac{4\pi}{9}=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{9}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{9}}{1-\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{9}}=\frac{\sqrt{3}+\tan\frac{\pi}{9}}{1-\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{9}}\fallingdotseq\frac{1.732+0.364}{1-1.732\times0.364}>5$$

이다. 이제 h는 닫힌 구간 $[\frac{12\pi}{9},\frac{13\pi}{9}]$에서 연속이고,

$$h\left(\frac{13\pi}{9}\right)=\tan\frac{4\pi}{9}-\frac{13\pi}{9}>5-\frac{13\times3.2}{9}>0\,,$$

$$h\left(\frac{12\pi}{9}\right)=\tan\frac{\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}>\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}<0$$

이므로 중간값 정리에 의하여 열린구간 $\left(\frac{12\pi}{9},\frac{13\pi}{9}\right)$에서 $h(a)=0$ 인 $a=\alpha$ 를 갖는다.

따라서 이 구간에 $A'(a)=0$ 인 $a=\alpha$ 가 존재한다.

그런데, 열린 구간 $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$에서 $h'(a)=\sec^2 a-1=\tan^2 a>0$ 이므로 $h(a)$는 증가함수이고,

$h(\alpha)=0$ 이므로 $\pi<a<\alpha$에서 음의 값, $\alpha<a<\frac{3\pi}{2}$에서 양의 값을 가진다.

그러므로 $\frac{13\pi}{9}<a<\alpha$에서 $A'(a)<0$ 이고, $\alpha<a<\frac{13\pi}{9}$ 에서 $A'(a)>0$ 이다.

따라서 $a=\alpha$ 는 열린구간 $\left(\frac{12\pi}{9},\frac{13\pi}{9}\right)$에서 $A(a)$는 단 하나의 극소점을 갖는다.

4-1

각각의 정수 y에 대해 주어진 경계에 있는 x좌표가 정수인 점을 구하면

$y=1$ 일 때 : $x=1,2,\cdots,n^2$

$y=2$ 일 때 : $x=2^2,2^2+1,\cdots,n^2$

$y=3$ 일 때 : $x=3^2, 3^2+1, \cdots, n^2$

이와 같은 방법으로

$y=k$ 일 때 : $x=k^2, k^2+1, \cdots, n^2$ (개수 : n^2-k^2+1)이다.

따라서, $a_n=\sum_{k=1}^{n}(n^2-k^2+1)=\dfrac{4n^3-3n^2+5n}{6}$ 이다.

대학발표 예시답안

$a_1=1$ 은 분명하다. 이제 n을 2 이상의 자연수라 하자. 자연수 $i=1,2,\cdots,n-1$ 에 대하여 자연수 k가 $[\sqrt{k}]=i$ 이기 위한 필요충분조건은 $i^2 \le k<(i+1)^2$ 이다. 그러므로 주어진 영역에 속하면서 x의 좌표가 k(단, $i^2 \le k<(i+1)^2$)인 정수점의 개수는 i 개이며 $i^2 \le k<(i+1)^2$를 만족하는 자연수 k의 개수는 $(2i+1)$ 이므로

$$a_n=\sum_{i=1}^{n-1}(2i+1)i+n=\frac{4n^3-3n^2+5n}{6} \quad (n\text{은 2 이상의 자연수})$$

이다.

$a_1=1$ 이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\dfrac{4n^3-3n^2+5n}{6}$ 이다.

4-2

대학발표 예시답안

문항 [4-1]에 의하여

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k \cdot {}_n\mathrm{C}_k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^2-3k+5}{6(k+1)}\,{}_n\mathrm{C}_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{4k(k+1)-7(k+1)+12}{6(k+1)}\,{}_n\mathrm{C}_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{3}-\frac{7}{6}+\frac{2}{k+1}\right){}_n\mathrm{C}_k$$
$$=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}k\cdot {}_n\mathrm{C}_k-\frac{7}{6}\sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k+2\sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_{k+1}$$

이다. 제시문 [가]에 의해 등식 $2^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k$ 이 성립하므로

등식 (i) : $\sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k=2^n-1$

을 얻는다. 또한 전개식 $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k$ 의 양변을 x에 대하여 미분한 후 $x=1$을 대입하면

등식 (ii) : $n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_n\mathrm{C}_k$

을 이끌어 낼 수 있다. 한편, 등식 $\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k dx$

로부터 $\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$ 을 얻고, 이로부터

등식 (iii) : $\sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} - 1 = \frac{2^{n+1}-n-2}{n+1}$

를 얻는다. 등식 (i), (ii), (iiii)을 (*)에 대입하면

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \cdot {}_n\mathrm{C}_k}{k(k+1)} = \frac{2n \cdot 2^{n-1}}{3} - \frac{7(2^n-1)}{6} + \frac{2(2^{n+1}-n-2)}{n+1}$$
$$= \frac{(2n^2-5n+17)2^n - 5n - 17}{6(n+1)}$$

이므로

$$A(n) = \left(6(n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \cdot {}_n\mathrm{C}_k}{k(k+1)} + 5n + 17\right) \cdot 2^{-n} = 2n^2 - 5n + 17$$

이다.

4-3

대학발표 예시답안

등식

$${}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_{n-k}\mathrm{C}_l = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} = \frac{n!}{l!(n-l)!} \cdot \frac{(n-l)!}{l!(n-l-k)!} = {}_n\mathrm{C}_l \cdot {}_{n-l}\mathrm{C}_k$$

가 성립하므로

(**) $\quad a_n = \sum_{k=1}^{n-l} (-1)^{n-k-l} {}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_{n-k}\mathrm{C}_l = {}_n\mathrm{C}_l \sum_{k=1}^{n-l} (-1)^{n-l-k} {}_{n-l}\mathrm{C}_k$

이다. 한편, 다항식 $(x+y)^{n-l}$ 의 이항정리

$$(x+y)^{n-l} = \sum_{k=0}^{n-l} {}_{n-l}\mathrm{C}_k \, x^k y^{n-l-k}$$

에 $x=1, y=-1$ 을 대입하면 $\sum_{k=0}^{n-l} (-1)^{n-l-k} {}_{n-l}\mathrm{C}_k = 0$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{n-l} (-1)^{n-l-k} {}_{n-l}\mathrm{C}_k = (-1)^{n-l+1}$$

임을 알 수 있다. 이 결과를 (**)에 대입하면

$$a_n = (-1)^{n-l+1} {}_n\mathrm{C}_l$$

이 된다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{a_{2n}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_l}{{}_{n}\mathrm{C}_l}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-(l-1))}{n(n-1)\cdots(n-(l-1))}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(2-\frac{l-1}{n}\right)}{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{l-1}{n}\right)}=2^l$$

이다.

4-4

대학발표 예시답안

A 역과 B 역 사이에 있는 r개의 역(A, B 역 제외)을 A 역에서 B 역 방향으로 순서대로 1번역, 2번역, $\cdots$, r번역이라고 부르자. 편의상 B 역은 $(r+1)$번역이라 하자. 이제 x_1을 첫 번째 도착역의 번호, $x_i(i=2,3,\cdots,n,n+1)$ 을 i번째 도착한 역의 번호에서 $(i-1)$번째 도착한 역의 번호를 뺀 값이라 하자. 여기서 $(n+1)$번째 도착역은 B 역이라고 하자. 문제의 가정에 의해 자연수 $i=2,3,\cdots,n$ 에 대해 $(i-1)$번째 도착한 역과 i번째 도착한 역 사이에는 적어도 $(i-1)$개의 역이 있으므로 $x_i\ge i$임을 알 수 있다. 그러면

$x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}=r+1$ (단, $x_i\ge i\,(1\le i\le n)$이고 $x_{n+1}\ge 1$)

이제 $x_i=y_i+i\,(1\le i\le n)$, $x_{n+1}=y_{n+1}+1$ 라고 두면 위 식은

$$y_1+y_2+\cdots+y_n+y_{n+1}=r+1-\left(\frac{n(n+1)}{2}+1\right)=r-\frac{n(n+1)}{2}\text{(단, } y_i\ge 0\,(1\le i\le n+1))$$

이 된다. 그러므로 제시문 [나]에 의해 구하는 답은 ${}_{n+1}H_{r-\frac{n(n+1)}{2}}$ 이다. 한편

$$ {}_{n+1}\mathrm{H}_{r-\frac{n(n+1)}{2}}={}_{r-\frac{n(n+1)}{2}+n}\mathrm{C}_{r-\frac{n(n+1)}{2}}={}_{r-\frac{n(n+1)}{2}+n}\mathrm{C}_n={}_{r-\frac{n(n+1)}{2}+1}\mathrm{H}_n$$

이므로 ${}_{r-\frac{n(n+1)}{2}+1}\mathrm{H}_n$ 역시 답이 된다.

15 서울과학기술대학교 수시(오전)[15]

1. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (34점)

(가) 원금 100만 원에 대하여 이자가 연이율 10%로 복리지급 될 때, 이자를 1년에 몇 번 계산하는지에 따라 1년 후 원리합계는 다음과 같다.

연복리라면 1년에 한 번 이자를 계산하므로 $100\times(1+0.1)=110$ 만원

반년복리라면 6개월마다 이율 5%로 이자를 계산하므로 $100\times\left(1+\frac{0.1}{2}\right)^2=110.25$ 만 원

월복리라면 매월 이율 $\frac{10}{12}$% 로 이자를 계산하므로 $100\times\left(1+\frac{0.1}{12}\right)^2=110.47$ 만 원

일반적으로 연이율이 $r\ (r>0)$ 이고 연간 m 번 복리 계산하는 방식으로 A 원을 t 년간 투자한다면 원리합계는 다음과 같다.

$$A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} \quad \cdots ①$$

(나) 문제 풀이 시

$$\ln 1.11=0.1\ ,\ \ln 1.22=0.2\ ,\ \ln 2.72=1\ ,\ \ln 3.00=1.1\ ,\ \ln 7.39=2$$

로 계산하기로 한다.

논제1-1

매순간 이자를 계산하는 방식을 연속복리라 한다. 이 방식으로 이자를 계산하는 경우 원리합계는 식 ①에서 m 을 무한대로 보내는 극한을 계산하여 구할 수 있다. A 원을 연속복리 연이율 $r\ (r>0)$ 로 t 년간 투자할 때, 원리합계를 구하시오. (5점)

논제1-2

연속복리 연이율이 10% 인 3년 만기 금융상품의 연복리 연이율은 몇 %인지 구하시오. (단, 제시문을 이용하여 자연수로 답하시오.) (10점)

논제1-3

두 금융상품 S 와 T 는 모두 9년 만기 상품으로 매년 초 1회 100만 원씩 납입하는 방식이다. 상품 S 는 연속복리 연이율이 10%이며 만기 시 수수료가 없고, 상품 T 는 연속복리 연이율이 20%이며 만기 시 수수료가 있다. 상품 T 의 만기 시 수수료가 이익금의 50%라면, 어느 금융상품에 가입하는 것이 더 유리한지 답하시오. (19점)

15) 서울과기대 홈페이지

2. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (33점)

(가) 함수의 증감

함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a, b) 에서 미분가능 할 때,

(a, b) 에서 $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 (a, b) 에서 증가한다.

(a, b) 에서 $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 (a, b) 에서 감소한다.

(나) 함수의 극대, 극소

함수 $f(x)$ 가 미분가능하고, $f'(a) = 0$ 일 때, $x = a$ 의 좌우에서 $f'(a)$ 의 부호가

양에서 음으로 바뀌면 함숫값 $f(a)$ 는 극댓값이다.

음에서 양으로 바뀌면 함숫값 $f(a)$ 는 극솟값이다.

논제2-1

함수 $f(x) = x - e\ln x$ $(x > 0)$ 의 최솟값을 구하시오. (6점)

논제2-2

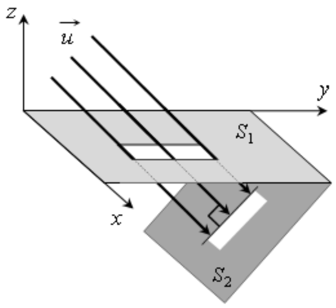
[논제2-1]의 결과를 이용하여 e^{π} 과 π^{e} 의 대소 관계를 밝히시오. (9점)

논제2-3

$e < a < b$ 일 때, [논제2-1], [논제2-2]를 참조하여 적당한 함수 $g(x)$ 를 만들고 이를 이용하여 a^{b} 과 b^{a} 의 대소 관계를 밝히시오. (18점)

3. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (33점)

(가) 공간에서 빛은 벡터 $\vec{u}=(0,\ 2\sqrt{3},\ -2)$ 의 방향으로 직진하고 있으며, 밝기는 $\vec{u}$ 의 크기이다. 다음 그림과 같이 xy 평면에 차단막 S_1 이 있고, S_1 의 밑에 $\vec{u}$ 와 수직인 스크린 S_2 가 있다. S_1 에 y 축과 평행한 슬릿(틈) A_1 이 있다. A_1 은 폭이 w 이고 길이가 l_1 인 직사각형이다. A_1 을 통과한 빛 때문에 S_2 에 폭이 w 이고 길이가 l_2 인 밝은 직사각형 A_2 가 생긴다. (단, 빛의 회절, 간섭 효과, 차단막의 두께는 무시한다.)



(나) 임의의 평면도형 R 에 빛이 수직으로 입사할 때 R 에 도달하는 빛의 양은 도형 R 의 넓이와 빛의 밝기를 곱하여 구할 수 있다.

논제3-1

S_1 의 단위법선벡터 $\vec{n}$ 을 구하고, $\vec{u}$ 와 $\vec{n}$ 이 이루는 각의 크기를 구하시오. (8점)

논제3-2

슬릿 A_1 을 통과하는 빛의 양을 구하시오. (8점)

논제3-3

x 축의 구간 $[0, \pi]$ 를 n 등분한 점을 $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=\pi$ 라 하자. $k=1, 2, \cdots, n$ 에 대하여 소구간 $[x_{k-1}, x_k]$ 에서 폭이 $x_k-x_{k-1}=\dfrac{\pi}{n}$ 이고 길이가 $\sin^3 x_k$ 인 직사각형 슬릿 B_k 를 S_1 에 만든다. 슬릿 $B_1, \cdots, B_n$ 을 통과하는 빛의 양의 합 T_n 을 계산하는 식을 구하시오. (5점)

논제3-4

$\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ 의 값을 구하시오. (12점)

풀어보기 [문제1]

함수

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x \quad (a>0)$$

의 극솟값이 0일 때, 상수 a의 값은? (2012년 6월 모의평가)

① $\frac{1}{e}$　　② $\frac{2}{e}$　　③ $\sqrt{e}$　　④ e　　⑤ $2e$

풀어보기 [문제2]

다음은 어느 회사의 연봉에 관한 규정이다.

(가) 입사 첫째 해 연봉은 a원이고, 입사 19년째 해까지의 연봉은 해마다 직전 연봉에서 8%씩 인상된다.

(나) 입사 20년째 해부터의 연봉은 입사 19년째 해 연봉의 $\frac{2}{3}$로 한다.

이 회사에 입사한 사람이 28년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합은? (단, $1.08^{18}=4$로 계산한다.) (2007년 6월 모의평가)

① $\frac{101}{2}a$　　② $\frac{111}{2}a$　　③ $\frac{121}{2}a$

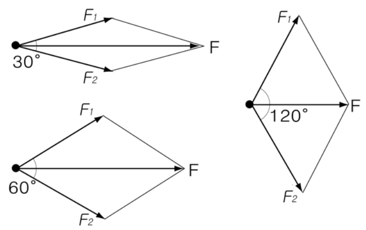
④ $\frac{131}{2}a$　　⑤ $\frac{141}{2}a$

읽기자료

1. 벡터의 개념

수학에서 벡터의 개념은 인간의 도전과 정복의 꿈이 무르익어 가던 르네상스 시대를 거치면서 유럽 사회가 식민지 경영을 위해 다른 대륙으로 원거리 항해를 시작하며 도입됐다. 즉 원거리 항해를 위해 필요한 천체의 운동과 항해 궤도를 보다 빠르고 간편하게 계산하기 위해서 출발하였다.

16세기 이후 네덜란드에서는 대양 항해가 늘어나면서 바다에서 배의 위치나 기항지의 위치, 기항지의 밀물 혹은 썰물이 이는 시각 등을 예측하기 위해 달이나 행성의 위치를 아는 것이 필요했다. 또한 행성의 운동을 예측하기 위해서는 행성의 운동 곡선 방향에서의 접선을 계산하고 이들 간의 합성에 의한 새로운 방향 예측이 절실하였다. 실제 이 시기 네덜란드의 활발한 무역활동은 1653년 네덜란드에서 일본의 동인도 회사로 항해하다 제주도에 표류한 하멜(Hendrik Hamel, 1630~1692)의 기록에서도 찾아 볼 수 있다. 이 때 활용된 것이 벡터의 '합성의 법칙'이다. 이는 나란하지 않은 두 방향으로 진행하는 힘 또는 운동의 합성을 표현한 법칙으로, 네덜란드의 스테빈(Simon Stevin, 1548~1620)에 의해 발견되었다.



서로 다른 두 방향의 힘 F_1 과 F_2 를 합성한 합력 F 는 오른쪽 그림에서와 같이 F_1 과 F_2 를 두 변으로 하는 평행사변형의 대각선으로 표현된다는 '힘의 평행사변형 법칙'에서 나온 것이다. 스테빈은 그의 책 『균형의 원리(De Beghinselen der Weegconst, 1586)』에서 고체의 정역학과 유체의 정역학을 다루었으며, 도르래의 이론을 전개하여 가상(假想) 변위의 원리를 설명하였다. 그리고 빗면에 관한 균형의 조건을 제시하였으며, 힘의 평행사변형의 법칙을 제시하여 역학과 수학의 결합 구조로서 벡터 이론을 탄생시키는 모태를 제공하였다.

2. 미분과 적분의 역사

미분은 곡선의 접선을 긋는 것에서, 적분은 곡선으로 둘러싸인 부분의 면적을 구하는 것에서 시작되었다고 한다. 미분법과 적분법에 대해서는 그리스 시대부터 논의가 이루어져 왔는데, 고대 그리스 수학자 아르키메데스는 오늘날의 구분구적법과 유사한 방법으로 평면 영역과 구면의 넓이를 구하였고, 프랑스의 페르마(1601~1665)는 함수의 극솟값과 극댓값을 구하는데 미분법과 유사한 방법을 이용하였다. 그러나 오늘날과 같은 미적분학은 뉴턴과 라이프니츠에 의해 발견되었다. 영국의 뉴턴(1642~1727)은 운동체의 속도를 구하는 과정에서 미분법을 발견하였다. 그는 행성의 움직임을 연구하기 위해 미적분을 고안하였으며, 미분방정식을 풀어서 케플러 법칙을 증명하였다. 독일의 라이프니츠(1646~1716)는 곡선의 접선과 함수의 극대, 극소를 고찰하는 과정에서 미분법을 발견했으며, 현대적인 미분과 적분의 기호를 개발하는데 크게 공헌하였다. 뉴턴과 라이프니츠에 의해 발견되고, 오일러 등 여러 학자에 의하여 발전된 미분법과 적분법은 현대수학의 가장 기본적인 개념이 되었을 뿐만 아니라 자연과학, 공학 및 사회과학 등 거의 모든 분야에 응용되고 있다. 예를 들어 최댓값, 최솟값을 구하는데 사용되기도 하고, 움직이는 물체의 운동이나 사물의 변화하는 현상을 기술하는데 이용되기도 한다. (2006 서울대 예시)

예시답안

풀어보기 [문제1]

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x \ (a>0)$에서 $f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}$ 이고

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-a}{x}=0$ 에서 $x^2-a=0$ 이고 $\ln x$ 에서 $x>0$ 이므로 $x=\sqrt{a}$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=a^{\frac{1}{2}}$ 에서 극솟값 0 을 가지므로

$$f(a^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\ln a=0$$

$\frac{1}{2}a(1-\ln a)=0$ 에서 $a\neq 0$ 이므로 $1-\ln a=0$ 이다.

따라서 $\ln a=1$, $a=e$ 이다.

풀어보기 [문제2]

조건 (가)에 의하여 입사 첫째 해부터 입사 19년째 해까지의 연봉을 살펴보면 다음 표와 같다.

1년째	2년째	3년째	$\cdots$	19년째
a	$a\times 1.08$	$a\times 1.08^2$	$\cdots$	$a\times 1.08^{18}$

따라서 입사 첫째 해부터 입사 19년째 해까지의 연봉의 합은 첫째항이 a, 공비가 1.08 , 항수가 19 인 등비수열의 합이므로

$$a+1.08a+1.08^2a+\cdots+1.08^{18}a$$
$$=\frac{a(1.08^{19}-1)}{1.08-1}=\frac{a(4\times 1.08-1)}{0.08}$$
$$=\frac{3.32}{0.08}a=\frac{83}{2}a$$

이다. 조건 (나)에 의하여 입사 20년째 해의 연봉은 $\frac{2}{3}\times 1.08^{18}a=\frac{8}{3}a$ 이다.

즉, 제20항부터 제28항까지 9개의 항은 모두 $\frac{8}{3}a$ 이므로

입사 20년째 해부터 입사 28년째 해까지의 연봉의 총합은 $9\times\frac{8}{3}a=24a$ 이다.

따라서 (연봉의 총합)$=\frac{83}{2}a+24a=\frac{131}{2}a$ 이다.

논제1-1

A 원을 연속복리 연이율 r $(r>0)$ 로 t 년간 투자할 때, 원리합계는

$$\lim_{m\to\infty} A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = \lim_{m\to\infty} A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}rt}$$

이고, 무리수 e 의 정의 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$ 로부터 원리합계는 $\lim_{m\to\infty} A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}rt}=Ae^{rt}$ 이다.

논제1-2

연속복리 연이율이 10% 인 3년 만기 금융상품은 연속복리 연이율이 10% 로 3년간 투자했을 때와 연복리 연이율 r% 로 3년간 투자했을 때 원리합계가 같아야 한다.
[논제1-1]의 결과에 따라

$$Ae^{0.1\times 3}=A(1+r)^3$$

즉, $1+r=e^{0.1}$ 이다. $\ln(1+r)=0.1$ 이고 제시문 (나)에서 $\ln 1.11=0.1$ 이므로 $r=0.11$ 이다. 즉, 구하고자 하는 연복리 연이율은 11% 이다.

논제1-3

어느 금융상품에 가입하는 것이 더 유리한지 알기 위해 먼저 각 상품의 원리합계를 구해야 한다. 금융상품 S 의 원리합계는

$$100\left(e^{0.9}+e^{0.8}+\cdots+e^{0.1}\right)=100\frac{e-e^{0.1}}{e^{0.1}-1} \text{ 만 원}$$

이고, 금융상품 T 의 수수료 차감 전 원리합계는 같은 방식으로

$$100\left(e^{1.8}+e^{1.6}+\cdots+e^{0.2}\right)=100\frac{e^2-e^{0.2}}{e^{0.2}-1} \text{ 만 원}$$

이다. 금융삼품 T 의 만기 시 수수료는 이익금의 50%이므로

$$\frac{1}{2}\left(100\left(\frac{e^2-e^{0.2}}{e^{0.2}-1}\right)-900\right) \text{ 만 원}$$

이다. 따라서 수수료 차감 후의 금융상품 T 의 만기 시 금액은

$$50\frac{e^2-e^{0.2}}{e^{0.2}-1}+450 \text{ 만 원}$$

이다. S 와 T 의 유불리를 따지기 위해 금융상품 S 와 T 의 만기 시 금액의 차이를 구하면

$$\begin{aligned}100\frac{e-e^{0.1}}{e^{0.1}-1}-50\frac{e^2-e^{0.2}}{e^{0.2}-1}-450 &= 50\frac{2\left(e-e^{0.1}\right)\left(e^{0.1}+1\right)-e^2-8e^{0.2}+9}{e^{0.2}-1}\\ &= 50\frac{9+2e^{1.1}+2e-10e^{0.2}-2e^{0.1}-e^2}{e^{0.2}-1}\end{aligned}$$

이다. 분모는 항상 양수이므로 분자의 부호만 파악하면 된다. 제시문(나)의 값을 이용하여 위 식의 분자를 계산하면

$$9+2e^{1.1}+2e-10e^{0.2}-2e^{0.1}-e^2=-1.37<0$$

이다. 따라서 금융상품 T 에 가입하는 것이 더 유리하다.

논제2-1

$f'(x)=1-\dfrac{e}{x}$ 에서 $f'(e)=0$ 이다. 함수 $f(x)$ 의 증감표는

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		감소	0	증가

이다. 따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(e)=0$ 이다.

논제2-2

$f(x)$ 의 최솟값이 $f(e)=0$ 이므로 $f(\pi)>0$ 이다.

$$f(\pi)=\pi-e\ln\pi=\pi-\ln\pi^e>0$$

이므로

$$\pi>\ln\pi^e$$

이다. 따라서

$$e^\pi>\pi^e$$

이다.

논제2-3

$g(x)=\ln a-a\dfrac{\ln x}{x}$ $(x>0)$ 라고 하자.

그러면

$$g'(x)=a\frac{\ln x-1}{x^2}$$

이므로 $g'(e)=0$ 이다. $g(x)$ 는 $x>e$ 일 때 증가하고 $g(a)=0$ 이다.

조건에서 $e<a<b$ 이므로

$$g(b)=\ln a-\frac{a}{b}\ln b>g(a)=0$$

이다. 즉,

$$b\ln a>a\ln b$$

이므로

$$a^b > b^a$$

이다.

다른 풀이1

$g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ $(x>0)$라 하자. $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ 이므로 $x>e$ 에서 $g'(x)<0$ 이므로 $g(x)$는 $x>e$ 에서 감소함수이다. 따라서 $e<a<b$ 일 때, $g(a)>g(b)$ 이다. 즉

$\dfrac{\ln a}{a} > \dfrac{\ln b}{b} \iff b\ln a > a\ln b \iff \ln a^b > \ln b^a$

이다. 그러므로 $a^b > b^a$ 이다.

다른 풀이2

$g(x)=x^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$ 이라 두자. $\ln g(x)=\dfrac{1}{x}\ln x$ 이고, 양변을 미분하면

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{1-\ln x}{x^2} \iff g'(x)=g(x)\frac{1-\ln x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}}\times\frac{1-\ln x}{x^2}$$

이다. $x^{\frac{1}{x}}>0$ 이므로 $x>e$ 에서 $g'(x)<0$ 이고, $g(x)$는 $x>e$ 에서 감소함수이다. 따라서 $e<a<b$ 일 때, $g(a)>g(b)$ 이다. 즉 $a^{\frac{1}{a}}>b^{\frac{1}{b}}$ 이다.

그러므로 $a^b > b^a$ 이다.

논제3-1

i) $\vec{n}=(0,\ 0,\ 1)$ 인 경우

$\vec{n}=(0,\ 0,\ 1)$ 이고 $\vec{u}$ 와 $\vec{n}$ 이 이루는 각을 θ 라고 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{u}||\vec{n}|}=\frac{(0,\ 2\sqrt{3},\ -2)\cdot(0,\ 0,\ 1)}{\sqrt{16}\sqrt{1}}=-\frac{1}{2}$$

이므로 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$ 이다.

ii) $\vec{n}=(0,\ 0,\ -1)$ 인 경우

$\vec{n}=(0,\ 0,\ -1)$ 이고 $\vec{u}$ 와 $\vec{n}$ 이 이루는 각을 θ 라고 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{u}||\vec{n}|}=\frac{(0,\ 2\sqrt{3},\ -2)\cdot(0,\ 0,\ -1)}{\sqrt{16}\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$$

이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 이다.

논제3-2

제시문(나)에 의해 슬릿 A_1 을 통과하는 빛의 양은 도형 A_2 의 넓이와 빛의 밝기인 $\vec{u}$ 의 크기를 곱하여 구할 수 있다. 도형 A_2 의 넓이를 구하기 위해 먼저 l_2 를 구하면

$$l_2 = l_1 \times |\cos\theta| = \frac{1}{2} l_1$$

이다. 따라서 A_2 의 넓이 $l_2 \times w$ 는 $\frac{1}{2} l_1 \times w$ 이고, 슬릿 A_1 을 통과하는 빛의 양은

$$\frac{1}{2} l_1 \times w \times |\vec{u}| = 2 l_1 w$$

이다.

논제3-3

$k = 1, 2, \cdots, n$ 에 대하여 슬릿 B_k 를 통과하는 빛의 양은

$$2\sin^3 x_k \times \frac{\pi}{n}$$

이므로, 슬릿 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 을 통과하는 빛의 양의 합은

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} 2\sin^3 x_k \times \frac{\pi}{n}$$

이다.

논제3-4

[논제3-3]의 결과에 의해 $\lim_{n\to\infty} T_n$ 은

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} T_n &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2\sin^3 x_k \times \frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2\sin^3\left(\frac{k\pi}{n}\right) \times \frac{\pi}{n} \\ &= 2\int_0^{\pi} \sin^3 x\, dx = 2\int_0^{\pi} (1-\cos^2 x)\sin x\, dx \\ &= 2\left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\pi} = \frac{8}{3}\end{aligned}$$

이다.

16 서울시립대학교 수시[16)]

[문제1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

양의 실수 t에 대하여 확률변수 X의 확률밀도함수가 다음과 같다.

$$f(x)=(t+1)e^{-x} \quad (0 \le x \le a)$$

(a) a를 t에 관한 식으로 나타내어라.(30점)

(b) $E(X^2)$과 극한값 $\lim_{t\to\infty} E(X^2)$ 을 구하여라.(70점)

[문제2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

자연수 n에 대하여 $a_n=10^n-1$일 때, 연립부등식

$$\begin{cases} 1 \le x \le a_n \\ 0 \le y \le \log x \end{cases}$$

를 만족시키는 두 정수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 S_n이라 하자. (단, $\log x$는 x의 상용로그이다.)

(a) S_n을 n에 관한 식으로 나타내어라.(60점)

(b) 극한값 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{\log a_n \times 10^n}$을 구하여라.(40점)

16) 서울시립대학교 홈페이지

[문제3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

행렬 $\begin{pmatrix} \sin\theta & 1 \\ \sin^2\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환에 의하여 점 (1, 1)이 영역

$$\{(x,y) \mid (x-1)^2+(y-1)^2 \le 1\}$$

의 점으로 옮겨질 때 다음 물음에 답하여라.

(a) $\sin\theta < 0.9$임을 보여라.(50점)

(b) $17-4\cos2\theta\sin\theta-20\sin\theta-9\cos2\theta$ 의 최댓값을 구하여라.(50점)

[문제4]

삼각형 ABC에서 $a=\overline{\mathrm{BC}}$, $b=\overline{\mathrm{AC}}$, $c=\overline{\mathrm{AB}}$ 이고 $a \le b \le c$이다. 삼각형 ABC의 내부 또는 경계에 있는 점 P에 대하여 내적

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$$

의 최댓값과 최솟값을 a, b, c 에 관한 식으로 나타내시오.

풀어보기 [문제1]

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $4^n < a_n < 4^n + 1$

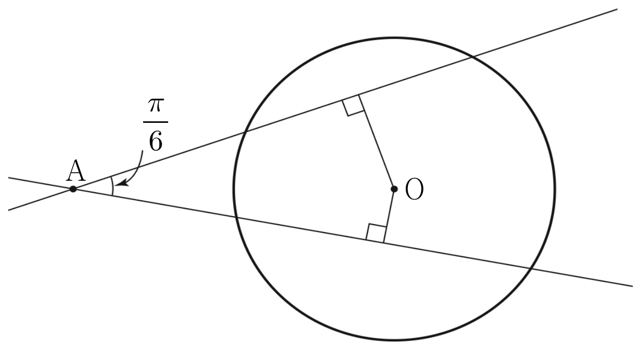
(나) $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n < b_n < 2^{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4a_n + b_n}{2a_n + 2^n b_n}$의 값을 구하시오. (2014년 3월 전국연합)

풀어보기 [문제2]

그림과 같이 중심이 O이고, 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 원의 중심으로부터 거리가 2인 점 A에서 원과 서로 다른 두 점에서 각각 만나도록 그은 두 직선이 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{6}$로 일정하다. 원의 중심 O에서 두 직선까지의 거리를 각각 l, m이라 할 때, $2l^2 + m^2$의 최솟값은 $p + q\sqrt{7}$이다. $30(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)

(2014년 4월 전국연합)



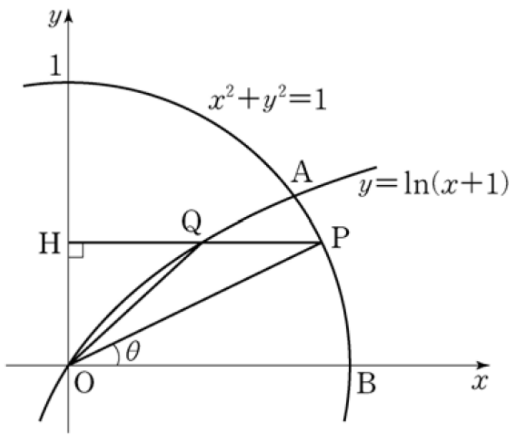
풀어보기 [문제3]

열린 구간 $(0,\ 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^{2x}}$가 $x=a$에서 극솟값을 가질 때, $\cos a$의 값을 구하시오. (2013년도 3월 전국연합)

풀어보기 [문제4]

그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$과 곡선 $y=\ln(x+1)$이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 점 $\mathrm{B}(1,\ 0)$에 대하여 호 AB 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 곡선 $y=\ln(x+1)$이 만나는 점을 Q라 하자. $\angle\mathrm{POB}=\theta$라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 HQ의 길이를 $L(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{L(\theta)}=k$일 때, $60k$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$이고, O는 원점이다.) (2015년도 대수능)



예시답안

풀어보기 [문제1]

조건 (가)에서 양변을 4^n 으로 나누면 $1<\dfrac{a_n}{4^n}<1+\dfrac{1}{4^n}$ 이고 $\lim\limits_{n\to\infty}1=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{4^n}\right)=1$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=1 \ \cdots \ ㉠ \quad \text{이다.}$$

조건 (나)에서

$$2+2^2+2^3+\cdots+2^n=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$$

이고 $2^{n+1}-2<b_n<2^{n+1}$ 에서 양면을 2^n 으로 나누면 $2-\dfrac{2}{2^n}<\dfrac{b_n}{2^n}<2$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}2=2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{2^n}=2 \ \cdots \ ㉡$$

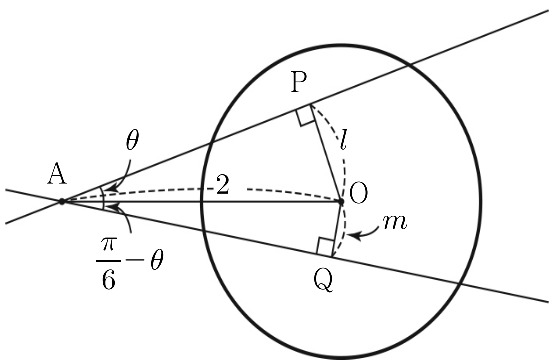
㉠, ㉡에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+b_n}{2a_n+2^nb_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4a_n+b_n}{4^n}}{\dfrac{2a_n+2^nb_n}{4^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\dfrac{a_n}{4^n}+\dfrac{b_n}{2^n}\times\dfrac{1}{2^n}}{2\times\dfrac{a_n}{4^n}+\dfrac{b^n}{2^n}}=\frac{4}{2+2}=1$$

풀어보기 [문제2]

점 O에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하자. $\angle OAP=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{6}\right)$라 하면

$$\angle OAQ=\frac{\pi}{6}-\theta,\ l=2\sin\theta,\ m=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta \quad \text{이다.}$$



$$2l^2+m^2=8\sin^2\theta+(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)^2$$
$$=8\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta$$
$$=1+10\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin2\theta$$
$$=6-5\cos2\theta-\sqrt{3}\sin2\theta$$
$$=6-2\sqrt{7}\sin(2\theta+\alpha)$$
$$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{5\sqrt{7}}{14},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{21}}{14}\right)$$
$$\tan\alpha=\frac{5\sqrt{3}}{3}\quad \therefore\ \frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고 $\alpha<2\theta+\alpha<\frac{\pi}{3}+\alpha$이므로 $2\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$일 때 $\sin(2\theta+\alpha)=1$

$2l^2+m^2$의 최솟값은 $6-2\sqrt{7}$이므로 $p=6,\ q=-2$이다. 따라서 $30(p+q)=120$

풀어보기 [문제3]

$f(x)=\frac{\sin x}{e^{2x}}=e^{-2x}\sin x$이므로 $f'(x)=-2e^{-2x}\sin x+e^{-2x}\cos x=e^{-2x}(-2\sin x+\cos x)$

이고 $f''(x)=-2e^{-2x}(-2\sin x+\cos x)+e^{-2x}(-2\cos x-\sin x)=e^{-2x}(3\sin x-4\cos x)$

이다. 이때 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가지므로 $f'(a)=0,\quad f''(a)>0$ 이어야 한다.

이때 $e^{-2a}>0$이므로

$$-2\sin a+\cos a=0\ \cdots ㉠$$
$$3\sin a-4\cos a>0\ \cdots ㉡$$

이 성립해야 한다. ㉠에서 $\cos a=2\sin a$이므로 $\tan a=\frac{1}{2}$이다. ㉠을 ㉡에 대입하면 $-5\sin a>0$

이다. 따라서 $\tan a>0$이고, $\sin a<0$이므로

$$\pi<a<\frac{3}{2}\pi$$
$$\sec^2 a=1+\tan^2 a=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$
$$\cos a=\frac{1}{\sec a}=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\therefore\ \cos a=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\quad (\because\ \pi<a<\frac{3}{2}\pi)$

풀어보기 [문제4]

□ OACB는 평행사변형이므로 점 $P(\cos\theta, \sin\theta)$이므로 점 Q의 y좌표는 $\sin\theta$이다. 따라서 점 Q의 x좌표를 a라 하면 $\ln(a+1)=\sin\theta$ 이므로 $a=e^{\sin\theta}-1$이다.

따라서 $S(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta\left(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1\right)$이고 $L(\theta)=e^{\sin\theta}-1$이다.

그러므로

$$k=\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{L(\theta)}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\frac{1}{2}\sin\theta(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1)}{e^{\sin\theta}-1}=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{\cos\theta-e^{\sin\theta}+1}{\frac{e^{\sin\theta}-1}{\sin\theta}}=\frac{1}{2}$$

따라서 $60k=30$이다.

문제1

(a) $\int_0^a \frac{(t+1)}{e^x}dx=(t+1)\left[-e^{-x}\right]_0^a=(t+1)(1-e^{-a})=1$ 이고 정리하면

$e^{-a}=\frac{t}{t+1}$ 에서 $a=\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)$ (단, $t>0$)이다.

(b) (a)에서 $t=-1+\frac{1}{1-e^{-a}}=\frac{1}{e^a-1}$ 이고

$$\begin{aligned}E(X^2)&=(t+1)\int_0^a x^2e^{-x}dx=-(t+1)\left[e^{-x}(x^2+2x+2)\right]_0^a\\&=-(t+1)\left[e^{-a}(a^2+2a+2)-2\right]\\&=-(t+1)e^{-a}(a^2+2a+2)+2(t+1)\\&=-t(a^2+2a+2)+2(t+1)\\&=-t(a^2+2a)+2\\&=-\frac{a}{e^a-1}(a+2)+2\end{aligned}$$

이다. $t\to\infty$ 이면 $a\to0+$ 이므로 $\lim_{t\to\infty}E(X^2)=\lim_{a\to0+}\left\{-\frac{a}{e^a-1}(a+2)+2\right\}=0$ 이다.

문제2

(a) $S_n = 1\times 9 + 2\times 90 + 3\times 900 + \cdots + n\times\left(10^n - 10^{n-1}\right) = 9\sum_{k=1}^{n} k\times 10^{k-1}$

$$10S_n = 9\sum_{k=0}^{n} k10^k = 9\sum_{k=0}^{n}(k+1)10^k - 9\sum_{k=0}^{n}10^k = 9\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)10^k + 9(n+1)10^n - 9\sum_{k=0}^{n}10^k$$

$$= S_n + 9(n+1)10^n - (10^{n+1}-1) = S_n + (9n-1)10^n + 1$$

이므로 $S_n = \left(n - \frac{1}{9}\right)10^n + \frac{1}{9}$ 이다.

다른 풀이

$$S_n = 1\times 9 + 2\times 9\times 10 + 3\times 9\times 10^2 + \cdots + n\times 9\times 10^{n-1}$$

$$S_n = 9\left(1 + 2\times 10 + 3\times 10^2 + \cdots + n\times 10^{n-1}\right) \cdots ㉠$$

S_n 의 양변에 10을 곱하면

$$10S_n = 9\left(10 + 2\times 10^2 + 3\times 10^3 + \cdots + n\times 10^n\right) \cdots ㉡$$

㉠－㉡ 을 하면

$$-S_n = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1} - n\cdot 10^n = \frac{10^n - 1}{10-1} - n\cdot 10^n$$

이고, 이를 정리하면

$$S_n = 10^n\left(n - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{9}$$

이다.

(b) $s_n < n\cdot 10^n$ 이고 $\log a_n > \log 10^{n-1} = n-1$ 이므로

$$\frac{s_n}{\log a_n \times 10^n} < \frac{n10^n}{(n-1)\times 10^n} \cdots ①$$

이다. 또한 $s_n > (n-1)10^n$ 이고 $\log a_n < \log 10^n = n$ 이므로

$$\frac{s_n}{\log a_n \times 10^n} > \frac{(n-1)10^n}{n\times 10^n} \cdots ②$$

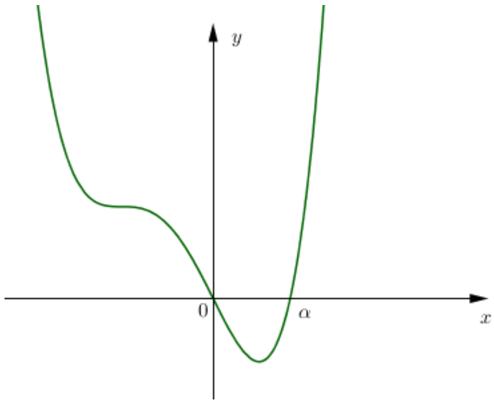
이다. ①, ②에 의해 $\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{\log a_n \times 10^n} = 1$ 이다.

문제3

(a) $\begin{pmatrix} \sin\theta & 1 \\ \sin^2\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta+1 \\ \sin^2\theta+\sin\theta \end{pmatrix}$ 이므로 $\sin^2\theta+(\sin^2\theta+\sin\theta-1)^2 \le 1$ 을 정리하면

$\sin^4\theta+2\sin^3\theta-2\sin\theta \le 0$ 이다. $\sin\theta = x$ $(-1\le x\le 1)$ 라 두자.

함수 $f(x)=x^4+2x^3-2x$ 에 대하여 $f'(x)=4x^3+6x^2-2=2(x+1)^2(2x-1)$ 이므로 그래프 개형은 다음과 같다.



따라서 $f(x)=x^4+2x^3-2x \le 0$ 를 만족하는 범위는 $0\le x\le \alpha$ 이다.

또한 $f(0.9)=\left(\frac{9}{10}\right)^4+2\left(\frac{9}{10}\right)^3-2\left(\frac{9}{10}\right)>0$ 이므로 $0\le \sin\theta<0.9$ 이다.

따라서 $\sin\theta<0.9$이다.

(b)

$$17-4\cos2\theta\times\sin\theta-20\sin\theta-9\cos2\theta=17-4(1-2\sin^2\theta)\sin\theta-20\sin\theta-9(1-2\sin^2\theta)$$
$$=8\sin^3\theta+18\sin^2\theta-24\sin\theta+8$$

이다. $\sin\theta=x$ $(0\le x\le\alpha)$라 두고 함수 $f(x)=8x^3+18x^2-24x+8$ 에 대하여

$f'(x)=12(2x^2+3x-2)=12(x+2)(2x-1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{1}{2}$ 에서 극솟값을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\max\{f(0),\ f(\alpha)\}=\max\{8,\ f(\alpha)\}$ 이다.

$\frac{1}{2}<\alpha<0.9$ 에서 $f(\alpha)<8$ 임을 보이자.

$$f(\alpha)-8=8\alpha^3+18\alpha^2-24\alpha=2\alpha(4\alpha^2+9\alpha-12)$$

이므로 $4\alpha^2+9\alpha-12<0$ 임을 보이면 충분하다. 함수 $h(x)=4x^2+9x-12$ 라 하면

$\frac{1}{2}<x<0.9$ 에서 $h(x)<h(0.9)=\frac{324}{100}+\frac{81}{10}-\frac{120}{10}=\frac{324+810-1200}{100}<0$ 이므로

$\frac{1}{2}<\alpha<0.9$ 에서 $f(\alpha)<8$ 이다. 따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\sin\theta=0$ 일 때 8 이다.

문제4

$$2(\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}})$$
$$=2\left(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2\right)-\left(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2\right)$$
$$=2\left(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2\right)-(a^2+b^2+c^2)$$

이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

이다. 따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2$ 의 최댓값과 최솟값을 구하면 된다.

삼각형 ABC에 대하여 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$라 하고 삼각형 ABC 내부의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$, 무게중심을 G라 할 때,

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=\sum_{k=1}^{3}\left\{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2\right\}$$

$$=3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+3y^2-2(y_1+y_2+y_3)y+\sum_{k=1}^{3}(x_k^2+y_k^2)$$

$$=3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2+\sum_{k=1}^{3}(x_k^2+y_k^2)-\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2-\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2$$

이다. 여기서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}(x_k^2+y_k^2)-\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2-\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2>0$이고 상수이다.

$\displaystyle\overline{\mathrm{GP}}^2=\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2$ 이므로

즉, 점 P가 삼각형 ABC의 무게중심일 때, 최솟값을 갖고, 무게중심에서 가장 멀리 있을 때 최댓값을 갖는다.

i) P가 삼각형 ABC의 무게중심인 경우에 최솟값을 갖는다.

파푸스중선정리에 의해 $2\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\overline{\mathrm{PA}}\right)^2\right)=b^2+c^2$이고 정리하면 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{9}$ 이다.

같은 방법으로 $\overline{\mathrm{PB}}^2=\dfrac{2c^2+2a^2-b^2}{9}$, $\overline{\mathrm{PC}}^2=\dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{9}$ 이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$ 이다. 따라서 최솟값은 $-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{6}$ 이다.

ii) $a\le b\le c$ 이므로 $\mathrm{P}=\mathrm{A}$인 경우에 최댓값을 갖는다.

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=b^2+c^2$ 이므로 최댓값은 $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$ 이다.

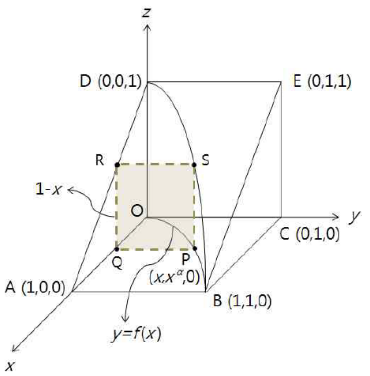
17 성균관대학교 수시(자연2)[17]

수학 1

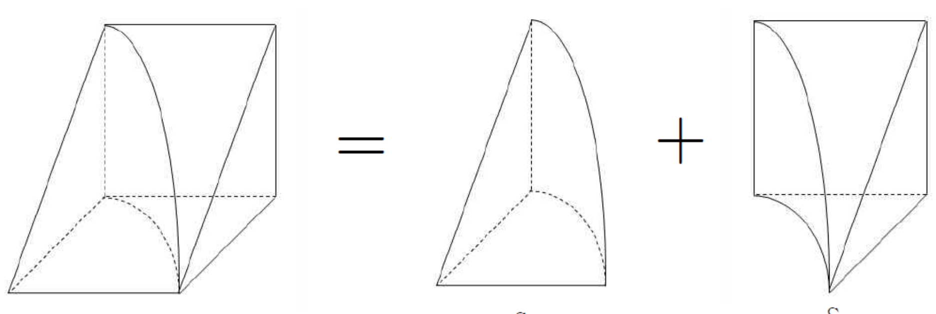
다음 <제시문1> ~ <제시문2>를 읽고 [수학 1-ⅰ] ~ [수학 1-ⅱ]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

오른쪽 그림과 같이 직각이등변삼각형 OAD를 밑면으로 하고, 높이가 1 인 삼각기둥 OADCBE 가 좌표공간 안에 옆으로 눕혀있다. 양의 실수 α 에 대하여, xy 평면 위에 곡선 $y=f(x)=x^{\alpha}$ 위의 점 $\mathrm{P}(x, x^{\alpha}, 0)$ 에서 x 축 위에 내린 수선의 발을 Q 라 하자. 선분 PQ 를 밑변으로 하고 높이가 $1-x$ 인 직사각형 PQRS 를 x 축에 수직인 평면 위에 그린다.



점 P 가 곡선 $y=f(x)$ 위를 원점에서 점 $(1, 1, 0)$ 까지 움직일 때, 이 직사각형이 만드는 입체도형을 S_1 이라고 한다. 이 입체도형은 삼각기둥 OADCBE 안에 놓이게 되는데, 삼각기둥 내부이면서 S_1 의 외부인 입체도형을 S_2 라고 한다.



$=$ $+$

S_1 S_2

<제시문2>

양의 실수 β 에 대하여 $\int x^{\beta}dx=\frac{1}{\beta+1}x^{\beta+1}+C$ (C는 상수)이다.

수학 1-ⅰ

<제시문1>에서 $\alpha=1$ 일 때, S_1 의 부피의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

수학 1-ⅱ

S_1 과 S_2 의 부피의 값이 같아지는 α 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

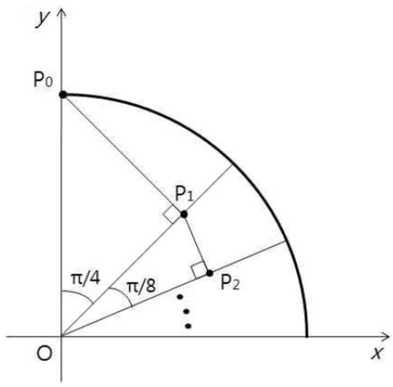
17) 성균관대학교 홈페이지

수학 2

다음 <제시문1> ~ <제시문2>를 읽고 [수학 2-ⅰ] ~ [수학 2-ⅱ]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 원점 O 이고 반지름이 1 인 원 위에 점 $\mathrm{P}_0(0, 1)$ 을 잡는다. 선분 OP_0 을 원점을 중심으로 하여 시계방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 회전시킨 선분 위에, 점 P_0 으로부터 내린 수선의 발을 점 P_1 이라고 한다. 다시 선분 OP_1 을 원점을 중심으로 하여 시계방향으로 $\frac{\pi}{8}$ 만큼 회전시킨 선분 위에, 점 P_1 에서 내린 수선의 발을 점 P_2 라고 한다. 위의 과정을 n 번 반복하였을 때 생기는 점을 P_n 이라고 한다. 즉, 선분 OP_{n-1} 을 원점을 중심으로 하여 시계방향으로 $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 만큼 회전시킨 선분 위에, 점 P_{n-1} 에서 내린 수선의 발을 점 P_n 이라고 한다. 이때, 점 P_n 의 좌표는 (x_n, y_n) 이라고 한다.



<제시문2>

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ 의 값은 1 이다. (단, x 의 단위는 라디안)

수학 2-ⅰ

점 P_1 의 좌표 (x_1, y_1) 을 구하고, 그 이유를 논하시오.

수학 2-ⅱ

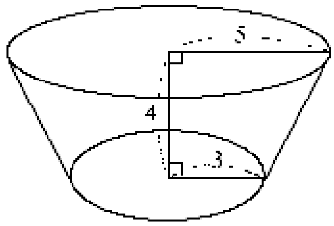
$\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

수학 2-ⅲ

$\lim_{x \to \infty} x_n$ 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

풀어보기 [문제1]

그림과 같이 윗면의 반지름의 길이가 5, 아랫면의 반지름의 길이가 3, 높이가 4인 원뿔대 모양의 그릇이 있다. 이 그릇에 물을 가득 채울 때, 다음 중 담긴 물의 양을 나타낸 식으로 옳은 것은? (단, 그릇의 두께는 무시한다.)

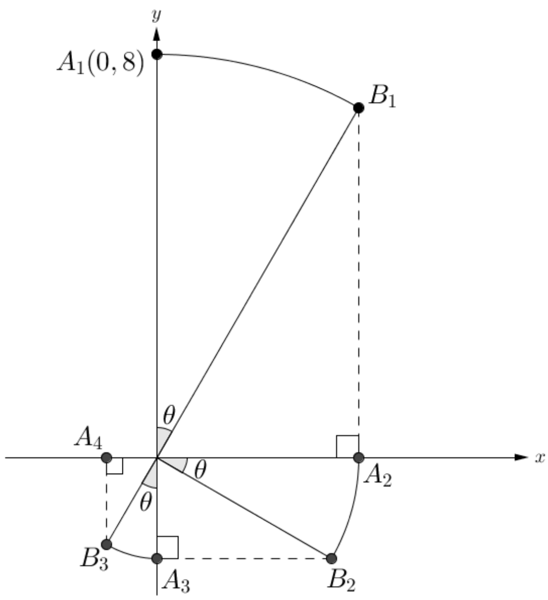


① $\pi\int_0^4 \left(3+\frac{x}{4}\right)^2 dx$ ② $\pi\int_0^4 \left(3+\frac{x}{3}\right)^2 dx$

③ $\pi\int_0^4 \left(3+\frac{x}{2}\right)^2 dx$ ④ $\pi\int_0^4 (3+x)^2 dx$ ⑤ $\pi\int_0^4 (3x)^2 dx$

풀어보기 [문제2]

다음 그림과 같이 원점 O 와 점 $A_1(0, 8)$ 을 이은 선분 OA_1 을 반지름으로 하고, 중심각의 크기가 θ 인 부채꼴 OA_1B_1 을 그린다. 점 B_1 에서 x 축에 내린 수선의 발을 A_2 라 하고, 반지름이 선분 OA_2 이고 중심각의 크기가 θ 인 부채꼴 OA_2B_2 를 그린다. 점 B_2 에서 y 축에 내린 수선의 발을 A_3 이라 하고, 반지름이 선분 OA_3 이고 중심각의 크기가 θ 인 부채꼴 OA_3B_3 을 그린다. 이와 같이 시계 방향으로 x 축과 y 축에 번갈아 수선의 발을 내리는 과정을 계속하여 얻은 부채꼴 OA_nB_n 의 호 A_nB_n 의 길이를 l_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = 12\theta$ 일 때, $\sin\theta$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.)



예시답안

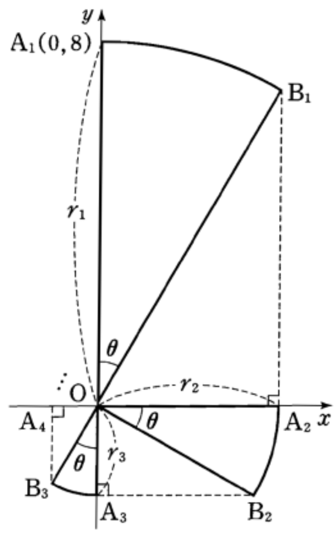
풀어보기 [문제1]

그릇의 바닥면으로부터의 높이가 x 인 곳까지 물을 채웠을 때 수면의 반지름의 길이는 $3+\frac{x}{2}$ 이므로 수면의 넓이는 $\pi\left(3+\frac{x}{2}\right)^2$ 이다.

따라서 그릇에 가득 담긴 물의 부피는 $\pi\int_0^4\left(3+\frac{x}{2}\right)^2 dx$ 이다.

풀어보기 [문제2]

부채꼴 OA_nB_n 의 반지름의 길이를 r_n 이라 하면 $A_1(0,\ 8)$ 이므로 $r_1=8$ 이다.



$\triangle OB_1A_2$ 에서 $\overline{OA_2}=\overline{OB_1}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ 이므로 $r_2=8\sin\theta$

또, $\triangle OB_2A_3$ 에서 $\overline{OA_3}=\overline{OB_2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ 이므로

$$r_3=8\sin\theta\cdot\sin\theta=8\sin^2\theta$$
$$\vdots$$
$$r_n=8\sin^{n-1}\theta$$

따라서 $l_n=r_n\theta=(8\sin^{n-1}\theta)\times\theta=8\theta\sin^{n-1}\theta$ 이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{8\theta}{1-\sin\theta}=12\theta$ 이므로 $1-\sin\theta=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{1}{3}$

수학 1- i

$\alpha=1$ 일 때, 입체도형 S_1 은 삼각형 OAB 를 밑면으로 하고 높이가 1 인 삼각기둥이므로, 이 도형의 부피는 $\frac{1}{6}$ 이다.

수학 1- ii

삼각기둥 OADCBE 의 부피는 $\frac{1}{2}$ 이므로, S_1 의 부피는 그 절반인 $\frac{1}{4}$ 이다.

직사각형 PQRS 의 밑변의 길이는 x^α 이고 높이는 $1-x$ 이므로, 넓이는 $x^\alpha(1-x)$ 이고 입체 도형 S_1 의 부피는 $\int_0^1 x^\alpha(1-x)dx=\frac{1}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+2}=\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{4}=\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$ 이 되어 $\alpha=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ 이다.

수학 2- i

선분 OP_1 의 길이는 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로, 점 P_1 의 좌표는 $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이다.

수학 2- ii

각 $\angle P_{n-1}OP_n$ 의 크기는 $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 이므로 $\angle P_0OP_n$ 의 크기는 $\pi\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 이다. 따라서 선분 OP_n 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 이다.

$\overline{OP_n}=\overline{OP_{n-1}}\times\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 로부터 $\overline{OP_n}$ 의 값은 $\cos\frac{\pi}{4}\times\cdots\times\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 임을 알 수 있다.

이를 이용하여, 점 P_n 의 y 좌표인 y_n 의 값은 $\cos\frac{\pi}{4}\times\cdots\times\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\times\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 이 된다. 이 식에 삼각함수의 배각공식을 적용하면, $y_n=\frac{1}{2^n}$ 임을 알 수 있다.

따라서 $\sum_{n=0}^{\infty} y_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2$ 이다.

수학 2-iii

[수학 2-ii]에 의하여 x_n의 값은 $\cos(\frac{\pi}{4}) \times \cdots \times \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) \times \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$ 이다.

양변에 $\sin(\frac{\pi}{2^{n+1}})$을 곱하면, $x_n \times \sin(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = \frac{1}{2^n}\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$이 된다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{\pi} \times \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin(\frac{\pi}{2^{n+1}})} \times \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$ 이 되고 <제시문2>를 이용하면

$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{\pi}$ 을 얻을 수 있다.

18 성균관대학교 수시(자연1)[18)]

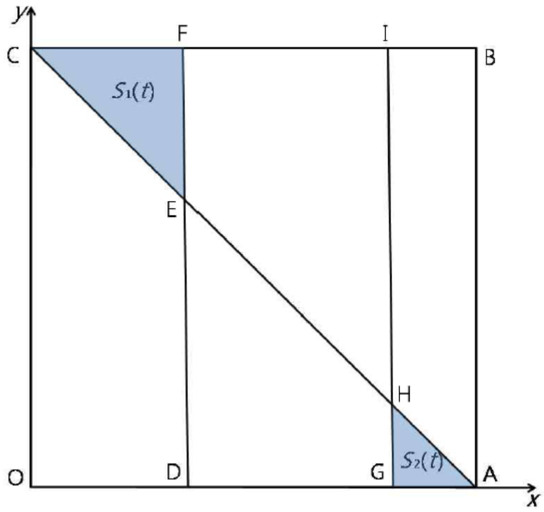
[수학1] 다음 〈제시문1〉~〈제시문4〉를 읽고 [수학1-ⅰ]~[수학1-ⅱ]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>
좌표평면의 네 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(2,0)$, $\mathrm{B}(2,2)$, $\mathrm{C}(0,2)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC 가 주어져 있다.

<제시문2>
정사각형 OABC 의 한 변 OA 위에 두 점 $\mathrm{D}(t,0)$, $\mathrm{G}(t+1,0)$을 잡는다. (단, $0 \le t \le 1$)

<제시문3>
점 D 에서 선분 OA 에 수직인 직선이 선분 CA 및 선분 CB 와 만나는 점을 각각 E , F 라 한다. 점 G 에서 선분 OA 에 수직인 직선이 선분 CA 및 선분 CB 와 만나는 점을 각각 H, I 라 한다.

<제시문4>
삼각형 CEF 의 넓이를 $\mathrm{S}_1(t)$, 삼각형 AHG 의 넓이를 $\mathrm{S}_2(t)$ 라 한다.



수학 1-ⅰ

$\mathrm{S}_1(t)$ 와 $\mathrm{S}_2(t)$ 의 곱을 $g(t)$ 라 할 때, $g(t)$ 를 t 에 관한 식으로 나타내고, 그 이유를 논하시오.

수학 1-ⅱ

$g(t)$ 의 최댓값과 그 때의 t 를 구하고, 그 이유를 논하시오.

18) 성균관대학교 홈페이지

[수학2] 다음 〈제시문1〉~〈제시문5〉를 읽고 [수학2]를 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>
좌표평면에서 제 1 사분면의 점들 전체의 집합을 H라 한다.

<제시문2>
실수 $a\,(a>4)$가 주어져 있을 때, 좌표평면의 두 점 $\mathrm{E}(2, 0)$, $\mathrm{E}'(-2, 0)$으로부터의 거리의 합이 $2\sqrt{a}$로 일정한 점들 전체의 집합을 A라 한다.

<제시문3>
<제시문2>에서 주어진 실수 $a\,(a>4)$에 대하여, 좌표평면의 두 점 $\mathrm{F}(\sqrt{a}, 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{a}, 0)$ 으로부터의 거리의 차가 4로 일정한 점들 전체의 집합을 B라 한다.

<제시문4>
원점 $\mathrm{O}(0, 0)$으로부터의 거리가 $\sqrt{5}$로 일정한 점들 전체의 집합을 C라 한다.

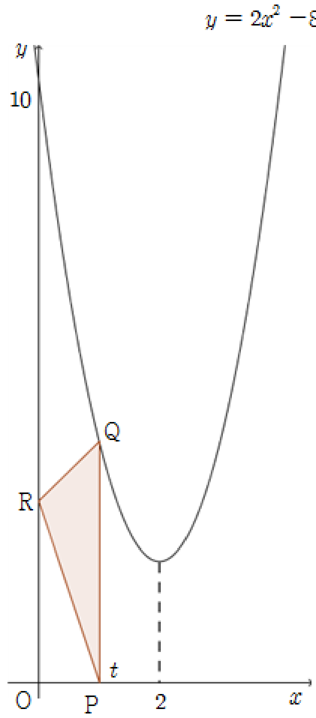
<제시문5>
유한개의 원소를 가지는 임의의 집합 D에 대하여 $n(D)$는 집합 D의 원소의 개수를 나타낸다.

수학 2

$n(A\cap B\cap C\cap H)=1$ 이 되는 a의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

풀어보기 [문제1]

그림과 같이 좌표평면에서 점 $\mathrm{P}(t,\ 0)\ (t>0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2x^2-8x+10$과 만나는 점을 Q, 점 Q를 지나고 기울기가 양수인 직선이 y축과 만나는 점을 R라 하자. 삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$라 할 때, 닫힌 구간 $[1,\ 2]$에서 $S(t)$의 최솟값은? (2016 EBS 수능특강 미적분 I)

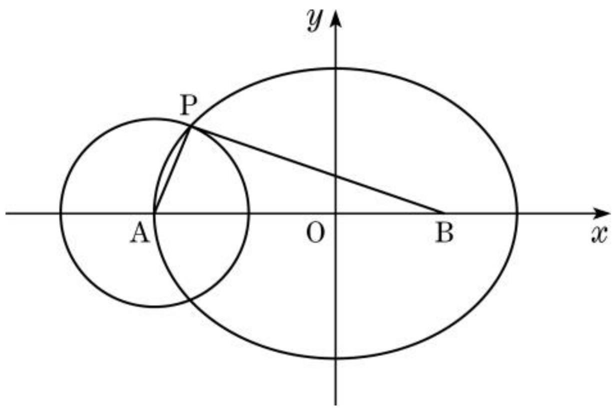


① $\dfrac{10}{9}$　② $\dfrac{35}{27}$　③ $\dfrac{40}{27}$　④ $\dfrac{5}{3}$　⑤ $\dfrac{50}{27}$

풀어보기 [문제2]

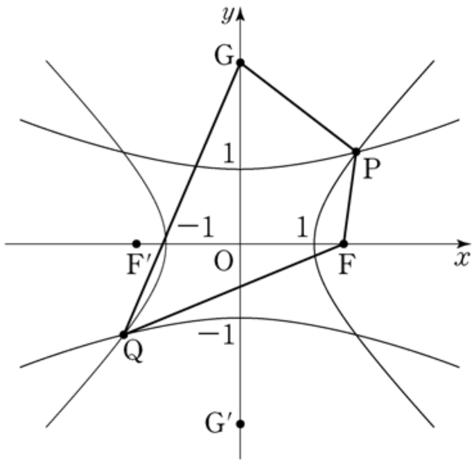
그림과 같이 점 $\mathrm{A}(-5,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원과 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$의 한 교점을 P라 하자. 점 $\mathrm{B}(3,\ 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=10$일 때, $10r$의 값을 구하시오.

(2013 10월 전국연합)



풀어보기 [문제3]

그림과 같이 초점이 각각 F, F′과 G, G′이고 주축의 길이가 2, 중심이 원점 O인 두 쌍곡선이 제1사분면에서 만나는 점을 P, 제3사분면에서 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{PG}\times\overline{QG}=8$, $\overline{PF}\times\overline{QF}=4$일 때, 사각형 PGQF의 둘레의 길이는? (단, 점 F의 x좌표와 점 G의 y좌표는 양수이다.) (2016 대입 6월 모평 B형)



① $6+2\sqrt{2}$　　② $6+2\sqrt{3}$　　③ 10

④ $6+2\sqrt{5}$　　⑤ $6+2\sqrt{6}$

예시답안

풀어보기 [문제1]

점 Q는 직선 $x=t$와 곡선 $y=2x^2-8x+10$이 만나는 점이므로 $Q(t,\ 2t^2-8t+10)$

$2t^2-8t+10=2(t-2)^2+2>0$이므로

$t>0$에서 삼각형 PQR의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times t\times(2t^2-8t+10)=t^3-4t^2+5t \cdots\cdots ㉠$$

㉠을 t에 대하여 미분하면 $S'(t)=3t^2-8t+5=(t-1)(3t-5)$

$S'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=\frac{5}{3}$

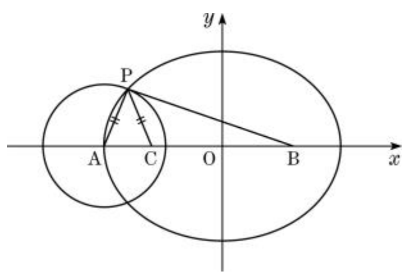
닫힌 구간 [1, 2]에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	2
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	2	↘	극소	↗	2

따라서 함수 $S(t)$는 $t=\frac{5}{3}$에서 극소이면서 최소이고

$S\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{5}{3}\right)^3-4\times\left(\frac{5}{3}\right)^2+5\times\frac{5}{3}=\frac{50}{27}$이므로 구하는 최솟값은 $\frac{50}{27}$이다.

풀어보기 [문제2]



타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점의 좌표를 각각 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ (단, $c>0$)이라 하면

$c^2=25-16=9$에서 $c=3$이다.

따라서 점 B는 타원의 한 초점이고 다른 한 초점은 C$(-3,\ 0)$이다.

$\overline{PB}+\overline{PC}=10$이고, $\overline{PA}+\overline{PB}=10$이므로 $\overline{PA}=\overline{PC}$. 타원의 장축의 길이는 10이므로 점 A의 좌표는 $(-5, 0)$이다. 즉, 삼각형 PAC는 이등변삼각형이므로 점 P의 x좌표는 -4이다.

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 에서 $y^2=16\left\{1-\frac{(-4)^2}{25}\right\}$이므로 $y=\frac{12}{5}$ 또는 $y=-\frac{12}{5}$

$P\left(-4,\ \frac{12}{5}\right)$ 또는 $P\left(-4,\ -\frac{12}{5}\right)$ 이므로 $r=\overline{PA}=\sqrt{(-5+4)^2+\left(0-\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{13}{5}$

$\therefore\ 10r=26$

풀어보기 [문제3]

$\overline{PG}=a\,(a>0)$라 하자. 쌍곡선이 원점대칭이므로 $\overline{QG}=\overline{PG'}$이고 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{PG'}=a+2$이므로 $\overline{QG}=a+2$이다.

$\overline{PG}\times\overline{QG}=8$이므로 $a(a+2)=8$이고 정리하면 $a^2+2a-8=0$이 되는데 이를 만족시키는 양수 $a=2$ 이다.

또 $\overline{PF}=b\,(b>0)$ 라 하자. 쌍곡선이 원점 대칭이므로 $\overline{QF}=\overline{PF'}$이고 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{PF'}=b+2$ 이므로 $\overline{QF}=b+2$ 이다.

$\overline{PF}\times\overline{QF}=4$이므로 $b(b+2)=4$이고 정리하면 $b^2+2a-4=0$이 되는데 이를 만족시키는 양수 $b=-1+\sqrt{5}$ 이다.

따라서 사각형 PGQF의 둘레의 길이는 $a+b+a+2+b+2=4+2(a+b)=6+2\sqrt{5}$

수학1- i

직선 CA 의 기울기가 -1 이므로 삼각형 CEF 와 삼각형 AHG 는 직각이등변 삼각형이다.

$D\,(t,0)$ 이므로 $\overline{CF}=t$ 이고, 따라서 삼각형 CEF 의 넓이 $S_1(t)=\frac{1}{2}t^2$

$G\,(t+1,0)$ 이므로 $\overline{GA}=2-(t+1)=1-t$ 이고, 따라서 삼각형 AHG 의 넓이 $S_2(t)=\frac{1}{2}(1-t)^2$

그러므로, $g(t)=\frac{1}{4}\{t(1-t)\}^2$ (단, $0\le t\le 1$)

대학발표 예시답안

$S_1(t)$, $S_2(t)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$S_1(t)=\frac{1}{2}\mathrm{CF}\times\mathrm{FE}=\frac{t^2}{2}$

$S_2(t)=\frac{1}{2}\mathrm{HG}\times\mathrm{GA}=\frac{1}{2}\{2-(t+1)\}^2=\frac{1}{2}(t-1)^2$

따라서 $g(t)=\frac{1}{4}t^2(t-1)^2$ 를 얻는다.

수학1- ii

$0 \le t \le 1$ 이므로 $t \ge 0$, $1-t \ge 0$ 이고 $t+(1-t)=1$ 로 일정하다.

그러므로 산술기하평균에 의하여 $t(1-t) \le \frac{1}{4}$ (단, 등호는 $t=\frac{1}{2}$ 일 때 성립)

따라서 $g(t)$ 의 최댓값은 $t=\frac{1}{2}$ 일 때, $\frac{1}{64}$ 이다.

대학발표 예시답안

$g(t)$ 를 미분하면 $g'(t)=t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)$ 이다. 증감을 조사하면

	0		$\frac{1}{2}$		1
$g'(t)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(t)$	0		$\frac{1}{64}$		0

$t=\frac{1}{2}$ 에서 최댓값을 가짐을 알 수 있고, 이때의 최댓값은 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{64}$ 이다.

수학2

집합 A 에 속하는 점을 (x,y) 라고 하면 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{a}$ 를 만족한다. 이를 정리하면 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{a-4}=1$ 이다.$(a>4)$

(두 점으로부터의 거리의 합이 일정한 점의 자취는 타원이므로 초점의 좌표 $(\pm 2, 0)$, 장축의 길이가 $2\sqrt{a}$ 임을 사용하여 타원의 방정식 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{a-4}=1$ 을 바로 유도할 수도 있다.)

집합 B 에 속하는 점을 (x,y) 라고 하면 $\left|\sqrt{(x-\sqrt{a})^2+y^2}-\sqrt{(x+\sqrt{a})^2+y^2}\right|=4$ 를 만족한다. 이를 정리하면 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{a-4}=1$ 이다.$(a>4)$

(두 점으로부터의 거리의 차가 일정한 점의 자취는 쌍곡선이므로 초점의 좌표 $(\pm\sqrt{a}, 0)$, 주축의 길이가 4 임을 사용하여 쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{a-4}=1$ 을 바로 유도할 수도 있다.)

집합 C 에 속하는 점을 (x,y) 라고 하면 $x^2+y^2=5$ 를 만족한다.

$n(A\cap B\cap C\cap H)=1$ 은 각 집합 A, B, C 의 자취인 타원, 쌍곡선, 원이 제1사분면의 한 점에서 만남을 뜻한다.

$\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{a-4}=1$ 과 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{a-4}=1$ 를 연립하면 $x^2=\dfrac{8a}{a+4}$, $y^2=\dfrac{(a-4)^2}{a+4}$

이를 $x^2+y^2=5$ 에 대입하여 정리하면 $a^2-5a-4=0$

따라서 $a=\dfrac{5\pm\sqrt{41}}{2}$ 이고 조건을 만족하는 $a=\dfrac{5+\sqrt{41}}{2}$ 이다.

대학발표 예시답안

집합 A 는 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=2\sqrt{a}$ 를 만족하는 점들의 집합이다. 이를 정리하면 타원

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{a-4}=1 \quad \cdots ①$$

의 그래프를 얻는다. 집합 B 는 $\left|\sqrt{(x-\sqrt{a})^2+y^2}-\sqrt{(x+\sqrt{a})^2+y^2}\right|=4$ 를 만족하는 점들의 집합이다. 이를 정리하면 쌍곡선

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{a-4}=1 \quad \cdots ②$$

을 얻는다.

두 식 ①과 ②를 더하면 $x^2=\dfrac{8a}{a+4}$ 를 얻고, 이를 다시 ①, ② 중 하나에 대입하면 $y^2=\dfrac{(a-4)^2}{a+4}$ 를 얻는다.

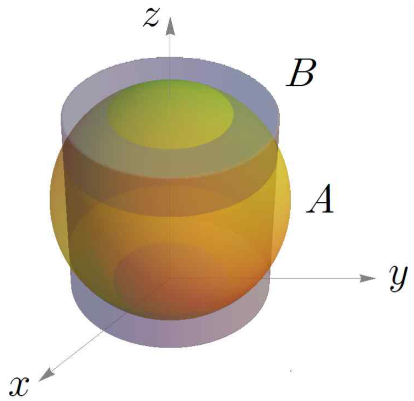
이 값을 $x^2+y^2=5$ 에 대입하면 $\dfrac{a^2+16}{a+4}=5$, 즉 $a^2-5a-4=0$ 를 얻는다.

이 방정식의 해는 $a=\dfrac{5\pm\sqrt{41}}{2}$ 이고 이 중 문제의 조건에 부합하는 해는 $a=\dfrac{5+\sqrt{41}}{2}$ 이다.

19 세종대학교 모의논술[19]

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[문제 1] 좌표공간에서 집합 A는 반지름이 2이고 중심이 $(0,0,\sqrt{3})$인 구이다. 집합 B는 원기둥이며, B의 밑면과 윗면은, 중심이 각각, $(0,0,0)$, $(0,0,2\sqrt{3})$이고 반지름이 $\sqrt{3}$ 인 원이다. 다음 그림을 참조하여 각각의 물음에 답하시오.



문제1-1

구 A와 원기둥 B의 윗면의 교집합으로 나타나는 원의 반지름을 r라 하자. 또한 구 A와 원기둥 B의 옆면에 공통으로 속하는 점에 대한 z좌표의 최댓값을 a라고 하자. r와 a의 값을 각각 구하시오. (10 점)

문제1-2

$a \le k \le 2\sqrt{3}$ 일 때, 평면 $z=k$가 구 A와 만나 이루어지는 평면의 넓이를 $S(k)$라고 하자. $S(k)$를 구하시오. (10 점)

문제1-3

구 A와 원기둥의 내부에 공통으로 속하는 영역의 부피를 구하시오. (10점)

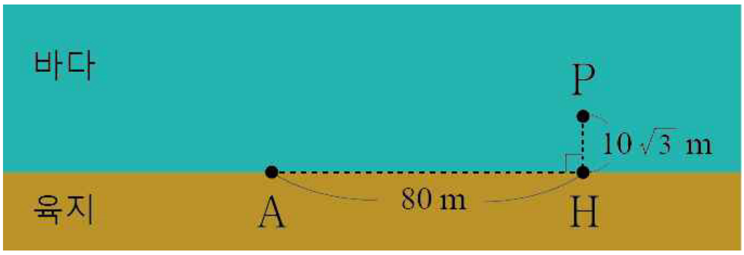
19) 세종대학교 홈페이지

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[문제 2] 육지와 바다가 만나는 경계에 수상안전원이 대기하고 있다. 수상 안전원은 육지에서 1초에 최대 $2m$를 달릴 수 있고, 바다에서는 1초에 최대 $1m$를 갈 수 있다. 바다에 위급한 상황이 발생하면, 그 위치에 따라 바로 수영만 해서 갈 수도 있고, 일정한 거리까지는 육지에서 수평방향으로 달려간 뒤 수영을 할 수도 있는데, 어떤 방향을 택하느냐에 따라 그 위치에 도달하는 시간이 달라질 수 있다. 다음 물음에 답하시오.(단, 육지와 바다의 경계는 수평방향의 직선이라고 가정한다.)

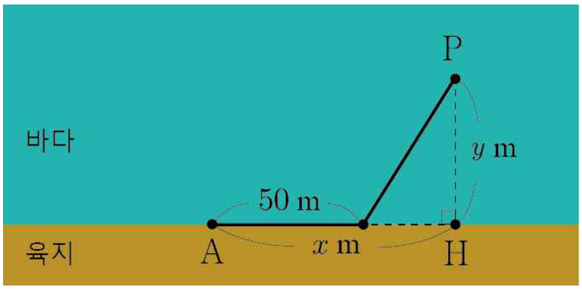
문제2-1

그림과 같이 위급한 상황이 발생한 지점 P 가 육지로부터 $10\sqrt{3}m$ 떨어져 있고, 점 P 로부터 가장 가까운 육지의 지점 H 로부터 왼쪽 수평방향으로 $80m$ 떨어진 지점 A 에 수상안전원이 위치하고 있다. 수상안전원이 A 지점을 출발하여 P 지점에 도달하는 최소 시간을 구하시오. (10점)



문제2-2

위급한 상황이 발생한 지점 P 가 육지로부터 ym 떨어져 있고, P 에서 가장 가까운 육지의 지점 H 로부터 왼쪽 수평방향으로 xm 떨어진 지점 A 에 수상안전원이 위치하고 있다. 수상안전원이 A 지점을 출발하여 P 지점에 가장 빨리 도착하기 위하여 오른쪽 수평방향으로 50m를 달리고 나서 바로 수영을 시작했다. 이 때, x와 y가 만족하는 관계식을 구하시오. (10점)

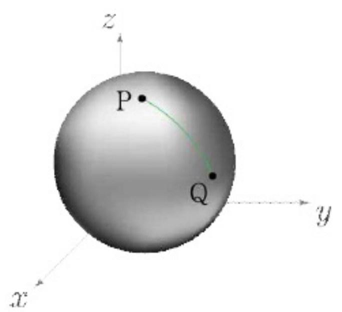


문제2-3

수상 안전원이 60초 안에 도착할 수 있는 바다의 모든 지점들로 이루어진 영역을 나타내고 그 영역의 넓이를 구하시오. (10점)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[문제 3] 좌표공간에 쇠공이 놓여 있는데, 쇠공의 겉면을 S라고 할 때, S는 구의 방정식 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$로 주어진다. 좌표공간에서 쇠공 내부에 있지 않은 점 P와 점 Q를 실로 연결할 때, 실의 길이의 최솟값을 $d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$라고 정의하자. (단, 실은 쇠공을 통과하지 않는다.) 만일 두 점 P, Q가 아래 그림처럼 모두 쇠공의 겉면 S에 있을 때는 두 점을 연결하는 대원의 호 중 짧은 쪽의 길이가 $d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$가 된다. (여기서 대원이란 구 S의 중심을 지나는 평면과 S가 만나 이루어지는 원을 말한다.



문제3-1

S에 있는 두 점 P$(1,2,1)$, Q$\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$에 대하여 $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$를 구하시오. (10점)

문제3-2

점 A$(2,2,1-\sqrt{2})$와 구 S의 중심 B$(1,1,1)$을 연결하는 직선이 구 S와 만나는 두 점 중 A에서 더 먼 쪽에 있는 점을 C라 할 때, C의 좌표를 구하시오. (10점)

문제3-3

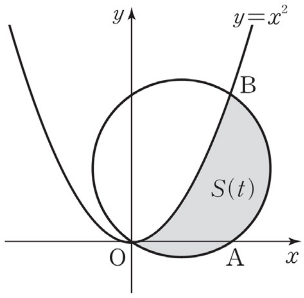
$d(\mathrm{A},\ \mathrm{C})$의 값을 구하시오. (10점)

문제3-4

평면 $z=\frac{3}{2}$과 구 S가 만나는 원 위의 점을 D라고 할 때, $d(\mathrm{A},\ \mathrm{D})$의 값을 구하시오. (10점)

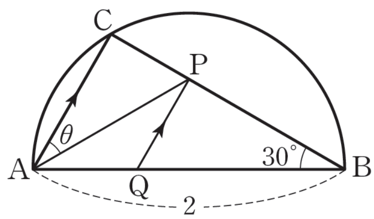
풀어보기 [문제1]

그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 양수 t에 대하여 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(t,\ 0)$, $\mathrm{B}(t,\ t^2)$을 지나는 원 C가 있다. 원 C의 내부와 부등식 $y \leq x^2$이 나타내는 영역의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S'(1)=\dfrac{p\pi+q}{4}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.) (2012년 9월 모의평가)



풀어보기 [문제2]

그림과 같이 길이가 2 인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle\mathrm{ABC}=30^\circ$ 가 되도록 원주 위에 점 C 를 잡고, 변 BC 위의 동점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}/\!/\overline{\mathrm{PQ}}$ 가 되도록 선분 AB 위에 점 Q 를 잡는다. $\angle\mathrm{PAC}=\theta$ 라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}$ 가 최소가 되도록 하는 각 θ 에 대하여 $\sin\theta$ 의 값은? (2013 수능특강 수학II, p135)

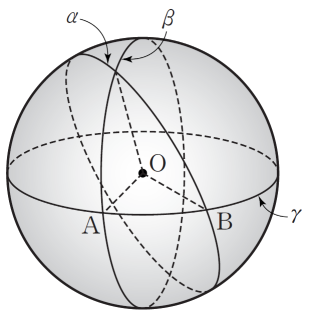


풀어보기 [문제3]

그림과 같이 반지름의 길이가 1 인 구의 중심 O 를 지나는 세 평면 α, β, γ가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 평면 α, β가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다.
(나) 두 평면 β, γ가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

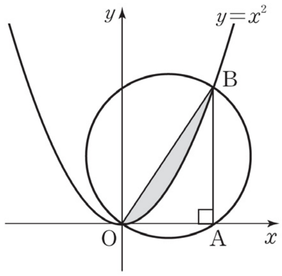
두 점 A, B 는 각각 두 평면 β, γ의 교선, 두 평면 γ, α의 교선이 구와 만나는 점이고 호 AB 의 길이는 $\frac{\pi}{6}$ 이다. 두 평면 α, γ가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (2013 수능완성 실전편 3회 19번 문제)



예시답안

풀어보기 [문제1]

$\angle OAB = 90^\circ$ 이므로 $\overline{OB}$는 원 C의 지름이다.



따라서 공통부분의 넓이는 반원의 넓이에서 문제의 어두운 부분의 넓이를 뺀 값과 같다. 이때, 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{OB} = \frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}$ 이고 직선 OB의

방정식은 $y = tx$이므로

$$S(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}\right)^2\pi - \int_0^t (tx - x^2)dx$$

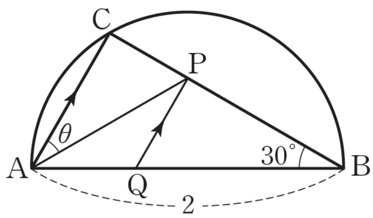
$$= \frac{\pi}{8}(t^2+t^4) - \left[\frac{t}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^t$$

$$= \frac{\pi}{8}(t^2+t^4) - \frac{1}{6}t^3$$

$S'(t) = \frac{\pi}{8}(2t+4t^3) - \frac{1}{2}t^2$이므로 $S'(1) = \frac{3\pi-2}{4}$

따라서 $p=3,\ q=-2$이므로 $p^2+q^2 = 13$

풀어보기 [문제2]



$\overline{AB}=2$ 이고 , $\angle ABC = 30^\circ$,$\angle ACB = 90^\circ$ 이므로 $\overline{AC}=1$, $\overline{BC}=\sqrt{3}$

$\angle PAC = \theta$ 이므로 $\cos\theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AP}}$ $\therefore\ \overline{AP} = \frac{1}{\cos\theta}$, $\tan\theta = \frac{\overline{PC}}{\overline{AC}}$ $\therefore\ \overline{PC} = \tan\theta$

삼각형 BPQ 에서 $\tan 30^\circ = \dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{BP}}}$

$$\therefore \overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{BP}} \tan 30^\circ = (\sqrt{3} - \tan\theta)\frac{1}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan\theta$$

$$\therefore \overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PQ}} = \frac{1}{\cos\theta} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan\theta$$

$f(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta} + 1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan\theta \ (0^\circ < \theta < 60^\circ)$로 놓으면

$f'(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{\cos^2\theta} = \dfrac{\sqrt{3}\sin\theta - 1}{\sqrt{3}\cos^2\theta} = 0$ 에서

$$\sqrt{3}\sin\theta - 1 = 0 \quad \therefore \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때 $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PQ}}$ 는 극소이면서 최소이다

풀어보기 [문제3]

두 평면 β, γ가 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 평면 β, γ를 각각 zx 평면, xy 평면이라 하면 점 A 는 두 평면의 교선인 x축 위의 점이므로 그 좌표를 $\mathrm{A}(1, 0, 0)$이라 하자. 또, 호 AB 의 길이가 $\dfrac{\pi}{6}$ 이고 점 B 는 xy 평면 위의 점이므로 부채꼴 OAB 의 중심각의 크기는 $\dfrac{\pi}{6}$ 이다. 따라서 점 B 의 좌표는 $\mathrm{B}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}, \sin\dfrac{\pi}{6}, 0\right)$, 즉 $\mathrm{B}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$으로 놓을 수 있다.

이때 평면 α 의 방정식을 $ax+by+cz=0$ (a, b, c는 상수)이라 하면

점 $\mathrm{B}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$을 지나므로

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b + 0 = 0 \qquad \therefore b = -\sqrt{3}a \quad \cdots\cdots ㉠$$

평면 α 와 평면 β, 즉 zx 평면의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ 라 하면

$$\overrightarrow{n_1} = (a, b, c), \ \overrightarrow{n_2} = (0, 1, 0)$$

이때 두 평면 α, β가 이루는 예각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$ 이므로

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{|(a, b, c) \cdot (0, 1, 0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot 1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$a^2+b^2+c^2 = 4b^2$

㉠에서 $b^2=3a^2$ 이므로 $c=\pm 2\sqrt{2}\,a$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\overrightarrow{n_1}=(a\,,\,-\sqrt{3}\,a\,,\,2\sqrt{2}\,a)$ 또는 $\overrightarrow{n_1}=(a\,,\,-\sqrt{3}\,a\,,\,-2\sqrt{2}\,a)$

따라서 평면 α 의 방정식은

$x-\sqrt{3}\,y+2\sqrt{2}\,z=0$ 또는 $x-\sqrt{3}\,y-2\sqrt{2}\,z=0$ 이다.

그러므로 평면 γ, 즉 xy 평면의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_3}=(0\,,\,0\,,\,1)$ 이라 하면

$$\cos\theta=\frac{|(1\,,\,-\sqrt{3}\,,\,\pm 2\sqrt{2})\cdot(0\,,\,0\,,\,1)|}{\sqrt{1+3+8}\cdot 1}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

문제 1-1

첫째, 구 A 의 방정식은 $x^2+y^2+(z-\sqrt{3})^2=2^2$ 이다. 원기둥 B 의 윗면의 z 좌표 $2\sqrt{3}$ 을 구의 방정식에 대입하면 $x^2+y^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2=2^2$, 즉, $x^2+y^2=1$ 이므로 $r=1$이다.

둘째, 원기둥의 옆면과 구의 교차 면을 $y=\sqrt{3}$ 인 평면으로 자르면 아래와 같다.

$x^2+(\sqrt{3})^2+(z-\sqrt{3})^2=2^2$ 에서 $x^2+(z-\sqrt{3})^2=1$

따라서 $x=0$ 일 때 $z=1+\sqrt{3}$ 이 최댓값이다.

즉, $a=1+\sqrt{3}$ 이다.

문제 1-2

$a=1+\sqrt{3}$ 이므로 $1+\sqrt{3}\le k\le 2\sqrt{3}$ 이다.

평면과 구가 만나서 이루는 평면은 원이다. 따라서 구의 방정식에 $z=k$를 대입하면

$x^2+y^2+(k-\sqrt{3})^2=2^2$ 에서 원의 방정식은

$$x^2+y^2=2^2-(k^2-2\sqrt{3}\,k+3)=-k^2+2\sqrt{3}\,k+1$$

이다. 따라서 반지름 r 인 원의 넓이는 πr^2 이므로 $S(k)=\pi(-k^2+2\sqrt{3}\,k+1)$이다.

문제 1-3

구하는 부피를 V라고 하자. 또 구의 중심($z=\sqrt{3}$)에서부터 $z=2\sqrt{3}$ 까지에 속하는 영역의 부피의 2배가 된다. 따라서 중심의 윗부분 부피를 먼저 구하면 아래와 같다.

첫째, 공통의 영역이 원기둥인 부피를 V_1 이라 하면 $z=\sqrt{3}$ 에서 $z=1+\sqrt{3}$ 까지이므로

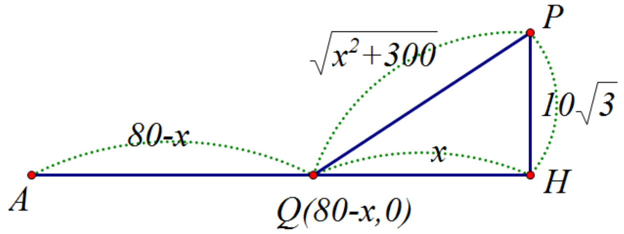
$$V_1=1\cdot\pi\cdot(\sqrt{3})^2=3\pi$$

둘째, 공통의 영역이 구인 부피 V_2는 (문제1-2)에 의하여

$$V_2=\pi\int_{1+\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}(4-(k-\sqrt{3})^2)dk=\pi\left[4k-\frac{1}{3}(k-\sqrt{3})^3\right]_{1+\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}=\pi\left(3\sqrt{3}-\frac{11}{3}\right)$$

$$\therefore V=2(V_1+V_2)=6\pi+6\sqrt{3}\,\pi-\frac{22}{3}\pi=\left(6\sqrt{3}-\frac{4}{3}\right)\pi$$

문제 2-1



위의 그림과 같이 수평으로 달려간 거리를 $80-x$, 수영으로 간 거리를 $\sqrt{x^2+300}$ 으로 생각할 수 있다. 이 때 최소시간 $t=f(x)$로 나타낼 수 있는데

$f(x)=\dfrac{80-x}{2}+\sqrt{x^2+300}$ $\quad(0<x<80)$이다. 왼쪽 식을 x에 관하여 미분하면

$f'(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+300}}$ 이다. 방정식 $f'(x)=0$을 풀면 $x=10$에서 극소이자 최솟값을 갖고

$f(10)=35+20=55$이다.

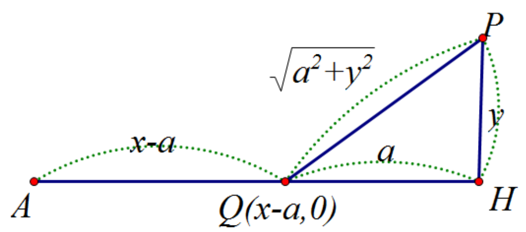
x	0	$\cdots$	10	$\cdots$	80
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	55	↗	

따라서 최소시간은 55초이다.

문제 2-2

위의 상황을 <문제2-1>과 같은 방법으로 표현하면 아래와 같다. 이 때, 점 P (x,y)라고 하자. 이 때, 걸어간 거리를 $x-a$, 수영해서 간 거리를 $\sqrt{a^2+y^2}$ 이라고 하자.

$t=f(a)=\dfrac{x-a}{2}+\sqrt{a^2+y^2}$ $\quad(0\le a\le x, y\ge 0)$ 왼쪽 식을 a로 미분하면



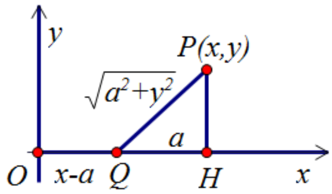
$f'(a)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}=0$에서 $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}y$를 구할 수 있다.

그런데 주어진 조건에서 $x-a=50$에서 $a=x-50$이고 이것을 정리하면

$\therefore y=\sqrt{3}(x-50)$ (단, $y\ge 0$이므로, $x\ge 50$이다.)

문제 2-3

아래의 그림과 같이 수상안전원의 위치를 원점(O)로 생각하고 도달 가능한 지점을 P$(x,\ y)$ 라고 생각하자.



$t=f(a)=\dfrac{x-a}{2}+\sqrt{a^2+y^2}\le 60\ \ (0\le a\le x,\ y\ge 0)\cdots①$이 성립한다.

첫째, 수영으로만 갈 수 있는 최대 거리는 60m이고, 이 경우 $x-a=0$이다.

<문제 2-2>와 같이 위의, ①식의 미분에서 $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}y$ 이므로 $x=a$를 대입하면

$y=\sqrt{3}\,x\cdots②$ 이다.

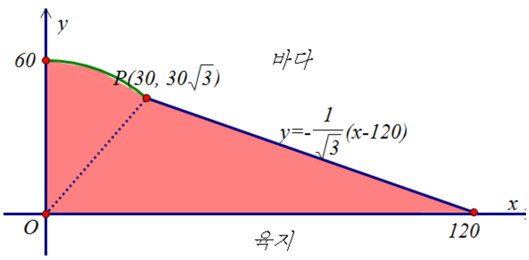
②를 ①에 대입하면 $2x\le 60$에서 $0\le x\le 30$이다. 따라서 수영만으로 구조할 수 있는 영역은 중심각이 $\dfrac{\pi}{6}$이고 반지름이 60인 부채꼴 모양이다.

둘째, 일정한 거리를 달려가고 수영을 하는 경우, 즉, $x-a\ne 0$인 경우,

위의 ①식에 $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}y$ 를 대입하면 $\dfrac{x-\dfrac{y}{\sqrt{3}}}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}y\right)^2+y^2}\le 60$이다. 왼쪽 식을 정리하면

$$\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\le 60\ \cdots③,\ \text{또}\ \ 30\le x\le 120,\ 0\le y\le 30\sqrt{3}\ \cdots④$$

셋째, 위의 첫째와 둘째 조건을 만족하는 영역의 넓이는 아래와 같다.



따라서 위의 영역의 넓이는 $300\pi+1800\sqrt{3}$

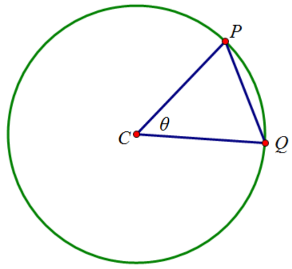
넷째, 위의 그림은 원점을 중심으로 오른쪽만 나타냈으므로 반대방향을 생각하면 전체 넓이는 위에서 계산한 넓이의 두 배이다.

따라서 구하는 넓이 $S=600\pi+3600\sqrt{3}\,(m^2)$이다.

문제 3-1

구의 중심이 C(1,1,1,)이므로 $\overline{PC}=1$, $\overline{QC}=1$, $\overline{PQ}=1$ 따라서 $\triangle PCQ$는 정삼각형이고 점 P, Q를 지나는 대원에서 호 PQ의 중심각의 크기를 θ라고 하면, $\theta=\frac{\pi}{3}$이다.

$\overset{\frown}{PQ}=\frac{\pi}{3}$이다. 즉, $d(P,Q)=\frac{\pi}{3}$이다.



문제 3-2

직선 $\overrightarrow{BA}$의 방정식은 $x-1=y-1=\frac{z-1}{-\sqrt{2}}$이다. 따라서 이 직선 위의 임의의 점은

$x=t+1,\ y=t+1,\ z=-\sqrt{2}t+1$ …①을 구의 방정식에 대입하면

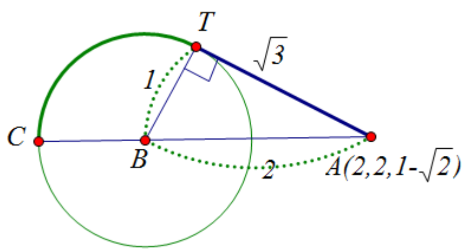
$t^2+t^2+2t^2=1$에서 $t=\pm\frac{1}{2}$ 따라서 구와 교차하는 두 점은

$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)$와 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{-\sqrt{2}+2}{2}\right)$이다. 이 중 A에서 먼 쪽의 점은

$C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)$이다.

문제 3-3

$d(A,\ C)$는 점 A와 점 C를 실로 연결할 때, 실의 길이의 최솟값이므로 $d(A,\ C)$는 아래 그림의 굵은 실선의 길이와 같다.



위의 그림에서 $\overline{AT}$는 점 A에서 구에 그은 접선이다.

$\triangle BTC$에서 $\overline{BC}=1$, $\overline{BA}=2$, $\overline{AT}=\sqrt{3}$ 이므로, $\angle ABT=\frac{\pi}{3}$임을 알 수 있다.

$d(A,C)=\overline{AT}+\overset{\frown}{TC}=\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi$

문제 3-4

$z=\dfrac{3}{2}$을 구의 방정식 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$에 대입하면

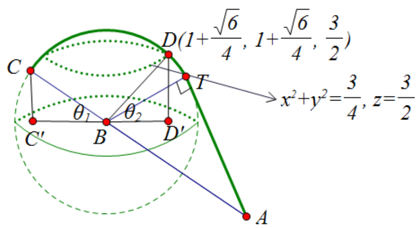
$(x-1)^2+(y-1)^2=\dfrac{3}{4}\cdots$①이다. 따라서 점 D는 원 ① 위에 있는 점이다.

또 원 ①의 중심 $B'\left(1,1,\dfrac{3}{2}\right)$과 $A(2,2,1-\sqrt{2})$와 점D가 같은 평면에 있어야 $d(A,D)$가 최솟값을 가진다. 따라서 점 D 는 평면 $x=y$ 위의 점이다.

이제 ①에 $x=y$를 대입하면 $D\left(1+\dfrac{\sqrt{6}}{4},1+\dfrac{\sqrt{6}}{4},\dfrac{3}{2}\right)$를 구할 수 있다.

그런데 $\overline{AD}=\sqrt{\left(1-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2+\left(1-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2+\left(-\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2}>\sqrt{3}$

이것은 $d(A,D)=\overset{\frown}{DT}+\overline{AT}$ 로 계산해야 함을 의미한다.



한편, $d(A,D)=\overset{\frown}{DT}+\overline{AT}=d(A,C)-\overset{\frown}{CD}$ (점C 도 평면 $x=y$ 위의 점이다.)
이제 호 CD를 계산하기 위하여 $\angle CBC'=\theta_1$과 $\angle DBD'=\theta_2$라고 하자.
이 때, 점 C'과 D'은 점 C 와 점 D 의 평면 $z=1$로의 정사영이다.

$B(1,1,1)$, $C\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}+2}{2}\right)$에서 $\overrightarrow{BC}=\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$B(1,1,1)$, $C'\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$에서 $\overrightarrow{BC'}=\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$

따라서 $\cos\theta_1=\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0}{1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 즉 $\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$이다.

같은 방법으로 $B(1,1,1)$와 $D\left(1+\dfrac{\sqrt{6}}{4},1+\dfrac{\sqrt{6}}{4},\dfrac{3}{2}\right)$에서 $\overrightarrow{BD}=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4},\dfrac{\sqrt{6}}{4},\dfrac{1}{2}\right)$

$D'\left(1+\dfrac{\sqrt{6}}{4},1+\dfrac{\sqrt{6}}{4},1\right)$, $\overrightarrow{BD'}=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4},\dfrac{\sqrt{6}}{4},0\right)$ 이다.

$\cos\theta_2=\dfrac{\frac{6}{16}+\frac{6}{16}+0}{1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 즉 $\theta_2=\dfrac{\pi}{6}$이다.

따라서 $\angle CBD=\pi-\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{7}{12}\pi$이고 $\overset{\frown}{CD}=\dfrac{7}{12}\pi$

$d(A,D)=\overset{\frown}{DT}+\overline{AT}=d(A,C)-\overset{\frown}{CD}=\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{7}{12}\pi=\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{12}$

20 숭실대학교 모의[20]

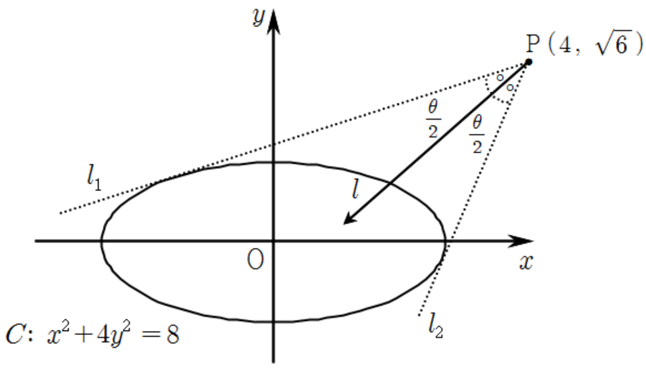
문제 1-A 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)

두 각 α, β의 합 $\alpha+\beta$와 차 $\alpha-\beta$의 탄젠트 함수를 각 α, β의 탄젠트 함수를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

[출처 : 수학 Ⅱ 삼각함수]

좌표평면에 타원 $C: x^2+4y^2=8$ 과 점 $\mathrm{P}(4, \sqrt{6})$ 가 주어져 있다. 다음 문항에 답하시오.



(1) 점 P에서 타원 C에 그은 두 접선 l_1, l_2 의 기울기를 <u>각각</u> 구하시오.

(2) 두 접선 l_1, l_2가 이루는 예각 θ는 60° 보다 작음을 보이시오.

(3) 두 접선 l_1, l_2가 이루는 예각 θ의 이등분선 l의 방정식을 구하시오.

20) 숭실대학교 홈페이지

문제 1-B 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)

(가) 어떤 구간 $[\alpha, \beta]$ 의 모든 실숫값을 가지는 변수 X에 대하여 구간 $[\alpha, \beta]$ 를 정의역으로 하는 어떤 함수 $f(x)$ 가 조건

(i) $f(x) \geq 0 \quad (\alpha \leq x \leq \beta)$

(ii) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 1$

(iii) $\mathrm{P}(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx \quad (\alpha \leq a \leq b \leq \beta)$

을 만족할 때, X를 **연속확률변수**라 하고, 함수 $f(x)$ 를 연속확률변수 X의 **확률밀도함수**라고 한다.

[출처 : 미적분과 통계 기본 「통계」]

(나) 사건 A가 일어났다는 조건 하에서 사건 B가 일어날 확률을 **사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부 확률**이라 하고, 기호 $P(B|A)$ 로 나타내며 다음과 같이 정의한다.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad (\text{단, } P(A) > 0\ )$$

[출처 : 미적분과 통계 기본 「조건부확률」]

원석가루 1톤에는 $0 \sim 1.0\,\mathrm{kg}$ 사이의 금이 포함되어 있다. 원석가루 1톤의 금 함유량(kg)을 연속확률변수 X로 정의하면 X의 확률밀도함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = 2 - 2x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

원석가루로부터 금을 제련하는 기계에는 신형과 구형 두 종류가 있다. 신형 기계는 전체 금 함유량의 60%를 추출해내지만, 구형 기계는 50%만을 추출해 낸다. 즉, 원석가루 1톤으로부터 생산되는 금의 질량(kg)을 W로 정의하면 다음과 같다.

$$W = \begin{cases} 0.6\,X, & \text{신형 기계로 제련하는 경우} \\ 0.5\,X, & \text{구형 기계로 제련하는 경우} \end{cases}$$

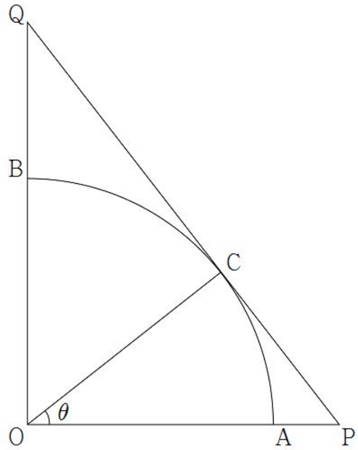
다음 문항에 답하시오.

(1) 신형 기계를 사용할 때와 구형 기계를 사용할 때 원석가루 1톤으로부터 0.2 kg 이하의 금이 생산될 확률을 각각 구하시오.

(2) 어느 제련공장에서는 총 10대의 기계로 금을 제련하고 있는데 9대는 신형, 1대는 구형이다. 임의의 기계를 선택하여 원석가루 1톤을 제련하는데 0.2 kg 이하의 금이 생산되었다고 할 때, 이 기계가 구형 기계일 확률을 구하시오.

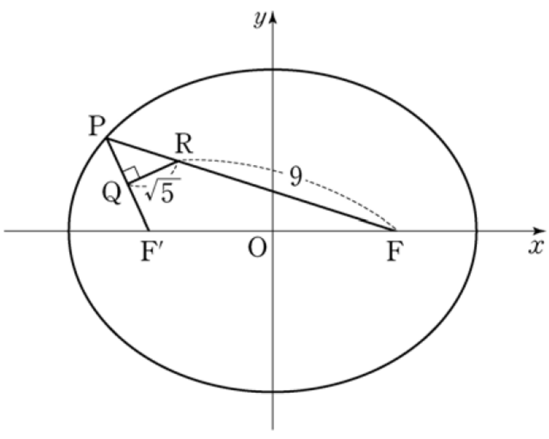
풀어보기 [문제1]

그림과 같이 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. $\angle COA=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$가 되도록 호 AB 위의 점 C를 잡고, 점 C에서의 접선이 변 OA의 연장선, 변 OB의 연장선과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=15$일 때, $\tan 2\theta$의 값을 구하시오.



풀어보기 [문제2]

그림과 같이 두 초점이 $F(c,0)$, $F'(-c,0)$인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 타원 위에 있고 제 2사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 PF′의 중점을 Q, 선분 PF를 $1:3$으로 내분하는 점을 R라 하자. $\angle PQR=\frac{\pi}{2}$, $\overline{QR}=\sqrt{5}$, $\overline{RF}=9$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 양수이다.)

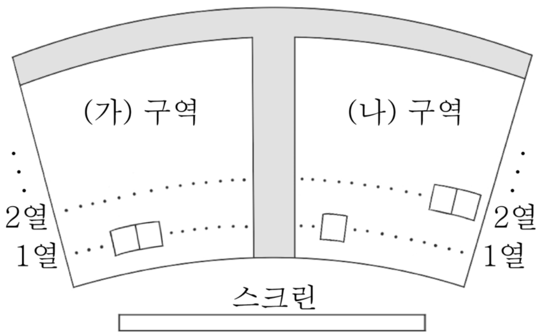


풀어보기 [문제3]

어느 회사의 직원은 모두 60명이고, 각 직원은 두 개의 부서 A, B 중 한 부서에 속해 있다. 이 회사의 A 부서는 20명, B 부서는 40명의 직원으로 구성되어 있다. 이 회사의 A 부서에 속해 있는 직원의 50%가 여성이다. 이 회사 여성 직원의 60%가 B 부서에 속해 있다. 이 회사의 직원 60명 중에서 임의로 선택한 한 명이 B 부서에 속해 있을 때, 이 직원이 여성일 확률은 p이다. $80p$의 값을 구하시오.

풀어보기 [문제4]

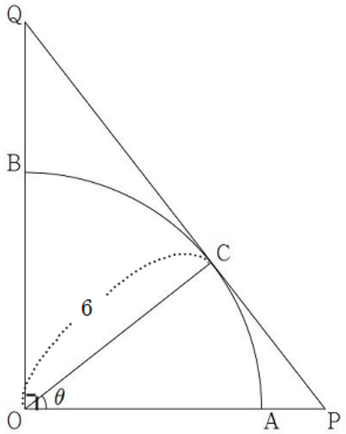
5명의 학생 A, B, C, D, E가 같은 영화를 보기 위해 함께 상영관에 갔다. 상영관에는 그림과 같이 총 5개의 좌석만 남아 있었다. (가) 구역에는 1열에 2개의 좌석이 남아 있었고, (나) 구역에는 1열에 1개와 2열에 2개의 좌석이 남아 있었다. 5명의 학생 모두가 남아 있는 5개의 좌석을 임의로 배정받기로 하였다. 학생 A와 B가 서로 다른 구역의 좌석을 배정받았을 때, 학생 C와 D가 같은 구역에 있는 같은 열의 좌석을 배정받을 확률을 구하시오.



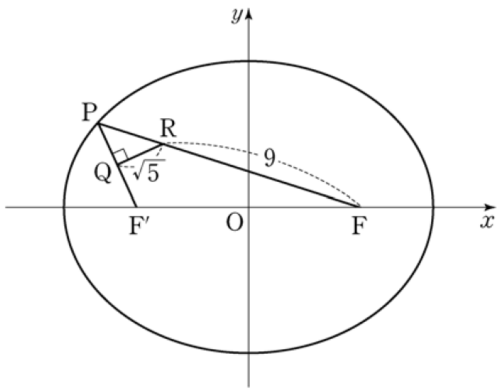
예시답안

풀어보기 [문제1]

$\overline{PC}=6\tan\theta$, $\overline{CQ}=6\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$, $\overline{PQ}=\overline{PC}+\overline{CQ}=15$이므로 $6\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+6\tan\theta=15$, $\frac{6}{\tan\theta}+6\tan\theta=15$, $2\tan^2\theta-5\tan\theta+2=0$, $(2\tan\theta-1)(\tan\theta-2)=0$이다. 그러므로 $\tan\theta=\frac{1}{2}$ 또는 $\tan\theta=2$, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이므로 $\tan\theta=\frac{1}{2}$이다. 따라서 $\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{4}{3}$이다.



풀어보기 [문제2]



직각삼각형 PQR에서 $\overline{PR}=\frac{1}{3}\overline{PF}=3$이므로, $\overline{PQ}=\overline{QF'}=k$라 하면 $k^2+5=9$이다. $k>0$이므로 $k=2$이다. 이때 $\overline{PF'}=2\times2=4$, $\overline{PF}=3+9=12$이고 $\overline{PF}+\overline{PF'}=12+4=16$이다. 따라서 주어진 타원의 장축의 길이는 16이다. 그러므로 $2a=16$, $a=8$이다. 한편 직각삼각형 PQR

에서 $\angle \mathrm{QPR} = \theta$라 하면 $\cos\theta = \dfrac{2}{3}$ 이다. 따라서 삼각형 FPF′에서 코사인 정리에 의해

$\overline{\mathrm{FF'}}^{\,2} = 12^2 + 4^2 - 2\times 12 \times 4 \times \cos\theta = 96$, $\overline{\mathrm{FF'}} = 4\sqrt{6}$ 이다. 따라서 $c = \dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{FF'}} = 2\sqrt{6}$ 이므로

$a^2 - b^2 = (2\sqrt{6})^2$, $b^2 = 64 - 24 = 40$, $a^2 + b^2 = 64 + 40 = 104$ 이다.

풀어보기 [문제3]

직원 60명을 두 부서 A, B와 남자, 여자로 나누어 표로 나타내면 다음과 같다.

	A부서	B부서
남자	10	
여자	10	$0.6n$

여성 직원의 수를 n이라 하면 B 부서에 속해있는 여성 직원의 수는 $0.6n$이므로 $n = 10 + 0.6n$에서 $n = 25$이다. 임의로 택한 직원이 B 부서인 사건을 E, 여성 직원인 사건을 F라 하면 $\mathrm{P}(F|E) = \dfrac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)} = \dfrac{\frac{0.6n}{60}}{\frac{40}{60}} = \dfrac{15}{40} = \dfrac{3}{8}$ 이다. 따라서 $p = \dfrac{3}{8}$ 이므로

$80p = 80 \times \dfrac{3}{8} = 30$ 이다.

풀어보기 [문제4]

학생 A와 B가 서로 다른 구역의 좌석을 배정받는 사건을 T, 학생 C와 D가 같은 구역에 같은 열의 좌석을 배정받는 사건을 U라 하자. 그러면

$$\mathrm{P}(T) = \frac{2\times(2\times 3\times 3!)}{5!} = \frac{3}{5}$$

두 학생 A, B가 서로 다른 구역에 배정받을 때, 두 학생 C, D가 (나) 구역의 2열에 배정받아야 하므로

$$\mathrm{P}(U\cap T) = \frac{2\times(2\times 1\times 2!)}{5!} = \frac{1}{15}$$

따라서 $\mathrm{P}(U|T) = \dfrac{\mathrm{P}(U\cap T)}{\mathrm{P}(T)} = \dfrac{1}{9}$이다.

문제 1-A

(1) 점 P에서 타원 C에 그은 접선의 기울기를 m이라 하자. 그러면 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{8m^2 + 2}$$

이다. 점 $\mathrm{P}(4, \sqrt{6})$가 접선 위의 점이므로

$$\sqrt{6}=4m\pm\sqrt{8m^2+2}\ ,\ (4m-\sqrt{6})^2=8m^2+2\ ,\ 2m^2-2\sqrt{6}m+1=0,\ m=\frac{\sqrt{6}\pm2}{2}$$

따라서 두 접선 l_1, l_2 의 기울기는 각각 $\frac{\sqrt{6}-2}{2}$, $\frac{\sqrt{6}+2}{2}$ 이다.

(2) 직선 l_1과 x축이 이루는 예각의 크기를 α, 직선 l_2와 x축이 이루는 예각의 크기를 β라 하자. 그러면 $\theta=\beta-\alpha$, $\tan\alpha=\frac{\sqrt{6}-2}{2}$, $\tan\beta=\frac{\sqrt{6}+2}{2}$ 이므로

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2}{1+\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}<\sqrt{3}=\tan60^\circ$$

따라서 두 접선 l_1, l_2가 이루는 예각 θ는 60° 보다 작다.

(3) $\tan\theta=\frac{4}{3}$ 이므로 $\cos\theta=\frac{3}{5}$ 이다. 그러므로

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}=\frac{1}{4}\ ,\ \tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$$

이다. 한편 직선 l_2와 x축이 이루는 예각의 크기를 β라 하면 직선 l과 x축이 이루는 예각의 크기는 $\beta-\frac{\theta}{2}$이므로 직선 l의 기울기는

$$\tan\left(\beta-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\tan\beta-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\beta\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{6}+2}{2}-\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{6}+2}{4}}=\frac{2\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}+6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

이다. 따라서 직선 l의 방정식은

$$y-\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}(x-4)\ ,\ y=\frac{\sqrt{6}}{3}(x-1)$$

이다.

문제 1-B

(1) 원석가루 1톤의 금 함유량(kg)을 x라고 두자. 그러면 신형 기계를 사용할 때 원석가루 1톤으로부터 0.2 kg 이하의 금이 생산되려면 $0.6x\le0.2$, $x\le\frac{1}{3}$ 이 되어야 한다. 그러므로 그 확률은 $\int_0^{\frac{1}{3}}(2-2x)dx=\frac{5}{9}$ 이다.

마찬가지로, 구형 기계를 사용할 때 원석가루 1톤으로부터 0.2 kg 이하의 금이 생산되려면

$0.5x \le 0.2$, $x \le \dfrac{2}{5}$ 가 되어야 한다. 그러므로 그 확률은 $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{5}}(2-2x)dx = \dfrac{16}{25}$ 이다.

(2) 신형 기계를 선택하는 사건과 0.2 kg 이하의 금이 생산되는 사건이 모두 일어날 확률은

$$\frac{9}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{2}$$

이고 구형 기계를 선택하는 사건과 0.2 kg 이하의 금이 생산되는 사건이 모두 일어날 확률은

$$\frac{1}{10} \times \frac{16}{25} = \frac{8}{125}$$

이다. 따라서 임의의 기계를 선택하여 원석가루 1 톤을 제련하는데 0.2 kg 이하의 금이 생산되었다고 할 때, 이 기계가 구형 기계일 확률은

$$\frac{\frac{8}{125}}{\frac{1}{2} + \frac{8}{125}} = \frac{16}{125+16} = \frac{16}{141}$$

이다.

21 연세대학교 수시[21)]

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】 자연수 n에 대하여 집합 A_n을 $A_n=\left\{\frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \cdots, \frac{2^n-1}{2^n}\right\}$ 이라 하자.

【나】 A_n의 임의의 원소 x가 주어졌을 때, 0또는 1의 값을 가지는 수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 이 존재하여 항상

$$x=\frac{a_1}{2^1}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}$$

으로만 표현되어진다. 이 때, 함수 $f_j : A_n \to \{0, 1\}$ 을 $f_j(x)=a_j$ 로 정의하자. $(j=1, 2, 3, \cdots, n)$

【다】 A_n 을 정의역으로 가지는 함수 g_j 를 $g_j(x)=2f_j(x)-1$ 로 정의한다.

문제 1-1

집합 $\{x \in A_n | f_1(x)=1\}$ 의 원소의 개수를 구하시오.(5점)

문제 1-2

$n=10$ 일 때, 집합 $\{x \in A_{10} | f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_6(x)=4\}$ 의 원소의 개수를 구하시오.(5점)

문제 1-3

$n=3$ 일 때, 함수 g_j 의 그래프 $\{(x, g_j(x)) | x \in A_3\}$ 에 대하여 $j=1, 2$ 인 경우의 그래프를 좌표평면 위에 각각 나타내시오.(5점)

문제 1-4

m이 n보다 작거나 같은 자연수 일 때, 다음 값을 구하시오.(10점)

$$\sum_{k=1}^{2^n}\left\{g_1\left(\frac{k-1}{2^n}\right)+g_2\left(\frac{k-1}{2^n}\right)+\cdots+g_m\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right\}^2$$

21) 연세대학교 홈페이지

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】 좌표공간에 반구면 $S=\{(x, y, z) | x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0\}$ 가 주어졌을 때, S 를 x 축을 회전축으로 하여 각 t 만큼 회전시킨 도형을 S_t 라 하자.

【나】 도형 $\{(x, y, z) \in S_t | z \geq 0\}$ 의 xy 평면 위로의 정사영을 도형 R_t 라 하자.

【다】 xy 평면 위에서 도형 R_t 를 포함하고 각 변이 좌표축에 평행한 직사각형 넓이의 최솟값을 $f(t)$ 라 하자.

【라】 xy 평면 위에서 도형 R_t 에 포함되고 각 변이 좌표축에 평행한 직사각형 넓이의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자.

문제 2-1

$t=\frac{\pi}{2}$ 일 때, 도형 R_t 의 넓이를 구하시오.(5점)

문제 2-2

모든 실수 t 에 대해 함수 $f(t)$ 를 구하고, 좌표평면 위에 그 그래프를 나타내시오.(10점)

문제 2-3

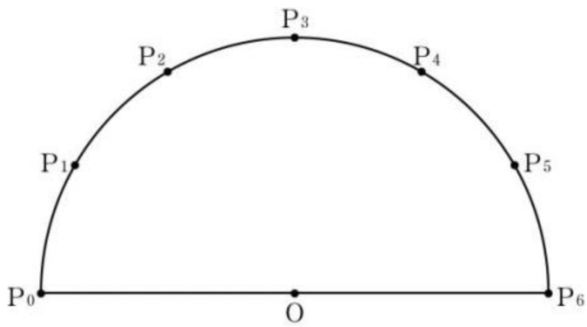
$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $g(t)$ 를 구하시오.(10점)

문제 2-4

도형 R_t 의 넓이가 $\frac{(3-\sqrt{3})}{6}\pi$ 일 때, $g(t)$ 의 값을 구하시오.(10점)

풀어보기 [문제1]

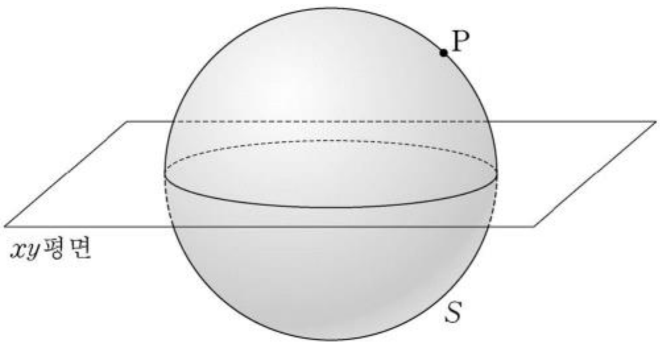
그림과 같이 반지름의 길이가 1인 반원의 호를 6등분하여 양 끝점과 각 분점을 왼쪽부터 차례로 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6이라 하자. 이 7개의 점 중에서 임의로 선택한 서로 다른 두 점을 각각 P_i, P_j $(0 \le i < j \le 6)$이라 하고, 선분 P_0P_6의 중점을 O라 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{OP_i}$, $\overrightarrow{OP_j}$의 내적 $\overrightarrow{OP_i} \cdot \overrightarrow{OP_j}$의 값을 확률변수 X라 할 때, $E(X) = \dfrac{q\sqrt{3}}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)
(2014년 10월 전국연합)



풀어보기 [문제2]

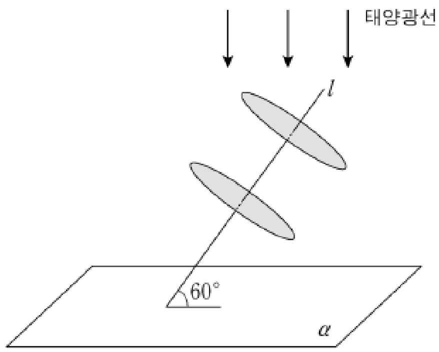
좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=50$과 점 P$(0, 5, 5)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (2014년도 대수능)

(가) 원 C는 점 P를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다. (나) 원 C의 반지름의 길이는 1이다.



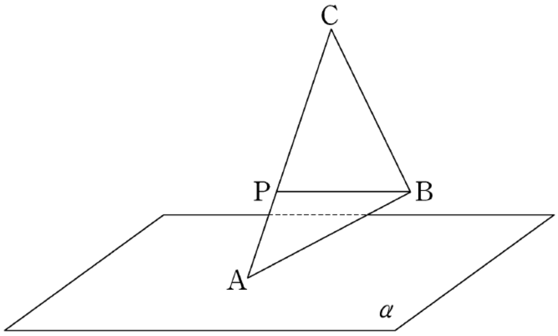
풀어보기 [문제3]

그림과 같이 중심 사이의 거리가 $\sqrt{3}$이고 반지름의 길이가 1인 두 원판과 평면 α가 있다. 각 원판의 중심을 지나는 직선 l은 두 원판의 면과 각각 수직이고, 평면 α와 이루는 각의 크기가 60°이다. 태양광선이 그림과 같이 평면 α에 수직인 방향으로 비출 때, 두 원판에 의해 평면 α에 생기는 그림자의 넓이를 구하시오. (단, 원판의 두께는 무시한다.) (2011년 대수능)



풀어보기 [문제4]

그림과 같이 평면 α 위에 점 A가 있고, α로부터의 거리가 각각 1, 3인 두 점 B, C가 있다. 선분 AC를 1:2로 내분하는 점P에 대하여 $\overline{BP}=4$이다. 삼각형 ABC의 넓이가 9일 때, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. S^2의 값을 구하시오. (2012년 9월 평가원)



예시답안

풀어보기 [문제1]

7개의 점 중 서로 다른 2개의 점을 선택하는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_2=21$이다. 서로 다른 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}_j}$가 이루는 각의 크기를 θ_k라 하면 $\theta_k=\frac{k}{6}\pi\ (k=1,2,3,4,5,6)$이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP}_j}|=1$ 이므로 $X=\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_j}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}||\overrightarrow{\mathrm{OP}_j}|\cos\theta_k=\cos\theta_k$ 가 되는 두 점의 순서쌍은 $(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_k)$, $(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_{k+1})$, $\cdots$, $(\mathrm{P}_{6-k},\mathrm{P}_6)$으로 $7-k$가지이고, $\cos\theta_k$의 값은 차례로 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1이다. 따라서 확률변수 X의 확률분포를 나타내는 표는 다음과 같다.

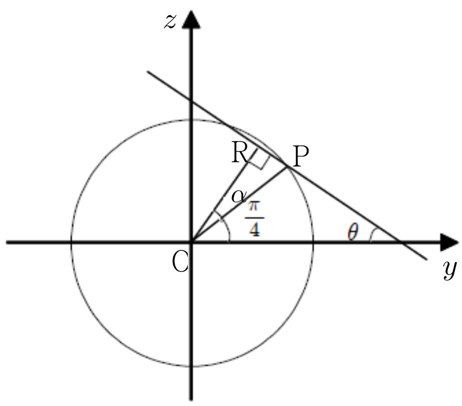
X	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$	1

$$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{21}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{2}{21}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{21}+0\times\frac{4}{21}$$
$$+\frac{1}{2}\times\frac{5}{21}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{6}{21}=\frac{2\sqrt{3}}{21}$$

따라서 $p+q=21+2=23$이다.

풀어보기 [문제2]

원 C를 포함하는 평면과 xy평면이 이루는 각을 θ라 하자. 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는 $\cos\theta\pi$이므로 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이가 최대가 되기 위해서는 θ가 최소가 되어야 한다. 따라서 원 C를 포함하는 평면은 yz 평면과 수직이고 원 C 위의 임의의 점의 z좌표는 점 P 의 z좌표보다 크거나 같다. 이때 yz 평면으로 자른 단면은 그림과 같다.



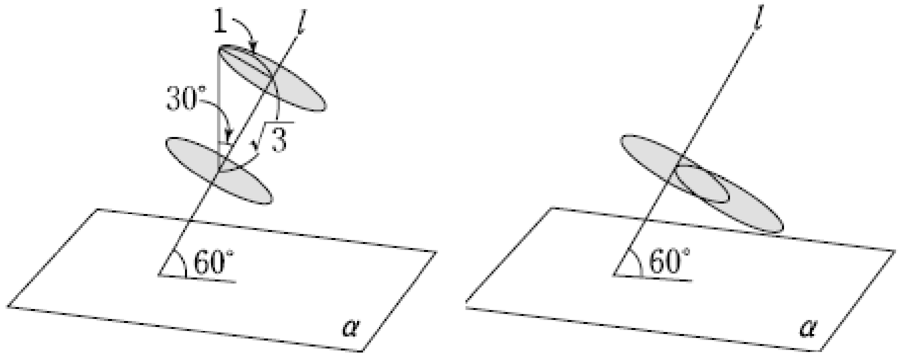
원 C의 중심을 점 R, $\angle \mathrm{POR}=\alpha$라 하면 $\overline{\mathrm{OP}}=5\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{RP}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{OR}}=7$이다. 따라서 $\sin\alpha=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$ 이다.

그러므로 $\cos\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{7}{5\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{5}$

원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{4}{5}\pi$이므로 $p+q=9$이다.

풀어보기 [문제3]

그림의 원판을 태양광선 방향으로 평행이동하여 만나게 하면 윗 원판이 아래 원판의 중심을 지난다.



겹친 원판의 넓이 S는 아래 그림의 빗금친 부분의 넓이를 S_1이라 하면

$S=2\times\pi\times1^2-2S_1$ 이다. S_1은 중심각이 $\dfrac{2}{3}\pi$인 활꼴이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\times1^2\times\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

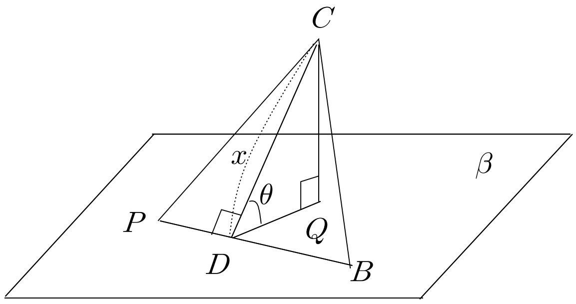
$$\therefore\ S=2\pi-\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

그런데 구하는 그림자의 넓이 S'은 평면과 이루는 각이 $\dfrac{\pi}{6}$인 정사영이므로

$$S'=\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\cos\frac{\pi}{6}=\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{4}$$

풀어보기 [문제4]

점 P가 선분 AC를 1 : 2 로 내분하는 점이고, 점 C에서 평면 α에 이르는 거리가 3이므로 점 P에서 평면 α에 이르는 거리는 1이다. 따라서, 직선 PB는 평면 α와 평행하다. 삼각형 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.
평면 α에 평행하고 직선 PB를 포함하는 평면을 β라고 하면 삼각형 PBC와 평면 β가 이루는 각의 크기도 θ이다.



점 C에서 직선 PB에 내린 수선의 발을 D라 하고, 점 C에서 평면 β에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{DQ} \perp \overline{PB}$ 이므로 $\angle CDQ = \theta$ 이다. $\overline{CQ} = 3-1 = 2$ 이므로 $\overline{CD} = x$ 라 하면 $\sin\theta = \frac{2}{x}$ 이다. 삼각형 ABC의 넓이가 9이므로 삼각형 PBC의 넓이는 $9 \times \frac{2}{3} = 6$ 이다. 따라서 $\frac{1}{2} \times \overline{PB} \times x = 6$ 에서 $\frac{1}{2} \times 4 \times x = 6$, $x = 3$ 이다.

$$\therefore \ \sin\theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \ \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

따라서, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이 S는
$S = 9\cos\theta = 9 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = 3\sqrt{5}$ 이다. $\therefore \ S^2 = 45$

문제1-1

$\frac{2^{n-1}}{2^n}, \frac{2^{n-1}+1}{2^n}, \frac{2^{n-1}+2}{2^n}, \cdots, \frac{2^n-1}{2^n}$ 까지 모두 2^{n-1} 개다.
(참고) 분자를 이진법으로 표시하면 각 자리의 숫자가 1인 것의 개수가 모두 같으므로 집합 $\{x \in A_n \mid f_j(x) = 1\}$ $(j = 1, 2, 3, \cdots, n)$의 원소의 개수는 모두 2^{n-1} 개다.

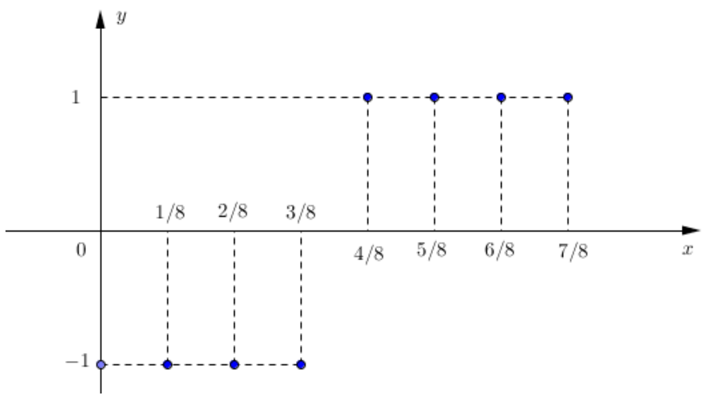
문제1-2

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=4$ 이고, $a_j(j=1,2,3,\cdots,6)$는 0이 2개, 1이 4개이므로 같은 것이 있는 순열에 의해 $\frac{6!}{2!4!}={}_6\mathrm{C}_4=15$ 이고, $a_j(j=7,8,9,10)$은 모두 0또는 1이 될 수 있으므로 원소의 개수는 $15\times 2^4=240$ 개다.

문제1-3

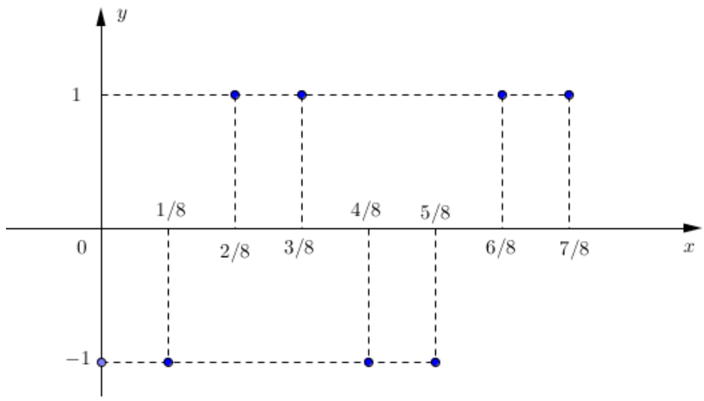
(i) $f_1(x)=a_1$, $x=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}$, $g_1(x)=2f_1(x)-1$ 이므로 다음과 같다.

x	$\frac{0}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$
$f_1(x)$	0	0	0	0	1	1	1	1
$g_1(x)$	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1



(ii) $f_2(x)=a_2$, $x=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}$, $g_2(x)=2f_2(x)-1$ 이므로 다음과 같다.

x	$\frac{0}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$
$f_2(x)$	0	0	1	1	0	0	1	1
$g_2(x)$	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1



문제1-4

$g_j(x) = 2f_j(x) - 1$ 에 의해

$$\sum_{k=1}^{2^n}\left[2\left\{f_1\left(\frac{k-1}{2^n}\right)+f_2\left(\frac{k-1}{2^n}\right)+\cdots+f_m\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right\}-m\right]^2$$

이고, $0 \le i \le m$ 인 각 i 인 것의 개수가 [논제 1-2]에 의해 ${}_m\mathrm{C}_i 2^{n-m}$ 개씩 있으므로

$$\sum_{k=1}^{2^n}\left[2\left\{f_1\left(\frac{k-1}{2^n}\right)+f_2\left(\frac{k-1}{2^n}\right)+\cdots+f_m\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right\}-m\right]^2 = \sum_{i=0}^{m}(2i-m)^2 \times {}_m\mathrm{C}_i \times 2^{n-m}$$

이다. 식을 정리하면

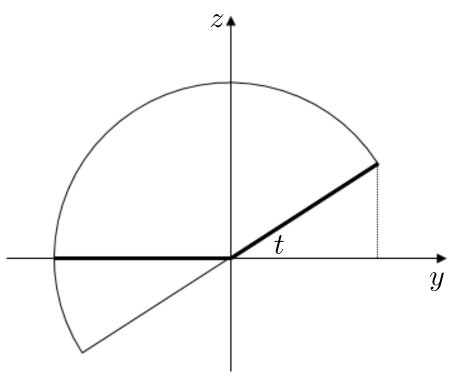
$$2^{n+2}\sum_{i=0}^{m}\left(i-\frac{m}{2}\right)^2 \times {}_m\mathrm{C}_i \times \left(\frac{1}{2}\right)^i \times \left(\frac{1}{2}\right)^{m-i}$$

이고 준식은 이항분포 $\mathrm{B}\left(m, \frac{1}{2}\right)$를 따르는 이산확률변수 X에 대하여 $2^{n+2}V(X)$와 같다. 따라서 $2^{n+2} \times m \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = m \times 2^n$ 이다.

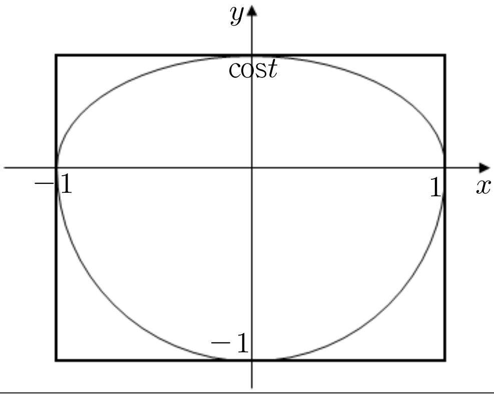
문제2-1

반지름이 1인 반원의 넓이이므로 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

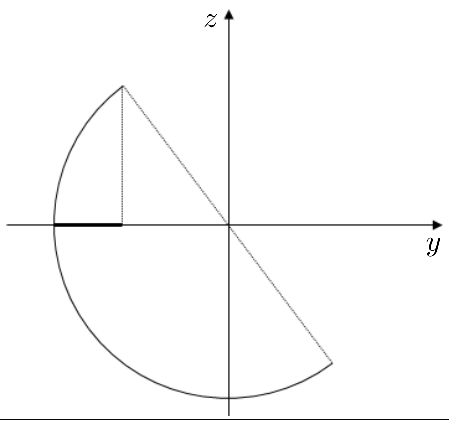
문제2-2



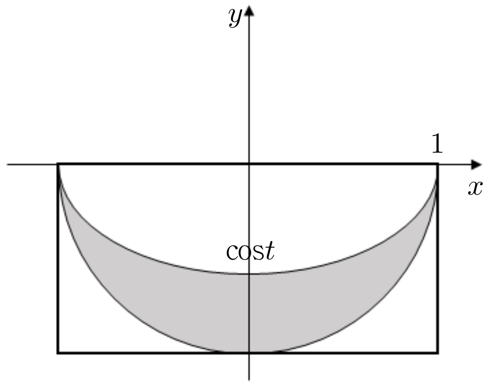
$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ 에서 yz 평면



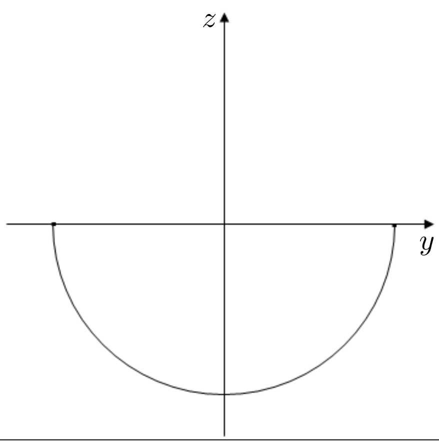
$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ 에서 xy 평면



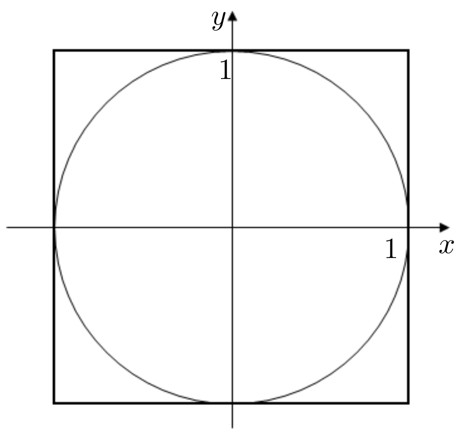
$\frac{\pi}{2} \le t < \pi$ 에서 yz 평면



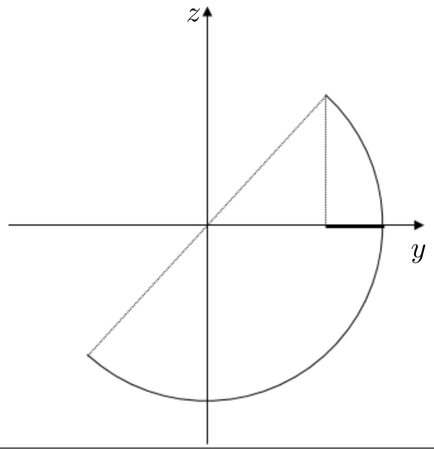
$\frac{\pi}{2} \le t < \pi$ 에서 xy 평면



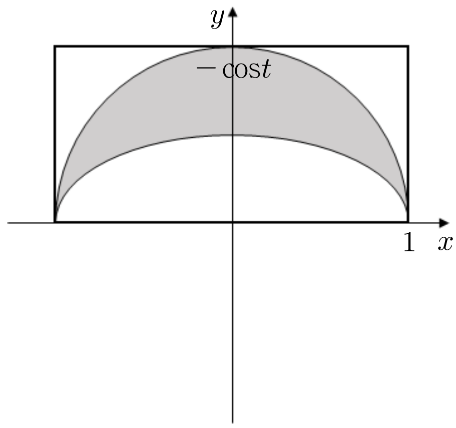
$t = \pi$ 에서 yz 평면



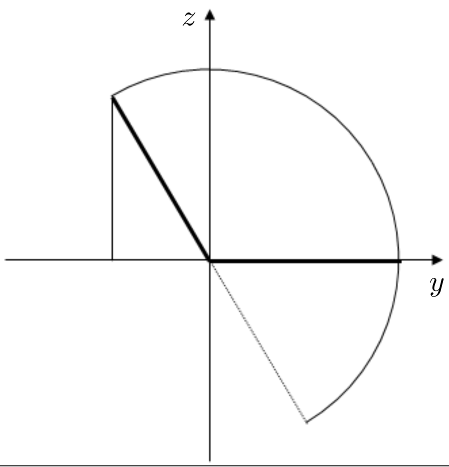
$t = \pi$ 에서 xy 평면



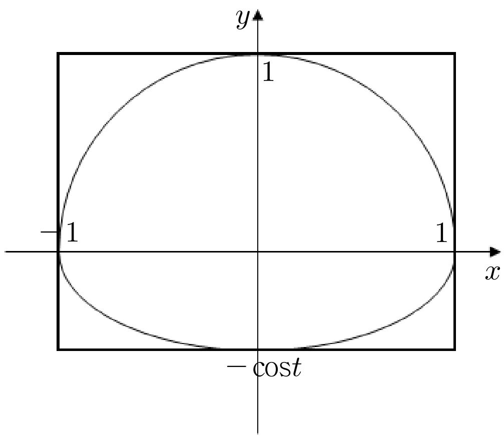
$\pi < t \le \dfrac{3}{2}\pi$ 에서 yz 평면



$\pi < t \le \dfrac{3}{2}\pi$ 에서 xy 평면



$\dfrac{3}{2}\pi < t \le 2\pi$ 에서 yz 평면

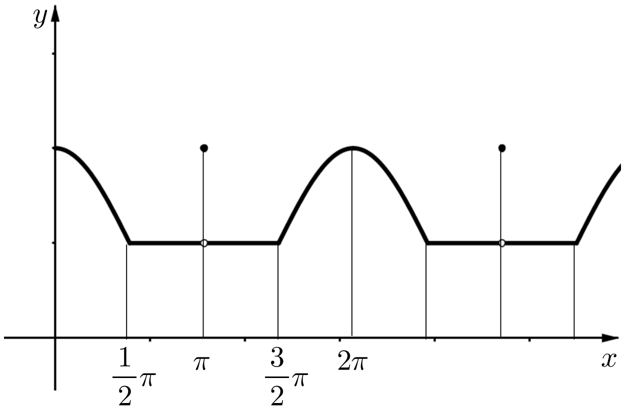


$\dfrac{3}{2}\pi < t \le 2\pi$ 에서 xy 평면

반지름의 길이가 1 인 원에 외접하는 직사각형 넓이의 최솟값은 4 이므로

$$f(t)=\begin{cases} 2(1+\cos t) & 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \\ 2 & \dfrac{\pi}{2} \le t < \pi \\ 4 & t=\pi \\ 2 & \pi < t \le \dfrac{3\pi}{2} \\ 2(1+\cos t) & \dfrac{3\pi}{2} < t \le 2\pi \end{cases}$$

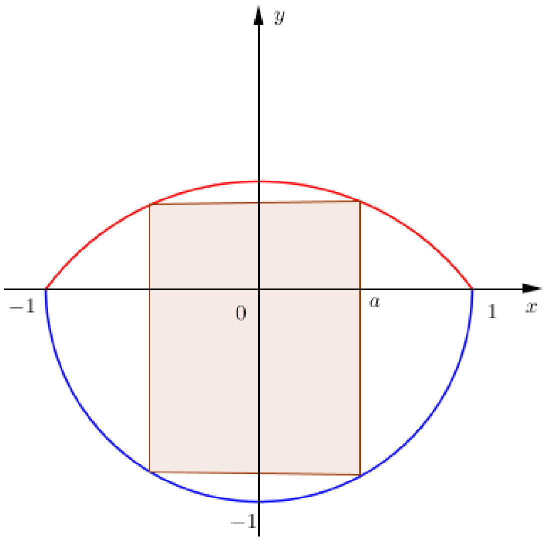
이고 $f(t)=f(2\pi+t)$ 이다. 따라서 함수 $f(t)$ 의 그래프는 아래와 같다.



문제2-3

원의 방정식은 $x^2+y^2=1$, 타원의 방정식은 $x^2+\frac{y^2}{\cos^2 t}=1$ 이므로

직사각형의 넓이는 $S(a)=2a\times\left(\sqrt{1-a^2}+\cos t\sqrt{1-a^2}\right)=2a\sqrt{1-a^2}\,(1+\cos t)$ 이다.

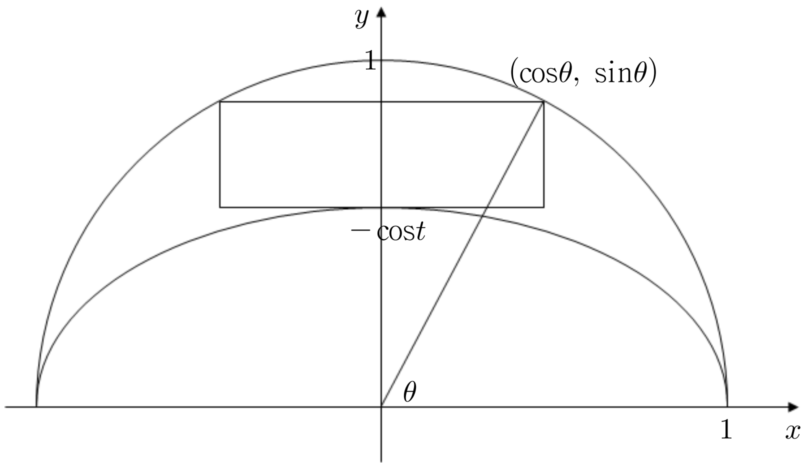


$S'(a)=2(1+\cos t)\frac{1-2a^2}{\sqrt{1-a^2}}$ 이고, $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때 최댓값은 $1+\cos t$ 이다.

그러므로 $g(t)=1+\cos t$ 이다.

문제2-4

$\frac{(3-\sqrt{3})}{6}\pi<\frac{\pi}{2}$ 이므로 문제2-2의 그림에서 $\frac{\pi}{2}<t<\frac{3\pi}{2}$ $(t\neq\pi)$이고 $g(t)$는 $t=\pi$에서 대칭이므로 $\pi<t<\frac{3}{2}\pi$라 하자. $\pi<t<\frac{3}{2}\pi$일 때, R_t의 넓이는 $\frac{\pi}{2}(1+\cos t)$ 이므로 $\frac{3-\sqrt{3}}{6}\pi=\frac{\pi(1+\cos t)}{2}$ 이다. 즉, $\cos t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다. 이제 $g(t)$를 구하자.



그림의 직사각형의 넓이 $S(\theta)=2\cos\theta(\sin\theta+\cos t)$이다. $\cos t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$을 대입하여 $S(\theta)$의 최댓값 $g(t)$를 구하자.

$$S(\theta)=\sin 2\theta-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta \ (\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2})$$

양변을 θ에 대해 미분하면

$$S'(\theta)=2\cos 2\theta+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta=-4\sin^2\theta+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta+2$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}(2\sqrt{3}\sin^2\theta-\sin\theta-\sqrt{3})=-\frac{2\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3}\sin\theta+1)(2\sin\theta-\sqrt{3})$$

이므로 $S(\theta)$는 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$일 때 최댓값을 갖는다. $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$이므로

최댓값 $g(t)=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 이다.

22 이화여자대학교 모의 자연계열 II 22)

논제1

두 수열 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 이 다음의 부등식과 점화식으로 정의되어 있다.

$0 < x_1 < y_1$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $x_n < x_{n+1}$과 $y_{n+1} < y_n$이 성립함을 보이시오. [10점]

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $0 < y_{n+1} - x_{n+1} < \dfrac{1}{2^n}(y_1 - x_1)$이 성립함을 보이시오. [10점]

(3) 두 수열 중 하나가 수렴하면 다른 하나도 수렴하는 것을 보이고, 이 경우에 두 수열의 극한값이 같음을 보이시오. [10점]

논제2

좌표평면 위의 점 (x, y)가 부등식 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 \le 1$을 만족할 때 다음 물음에 답하시오.

(1) 주어진 부등식을 만족하는 모든 점 (x, y)가 $x + y = 3$을 만족하지 않음을 보이시오. [7점]

(2) 점 $(4, -1)$을 지나는 기울기가 m인 직선의 모든 점이 주어진 부등식을 만족하지 않도록 하는 실수 m의 범위를 정하시오. [10점]

(3) 주어진 부등식을 만족하는 점 (x, y)에 대하여 $\dfrac{x - y - 5}{x + y - 3}$의 최댓값과 최솟값을 구하시오. [13점]

22) 이화여대 홈페이지

논제3

미분가능한 함수 $f(x)$ 가 있다. 수열 $\{x_n\}$에 대하여 $0 < x_1 < 1$ 이고 x_{n+1} 은 점 $(x_n, f(x_n))$ 에서 그은 $f(x)$ 의 접선의 $x-$축 절편으로 주어진다. 함수 $f(x)$ 가 (1), (2)와 같이 주어진 경우, 다음의 [명제]를 근거로 수열 $\{x_n\}$ 이 수렴하는지 판단하고 수렴하는 경우 그 극한값을 구하시오.

> [명제] 어떤 실수 M에 대하여 수열 $\{x_n\}$ 이 아래 조건 (a), (b) 중 하나를 만족하면 수열 $\{x_n\}$ 은 수렴한다.
>
> (a) 모든 자연수 n 에 대하여 $x_n \le x_{n+1} \le M$ 이다.
>
> (b) 모든 자연수 n 에 대하여 $x_n \ge x_{n+1} \ge M$ 이다.

(1) $f(x) = \ln x (= \log x)$ [15점]

(2) $f(x) = e^x$ [10점]

(3) $f(x) = \tan x$ [15점]

풀어보기 [문제1]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

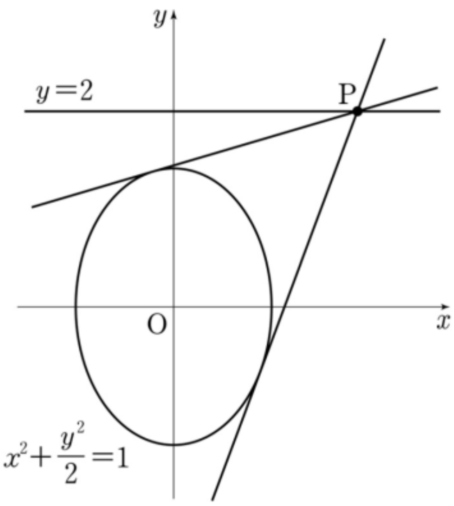
(가) $4^n < a_n < 4^n + 1$
(나) $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n < b_n < 2^{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{4a_n + b_n}{2a_n + 2^n b_n}$ 의 값은? (2014 3월 전국연합 A형)

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

풀어보기 [문제2]

직선 $y=2$ 위의 점 P에서 타원 $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 1$ 에 그은 두 접선의 기울기의 곱이 $\dfrac{1}{3}$ 이다. 점 P의 x 좌표를 k 라 할 때, k^2 의 값은? (2013년 6월 평가원)



① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

풀어보기 [문제3]

함수 $f(x) = x^3 - (a+2)x^2 + ax$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 열린구간 $(0, 5)$에서 증가할 때, a의 최솟값을 구하시오. (2010 9월 평가원)

예시답안

풀어보기 [문제1]

정답) ③

조건 (가)에서 양변을 4^n 으로 나누면

$$1<\frac{a_n}{4^n}<1+\frac{1}{4^n}$$

$\lim_{n\to\infty}1=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4^n}\right)=1$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=1$ … ㉠

조건 (나)에서

$$2+2^2+2^3+\cdots+2^n=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$$

$2^{n+1}-2<b_n<2^{n+1}$ 에서 양면을 2^n 으로 나누면 $2-\frac{2}{2^n}<\frac{b_n}{2^n}<2$

$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}2=2$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{2^n}=2$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+b_n}{2a_n+2^n b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4a_n+b_n}{4^n}}{\frac{2a_n+2^n b_n}{4^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\frac{a_n}{4^n}+\frac{b_n}{2^n}\times\frac{1}{2^n}}{2\times\frac{a_n}{4^n}+\frac{b^n}{2^n}}=\frac{4}{2+2}=1$$

풀어보기 [문제2]

정답) ②

$\mathrm{P}(k,\ 2)$로 두면 기울기가 m인 접선은 $y=mx\pm\sqrt{m^2+2}$ 이고 $\mathrm{P}(k,\ 2)$를 지나므로

$$2=mk\pm\sqrt{m^2+2},\ 2-mk=\pm\sqrt{m^2+2}$$

$$k^2m^2-4mk+4=m^2+2$$

$$(k^2-1)m^2-4km+2=0$$

두 근을 m_1, m_2라 두면 $m_1 \times m_2 = \frac{2}{k^2-1} = \frac{1}{3}$

$\therefore\ k^2 = 7$

풀어보기 [문제3]

정답) 13

$f'(x) = 3x^2 - 2(a+2)x + a$ 이므로

접선의 방정식은

$$y = \left(3t^2 - 2(a+2)t + a\right)(x-t) + t^3 - (a+2)t^2 + at$$

y절편은 $g(t) = -2t^3 + (a+2)t^2$

$$g'(t) = -6t^2 + 2(a+2)t = -2t(3t-a-2),$$

$\frac{a+2}{3} \geq 5$, $a \geq 13$, 최솟값은 13이다.

논제1

(1) 먼저 모든 자연수 n에 대하여 $0 < x_n < y_n$임을 보이자.

$n=1$일 때, $0 < x_1 < y_1$이므로 성립한다.

$n=k$일 때, $0 < x_k < y_k$이 성립한다고 가정하자.

먼저, $x_{k+1} = \sqrt{x_k y_k} > 0$ 이고

$$y_{k+1} - x_{k+1} = \frac{x_k + y_k}{2} - \sqrt{x_k y_k} = \frac{x_k + y_k - \sqrt{x_k y_k}}{2} = \frac{\left(\sqrt{y_k} - \sqrt{x_k}\right)^2}{2} > 0$$

이므로 $0 < x_{k+1} < y_{k+1}$이고 $n = k+1$일 때 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $0 < x_n < y_n$이다.

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n y_n} - x_n = \sqrt{x_n}\left(\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}\right) > 0$$

$$y_n - y_{n+1} = y_n - \frac{x_n + y_n}{2} = \frac{y_n - x_n}{2} > 0$$

이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $x_n < x_{n+1}$과 $y_{n+1} < y_n$이 성립한다.

대학발표 예시답안

(1) 산술평균과 기하평균의 관계에서 $x_n \leq y_n$이 성립함을 알고 있고, 첫 번째 조건 $0 < x_1 < y_1$에 의해 등호가 성립하지 않음을 알 수 있어서 모든 자연수 n에 대하여 $x_n < y_n$이 참이다. 그러므로

$$x_n = \sqrt{x_n x_n} < \sqrt{x_n y_n} = x_{n+1}$$

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} < \frac{y_n + y_n}{2} = y_n$$

이 성립한다.

(2) (1)에서 $y_{n+1} - x_{n+1} > 0$ 이고,

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} - \sqrt{x_n y_n} = \frac{x_n + y_n - \sqrt{x_n y_n}}{2} = \frac{\left(\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}\right)^2}{2}$$ 이다.

한편, $(y_n - x_n) - \left(\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}\right)^2 = -2x_n + 2\sqrt{x_n y_n} = 2\sqrt{x_n}\left(\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}\right) > 0$

그러므로 $y_{n+1} - x_{n+1} = \dfrac{\left(\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}\right)^2}{2} < \dfrac{y_n - x_n}{2}$ 이고

$$y_{n+1} - x_{n+1} < \frac{y_n - x_n}{2} < \frac{y_{n-1} - x_{n-1}}{2^2} < \cdots < \frac{y_1 - x_1}{2^n}$$ 이다.

따라서 $0 < y_{n+1} - x_{n+1} < \dfrac{1}{2^n}(y_1 - x_1)$ 이 성립한다.

대학발표 예시답안

(2) 산술평균과 기하평균의 관계와 $0 < x_1 < y_1$ 에서

$$0 < y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} - \sqrt{x_n y_n} < \frac{x_n + y_n}{2} - \sqrt{x_n x_n} = \frac{x_n + y_n}{2} - x_n = \frac{y_n - x_n}{2}$$

을 얻을 수 있고, 수학적 귀납법을 적용하면 모든 자연수 n에 대하여

$$0 < y_{n+1} - x_{n+1} < \frac{1}{2^n}(y_1 - x_1)$$

이 성립한다.

(3) (2)에서 $0 < y_n - x_n < \dfrac{1}{2^{n-1}}(y_1 - x_1)$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$ 이다.

만약 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 라 하면 $0 + a = \lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) + \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} y_n = a$ 이다.

마찬가지로 $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ 라 하면 $b - 0 = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ 이다.

따라서 두 수열 중 하나가 수렴하면 다른 하나도 수렴하고, 두 수열의 극한값은 같다.

대학발표 예시답안

(3) x_1과 y_1이 상수이므로 n값이 커짐에 따라 $\dfrac{1}{2^n}(y_1 - x_1) \to 0$ 이다.

만약에 $\{x_n\}$이 극한값 x에 수렴하면, $\frac{1}{2^n}(y_1-x_1)+x_{n+1}$도 n이 커짐에 따라 x에 수렴하고, (2)의 부등식을 $x_{n+1}<y_{n+1}<\frac{1}{2^n}(y_1-x_1)+x_{n+1}$으로 변형하면, 스퀴즈 정리에 의해 $\{y_n\}$도 수렴하는 수열이고 그 극한값이 x이다.

$\{y_n\}$이 극한값 y에 수렴하는 경우, (2)의 부등식을 $y_{n+1}-\frac{1}{2^n}(y_1-x_1)<x_{n+1}<y_{n+1}$으로 변형하면 스퀴즈 정리를 적용하면 $\{x_n\}$이 y로 수렴하는 수열임을 보일 수 있다.

논제2

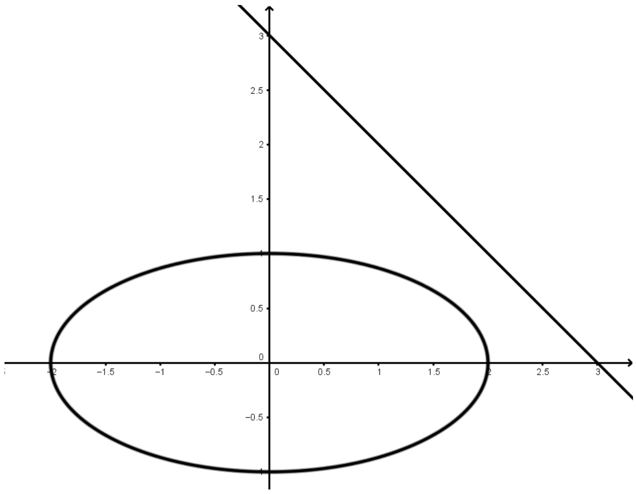
(1) 먼저, 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$와 직선 $x+y=3$의 위치관계를 생각해 보자.

두 식을 연립하여 계산하면

$$\frac{x^2}{4}+(3-x)^2=1,\ \frac{x^2}{4}+x^2-6x+9=1,\ 5x^2-24x+32=0$$

$D/4=12^2-5\times32<0$이므로 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$와 직선 $x+y=3$은 만나지 않는다.

그러므로 그림과 같이 부등식 $\frac{x^2}{4}+y^2\le1$을 만족하는 점 (x, y)는 타원의 내부(경계포함)이고, $x+y=3$을 만족하는 점 (x, y)는 직선위의 점이다. 따라서 부등식 $\frac{x^2}{4}+y^2\le1$을 만족하는 모든 점 (x, y)는 $x+y=3$을 만족하지 않는다.



대학발표 예시답안

(1) 직선 $x+y-3=0$이 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$과 만나지 않음을 보이는 것과 같은 문제이다. 기

울기가 -1인 직선이 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$와 접하는 것은

$$y=-x\pm\sqrt{4(-1)^2+1}=-x\pm\sqrt{5}$$

이며 $3>\sqrt{5}$ 이므로 직선 $x+y-3=0$은 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$과 만나지 않는다.

(**별해**) 절대부등식을 활용하면

$$5\geq\left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)(2^2+1^2)\geq(x+y)^2$$

이므로 $|x+y|\leq\sqrt{5}$ 를 만족하여야 한다. 따라서 부등식을 만족하는 점 중 $x+y=3$을 만족하는 점은 없다.

(2) 점 $(4,-1)$ 을 지나고 기울기가 m인 직선을 $y=m(x-4)-1$이라 하면

$\frac{x^2}{4}+y^2=1$에서 $\frac{x^2}{4}+(mx-4m-1)^2=1$ 이고 정리하면

$$\frac{x^2}{4}+m^2x^2+16m^2+1-8m^2x+8m-2mx=1$$

$$\left(m^2+\frac{1}{4}\right)x^2-2m(4m+1)x+8m(2m+1)=0$$

주어진 부등식 $\frac{x^2}{4}+y^2\leq1$을 만족하지 않도록 하는 실수 m의 값을 구해야 하므로

$$D/4=m^2(4m+1)^2-8m\left(m^2+\frac{1}{4}\right)(2m+1)<0$$

$$m^2(16m^2+8m+1)+2^2-8m\left(2m^3+m^2+\frac{1}{2}m+\frac{1}{4}\right)<0$$

$$m(-3m-2)<0$$

$m<-\frac{2}{3}$, 또는 $m>0$이다.

대학발표 예시답안

(2) 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 밖의 점 $(4,-1)$ 을 지나는 기울기 m인 직선 $y=m(x-4)-1$이 타원을 지나지 않으려면 $|-4a-1|>\sqrt{4a^2+1}$ 을 만족하여야 하므로, 구하는 범위는 $m>0$ 또는 $m<-\frac{2}{3}$ 이다.

(3) $\frac{x-y-5}{x+y-3}=k$라 하면 $(x-y-5)=k(x+y-3)$에서 $(x-y-5)-k(x+y-3)=0$이다.

직선 $(x-y-5)-k(x+y-3)=0$는 k의 값에 관계없이 점 $(4,-1)$ 을 직선이고 (2)의 결과와

비교해 보면 $m=-\dfrac{k-1}{k+1}$ 이므로 $-\dfrac{2}{3}\le -\dfrac{k-1}{k+1}\le 0$ 이어야 한다.
그러므로 $1\le k\le 5$이다. 따라서 최댓값은 5이고 최솟값은 1이다.

대학발표 예시답안

(3) 주어진 식의 값을 a라고 두면 $\dfrac{x-y-5}{x+y-3}=a$ 이므로,

직선 $(x-y-5)-a(x+y-3)=0$ 이 타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 을 지나도록 하는 실수 a의 범위를 구하는 문제와 같다. 실수 a에 대하여 $(x-y-5)-a(x+y-3)=0$ 을 만족하는 점들은 점 $(4,-1)$을 지나고 기울기 $\dfrac{1-a}{a+1}$ 인 직선을 나타내며, 문제 (2)에서 기울기 $\dfrac{1-a}{a+1}$ 인 직선이 타원을 지나려면 $-\dfrac{2}{3}\le\dfrac{1-a}{a+1}\le 0$ 을 만족한다. 따라서 $1\le a\le 5$으로 구해지며 실수 a의 최댓값은 5이며 최솟값은 1이다.

논제3

(1) $f(x)=\ln x$ 에서 $f'(x_n)=\dfrac{1}{x_n}$ 이므로 점 $(x_n, f(x_n))$ 에서 접선의 방정식은

$$y-\ln x_n=\frac{1}{x_n}(x-x_n)$$

이다. 그러므로 $x_{n+1}=x_n(1-\ln x_n)$ 이다.
한편, $0<x<1$ 인 모든 실수 x에 대하여 함수 $g(x)=x(1-\ln x)$ 는
$1-\ln x>1$ 이므로 $g(x)=x(1-\ln x)>x$ 이고,
$g'(x)=(1-\ln x)+x\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x>0$ 이므로 증가함수이며 $g(x)<g(1)=1$ 이다.
이제 모든 자연수 n에 대하여 $x_n\le x_{n+1}\le 1$ 임을 수학적 귀납법으로 증명하자.
먼저, $0<x_1<1$ 인 x_1에 대하여 $x_2=g(x_1)$ 이고 $x_1<g(x_1)<1$ 이므로 $x_1\le x_2\le 1$ 이다.
같은 방법으로 $x_k\le x_{k+1}\le 1$ 이라 가정하면 $x_{k+2}=g(x_{k+1})$ 이고 $x_{k+1}<g(x_{k+1})<1$ 이므로 $x_{k+1}\le x_{k+2}\le 1$ 이다. 그러므로 모든 자연수 n에 대하여 $x_n\le x_{n+1}\le 1$ 이다. 따라서 조건 (a)를 만족하므로 수열 $\{x_n\}$ 은 수렴한다.
$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$ 라 하면 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\alpha$ 이다. $x_{n+1}=x_n(1-\ln x_n)$ 에서 $n\to\infty$ 일 때,
$\alpha=\alpha(1-\ln\alpha)$ 이므로 $\alpha=1$ 이다.

대학발표 예시답안

(1) x_{n+1}은 점 $(x_n, f(x_n))$에서 그은 $f(x)$의 접선의 $x-$축 절편이므로

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{\ln x_n}{\left(\frac{1}{x_n}\right)}=x_n(1-\ln x_n)$$ 을 만족한다.

이 점화식을 활용하여 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \le x_{n+1} < 1$이 성립함을 보이도록 하자.

i) 먼저 수열의 조건으로부터 $0 < x_1 < 1$이 성립한다.

ii) 자연수 n에 대하여 $0 < x_n < 1$이 성립한다고 가정하자.

이 경우 $1 < 1-\ln x_n$이 되므로 $0 < x_n < x_n(1-\ln x_n) = x_{n+1}$이 성립한다.

한편, 함수 $f(x)=x-x\ln x$는 $0 < x < 1$에서 $f'(x)=-\ln x > 0$이고 $f(1)=1$이므로 $f(x)<1$이 된다. 즉, $x_{n+1}=x_n(1-\ln x_n)<1$이 성립한다. 따라서 $x_n < x_{n+1} < 1$이 성립한다. 결론적으로 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \le x_{n+1} < 1$이 성립한다.

[명제]에 의하여 수열 $\{x_n\}$은 수렴한다. $\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha$라 하면, 점화식으로부터

$$\alpha=\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to\infty} x_n(1-\ln x_n)=\alpha(1-\ln\alpha)$$

을 만족한다. 따라서 $\alpha=0$이거나 $\alpha=1$이 된다. $0 < x_1 < x_n$이므로 $\alpha=1$이 된다.

(2) $f(x)=e^x$에서 $f'(x_n)=e^x$이므로 점 $(x_n, f(x_n))$에서 접선의 방정식은

$y-e^{x_n}=e^{x_n}(x-x_n)$

이다. 그러므로 $x_{n+1}=x_n-1$이다. 따라서 $x_n=x_1-(n-1)$이고 수열 $\{x_n\}$은 $-\infty$로 발산한다.

대학발표 예시답안

(2) x_{n+1}은 점 $(x_n, f(x_n))$에서 그은 $f(x)$의 접선의 $x-$ 축 절편이므로

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{e^{x_n}}{e^{x_n}}=x_n-1$$

을 만족한다. 이 점화식으로부터 모든 자연수 n에 대하여 $x_{n+1}=x_1-n$이 성립한다. 따라서 수열 $\{x_n\}$은 $-\infty$로 발산한다.

(3) $f(x)=\tan x$에서 $f'(x_n)=\sec^2 x_n$이므로 점 $(x_n, f(x_n))$에서 접선의 방정식은

$$y-\tan x_n=\sec^2 x_n(x-x_n)$$

이다. 그러므로 $x_{n+1}=x_n-\sin x\cos x=x_n-\frac{1}{2}\sin 2x_n$이다.

한편, $0<x<1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 함수 $h(x)=x-\frac{1}{2}\sin 2x$ 는

$0<\frac{1}{2}\sin 2x$ 이므로 $h(x)=x-\frac{1}{2}\sin 2x<x$ 이고 $h'(x)=1-\cos 2x>0$ 이므로 증가함수이며 $h(x)>h(0)=0$ 이다.

이제 모든 자연수 n 에 대하여 $0\le x_{n+1}\le x_n$ 임을 수학적 귀납법으로 증명하자.

먼저, $0<x_1<1$ 인 x_1 에 대하여 $x_2=h(x_1)$ 이고 $0<h(x_1)<x_1$ 이므로 $0\le x_2\le x_1$ 이다.

같은 방법으로 $0\le x_{k+1}\le x_k$ 이라 가정하면 $x_{k+2}=h(x_{k+1})$ 이고 $0<h(x_{k+1})<x_{k+1}$ 이므로 $0<x_{k+2}<x_{k+1}$ 이다. 그러므로 모든 자연수 n 에 대하여 $0\le x_{n+1}\le x_n$ 이다. 따라서 조건 (b)를 만족하므로 수열 $\{x_n\}$ 은 수렴한다.

$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ 라 하면 $\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\alpha$ 이다. $x_{n+1}=x_n-\frac{1}{2}\sin 2x_n$ 에서 $n\to\infty$ 일 때,

$\alpha=\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ 이므로 $\alpha=0$ 이다.

대학발표 예시답안

(3) $f(x)=\tan x$

x_{n+1} 은 점 $(x_n, f(x_n))$ 에서 그은 $f(x)$ 의 접선의 $x-$ 축 절편이므로

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{\tan x_n}{\sec^2 x_n}=x_n-\frac{1}{2}\sin 2x_n$$

을 만족한다.

이 점화식을 활용하여 모든 자연수 n 에 대하여 $x_n\ge x_{n+1}>0$ 이 성립함을 보이도록 하자.

i) 먼저 수열의 조건으로부터 $0<x_1<1$ 이 성립한다.

ii) 자연수 n 에 대하여 $0<x_n<1$ 이 성립한다고 가정하자.

함수 $f(x)=x-\frac{1}{2}\sin 2x$ 는 $0<x<1$ 에서 $f'(x)=1-\cos 2x>0$ 이고 $f(0)=0$ 이므로 $f(x)>0$ 이 된다. 즉, $0<x_n<1$ 에 대하여 $0<\frac{1}{2}\sin 2x_n<x_n$ 이 되어 $0<x_n-\frac{1}{2}\sin 2x_n<x_n<1$ 이 성립한다. 따라서 $0<x_{n+1}<x_n<1$ 이 성립한다. 결론적으로 모든 자연수 n 에 대하여 $0<x_{n+1}\le x_n<1$ 이 성립한다.

[명제]에 의하여 수열 $\{x_n\}$ 은 수렴한다. $\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ 라 하면, 점화식으로부터

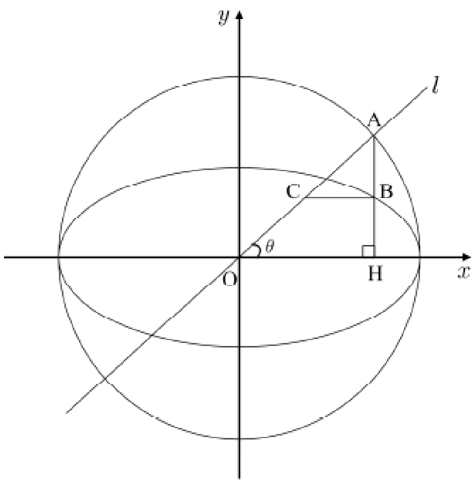
$$\alpha=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(x_n-\frac{1}{2}\sin 2x_n\right)=\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

을 만족한다. 따라서 $\alpha=0$ 이 된다.

23 이화여자대학교 수시 자연계열 I 23)

1. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (30점)

그림과 같이 $a > b > 0$일 때 좌표평면에 원 $x^2 + y^2 = a^2$과 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$이 있다. 원점 O를 지나는 직선 l이 원 $x^2 + y^2 = a^2$과 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 AH가 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$과 만나는 점을 B라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 l과 만나는 점을 C라 하자. $\angle \mathrm{AOH} = \theta$라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $o < \theta < \frac{\pi}{2}$)



논제1-1

점 A, B, C의 좌표를 a, b, θ의 식으로 나타내시오.

논제1-2

삼각형 ABC의 넓이 $S(\theta)$를 구하고, $S(\theta)$의 최댓값을 구하시오.

논제1-3

$\lim_{\theta \to 0} \frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$일 때, $\frac{a}{b}$의 값을 구하시오.

23) 이화여대 홈페이지

2. 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)=|x-1|$ 라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (30점)

논제2-1

합성함수 $(f \circ f)(|2x|)$ 의 그래프와 x축이 만나는 점들의 좌표를 모두 구하시오.

논제2-2

n이 자연수일 때 합성함수 $f^n(|nx|)$ 의 그래프와 x축이 만나는 점들의 좌표를 모두 구하시오. (단, $f^1=f$, $f^{n+1}=f \circ f^n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 이다.)

논제2-3

논제2-2의 합성함수 $f^n(|nx|)$ 의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 둘레의 길이를 l_n이라 하고 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{nS_n}{l_n}$ 을 구하시오. (단, $f^1=f$, $f^{n+1}=f \circ f^n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 이다.)

3. 중간값의 정리, 평균값의 정리, 미적분의 기본 정리는 다음과 같다. (40점)

(중간값의 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x) \neq f(b)$일 때, k가 $f(a)$와 $f(b)$사이의 값이면 $f(c) = k$를 만족하는 실수 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.
(평균값의 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ 를 만족하는 실수 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.
(미적분의 기본 정리) 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (\text{단, } a \leq x \leq b\ )$$

로 정의하면 함수 $F(x)$는 미분가능하고 $F'(x) = f(x)$ 이다.

위 정리를 이용하여 다음 물음에 답하시오.

논제3-1

미적분의 기본 정리와 평균값의 정리를 이용하여

$$\int_0^\pi e^x \sin x\, dx = \pi e^c \sin c$$

를 만족하는 실수 c가 구간 $(0, \pi)$에 존재함을 보이시오.

논제3-2

중간값의 정리를 이용하여

$$\int_0^\pi e^x \sin x\, dx = \sin c \int_0^\pi e^x dx$$

를 만족하는 실수 c가 구간 $(0, \pi)$에 존재함을 보이시오.

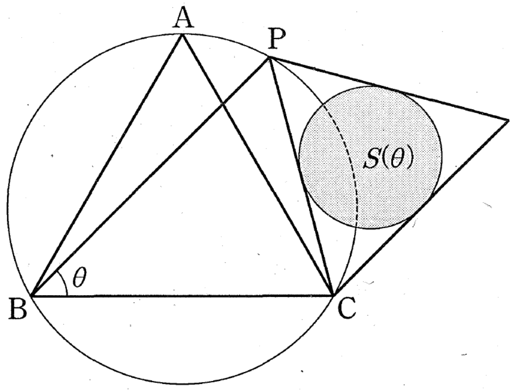
논제3-3

논제2-2의 식을 만족하고 구간 $(0, \pi)$에 존재하는 모든 실수 c의 합을 구하시오.

풀어보기 [문제1]

그림과 같이 원에 내접하고 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 ABC 가 있다. 점 B 를 포함하지 않는 호 AC 위의 점 P 에 대하여 $\angle \mathrm{PBC} = \theta$ 라 하고, 선분 PC 를 한 변으로 하는 정삼각형에 내접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자.

$\lim\limits_{\theta \to +0} \dfrac{S(\theta)}{\theta^2} = a\pi$ 일 때, $60a$ 의 값을 구하시오. (2015년 9월 모의평가)



풀어보기 [문제2]

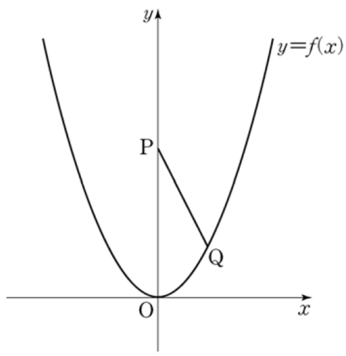
연립부등식 $\begin{cases} |x|+2|y| \le 4 \\ 2^n(y-x)+y \ge 1 \end{cases}$ 의 해 (x, y)가 나타내는 영역의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? (단, n은 자연수이다.) (2010년 전국연합)

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

풀어보기 [문제3]

자연수 n에 대하여 좌표가 $(0,\ 2n+1)$인 점을 P라 하고, 함수 $f(x)=nx^2$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 1이고 제1사분면에 있는 점을 Q라 하자. 점 R$(0,\ 1)$에 대하여 삼각형 PRQ의 넓이를 S_n, 선분 PQ의 길이를 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^2}{l_n}$의 값은?

(2016 대수능)



① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

풀어보기 [문제4]

다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 를 만족시킨다. 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=\frac{d}{dx}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\cos x\cdot f(t)\,dt$ 라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

(2010년 10월 전국연합)

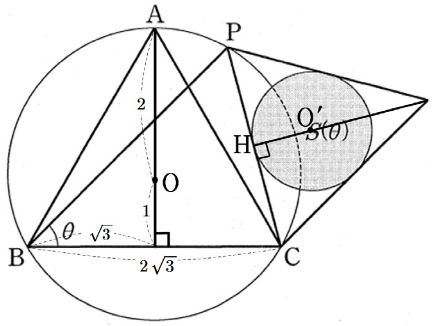
< 보 기 >

ㄱ. $g(0)=0$
ㄴ. 모든 실수 x 에 대하여 $g(-x)=-g(x)$ 이다.
ㄷ. $g'(c)=0$ 인 실수 c 가 열린 구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 적어도 두 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예시답안

풀어보기 [문제1]



삼각형 ABC 의 외접원의 중심을 O , 선분 PC 를 한 변으로 하는 정삼각형에 내접하는 원의 중심을 O′ , O′ 에서 선분 PC 에 내린 수선의 발을 H 라 하자. 사인법칙에 의하여 $\overline{PC}=4\sin\theta$ 이다. 선분 PC 를 한 변으로 하는 정삼각형에 내접하는 원의 반지름 길이는

$\overline{O'H}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{PC}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\sin\theta$ 이므로

$S(\theta)=\frac{4}{3}\pi\sin^2\theta$ 이다. 그러므로

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{4}{3}\pi\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}=\frac{4}{3}\pi$$

이다. 따라서 $a=\frac{4}{3}$ 이고 $60a=80$ 이다.

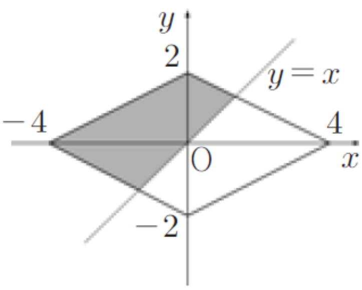
풀어보기 [문제2]

$2^n(y-x)+y=1$을 y에 관하여 정리하면,

$y=\frac{2^n}{2^n+1}x+\frac{1}{2^n+1}$ 이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+1}=1$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n+1}=0$이므로 아래 그림과 같이 $\lim_{n\to\infty}S_n$은 연립부등식 $\begin{cases}|x|+2|y|\le 4\\ y\ge x\end{cases}$의 영역과 같다. 따라서,

$\lim_{n\to\infty}S_n=16\times\frac{1}{2}=8$이다.



풀어보기 [문제3]

점 $Q(a, 1)$은 함수 $f(x)=nx^2$의 그래프 위의 점이므로 $1=na^2$, $a^2=\frac{1}{n}$이고 $a>0$이므로 $a=\sqrt{\frac{1}{n}}=\frac{\sqrt{n}}{n}$이다. 따라서 $Q\left(\frac{\sqrt{n}}{n}, 1\right)$이다.

$\overline{PR}=2n$, $\overline{RQ}=\frac{\sqrt{n}}{n}$이므로

$S_n=\frac{1}{2}\times 2n\times\frac{\sqrt{n}}{n}=\sqrt{n}$

$l_n=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{n}}{n}\right)^2+(2n)^2}=\sqrt{\frac{1}{n}+4n^2}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{{S_n}^2}{l_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\frac{1}{n}+4n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^3}+4}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$이다.

풀어보기 [문제4]

$g(x)=-\sin x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt+\cos x\cdot f(x)$

ㄱ. $g(0)=0$ ($\because f(0)=0$) (참)

ㄴ. $g(-x)$

$=-\sin(-x)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-x}f(t)dt+\cos(-x)\cdot f(-x)$

$=\sin x\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-x}f(t)dt+\int_{-x}^{x}f(t)dt\right)-\cos x\cdot f(x)$

$=\sin x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt-\cos x\cdot f(x)=-g(x)$ (참)

ㄷ. $g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g(0)$ 이므로 평균값의 정리에 의해 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$에서 $g'(c)=0$인 c가 적어도 하나 존재한다. 마찬가지로 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $g'(c)=0$인 c가 적어도 하나 존재한다. (참)

논제1-1

$A(x, y)$라 하면, A는 반지름이 a인 원 위의 점이므로 $\cos\theta=\frac{x}{a}$, $\sin\theta=\frac{y}{a}$를 만족한다. 따라서 $A(x, y)=A(a\cos\theta, a\sin\theta)$ 이다.

$B(w, z)$라 하면, B는 A에서 x축에 내린 수선 위의 점이므로 $w=a\cos\theta$이다. 그리고 B는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로 $\frac{w^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1=\cos^2\theta+\frac{z^2}{b^2}$ 을 만족한다. 따라서 $z=\pm b\sin\theta$

이고 $z>0$ 이므로 $z=b\sin\theta$ 이다. 따라서 $\mathrm{B}(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 이다.
$\mathrm{C}(u, v)$ 라 하면, 선분 BC 가 x 축에 평행이므로 $v=b\sin\theta$ 이다. 그리고 A, C 는 직선 l 위의 점이므로 $\dfrac{u}{b\sin\theta}=\dfrac{u}{v}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{a\cos\theta}{b\sin\theta}$ 를 만족한다.
$u=b\cos\theta$ 이므로 $\mathrm{C}(b\cos\theta, b\sin\theta)$ 이다.

논제1-2

삼각형 ABC 는 직각삼각형이고, 선분 AB, BC 의 길이는 각각 $(a-b)\sin\theta$, $(a-b)\cos\theta$ 이므로 삼각형 ABC 의 넓이는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}(a-b)\sin\theta\times(a-b)\cos\theta=\frac{1}{4}(a-b)^2\sin 2\theta$$

이다.
구간 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 에서 삼각함수 $\sin 2\theta$ 는 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 일 때, 최댓값 1 을 가지므로 삼각형 ABC 의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{1}{4}(a-b)^2$ 이다.

논제1-3

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{(a-b)^2\sin 2\theta}{4\theta}=\frac{1}{2}(a-b)^2$ 이므로 조건으로부터 $\dfrac{1}{2}(a-b)^2=\dfrac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)$ 이 성립한다. 따라서 $a^2-4ab+b^2=0$ 이다.
즉, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-4\left(\dfrac{a}{b}\right)+1=0$ 이므로 $\dfrac{a}{b}=2\pm\sqrt{3}$ 이다.
가정에서 $a>b$ 이므로 $\dfrac{a}{b}=2+\sqrt{3}$ 이다.

논제2-1

$(f\circ f)(|2x|)=|||2x|-1|-1|=0$ 로 두면 $2x=0, \pm 2$ 이므로 구하는 점들의 좌표는 $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$ 이다.

논제2-2

함수 $g(x)=|nx|$ 의 그래프를 y축을 따라 -1 만큼 평행이동하고 x축 아래의 그래프를 x축에 대칭이 되도록 x축 위로 옮기면 함수 $f(|nx|)=||nx|-1|$ 의 그래프를 얻는다. 같은 방법으로 $f(|nx|)=||nx|-1|$ 의 그래프를 y축을 따라 -1 만큼 평행이동하고 x축 아래의 그래프를 x축에 대칭이 되도록 x축 위로 옮기면 함수 $(f\circ f)(|nx|)=|||nx|-1|-1|$ 의 그래프를 얻는다. 합성함수 $f^n(|nx|)$ 의 그래프는 이러한 과정을 함수 $g(x)=|nx|$ 의 그래프에 n번 시행하여 얻어진다.

합성함수 $f^n(|nx|)$ 의 그래프가 x축과 만나는 점들 중 x좌표가 가장 작은 값은 -1이고 가장 큰 값은 1이다. 그러므로 합성함수의 그래프와 x축이 만나는 점들은 x축 위의 구간 $[-1, 1]$을 n개의 같은 길이의 선분으로 나누는 점들이다. 따라서 합성함수 $f^n(|nx|)$ 와 x축이 만나는 점들의 x좌표들은 $-1+\left(\frac{2}{n}\right)k\ (k=0, 1, \cdots, n)$ 로 구해진다. 그러므로 주어진 합성함수와 x축과 만나는 점들의 좌표는 $\left(-1+\frac{2k}{n}, 0\right)\ (k=0, 1, \cdots, n)$ 이다.

논제2-3

논제2-2에서 주어진 합성함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형은 밑변의 길이가 $\frac{2}{n}$이고 높이가 1인 n개의 이등변삼각형임을 알 수 있다. 이 이등변삼각형의 둘레의 길이는 $\frac{2}{n}+2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$ 이므로 구하는 전체 둘레의 길이 l_n은

$$l_n = n\left(\frac{2}{n}+2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) = 2\left(1+\sqrt{n^2+1}\right)$$

이고, 구하는 넓이 S_n은

$S_n = n\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{n}\times 1\right)$

이다. 따라서 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{nS_n}{l_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\times 1}{2\left(1+\sqrt{1+n^2}\right)} = \frac{1}{2}$ 이다.

논제3-1

미적분의 기본 정리에 의해 $[0, \pi]$에 속하는 x에 대하여 $F(x)=\int_0^x e^x \sin x dx$는 미분가능하고 $F'(x)=e^x\sin x$로 주어진다.

따라서 $\int_0^\pi e^x\sin x dx = F(\pi)-F(0)$이고 $F(0)=0$이므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{F(\pi)}{\pi}=\frac{F(\pi)-F(0)}{\pi-0}=F'(c)=e^c\sin c$$

가 성립하는 c가 $(0, \pi)$에 적어도 하나 존재한다.

논제3-2

부분적분에 의하여 $\int e^x\sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$이므로

$\int_0^\pi e^x\sin x dx = \left[\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)\right]_0^\pi = \frac{e^\pi+1}{2}$

이고, $\dfrac{\displaystyle\int_0^\pi e^x \sin x dx}{\displaystyle\int_0^\pi e^x dx} = \dfrac{1}{2}\dfrac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1}$ 이다.

$3 < e^\pi$ 가 성립하므로 $e^\pi + 1 < 2e^\pi - 2$ 이 되어서 $0 < \dfrac{\displaystyle\int_0^\pi e^x \sin x dx}{\displaystyle\int_0^\pi e^x dx} = \dfrac{1}{2}\dfrac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1} < 1$ 이 성립한다.

따라서 중간값의 정리에 의해 $(0, \pi)$ 에 적당한 c 가 존재해서

$$\frac{\displaystyle\int_0^\pi e^x \sin x dx}{\displaystyle\int_0^\pi e^x dx} = \frac{1}{2}\frac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1} = \sin c$$

를 만족한다.

논제3-3

$y = \sin x$ 는 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 에서 증가함수이고 $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ 에서 감소함수이므로

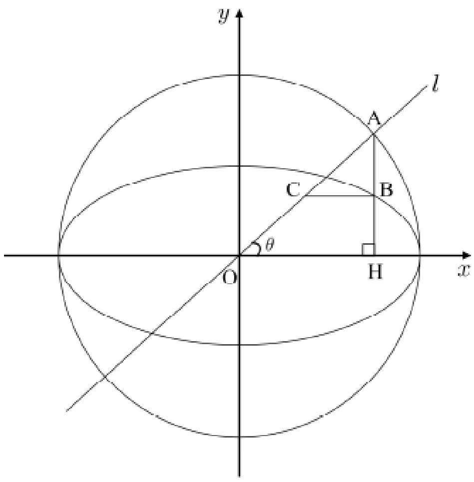
$\dfrac{1}{2}\dfrac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1} = \sin c < 1$ 를 만족하면서 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 에 포함되어 있는 c 와 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ 에 포함되어 있는 c 는 하나씩밖에 없다. 이 두 개의 c 를 각각 c_1, c_2 라 하면

$\sin c_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1} = \sin c_2$ 이다. 그러므로 $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ 에 의해 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 에 속하는 θ 에 대하여 $c_1 = \theta$ 와 $c_2 = \pi - \theta$ 로 주어진다. 따라서 $c_1 + c_2 = \pi$ 이다.

24 이화여자대학교 수시 자연계열Ⅱ 24)

1. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (30점)

그림과 같이 $a>b>0$ 일 때 좌표평면에 원 $x^2+y^2=a^2$ 과 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 이 있다. 원점 O 를 지나는 직선 l 이 원 $x^2+y^2=a^2$ 과 제1사분면에서 만나는 점을 A 라 하고, 점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하자. 선분 AH 가 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 과 만나는 점을 B 라 하고, 점 B 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 직선 l 과 만나는 점을 C 라 하자. $\angle \mathrm{AOH}=\theta$ 라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $o<\theta<\frac{\pi}{2}$)



논제1-1

점 A , B , C 의 좌표를 a, b, θ 의 식으로 나타내시오.

논제1-2

삼각형 ABC 의 넓이 $S(\theta)$ 를 구하고, $S(\theta)$ 의 최댓값을 구하시오.

논제1-3

$\lim_{\theta\to 0}\frac{S(\theta)}{\theta}=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하시오.

24) 이화여대 홈페이지

2. 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)=|x-1|$ 라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (30점)

논제2-1

합성함수 $(f \circ f)(2x^2)$ 의 그래프와 x축이 만나는 점들의 좌표를 모두 구하시오.

논제2-2

n이 자연수일 때 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 정의된 함수 $g(x)=nx^2$의 함숫값이 정수가 되는 x를 모두 구하시오.

논제2-3

n이 자연수일 때 합성함수 $f^n(|2nx^2|)$ 의 그래프와 x축이 만나는 점들에 대하여 각 점과 원점 사이의 거리의 합을 S_{2n}이라 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{2n}$을 구하시오.

(단, $f^1=f$, $f^{n+1}=f \circ f^n \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$ 이다.)

3. 중간값의 정리, 최대 · 최소의 정리, 평균값의 정리, 미적분의 기본 정리는 다음과 같다.(40점)

(중간값의 정리) 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(x) \neq f(b)$ 일 때, k 가 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 값이면 $f(c) = k$ 를 만족하는 실수 c 가 열린 구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.
(최대·최소의 정리) 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 정의된 연속함수는 최댓값과 최솟값을 가진다.
(평균값의 정리) 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a, b) 에서 미분가능하면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ 를 만족하는 실수 c 가 열린 구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.
(미적분의 기본 정리) 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (\text{단, } a \leq x \leq b\ )$$

로 정의하면 함수 $F(x)$ 는 미분가능하고 $F'(x) = f(x)$ 이다.

$a < b$ 에 대하여 위 정리를 이용하여 다음 물음에 답하시오.

논제3-1

미적분의 기본 정리와 평균값의 정리를 이용하여 구간 $[a, b]$ 에 대하여

$$\int_a^b e^x \sin x\, dx = (b-a)e^c \sin c$$

를 만족하는 실수 c 가 구간 (a, b) 에 존재함을 보이시오.

논제3-2

최대·최소의 정리와 중간값의 정리를 이용하여 구간 $[a, b]$ 에 대하여

$$\int_a^b e^x \sin x\, dx = \sin c \int_a^b e^x dx$$

를 만족하는 실수 c 가 구간 (a, b) 에 존재함을 보이시오.

논제3-3

위의 논제2-2에 의하여

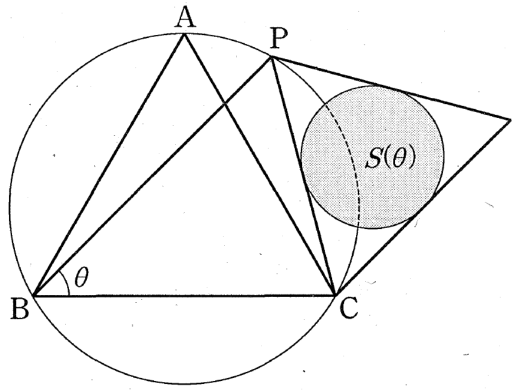
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x\, dx = \sin c \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx$$

를 만족하는 실수 c 가 구간 $(-\pi, \pi)$ 에 존재한다. 모든 실수 c 의 합을 구하시오.

풀어보기 [문제1]

그림과 같이 원에 내접하고 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 ABC 가 있다. 점 B 를 포함하지 않는 호 AC 위의 점 P 에 대하여 $\angle \mathrm{PBC} = \theta$ 라 하고, 선분 PC 를 한 변으로 하는 정삼각형에 내접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자.

$\lim_{\theta \to +0} \dfrac{S(\theta)}{\theta^2} = a\pi$ 일 때, $60a$ 의 값을 구하시오. (2015년 9월 모의평가)



풀어보기 [문제2]

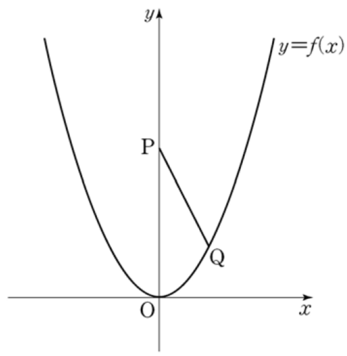
연립부등식 $\begin{cases} |x|+2|y| \le 4 \\ 2^n(y-x)+y \ge 1 \end{cases}$ 의 해 (x, y)가 나타내는 영역의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? (단, n은 자연수이다.) (2010년 전국연합)

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

풀어보기 [문제3]

자연수 n에 대하여 좌표가 $(0, 2n+1)$인 점을 P라 하고, 함수 $f(x)=nx^2$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 1이고 제1사분면에 있는 점을 Q라 하자. 점 R$(0, 1)$에 대하여 삼각형 PRQ의 넓이를 S_n, 선분 PQ의 길이를 l_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n^2}{l_n}$의 값은?

(2016 대수능)



① $\dfrac{3}{2}$ ② $\dfrac{5}{4}$ ③ 1 ④ $\dfrac{3}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

풀어보기 [문제4]

다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 를 만족시킨다. 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\cos x\cdot f(t)dt$ 라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

(2010년 10월 전국연합)

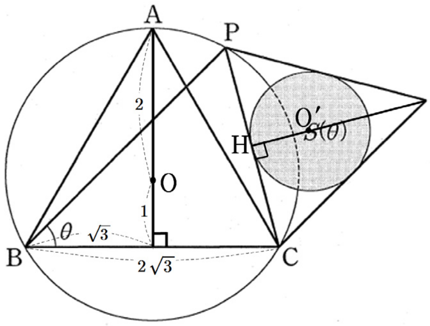
< 보 기 >

ㄱ. $g(0)=0$
ㄴ. 모든 실수 x 에 대하여 $g(-x)=-g(x)$ 이다.
ㄷ. $g'(c)=0$ 인 실수 c 가 열린 구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 에서 적어도 두 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예시답안

풀어보기 [문제1]



삼각형 ABC 의 외접원의 중심을 O , 선분 PC 를 한 변으로 하는 정삼각형에 내접하는 원의 중심을 O′ , O′ 에서 선분 PC 에 내린 수선의 발을 H 라 하자. 사인법칙에 의하여 $\overline{\mathrm{PC}}=4\sin\theta$ 이다.

선분 PC 를 한 변으로 하는 정삼각형에 내접하는 원의 반지름 길이는

$\overline{\mathrm{O'H}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{\mathrm{PC}}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\sin\theta$ 이므로

$S(\theta)=\dfrac{4}{3}\pi\sin^2\theta$ 이다. 그러므로 $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{4}{3}\pi\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}=\frac{4}{3}\pi$

이다. 따라서 $a=\dfrac{4}{3}$ 이고 $60a=80$ 이다.

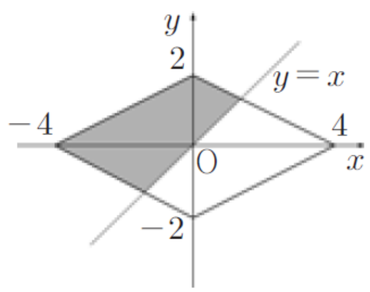
풀어보기 [문제2]

$2^n(y-x)+y=1$을 y에 관하여 정리하면,

$y=\dfrac{2^n}{2^n+1}x+\dfrac{1}{2^n+1}$ 이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+1}=1$,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n+1}=0$이므로 아래 그림과 같이 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$은 연립부등식 $\begin{cases}|x|+2|y|\le 4\\ y\ge x\end{cases}$의 영역과 같다. 따라서,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=16\times\frac{1}{2}=8$이다.



풀어보기 [문제3]

점 $Q(a, 1)$은 함수 $f(x)=nx^2$의 그래프 위의 점이므로 $1=na^2$, $a^2=\frac{1}{n}$이고 $a>0$이므로 $a=\sqrt{\frac{1}{n}}=\frac{\sqrt{n}}{n}$이다. 따라서 $Q\left(\frac{\sqrt{n}}{n}, 1\right)$이다.

$\overline{PR}=2n$, $\overline{RQ}=\frac{\sqrt{n}}{n}$ 이므로

$S_n=\frac{1}{2}\times 2n\times\frac{\sqrt{n}}{n}=\sqrt{n}$

$l_n=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{n}}{n}\right)^2+(2n)^2}=\sqrt{\frac{1}{n}+4n^2}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{\,2}}{l_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\frac{1}{n}+4n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^3}+4}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$ 이다.

풀어보기 [문제4]

$g(x)=-\sin x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt+\cos x\cdot f(x)$

ㄱ. $g(0)=0$ ($\because f(0)=0$) (참)

ㄴ. $g(-x)$

$=-\sin(-x)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-x}f(t)dt+\cos(-x)\cdot f(-x)$

$=\sin x\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-x}f(t)dt+\int_{-x}^{x}f(t)dt\right)-\cos x\cdot f(x)$

$=\sin x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt-\cos x\cdot f(x)=-g(x)$ (참)

ㄷ. $g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g(0)$ 이므로 평균값의 정리에 의해 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$에서 $g'(c)=0$인 c가 적어도 하나 존재한다. 마찬가지로 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $g'(c)=0$인 c가 적어도 하나 존재한다. (참)

논제1-1

$A(x, y)$라 하면, A는 반지름이 a인 원 위의 점이므로 $\cos\theta=\frac{x}{a}$, $\sin\theta=\frac{y}{a}$를 만족한다. 따라서 $A(x, y)=A(a\cos\theta, a\sin\theta)$ 이다.

$B(w, z)$라 하면, B는 A에서 x축에 내린 수선 위의 점이므로 $w=a\cos\theta$이다. 그리고 B는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로 $\frac{w^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1=\cos^2\theta+\frac{z^2}{b^2}$ 을 만족한다. 따라서

$z = \pm b\sin\theta$ 이고 $z > 0$ 이므로 $z = b\sin\theta$ 이다. 따라서 $\mathrm{B}(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 이다.
$\mathrm{C}(u, v)$ 라 하면, 선분 BC 가 x 축에 평행이므로 $v = b\sin\theta$ 이다. 그리고 A , C 는 직선 l 위의 점이므로 $\dfrac{u}{b\sin\theta} = \dfrac{u}{v} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{a\cos\theta}{b\sin\theta}$ 를 만족한다.
$u = b\cos\theta$ 이므로 $\mathrm{C}(b\cos\theta, b\sin\theta)$ 이다.

논제1-2

삼각형 ABC 는 직각삼각형이고, 선분 AB , BC 의 길이는 각각 $(a-b)\sin\theta$, $(a-b)\cos\theta$ 이므로 삼각형 ABC 의 넓이는

$$S(\theta) = \frac{1}{2}(a-b)\sin\theta \times (a-b)\cos\theta = \frac{1}{4}(a-b)^2\sin 2\theta$$

이다.

구간 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ 에서 삼각함수 $\sin 2\theta$ 는 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 일 때, 최댓값 1 을 가지므로 삼각형 ABC 의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{1}{4}(a-b)^2$ 이다.

논제1-3

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{S(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{(a-b)^2\sin 2\theta}{4\theta} = \frac{1}{2}(a-b)^2$ 이므로 조건으로부터 $\dfrac{1}{2}(a-b)^2 = \dfrac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)$ 이 성립한다. 따라서 $a^2 - 4ab + b^2 = 0$ 이다.

즉, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - 4\left(\dfrac{a}{b}\right) + 1 = 0$ 이므로 $\dfrac{a}{b} = 2 \pm \sqrt{3}$ 이다.

가정에서 $a > b$ 이므로 $\dfrac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$ 이다.

논제2-1

$(f \circ f)(|2x^2|) = ||\,|2x^2| - 1| - 1| = 0$ 로 두면 $2x^2 = 0, 2$ 이므로 $x = 0, \pm 1$ 이다. 따라서 구하는 교점은 $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$ 이다.

논제2-2

자연수 n 에 대하여 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에 정의된 함수 $g(x) = nx^2$ 의 치역은 구간 $[0, n]$ 이다. 따라서 정수인 함숫값은 $k = 0, 1, \cdots, n$ 이며 $nx^2 = k\,(k = 0, 1, \cdots, n)$ 를 만족하는 구간 $[0, 1]$ 의 x 값은 $x = \sqrt{\dfrac{k}{n}}\ (k = 0, 1, \cdots, n)$ 이다.

논제2-3

함수 $h(x)=2nx^2$ 의 그래프를 y축을 따라 -1만큼 평행이동하고 x축 아래의 그래프를 x축에 대칭이 되도록 x축 위로 옮기면 함수 $f(2nx^2)=|2nx^2-1|$ 의 그래프를 얻는다. 같은 방법으로 $f(2nx^2)=|2nx^2-1|$ 의 그래프를 y축을 따라 -1만큼 평행이동하고 x축 아래의 그래프를 x축에 대칭이 되도록 x축 위로 옮기면 함수 $(f\circ f)(2nx^2)=||2nx^2-1|-1|$ 의 그래프를 얻는다. 합성함수 $f^{2n}(2nx^2)$의 그래프는 이러한 과정을 함수 $h(x)=2nx^2$의 그래프에 $2n$번 시행하여 얻어진다. 따라서 합성함수 $f^{2n}(2nx^2)$의 그래프가 x축과 만나는 점들의 x좌표 중 가장 작은 값이 -1이고 가장 큰 값이 1임을 결정할 수 있다.

그리고 $f^{2n}(x)=||\cdots||x-1|-1|\cdots|-1|=0$ 의 근이 모두 2의 배수인 정수임을 알 수 있다. 자연수 $2n$에 대하여 논제2-2와 같이 $y=2nx^2$이 짝수가 되는 닫힌 구간 $[-1,1]$의 모든 x를 구하면 $x=\pm\sqrt{\dfrac{2k}{2n}}$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 이다. 따라서 구하는 거리의 합 S_{2n}은 $\sum_{k=1}^{n}2\sqrt{\dfrac{k}{n}}$ 이며 정적분의 성질을 활용하여 극한값을 구하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}2\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\quad \text{이다.}$$

논제3-1

미적분의 기본 정리에 의해 $[a,b]$에 속하는 x에 대하여 $F(x)=\int_a^x e^t\sin t\,dt$는 미분가능하고 $F'(x)=e^x\sin x$로 주어진다. 그러므로 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$이고 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(c)=e^c\sin c$$

가 성립하는 c가 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

논제3-2

최대·최소의 정리에 의하여 구간 $[a,b]$에서 $y=\sin x$는 최솟값 m과 최댓값 M을 가진다. 따라서 $f(x)=e^x\sin x$는 구간 $[a,b]$에서 $me^x\le e^x\sin x\le Me^x$ 를 만족하고

$$m\int_a^b e^x dx\le \int_a^b e^x\sin x\,dx\le M\int_a^b e^x dx$$

이 성립한다.

위의 부등식을 양수인 $\int_a^b e^x dx$로 나누면

$$m\le\frac{\int_a^b e^x\sin x\,dx}{\int_a^b e^x dx}\le M$$

이 되고, 중간값의 정리에 의하여 $y=\sin x$ 는

$$\frac{\displaystyle\int_a^b e^x \sin x dx}{\displaystyle\int_a^b e^x dx}=\sin c$$

를 만족하는 c 를 구간 (a, b) 에서 가진다.

논제3-3

부분적분에 의하여 $\int e^x \sin x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$ 이므로

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x dx=\left[\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{-e^{\pi}\cos\pi+e^{-\pi}\cos(-\pi)}{2}=\frac{1}{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})$$

이고,

$$\sin c=\frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x dx}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx}=\frac{1}{2}\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}=\frac{1}{2}$$

이다. 그러므로 $c=\frac{1}{6}\pi,\ \frac{5}{6}\pi$ 이고 그 합은 π 이다.

25 인하대학교 모의 1차[25)]

[문제1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

수열을 정의할 때, 수열의 일반항을 구체적인 식으로 나타내기도 하지만 이웃하는 항들 사이의 관계식을 써서 수열을 정의하기도 한다. 일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서

(1) 첫째항 a_1의 값

(2) 두 항 $a_n, a_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$ 사이의 관계식

이 주어질 때, 이 관계식의 n에 $1,2,3,\cdots$을 차례로 대입하면 수열의 모든 항 $a_1, a_2, a_3, \cdots$이 정해진다. 이와 같이 첫째항 a_1의 값과 이웃하는 항 사이의 관계식으로 수열을 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라 하고, 그 관계식을 수열의 점화식이라고 한다.

(※) 수열 $\{a_n\}$은 초항이 $a_1=k$ (k는 실수)이고 점화식

$$a_n=\begin{cases} a_{n-1} & (a_{n-1}\geq n \text{인 경우}) \\ 2n-a_{n-1} & (a_{n-1}<n \text{인 경우}) \end{cases}$$

문제 1-1

$a_5=5$가 되도록 하는 k의 값을 모두 구하시오. (10점)

문제 1-2

$a_1+a_2+a_3\leq 10$ 이 되도록 하는 k의 범위를 구하시오. (15점)

25) 인하대학교 홈페이지

[문제2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

양의 정수 n과 $1 \leq k \leq n-1$인 정수 k에 대하여, 조합의 수 ${}_nC_k$의 정의에서 등식 ${}_nC_k = {}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1}$ 가 성립한다.
위 등식을 파스칼의 공식이라고 한다. 파스칼의 공식이 성립하는 이유는 다음과 같다. 주어진 n개의 대상 중에서 어느 한 대상 S에 표시를 하자. 이때, S를 포함하여 k개를 택하는 방법의 수는 S를 제외한 $n-1$개에서 S를 제외한 나머지 $k-1$개에서 k개를 택하는 방법의 수이므로 ${}_{n-1}C_k$가지이다. 따라서 합의 법칙에 의하여 ${}_{n-1}C_{k-1}$과 ${}_{n-1}C_k$를 합한 것이 n개의 대상에서 k개를 택하는 조합의 수 ${}_{n-1}C_k$가 된다.

(※) 양의 정수 n에 대하여, m은 $\frac{n}{2}$의 정수부분의 값이라 할 때, f_n은 다음과 같이 정의된다.

$$f_n = \sum_{k=0}^{m} {}_{n-k}C_k = {}_nC_0 + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-2}C_2 + \cdots + {}_{n-m}C_m$$

문제 2-1

$f_1 = 1, f_2 = 2$ 임을 보이시오. (5점)

문제 2-2

모든 $n \geq 3$에 대해, 관계식 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ 이 성립함을 보이시오. (10점)

문제 2-3

모든 $n \geq 1$에 대해, $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 2$ 임을 보이시오. (10점)

[문제3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

미분가능한 함수 $f(x)$가 역함수 $g(x)$를 가질 때, 관계식 $f(g(x))=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면, 합성함수의 미분법에 의하여

$$f'(g(x))g'(x)=1$$

이 된다. 실제로 $f'(g(x))$가 0이 아닌 경우 $g(x)$는 미분가능하며,

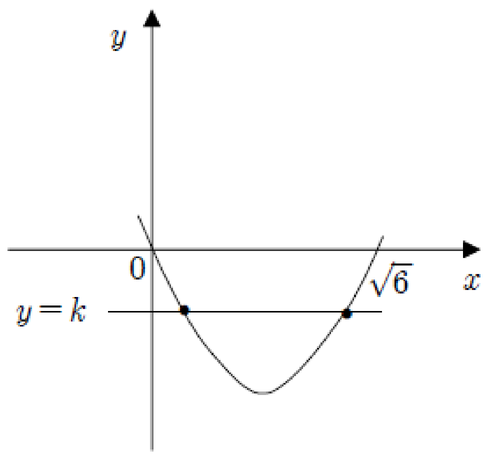
위 등식으로부터 $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$ 임을 알 수 있다.

문제 3-1

곡선 $y=x^3-6x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위를 구하시오. (10점)

문제 3-2

곡선 $y=x^3-6x$의 $0<x<\sqrt{6}$인 부분과 직선 $y=k$가 아래 그림과 같이 두 점에서 만날 때, 두 점 사이의 거리를 $f(k)$라고 하자. 이때, $f'(-5)$의 값을 구하시오. (15점)



[문제4] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

으로 주어진다.

(※) 직선 l: $y=k(x-10)+5$ 와 타원 C: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 이 있다.

문제 4-1

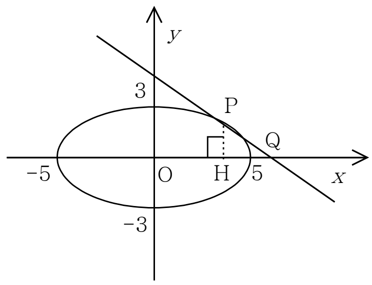
타원 C와 직선 l이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k의 범위를 구하시오. (10점)

문제 4-2

타원 C와 직선 l이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 교점을 각각 P, Q라고 하고, 두 점 P, Q에서 각각 타원에 접하는 두 직선의 교점을 $\mathrm{R}(a,\ b)$ 라고 하자. 상수 k가 (4-1)에서 구한 범위를 움직일 때, a와 b의 관계식을 구하고 b의 범위를 구하시오. (15점)

풀어보기 [문제1]

그림과 같이 타원 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서의 타원의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라고 할 때, $\overline{\mathrm{OH}} \cdot \overline{\mathrm{OQ}}$의 값을 구하시오.



풀어보기 [문제2]

흰 바둑돌과 검은 바둑돌이 있다. 이 바둑돌 n개를 일렬로 나열하되, 흰 바둑돌끼리는 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수를 a_n이라 하자. 예를 들면 $a_1 = 2$, $a_2 = 3$이다.

○, ●	○●, ●○, ●●
$a_1 = 2$	$a_2 = 3$

이때 a_{10}의 값을 구하시오.

예시답안

풀어보기 [문제1]

타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ 이다.

점 P의 좌표를(x_1,y_1)이라 하면 P에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1x}{5^2}+\dfrac{y_1y}{3^2}=1$ 이다.

$y=0$ 일 때 $x=\dfrac{25}{x_1}$ 이므로, $\overline{OQ}=\dfrac{25}{|x_1|}$ 이고 또, $\overline{OH}=|x_1|$ 이므로

$\overline{OH}\cdot\overline{OQ}=|x_1|\cdot\dfrac{25}{|x_1|}=25$ 이 성립한다.

풀어보기 [문제2]

흰 바둑돌과 검은 바둑돌을 합쳐 n 개가 있다고 하면 n 개의 바둑돌은 맨 앞의 바둑돌이 검은 색인 경우와 앞의 두 바둑돌이 흰색-검은색인 경우 두 가지로 나눌 수 있다. 즉,

(i) 맨 앞의 바둑돌이 검은 색인 경우 :

● $\underbrace{\times\ \times\ \times\ \cdots\ \times}_{n-1\text{ 개}}$ 이므로 $n-1$ 개를 배열하는 방법의 수 a_{n-1}

(ii) 맨 앞의 두 바둑돌이 흰색-검은색인 경우 :

○ ● $\underbrace{\times\ \times\ \times\ \cdots\ \times}_{n-2\text{ 개}}$ 이므로 $n-2$ 개를 배열하는 방법의 수 a_{n-2}

따라서, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ 가 성립한다.

이 수열을 a_1 에서 a_{10} 까지 차례로 나열하면 다음과 같다.

2 ,3 ,5 ,8 ,13 ,21 ,34 ,55 ,89 ,144

$\therefore\ a_{10}=144$

문제1-1

주어진 점화식을 역으로 추적해 보면,

$$5 = a_5 = \begin{cases} a_4 & (a_4 \geq 5) \\ 10 - a_4 & (a_4 < 5) \end{cases} \Rightarrow a_4 = 5$$

$$5 = a_4 = \begin{cases} a_3 & (a_3 \geq 4) \\ 8 - a_3 & (a_3 < 4) \end{cases} \Rightarrow a_3 = 5, 3$$

$$5,3 = a_3 = \begin{cases} a_2 & (a_2 \geq 3) \\ 6 - a_2 & (a_2 < 3) \end{cases} \Rightarrow a_2 = 5, 1, 3$$

$$5,1,3 = a_2 = \begin{cases} k & (k \geq 3) \\ 4 - k & (k < 3) \end{cases} \Rightarrow k = 5, -1, 3, 1 \text{ 이다.}$$

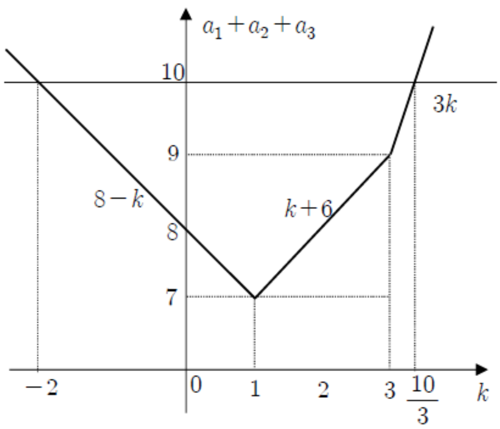
따라서 구하는 k의 값은 $k = 5, -1, 3, 1$ 이다.

문제1-2

주어진 점화식에서

$$a_1 = k,\, a_2 = \begin{cases} k & (k \geq 2) \\ 4 - k & (k < 2) \end{cases},\, a_3 = \begin{cases} a_2 & (a_2 \geq 3) \\ 6 - a_2 & (a_2 < 3) \end{cases} = \begin{cases} k & (k \geq 3) \\ 6 - k & (2 \leq k < 3) \\ 2 + k & (1 \leq k < 2) \\ 4 - k & (k < 1) \end{cases} \text{ 을 얻을 수 있고,}$$

이를 그래프로 표현하면 다음과 같다.



따라서 구하는 k의 범위는 $-2 \leq k \leq \dfrac{10}{3}$ 이다.

다른 풀이

$a_1 = k$ 일 때, 가능한 경우는 다음과 같다.

① $a_1 = k,\ a_2 = k,\ a_3 = k$

$\Rightarrow\ 3 \leq k,\ a_1 + a_2 + a_3 = 3k \leq 10\ \Rightarrow\ \therefore 3 \leq k \leq \dfrac{10}{3}$

② $a_1 = k,\ a_2 = k,\ a_3 = 6 - k$

$\Rightarrow\ 2 \leq k < 3,\ a_1 + a_2 + a_3 = 6 + k \leq 10\ \Rightarrow\ \therefore 2 \leq k < 3$

③ $a_1 = k,\ a_2 = 4-k,\ a_3 = 4-k$

$\Rightarrow\ k<2,\ k \le 1,\ a_1+a_2+a_3 = 8-k \le 10\ \Rightarrow\ \therefore -2 \le k \le 1$

④ $a_1 = k,\ a_2 = 4-k,\ a_3 = 2+k$

$\Rightarrow\ k<2,\ 1<k,\ a_1+a_2+a_3 = 6+k \le 10\ \Rightarrow\ \therefore 1<k<2$

따라서 구하는 k의 범위는 $-2 \le k \le \dfrac{10}{3}$ 이다.

문제2-1

$f_1 = {}_1C_0 = 1$ 이고, $f_2 = {}_2C_0 + {}_1C_1 = 2$ 이다.

문제2-2

모든 짝수 $n=2m$에 대하여 다음과 같이 계산이 가능하다.

$$\begin{aligned} f_{n-1}+f_{n-2} &= \sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m-1-k}C_k + \sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m-2-k}C_k \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m-1-k}C_k + \sum_{k=1}^{m} {}_{2m-1-k}C_{k-1} \\ &= {}_{2m-1}C_0 + \sum_{k=1}^{m-1} \left({}_{2m-1-k}C_k + {}_{2m-1-k}C_{k-1}\right) + {}_{m-1}C_{m-1} \end{aligned}$$

제시문의 성질에 따라 위 식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$f_{n-1}+f_{n-2} = {}_{2m}C_0 + \left(\sum_{k=1}^{m-1} {}_{2m-k}C_k\right) + {}_mC_m = \sum_{k=0}^{m} {}_{n-k}C_k = f_n$$

같은 방법으로 모든 홀수 $n=2m+1 \ge 3$에 대하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} f_{n-1}+f_{n-2} &= \sum_{k=0}^{m} {}_{2m-k}C_k + \sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m-1-k}C_k \\ &= \sum_{k=0}^{m} {}_{2m-k}C_k + \sum_{k=1}^{m} {}_{2m-k}C_{k-1} \\ &= {}_{2m}C_0 + \sum_{k=1}^{m} \left({}_{2m-k}C_k + {}_{2m-k}C_{k-1}\right) \end{aligned}$$

제시문에 의해 $f_{n-1}+f_{n-2} = {}_{2m+1}C_0 + \left(\sum_{k=1}^{m} {}_{2m+1-k}C_k\right) = \sum_{k=0}^{m} {}_{n-k}C_k = f_n$ 이 성립한다.

그러므로 모든 정수 $n \ge 3$에 대하여, $f_n = f_{n-1}+f_{n-2}$ 가 성립한다.

문제2-3

양의 정수 n에 대하여 수학적 귀납법을 사용하여 증명한다.

먼저 $n=1$일 때, $f_3 - 2 = \left({}_3C_0 + {}_2C_1\right) - 2 = 1+2-2 = 1$ 이므로 성립한다.

$n=k$일 때 $f_1+f_2+\cdots+f_k=f_{k+2}-2$ 가 성립한다고 가정하면,

$f_1+f_2+\cdots+f_k+f_{k+1}=(f_{k+2}-2)+f_{k+1}=f_{k+3}-2$ 이다.

따라서 $n=k+1$ 일때도 성립한다.

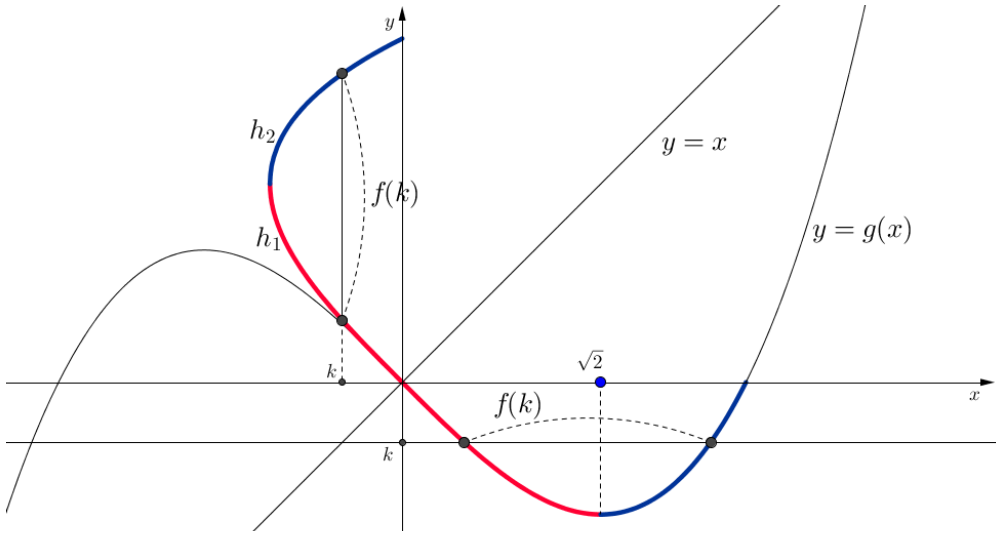
그러므로 모든 양의 정수 n에 대하여 $f_1+f_2+\cdots+f_n=f_{n+2}-2$ 이 성립한다.

문제3-1

함수 $g(x)=x^3-6x$는 $g'(x)=3x^2-6=0$으로부터 극댓값 $g(-\sqrt{2})=4\sqrt{2}$와 극솟값 $g(\sqrt{2})=-4\sqrt{2}$를 갖는다. 따라서 곡선 $g(x)=x^3-6x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나는 것은 k의 극댓값과 극솟값 사이에 있을 때이다.

즉, $-4\sqrt{2}<k<4\sqrt{2}$ 이다.

문제3-2



$0<x<\sqrt{2}$ 일 때의 $g(x)$의 역함수를 h_1, $\sqrt{2}<x<\sqrt{6}$ 일 때의 역함수를 h_2라고 하면, $f(k)=h_2(k)-h_1(k)$ 이므로 $f'(x)=h_2'(x)-h_1'(x)$ 이고 $f'(-5)=h_2'(-5)-h_1'(-5)$ 이다.

따라서 역함수의 미분법을 적용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$f'(-5)=\frac{1}{g'(h_2(-5))}-\frac{1}{g'(h_1(-5))}$$

한편, $g(x)=-5$ 를 만족하는 양수 x 를 구하면 $x=1, \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$ 이다.

따라서 $h_1(-5)=1,\ h_2(-5)=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$ 가 되고 $g'(x)=3x^2-6$ 이므로

$$f'(-5)=\frac{1}{g'(h_2(-5))}-\frac{1}{g'(h_1(-5))}=\frac{1}{3\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)^2-6}-\frac{1}{3(1)^2-6}=\frac{21+\sqrt{21}}{42} \text{ 이다.}$$

문제4-1

직선 $l: y=k(x-10)+5$은 한 정점 $(10,5)$를 지나고 기울기가 k인 직선이다. 직선 l이 타원 C에 접할 때의 접선의 방정식은 $y=kx\pm\sqrt{4k^2+1}$ 이고, 이 접선이 $(10,5)$를 지나므로 $5=10k\pm\sqrt{4k^2+1}$ 을 얻는다. 이를 정리하면 $(3k-2)(8k-3)=0$ 이고 접선의 기울기는 $\frac{2}{3}$ 와 $\frac{3}{8}$ 이다. 그러므로 타원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k의 범위는 $\frac{3}{8}<k<\frac{2}{3}$ 이다.

문제4-2

타원 C와 직선 l이 서로 다른 두 점 P와 Q에서 만나므로 그 좌표를 각각 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$라 하자. 점 P,Q에서 타원 C에 접선을 그으면 두 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{4}+y_1y=1$, $\frac{x_2x}{4}+y_2y=1$ 이고,

두 접선의 교점이 $R(a,b)$ 이므로 $\frac{x_1a}{4}+y_1b=1$, $\frac{x_2a}{4}+y_2b=1$ 을 얻는다.

따라서 직선 $\frac{a}{4}x+by=1$는 두 점 P,Q를 지나는 직선이고, 직선 l과 일치하므로 $-\frac{a}{4b}=k$, $\frac{1}{b}=-10k+5$ 임을 알 수 있다. 두 식을 연립하면 $5a+10b=2$ 이다.

타원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k의 범위가 $\frac{3}{8}<k<\frac{2}{3}$ 이므로 $-\frac{5}{3}<\frac{1}{b}=5-10k<\frac{5}{4}$ 에서 b의 범위를 구하면 $b<-\frac{3}{5}$, $b>\frac{4}{5}$ 임을 알 수 있다.

26 인하대학교 모의 2차26)

[문제1] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 두 2×2 행렬 A와 B에 대하여 행렬의 곱 AB와 BA는 일반적으로 같지 않다.

(나) 행렬 C가 2×2 단위행렬 E의 상수배가 아니면, $CA=AC$가 성립하는 모든 2×2 행렬 A는 적당한 실수 α, β에 대하여 $\alpha C+\beta E$의 꼴로 쓸 수 있다.

(※) 2×2 행렬 C에 대해서 $C^2+C+E=O$가 성립한다고 하자. (단, 여기서 E는 단위행렬이고 O는 영행렬이다.)

문제1-1

두 2×2 행렬 A, B가 $AC=CA$와 $BC=CB$를 만족할 때, 제시문 (나)의 결과를 이용하여 $AB=BA$임을 보이시오. (10점)

문제1-2

행렬 $A=C-E$의 역행렬을 적당한 실수 α, β에 대하여 $\alpha C+\beta E$로 나타내시오. (15점)

[문제2] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

함수 $f(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$ 가 성립한다.

(※) 양의 정수 n에 대하여 $a_n=\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$이라 하자.

문제2-1 급수 $\sum_{k=1}^{n} a_k$의 합을 구하시오. (5점)

문제2-2 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$의 합을 구하시오. (10점)

문제2-3 $\int_n^{n+1}\frac{1}{x^3}\,dx=\frac{a_n}{2}$ 임을 보이고 이를 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{1}{x^3}\,dx$의 값을 구하시오. (10점)

26) 인하대학교 홈페이지

[문제3] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) (중간값의 정리) 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 일 때, $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k 에 대하여 $f(c)=k$ 를 만족하는 c 가 열린 구간 (a, b) 에서 적어도 하나 존재한다.

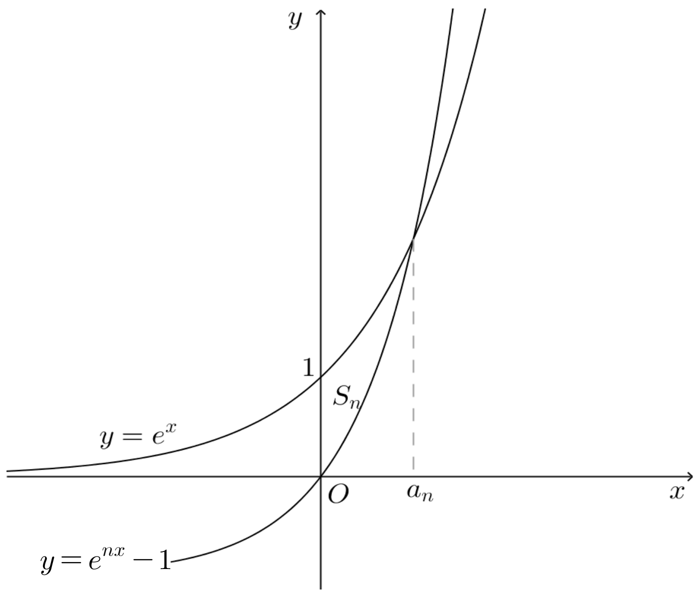
(나) 중간값의 정리에 의해 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a)$ 와 $f(b)$ 의 부호가 다를 때, 즉 $f(a)f(b)<0$ 이면 방정식 $f(x)=0$ 은 열린 구간 (a, b) 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(다) 함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 는

$$f'(a)=\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

으로 정의된다. 특히 지수함수 $f(x)=e^x$ 의 $x=0$ 에서의 미분계수는 $f'(0)=1$ 이다.

(※) n 은 2 보다 큰 정수이다. 아래 그림과 같이 $x \geq 0$ 에서 두 곡선 $y=e^x$ 와 $y=e^{nx}-1$ 은 한 점에서 만난다. 그 교점의 x 좌표를 a_n 이라 하고, 두 곡선의 그래프와 y 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_n 이라 하자.



문제3-1 $0<a_n<\frac{1}{n}$ 임을 보이시오. (10점)

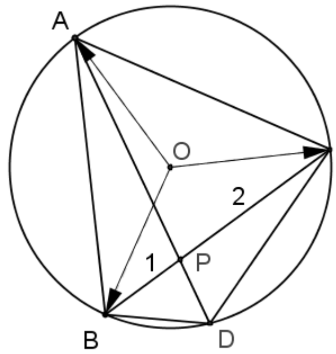
문제3-2 극한 $\lim_{n \to \infty}\frac{S_n}{a_n}$ 의 값을 구하시오. (15점)

[문제4] (25점) 다음 물음에 답하시오.

(※) 아래 그림과 같이 반지름이 1 이고 점 O 를 중심으로 하는 원이 있다. 원에 내접하는 사각형 ABDC 는 다음의 조건을 만족한다고 하자.

(조건1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

(조건2) AD 와 BC 의 교점 P 는 선분 BC 를 1 : 2 로 내분한다.



문제4-1

삼각형 ABC 는 정삼각형임을 보이시오. (10점)

문제4-2

벡터 $\overrightarrow{AD}$ 를 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 와 벡터 $\overrightarrow{AC}$ 로 나타내시오. (15점)

풀어보기 [문제1]

자연수 n에 대하여 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx$ 라고 하고

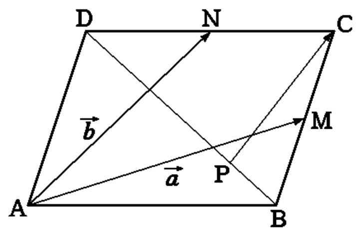
$$f(n) = a_n + a_{n+2}$$

라 할 때, $\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{f(n)}$ 의 값은? [2015 EBS 수능완성 수학B 유형편 121쪽]

① 210　② 215　③ 220　④ 225　⑤ 230

풀어보기 [문제2]

그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 대각선 BD를 1: 3 으로 내분하는 점을 P, 두 변 BC, CD의 중점을 각각 M, N이라 하자.
$\overrightarrow{AM} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AN} = \vec{b}$라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{PC}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내면? [2014 수능특강 기하와 벡터 116쪽]



① $\frac{1}{6}(-\vec{a}+5\vec{b})$　② $\frac{1}{6}(-2\vec{a}+5\vec{b})$　③ $\frac{1}{6}(\vec{a}+4\vec{b})$

④ $\frac{1}{4}(-\vec{a}+3\vec{b})$　⑤ $\frac{1}{4}(\vec{a}+3\vec{b})$

예시답안

풀어보기 [문제1]

$$f(n)=a_n+a_{n+2}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)\,dx$$

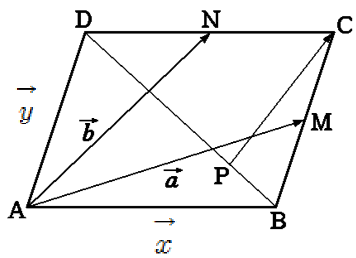
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 x\,dx$$

$\tan x=t$ 로 놓으면 $\sec^2 x\dfrac{dx}{dt}=1$ 이고 $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$f(n)=\int_0^1 t^n\,dt=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20}\frac{1}{f(n)}=\sum_{n=1}^{20}(n+1)=\frac{20\times 21}{2}+20=230$$

풀어보기 [문제2]



$\overrightarrow{AB}=\vec{x}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{y}$ 라 하면

$\overrightarrow{AM}=\vec{x}+\dfrac{1}{2}\vec{y}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}\vec{x}+\vec{y}=\vec{b}$ 이므로

$$\vec{x}=\frac{4}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\ ,\ \vec{y}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$$

이다. 점 P 는 선분 BD 를 1:3 으로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \frac{\vec{y}+3\vec{x}}{4} \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\right)+\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}\right) \\ &= \frac{5}{6}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{x}+\vec{y} = \frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

이고 따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\left(\frac{5}{6}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}\right) \\ &= -\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b} = \frac{1}{6}(-\vec{a}+5\vec{b})\end{aligned}$$

문제1-1

$C^2+C+E=O$ 에서 $C=kE$ (k는 실수)라면 $(k^2+k+1)E=O$ 이고 $k^2+k+1\neq 0$ 이므로 이는 모순이다. 따라서 행렬 C는 단위행렬 E의 상수배가 아니다. $CA=AC$이므로 제시문 (나)에 의하여 행렬 A는 적당한 실수 α, β에 대하여 $\alpha C+\beta E$의 꼴로 쓸 수 있다. 따라서

$$AB=(\alpha C+\beta E)B=\alpha CB+\beta EB=\alpha BC+\beta BE=B(\alpha C+\beta E)=BA$$

가 성립한다.

문제1-2

$C^2+C+E=O$ 에서 $(C-E)(C+2E)+3E=O$ 임을 알 수 있다. 따라서

$$(C-E)(C+2E)=-3E$$

$$(C-E)\left\{-\frac{1}{3}(C+2E)\right\}=E$$

$$A^{-1}=(C-E)^{-1}=-\frac{1}{3}(C+2E)=-\frac{1}{3}C-\frac{2}{3}E$$

문제2-1

$a_n=\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$

문제2-2

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=1$$

문제2-3

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x^3}\,dx = \int_n^{n+1} x^{-3}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\ x^{-2}\ \right]_n^{n+1}$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{a_n}{2}$$

이다. 그러므로

$$\int_1^n \frac{1}{x^3}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x^3}\,dx + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x^3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

이고, 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

이다.

문제3-1

$f(x) = e^x - (e^{nx} - 1) = e^x - e^{nx} + 1$ 이라 하면 $f(x)$ 는 $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ 에서 연속이고

$$f(0) = 1 > 0\ ,\ f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}} - e + 1 < e^{\frac{1}{2}} - e + 1 = e^{\frac{1}{2}} - (e-1) < 0$$

이므로 제시문 (나)에 의해 방정식 $e^x - e^{nx} + 1 = 0$ 은 열린 구간 $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ 에서 실근을 가지고 따라서 $0 < a_n < \frac{1}{n}$ 이다.

문제3-2

$$S_n = \int_0^{a_n} (e^x - e^{nx} + 1)\,dx = \left[e^x - \frac{1}{n}e^{nx} + x\right]_0^{a_n}$$

$$= (e^{a_n} - 1) - \frac{1}{n}(e^{na_n} - 1) + (a_n - 0)$$

이고 (3-1)의 결과에 의해 $0 < a_n < \frac{1}{n}$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다. 그리고 $e^{a_n} = e^{na_n} - 1$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} e^{na_n} = \lim_{n\to\infty}(e^{a_n} + 1) = 2$ 이고 $\lim_{n\to\infty} na_n = \ln 2$ 이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{a_n}-1}{a_n}-\frac{e^{na_n}-1}{na_n}+1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\right)-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{na_n}-1}{na_n}\right)+1$$

$$=1-\frac{2-1}{\ln 2}+1=2-\frac{1}{\ln 2}$$

문제4-1

(조건1)에 의해 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$ 이므로 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|-\overrightarrow{OC}|$ 이고 양변을 제곱하면

$$|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=|-\overrightarrow{OC}|^2$$

이다. 여기서 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|-\overrightarrow{OC}|=1$ 이므로 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{2}$ 이다. 따라서

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2=3$$

이고 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}$ 이다.

마찬가지 방법으로 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$ 에서 $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}$ 에서 $|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{3}$ 임을 알 수 있고 따라서 삼각형 ABC 는 정삼각형이다.

문제4-2

$\overrightarrow{AD}=k\,\overrightarrow{AP}$ (k는 실수)이고 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 이므로

$$\overrightarrow{AD}=k\,\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}k\,\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}k\,\overrightarrow{AC}$$

이다. 한편, (4-1)에 의해 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{3}$ 이고 삼각형 ABC 는 정삼각형이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 이다. 따라서

$$|\overrightarrow{AP}|^2=\frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

즉, $|\overrightarrow{AP}|=\frac{\sqrt{21}}{3}$ 이다. 또한 삼각형 ABP 와 삼각형 CDP 는 닮음이므로

$$\overline{BP}:\overline{DP}=\overline{AP}:\overline{CP}\quad,\quad \frac{1}{3}\sqrt{3}:\overline{DP}=\frac{\sqrt{21}}{3}:\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

이고 $\overline{DP}=\frac{2}{21}\sqrt{21}$, $\overline{AD}=\frac{\sqrt{21}}{3}+\frac{2\sqrt{21}}{21}=\frac{3\sqrt{21}}{7}$, $k=\frac{9}{7}$ 이다. 따라서

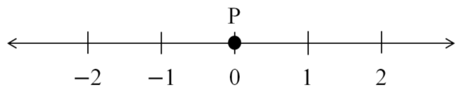
$$\overrightarrow{AD}=\frac{9}{7}\overrightarrow{AP}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$$

이다.

27 중앙대학교 수시(자연1)[27]

문제1

아래쪽 그림과 같이 수직선 위의 원점에 점 P가 있다. 점 P는 한 개의 주사위를 던져서 앞면이 나오면 왼쪽으로 한 칸 이동하고 뒷면이 나오면 오른쪽으로 한 칸 이동한다. 한 개의 동전을 여섯 번 던질 때, 점 P가 세 점 $-1,\ 0,\ 1$에서만 움직일 확률을 구하시오. [20점]



[문제 2] 다음 제시문 (가), (나), (다)를 읽고 문제 답하시오.

가. 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 다음과 같은 부분적분 공식이 성립한다. 예를 들어 $f'(x)=e^x, g(x)=\sin x$ 이면

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx \text{이므로}$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$를 얻는다. (단, C는 적분상수이다.)

나. 함수 $y=f(x)$가 y축에 대하여 대칭인 경우, 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족하고 함수 $y=f(x)$가 원점에 대하여 대칭인 경우 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족한다.

다. 함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (a < x < b)$$가 성립한다.

문제2-1

연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(\pi-x)=(e^{\frac{\pi}{2}-x}+e^{x-\frac{\pi}{2}})\sin x$를 만족할 때, $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx$를 계산하는 과정을 논리적으로 제시하시오. (10점)

27) 중앙대학교 홈페이지

문제2-2

함수 $f(x)=(4x+p)\sin 2x$ (p는 실수)가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x \{f(t)\}^2 dx + \int_0^{-x} \{f(t)\}^2 dx = 0$$

을 만족할 때, p의 값과 $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \{f(t)\}^2 dx$의 값을 계산하는 과정을 논리적으로 제시하시오. (10점)

[문제 3] 다음 제시문 (가), (나)를 읽고 물음에 답하시오.

가. 방정식의 실근의 개수는 그래프의 개형을 그려 x축과의 교점의 개수를 조사하면 구할 수 있다.

나. 탄젠트 함수의 덧셈정리는 다음과 같으며

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

이 덧셈정리를 이용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\tan 3\theta=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

문제3-1

임의의 실수 α에 대하여 삼차방정식 $x^3-3\alpha x^2-3x+\alpha=0$이 서로 다른 세 실근 x_1, x_2, x_3 $(x_1<x_2<x_3)$을 갖는 것을 논리적으로 설명하시오. (10점)

문제3-2

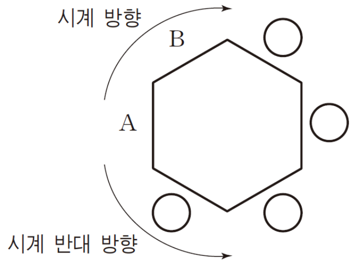
1보다 큰 임의의 실수 α에 대하여 삼차방정식 $x^3-3\alpha x^2-3x+\alpha=0$의 서로 다른 세 실근 x_1, x_2, x_3 $(x_1<x_2<x_3)$이 다음 부등식을 만족함을 논리적으로 설명하시오.

$$-1<x_1<0<x_2<1$$

또한 극한값 $\lim_{\alpha\to\infty} x_1$과 $\lim_{\alpha\to\infty} x_2$를 구하시오. (20점)

풀어보기 [문제1]

A, B 를 포함한 6 명이 정육각형 모양의 탁자에 그림과 같이 둘러 앉아 주사위 한 개를 사용하여 다음 규칙을 따르는 시행을 한다.



주사위를 가진 사람이 주사위를 던져 나온 눈의 수가 3 의 배수이면 시계 방향으로, 3 의 배수가 아니면 시계 반대 방향으로 이웃한 사람에게 주사위를 준다.

A 부터 시작하여 이 시행을 5 번 한 후 B 가 주사위를 가지고 있을 확률은? [4점]
(2011학년도 대수능 6월 모의평가)

풀어보기 [문제2]

연속함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x)=f(x)$
(나) $f(x+2)=f(x)$
(다) $\int_{-1}^{1}(x+2)^2 f(x)\,dx=50$, $\int_{-1}^{1}x^2 f(x)\,dx=2$

$\int_{-3}^{3}x^2 f(x)dx$ 의 값을 구하시오. (2014년 7월 시행 전국연합문제)

풀어보기 [문제3]

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$f'(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ 를 가지고, $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$ 이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (2008학년도 대수능문제)

[보 기]

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x=\beta$ 에서 극댓값을 가진다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 가진다.
ㄷ. $f(\alpha)>0$ 이면 방정식 $f(x)=0$ 은 β 보다 작은 실근을 가진다.

① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예시답안

풀어보기 [문제1]

주사위를 던져서 3 의 배수의 눈이 나와 시계 방향으로 주사위를 주는 경우를 a, 3 의 배수가 아닌 눈이 나와 시계 반대 방향으로 주사위를 주는 경우를 b 라 하자.
5 번 시행 후 B 가 주사위를 가지고 있는 것은 a 가 3 번, b 가 2 번 나오거나 b 만 5 번 나오는 경우이므로 구하는 확률은

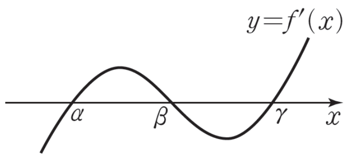
$$ {}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + {}_5C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{40}{243}+\frac{32}{243} = \frac{72}{243}=\frac{8}{27} $$

풀어보기 [문제2]

$$ \begin{aligned} \int_{-3}^{3} x^2 f(x)dx &= \int_{-3}^{-1} x^2 f(x)dx + \int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx + \int_{1}^{3} x^2 f(x)dx \\ &= 2\int_{1}^{3} x^2 f(x)dx + 2 \\ &= 2\int_{-1}^{1} (x+2)^2 f(x+2)dx + 2 \\ &= 2\int_{-1}^{1} (x+2)^2 f(x)dx + 2 = 102 \end{aligned} $$

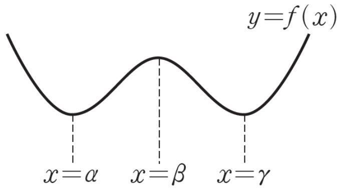
풀어보기 [문제3]

ㄱ. $f'(x)=0$ 의 최고차항의 계수가 양수인 삼차방정식이고, 서로 다른 세 실근이 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ 를 가지므로 $y=f'(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



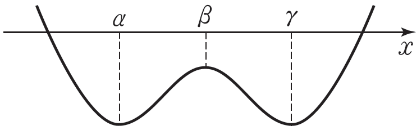
이때, $x=\beta$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x=\beta$ 에서 극댓값을 가진다. (참)

ㄴ. ㄱ에 의하여 사차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

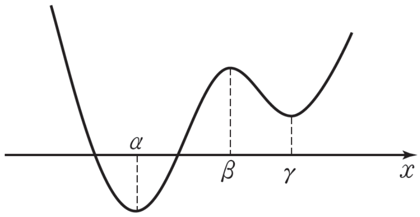


이때, $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$ 인 경우는 다음과 같이 3가지 경우가 있다.

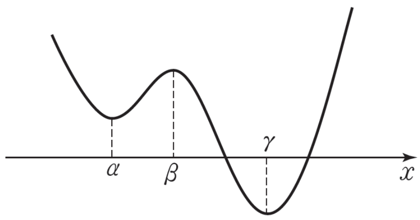
(ⅰ) $f(\alpha)<0$, $f(\beta)<0$, $f(\gamma)<0$



(ⅱ) $f(\alpha)<0$, $f(\beta)>0$, $f(\gamma)>0$



(ⅲ) $f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$, $f(\gamma)<0$



3가지 경우 모두 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다. (참)

ㄷ. ㄴ의 (ⅲ)의 경우에서 $f(\alpha)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 β보다 큰 두 실근을 가진다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

문제1-1

점 P는 원점에서 출발하므로 1회의 시행에서 -1또는 1로 움직인다. 그런데 점 P는 $0, -1, 1$ 위를 움직이므로 2회의 시행에서 반드시 원점으로 되돌아 와야 한다. 따라서 처음에 앞면이 나왔으면 두 번째는 반드시 뒷면이 나와야 하고, 처음에 뒷면이 나왔으면 두 번째는 반드시 앞면이 나와야 한다. 이런 상황이 세 번 반복되므로 1회, 3회, 5회에서만 2가지 경우가 생긴다. 이 상황을 표로 나타내면 아래와 같다.

시작(위치)	1회(위치)	2회(위치)	3회(위치)	4회(위치)	5회(위치)	6회(위치)
0	H(-1)	T(0)	H(-1)	T(0)	H(-1)	T(0)
					T(1)	H(0)
			T(1)	H(0)	H(-1)	T(0)
					T(1)	H(0)
	T(1)	H(0)	H(-1)	T(0)	H(-1)	T(0)
					T(1)	H(0)
			T(1)	H(0)	H(-1)	T(0)
					T(1)	H(0)

또 전체 표본 공간의 개수는 2^6 이고 위의 경우의 8 이므로 구하는 확률 $P=\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$ 이다.

문제2-1

$f(x)+f(\pi-x)=(e^{\frac{\pi}{2}-x}+e^{x-\frac{\pi}{2}})\sin x$ 의 양변에 정적분을 취하면

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(f(x)+f(\pi-x))dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(e^{\frac{\pi}{2}-x}+e^{x-\frac{\pi}{2}}\right)\sin x dx$ 가 성립한다. 먼저 좌변을 생각해보자.

좌변$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(f(x)+f(\pi-x))dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}f(\pi-x)dx$ 이다.

여기서 $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}f(x)$라 두고, $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}f(\pi-x)dx$ 를 치환적분하자.

$\pi-x=t$라 두면 $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{3\pi}{4}$, $x=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$ 이고, $dx=-dt$ 이므로

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}f(\pi-x)dx=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}f(t)(-dt)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}f(t)dt=I$ 이다.

따라서, 좌변$=2I$ 이다.

이제 우변을 생각하자. 우변$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(e^{x-\frac{\pi}{2}}\right)\sin x dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(e^{\frac{\pi}{2}-x}\right)\sin x dx$ 이다.

제시문 (가)에 의하여 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(e^{x-\frac{\pi}{2}}\right)\sin x dx=\left[\frac{1}{2}e^{x-\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\cdots①$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(e^{\frac{\pi}{2}-x}\right)\sin x dx$ 를 계산하기 위해서 치환적분을 하면 다음과 같다.

$\frac{\pi}{2}-x=t$로 두면, $x=\frac{\pi}{2}-t$이고 $dx=-dt$이다.

또 $x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{3\pi}{4} \Rightarrow t=-\frac{\pi}{4}$ 이다. 따라서

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(e^{\frac{\pi}{2}-x}\right)\sin x dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}}\left(e^t\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)(-dt)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}e^t\cos t dt$ 제시문(가)에 의하여

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}e^t\cos t dt=\left[\frac{1}{2}e^t(\cos t+\sin t)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\cdots$②

①, ②에 의하여 우변$=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ 이다. 그런데 좌변=우변이므로 $2I=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

즉, $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ 이다.

(우변계산의 다른 풀이)

우변 $J=\int\left(e^{\frac{\pi}{2}-x}+e^{x-\frac{\pi}{2}}\right)\sin x dx$ 에서 제시문[가]를 적용하여 부분적분을 하자.

$g'(x)=e^{\frac{\pi}{2}-x}+e^{x-\frac{\pi}{2}}$, $h(x)=\sin x$ 이면

$J=\left(-e^{\frac{\pi}{2}-x}+e^{x-\frac{\pi}{2}}\right)\sin x+\int\left(e^{\frac{\pi}{2}-x}-e^{x-\frac{\pi}{2}}\right)\cos x dx$ 이고

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(e^{\frac{\pi}{2}-x}-e^{x-\frac{\pi}{2}}\right)\cos x dx=-\left(e^{\frac{\pi}{2}-x}+e^{x-\frac{\pi}{2}}\right)\cos x-J$ 이므로

$J=\frac{1}{2}\left(-e^{\frac{\pi}{2}-x}+e^{x-\frac{\pi}{2}}\right)\sin x-\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}-x}+e^{x-\frac{\pi}{2}}\right)\cos x+C$를 얻는다.

따라서 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(e^{\frac{\pi}{2}-x}+e^{x-\frac{\pi}{2}}\right)\sin x dx$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(-e^{\frac{\pi}{2}-x}+e^{x-\frac{\pi}{2}}\right)\sin x-\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}-x}+e^{x-\frac{\pi}{2}}\right)\cos x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\left(-e^{-\frac{\pi}{4}}+e^{\frac{\pi}{4}}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{4}}+e^{\frac{\pi}{4}}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\left(-e^{\frac{\pi}{4}}+e^{-\frac{\pi}{4}}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{4}}+e^{-\frac{\pi}{4}}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

$$=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$$

문제2-2

$\int_0^x\{f(t)\}^2dx+\int_0^{-x}\{f(t)\}^2dx=0$ 이므로 왼쪽 식의 양변을 x 에 관하여 미분하면

$\{f(x)\}^2-\{f(-x)\}^2=0$ 이 성립한다.

즉, $(f(x)+f(-x))(f(x)-f(-x))=0$ …③ 이제 $f(x)=(4x+p)\sin 2x$ 를 ③에 대입하면

$((4x+p)\sin 2x+(-4x+p)\sin(-2x))((4x+p)\sin 2x-(-4x+p)\sin(-2x))=0$

위의 식을 간단히 정리하면 $8x\sin 2x(2p\sin x)=0$ 이다.

모든 실수 x에 대하여 $8x\sin 2x(2p\sin x)=0$ 이 성립하려면 $p=0$이다.

따라서 $I=\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}\{f(t)\}^2dx=\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}\{4x\sin 2x\}^2dx$ 이다.

그런데 $\{4x\sin 2x\}^2$은 y축 대칭이므로 $I=2\int_0^{\frac{\pi}{8}}16x^2\sin^2 2x\,dx$ 이다.

또 $\sin^2 2x=\dfrac{1-\cos 4x}{2}$ 이므로

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}(16x^2(1-\cos 4x))dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}}16x^2dx-\int_0^{\frac{\pi}{8}}16x^2\cos 4x\,dx=\frac{\pi^3}{96}-\int_0^{\frac{\pi}{8}}16x^2\cos 4x\,dx$$

여기서 $\int_0^{\frac{\pi}{8}}16x^2\cos 4x\,dx$를 계산하기 위해서 부분적분법을 사용하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}}16x^2\cos 4x\,dx=\left[4x^2\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}-\int_0^{\frac{\pi}{8}}8x\sin 4x\,dx$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\left(\left[-2x\cos 4x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}-\int_0^{\frac{\pi}{8}}(-2\cos 4x)dx\right)=\frac{\pi^2}{16}-\left[\frac{\sin 4x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{8}}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$$

$$I=\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}\{f(t)\}^2dx=\frac{\pi^3}{96}-\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}=\frac{\pi^3-4\pi^2+48}{96}$$

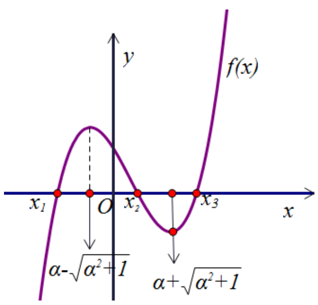
문제3-1

$f(x)=x^3-3\alpha x^2-3x+\alpha$ (α는 임의의 실수)라고 하자.

$f'(x)=3x^2-6\alpha x-3=3(x^2-2\alpha x-1)=0$에서

$x=\alpha-\sqrt{\alpha^2+1}$에서 극댓값을 가지고 $x=\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}$에서 극솟값을 가진다.

$f(x)=x^3-3\alpha x^2-3x+\alpha=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가진다는 것은 아래 그림과 같이 함수 $f(x)$와 x축과 교점을 3개 가지는 것이므로



$f\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right)f\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2+1}\right)<0$ 임을 보이면 충분하다.

또, $f(x)=x^3-3\alpha x^2-3x+\alpha=(x-\alpha)^3-3\alpha^2x-3x+\alpha^3+\alpha$이다.

$$f\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right)=\left(\sqrt{\alpha^2+1}\right)^3-3\alpha^2(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1})-3(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1})+\alpha^3+\alpha$$
$$=-2\alpha^3-2\alpha-2\alpha^2\sqrt{\alpha^2+1}-2\sqrt{\alpha^2+1}$$

$$f\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2+1}\right)=\left(\sqrt{\alpha^2+1}\right)^3-3\alpha^2(\alpha-\sqrt{\alpha^2+1})-3(\alpha-\sqrt{\alpha^2+1})+\alpha^3+\alpha$$
$$=\left(-\sqrt{\alpha^2+1}\right)^3-3\alpha^2(\alpha-\sqrt{\alpha^2+1})-3(\alpha-\sqrt{\alpha^2+1})+\alpha^3+\alpha$$
$$=-2\alpha^3-2\alpha+2\alpha^2\sqrt{\alpha^2+1}+2\sqrt{\alpha^2+1}$$

$$f\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right)f\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2+1}\right)$$
$$=((-2\alpha^3-2\alpha)-(2\alpha^2\sqrt{\alpha^2+1}+2\sqrt{\alpha^2+1}))((-2\alpha^3-2\alpha)+2\alpha^2\sqrt{\alpha^2+1}+2\sqrt{\alpha^2+1})$$
$$=-4(\alpha^4+2\alpha^2+1)=-4(\alpha^2+1)^2<0$$

다른 풀이

$f(x)=x^3-3\alpha x^2-3x+\alpha=(x-\alpha)^3-3(\alpha^2+1)(x-\alpha)-2\alpha(\alpha^2+1)$이다.

$$f\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right)=\left(\sqrt{\alpha^2+1}\right)^3-3(\alpha^2+1)(\sqrt{\alpha^2+1})-2\alpha(\alpha^2+1)$$
$$=-2(\alpha^2+1)\sqrt{\alpha^2+1}-2\alpha(\alpha^2+1)$$

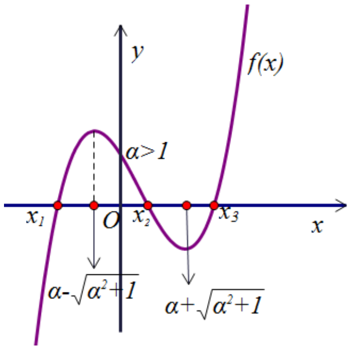
$$f\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2+1}\right)=\left(-\sqrt{\alpha^2+1}\right)^3+3(\alpha^2+1)(\sqrt{\alpha^2+1})-2\alpha(\alpha^2+1)$$
$$=2(\alpha^2+1)\sqrt{\alpha^2+1}-2\alpha(\alpha^2+1)$$

$$f\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right)f\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2+1}\right)$$
$$=\left\{-2\alpha(\alpha^2+1)-2(\alpha^2+1)\sqrt{\alpha^2+1}\right\}\left\{-2\alpha(\alpha^2+1)+2(\alpha^2+1)\sqrt{\alpha^2+1}\right\}$$
$$=4\alpha^2(\alpha^2+1)^2-4(\alpha^2+1)^2(\alpha^2+1)$$
$$=4(\alpha^2+1)^2\left\{\alpha^2-(\alpha^2+1)\right\}$$
$$=-4(\alpha^2+1)^2<0$$

따라서 $f(x)$는 x축과 3개의 교점을 가진다. 즉, 서로 다른 세 실근을 가진다.

문제3-2

방정식 $x^3-3\alpha x^2-3x+\alpha=0$의 서로 다른 세 실근 $x_1<x_2<x_3$ 은 아래 그림과 같이 $x_1<\alpha-\sqrt{\alpha^2+1}<x_2<\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}<x_3$ 이다.



그런데 $\alpha > 1$이므로 $x_3 > 1,\ 0 < x_2 < \alpha + \sqrt{\alpha^2+1},\ x_3 < \alpha - \sqrt{\alpha^2+1} \cdots (1)$

또, 방정식 $x^3 - 3\alpha x^2 - 3x + \alpha = 0$ 의 근은 $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$을 만족하는 $\tan\theta$의 값이다.

즉, $\alpha = \tan 3\theta$이고 $\tan\theta = x$를 의미하고 있다.

따라서 $\alpha = \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2} > 1$에서 부등식 $(3x - x^3)(1 - 3x^2) > (1 - 3x^2)^2$이 성립한다.

즉, $x^3 - 3\alpha x^2 - 3x + \alpha = 0$의 세 실근은 $(3x^2 - 1)(x^3 - 3x^2 - 3x + 1) > 0$을 만족하는 범위에 있다. $\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)(x+1)(x - 2 + \sqrt{3})(x - 2 - \sqrt{3}) > 0$

즉, $-1 < x < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 또는 $2 - \sqrt{3} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 또는 $x > 2 + \sqrt{3}$ $\cdots (2)$

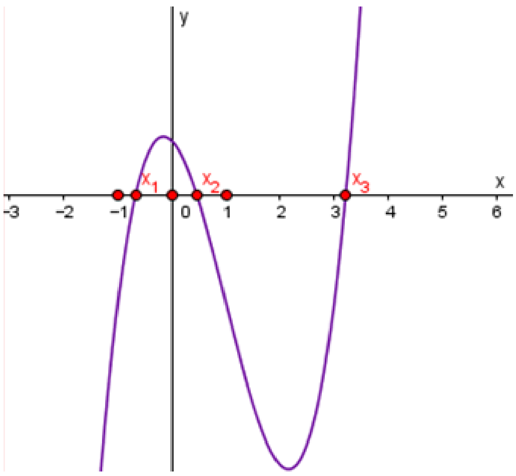
따라서 (1)과 (2)를 동시에 만족하는 x_1, x_2 의 범위는 $-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1$ 이다.

다른 풀이

$\alpha > 1$이므로 $f(-1) = -3\alpha^2 + \alpha + 2 = -(3\alpha + 2)(\alpha - 1) < 0$

$f(0) = \alpha > 0$

$f(1) = -3\alpha^2 + \alpha - 2 = -(3\alpha + 2)(\alpha - 1) < 0$ 이므로



위 그래프와 중간값 정리에 의하여 $-1<x_1<0<x_2<1$

$\alpha=\tan 3\theta$이고 α가 임의의 실수이므로 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$이라고 할 수 있다.

$-1<x_1=\tan\theta_1<0<x_2=\tan\theta_2<1$ 라고 하자.

$\alpha\to\infty \Rightarrow 3\theta\to\frac{\pi}{2}-0$ 즉, $\theta\to\frac{\pi}{6}-0$ 이거나 $\alpha\to\infty \Rightarrow 3\theta\to -\frac{\pi}{2}-0$ 즉, $\theta\to -\frac{\pi}{6}-0$

따라서 $\lim_{\alpha\to\infty}x_1=\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{6}-0}\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\lim_{\alpha\to\infty}x_2=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{6}-0}\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$-\frac{3\pi}{2}<\theta<-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$,$\cdots$ 등의 경우에도 위와 같은 값을 가진다.

28 중앙대학교 수시(자연2)[28)]

문제1

A씨는 매월 초 연금으로 2백만 원을 받는다. A씨가 한 달 동안 지출하는 돈은 1백 원, 2백만 원, 3백만 원, 4백만 원 중 하나이며 각각 $\frac{1}{4}$의 확률을 가진다. 월말에 4백만 원 이상의 돈이 남아 있을 경우, 4백만 원을 제외한 나머지 돈 모두를 즉시 기부한다. A씨가 올해 10월 말에 4백만 원을 가지고 있다고 할 때, A씨가 가지고 있는 돈이 올해 12월 말까지 한번이라도 2백만 원 이하로 떨어질 확률을 구하시오. [20점]

문제2

다음 제시문 (가)와 (나)를 읽고 문제에 답하시오.

> (가) 미분가능한 함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(x_1, f(x_1))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.
>
> $$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$$
>
> 곡선 밖의 점 (α, β)에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점은 위 식에 $(x, y)=(\alpha, \beta)$를 대입하여 구한다.
>
> (나) 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적은 다음과 같다.
>
> $$\vec{a} \cdot \vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$$

문제2-1

점 $P(0,p)$에서 $y=-(x-a)^2$에 그은 접선은 두 개다.(단, $p>0$). 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하자. A, B를 구하는 과정을 논리적으로 제시하시오. 또한 $a=0$일 때, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$의 최솟값을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오.[10점]

문제2-2

좌표평면에서 원점을 중심으로 반지름이 1인 원 C가 있다. 원 C 밖에 있는 점 R에서 원 C에 그은 접선은 두 개다. 점 R에서 원 C에 그은 접선의 접점을 각각 E, F라 하자. 부등식 $0 \le \overrightarrow{RE} \cdot \overrightarrow{RF} \le 1$을 만족시키는 점 R이 나타내는 영역의 넓이를 구하는 과정을 논리적으로 제시하시오.[10점]

---

28) 중앙대학교 홈페이지

문제3

다음 제시문를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 좌표평면 위의 점을 원점을 중심으로 각 θ만큼 회전하는 일차변환은 2×2 행렬 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$으로 표현된다.

(나) 좌표평면 위의 점을, 원점을 닮음의 중심으로 하고 닮음비가 실수 $k\,(k\neq0)$인 일차변환은 2×2 행렬 $\begin{pmatrix}k & 0 \\ 0 & k\end{pmatrix}$으로 표현된다.

(다) 두 일차변환 f, g를 나타내는 행렬을 각각 A, B라 하면 f와 g의 합성변환 $g\circ f$는 일차변환이고, $g\circ f$를 나타내는 행렬은 BA이다.

■ 삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$은 삼각형 $A_nB_nC_n$을 (가)에서 각 $\theta=\dfrac{\pi}{2^n}$ 만큼 일차변환한 후, (나)에서 닮음비 $k=\dfrac{n+1}{n}$인 일차변환을 통하여 옮겨진 삼각형이다. (단, n은 자연수이며 삼각형 $A_1B_1C_1$의 꼭짓점의 좌표는 $A_1(1,2)$, $B_1(3,2)$, $C_1(2,5)$이다.)

문제3-1

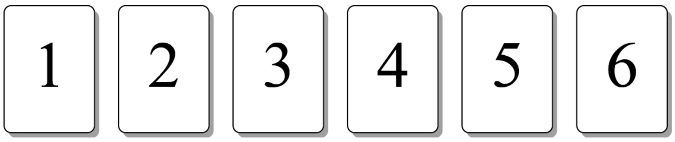
삼각형 $A_nB_nC_n$의 넓이를 D_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{n^3(n+1)}$을 구하는 과정을 논리적으로 제시하시오.[10점]

문제3-2

점 A_n의 좌표를 $A_n(a_n, b_n)$으로 표기할 때, 극한값 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{n+1}$을 구하는 과정을 논리적으로 제시하시오.[20점]

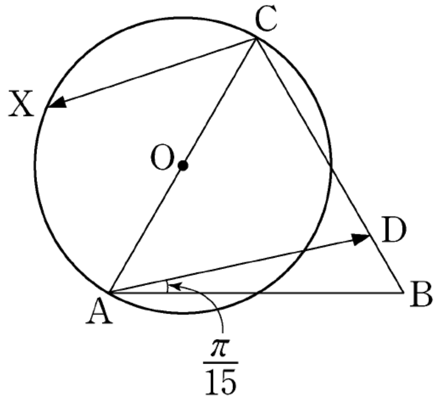
풀어보기 [문제1]

그림과 같이 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 한 면에만 각각 적혀 있는 6장의 카드가 일렬로 놓여 있다. 주사위 한 개를 던져서 나온 눈의 수가 2이하이면 가장 작은 숫자가 적혀 있는 카드 1장을 뒤집고, 3이상이면 가장 작은 숫자가 적혀 있는 카드부터 차례로 2장의 카드를 뒤집는 시행을 한다. 3번째 시행에서 4가 적혀 있는 카드가 뒤집어질 확률은? (단, 모든 카드는 한 번만 뒤집는다.) (2014 7월 전국연합 B형)



풀어보기 [문제2]

그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC 위의 점 D를 $\angle \mathrm{DAB}=\frac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle \mathrm{ACP}=\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (2011 대입 대수능 가형)



풀어보기 [문제3]

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 네 직선 $x=1$, $x=n+1$, $y=x$, $y=2x$로 둘러싸인 사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n}$의 값은? (2012. 03. 전국연합)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

예시답안

풀어보기 [문제1]

주사위 한 개를 던져서 나오는 눈의 수가 2 이하일 사건을 A라 하면 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$,

3 이상일 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

3번째 시행에서 4가 적혀 있는 카드가 뒤집어질 경우는 다음과 같다.

(i) ABA 또는 ABB인 경우의 확률 :

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$$

(ii) AAB인 경우의 확률 :

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$$

(iii) BAA 또는 BAB인 경우의 확률 :

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$$

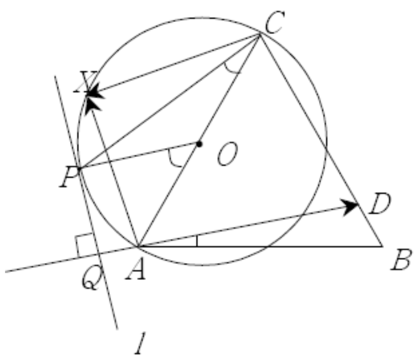
따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 확률은 $\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{9}=\frac{14}{27}$ 이다.

풀어보기 [문제2]

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CX}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AX}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AX}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ……㉠

세 점 A, C, D는 고정된 점이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$는 상수이다. 따라서, ㉠에서 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 값이 최소가 되려면 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AX}}$의 값이 최소가 되어야 한다.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AX}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AX}}=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\overrightarrow{\mathrm{AX}}|\cos\theta$ 이고, $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ 의 값은 상수이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|\cos\theta$ 의 값이 최소이어야 한다.



그림과 같이 직선 AD와 수직인 직선이 원과 접할 때의 접점을 P라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|\cos\theta \geq |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta \quad =-|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$

이 때, $\angle\mathrm{POA}=\angle\mathrm{OAD}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{15}=\frac{4}{15}\pi$이므로

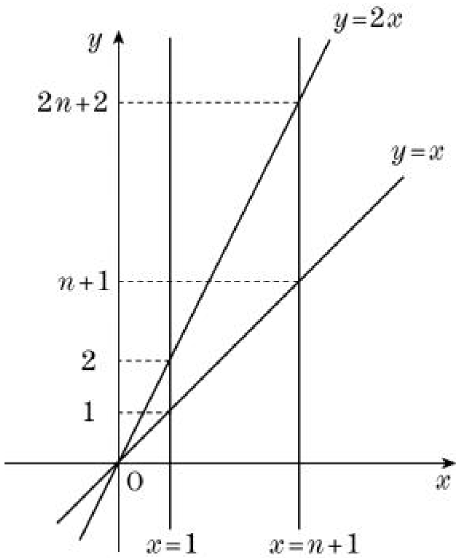
$2\angle\mathrm{ACP}=\angle\mathrm{AOP}$에서 $\angle\mathrm{ACP}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{15}\pi=\frac{2}{15}\pi$

$\therefore p+q=15+2=17$

풀어보기 [문제3]

정답) ③

네 직선 $x=1$, $x=n+1$, $y=x$, $y=2x$로 둘러싸인 사각형은 그림과 같이 평행한 두 변의 길이가 각각 1, $(n+1)$이고, 높이가 n인 사다리꼴이다.



$\therefore\ S_n=\frac{n(n+2)}{2}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{2}$

문제1

(1) 각 시기별 A 씨가 가진 돈을 표로 나타내면 아래와 같다.

각 시기별 A 씨가 가진 돈(만원)

10월말	11월초	11월말	12월초	12월말	확률
400	600	400	600	400	1/16
				400	1/16
				300	1/16
				200	1/16
		400	600	400	1/16
				400	1/16
				300	1/16
				200	1/16
		300	500	400	1/16
				300	1/16
				200	1/16
				100	1/16
		200	400	300	1/16
				200	1/16
				100	1/16
				0	1/16

따라서, A 씨가 가지고 있는 돈이 올해 12 월 말까지 한번이라도 2 백만 원 이하로 떨어질 확률은 $\frac{1}{16}\times 8=\frac{1}{2}$ 이다.

대학발표 예시답안

(1) 10 월 말에 4 백만 원을 가지고 있는 A 씨는 11 월 초에 2 백만원의 연금을 받아 6 백만 원을 가지게 된다. A 씨는 11 월 말에 지출 및 기부 후 4 가지 경우(①4 백만, ②4 백만, ③3 백만, ④2 백만)가 가능하다.

(2) (1)의 경우(11 월말) 잔액이 ④2 백만 원 이하일 확률은 $\frac{1}{4}$ 이다.

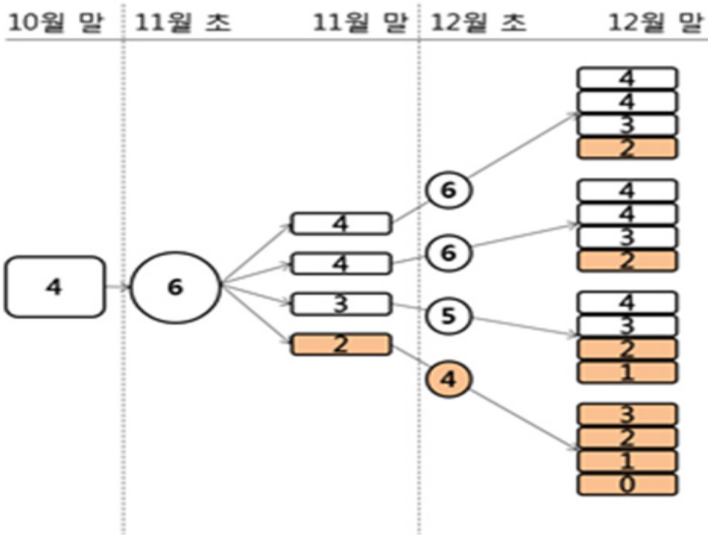
(3) (1)의 ① 또는 ②의 경우인 4 백만 원일 경우, 12 월 초에 연금을 받은 후 6 백만 원이 되므로 12 월 말에 잔액이 2 백만 원 이하일 확률은 각각 $\frac{1}{4}$ 이다.

(4) ③의 경우인 3 백만 원일 경우, 12 월 초에 연금을 받은 후 5 백만 원이 되며 12 월말에 지출 후 4 가지 경우((4 백만, 3 백만, 2 백만, 1 백만) 중에서, 잔액이 2 백만 원 이하일 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

(5) 이상에서, 구하고자 하는 확률은 p 라고 할 때,

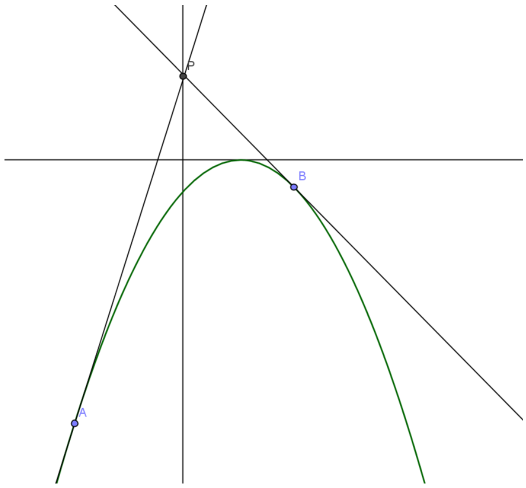
$$p=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times 2+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

참고로 그림으로 표현하면 아래와 같다.



문제2-1

먼저 두 접선의 접점을 각각 A, B를 구해보자.



그림과 같이 점 $\mathrm{P}(0, p)$에서 $y=-(x-a)^2$에 그은 접선의 방정식을 $y=mx+p$라고 하자.

$$-(x-a)^2=mx+p$$

$$x^2+(m-2a)x+a^2+p=0$$

이 이차방정식은 중근을 가져야 하므로 완전제곱식이 되어야 한다.

따라서 $D=(m-2a)^2-4(a^2+p)=0$이고 중근은 $x=\pm\sqrt{a^2+p}$ 임을 알 수 있다.

그러므로 두 접점의 좌표는

$\mathrm{A}\left(\sqrt{a^2+p}, -\left(\sqrt{a^2+p}-a\right)^2\right)$, $\mathrm{B}\left(-\sqrt{a^2+p}, -\left(-\sqrt{a^2+p}-a\right)^2\right)$

다음으로 $a=0$일 때, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 최솟값을 구해보자.

$a=0$이므로 $\mathrm{A}\left(\sqrt{p}, -p\right)$, $\mathrm{B}\left(-\sqrt{p}, -p\right)$ 임을 알 수 있다.

$\overrightarrow{PA}=\left(\sqrt{p}, -2p\right)$, $\overrightarrow{PB}=\left(-\sqrt{p}, -2p\right)$ 이므로 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-p+4p^2=\left(2p-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}$ 이다. 따

라서 최솟값은 $-\dfrac{1}{16}$ 이다.

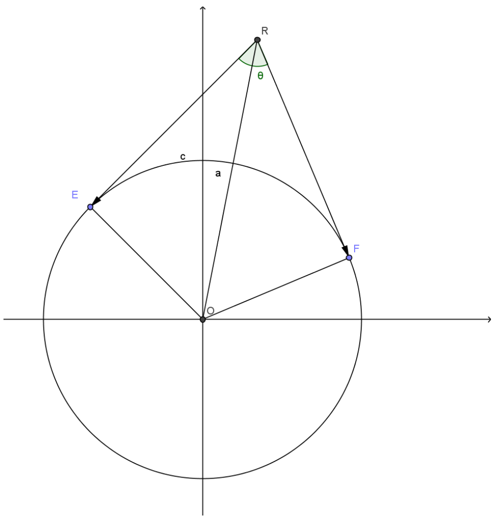
대학발표 예시답안

문제2-1

점 $P(0, p)$ 에서 포물선 $y=-(x-a)^2$ 에 그은 접선의 접점을 (x_1, y_1) 이라 하자.
제시문 (가)에 의하여 접선의 방정식은 $y+(x_1-a)^2=-2(x_1-a)(x-x_1)$ 이고, 점 $(0, p)$ 를 대입하면 ${x_1}^2=a^2+p$ 를 얻는다.
따라서, 점 $A\left(\sqrt{a^2+p}, -\left(\sqrt{a^2+p}-a\right)^2\right)$, $B\left(-\sqrt{a^2+p}, -\left(-\sqrt{a^2+p}-a\right)^2\right)$ 를 얻는다.

$a=0$ 을 대입하면 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-p+4p^2$ 이다. 이를 $g(p)$ 라 두면 $g'(p)=8p-1$ 이므로 최솟값은 $p=\dfrac{1}{8}$ 일 때, $g\left(\dfrac{1}{8}\right)=-\dfrac{1}{16}$ 이다.

문제2-2



그림과 같이 $\overline{OR}=a\ (a>1)$, 두 벡터 $\overrightarrow{RE}$, $\overrightarrow{RF}$ 가 이루는 각을 θ 라고 하면

$|\overrightarrow{RE}|=|\overrightarrow{RF}|=\sqrt{a^2-1}$ 이고 $\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$ 이므로

$$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{2(a^2-1)}{a^2}-1=\frac{a^2-2}{a^2}$$

따라서

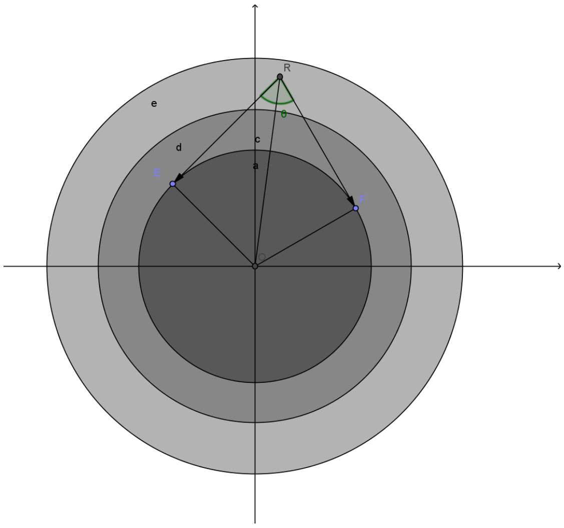
$$\overrightarrow{RE}\cdot\overrightarrow{RF}=|\overrightarrow{RE}||\overrightarrow{RF}|\cos\theta=(a^2-1)\times\frac{a^2-2}{a^2}=\frac{(a^2-1)(a^2-2)}{a^2}$$

이제 부등식 $0\le\overrightarrow{RE}\cdot\overrightarrow{RF}\le 1$ 을 만족시키는 점 R 이 나타내는 영역을 구하자.

(1) $\dfrac{(a^2-1)(a^2-2)}{a^2} \geq 0$ 에서 $a>1$ 이므로 $a^2 \geq 2$ 이다.

(2) $\dfrac{(a^2-1)(a^2-2)}{a^2} \leq 1$ 에서 $a^4-4a^2+2 \leq 0$ 이고 $2-\sqrt{2} \leq a^2 \leq 2+\sqrt{2}$

따라서, $2 \leq a^2 \leq 2+\sqrt{2}$ 이고 점 R이 나타내는 영역은 아래 그림에서 반지름이 $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 인 원의 내부와 반지름이 $\sqrt{2}$ 인 원의 외부의 공통부분이다.

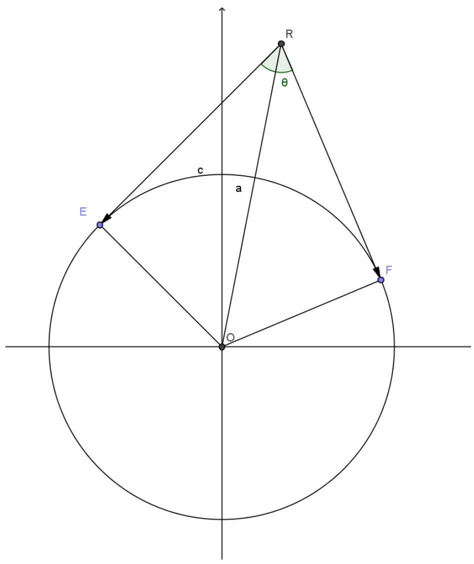


그러므로 넓이는 $(2+\sqrt{2})\pi-2\pi=\sqrt{2}\,\pi$

대학발표 예시답안

문제2-2

그림과 같이 점 R로부터 원점까지의 거리를 r이라 하자.



$\overrightarrow{RE}\cdot\overrightarrow{RF}=|\overrightarrow{RE}||\overrightarrow{RF}|\cos\theta$ 이므로
$\overrightarrow{RE}\cdot\overrightarrow{RF}=(r^2-1)\cos2\theta$ 이다.
$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(1-\dfrac{1}{r^2}\right)-1=\dfrac{r^2-1}{r^2}$ 이므로 영역은 $0\le\dfrac{(r^2-1)(r^2-2)}{r^2}\le 1$ 이므로
$r^4-3r^2+2\ge0$ 이며, $r^4-4r^2+2\le0$ 을 만족한다. 이 부등식을 풀면, $2\le r^2\le 2+\sqrt{2}$ 을 만족한다. 따라서, 큰 원의 넓이에서 작은 원의 넓이를 뺀 $\sqrt{2}\pi$가 점 R이 움직이는 도형의 넓이가 된다.

문제3-1

각 $\theta=\dfrac{\pi}{2^n}$ 만큼 일차변환을 $\mathrm{Q_n}$, 닮음비 $k=\dfrac{n+1}{n}$ 인 일차변환을 $\mathrm{P_n}$ 이라 하면, 삼각형 $A_nB_nC_n$ 은 삼각형 $A_1B_1C_1$ 을 합성변환 $(\mathrm{P_{n-1}Q_{n-1}})(\mathrm{P_{n-2}Q_{n-2}})\cdots(\mathrm{P_2Q_2})(\mathrm{P_1Q_1})$ 을 통하여 옮겨진 삼각형이다. 한편,
$(\mathrm{P_{n-1}Q_{n-1}})(\mathrm{P_{n-2}Q_{n-2}})\cdots(\mathrm{P_2Q_2})(\mathrm{P_1Q_1})=(\mathrm{P_{n-1}P_{n-2}}\cdots\mathrm{P_2P_1})(\mathrm{Q_{n-1}Q_{n-2}}\cdots\mathrm{Q_2Q_1})$
이다. 또한, $\mathrm{P_{n-1}P_{n-2}}\cdots\mathrm{P_2P_1}$ 는

각 $\theta=\dfrac{\pi}{2^1}+\dfrac{\pi}{2^2}+\dfrac{\pi}{2^3}+\cdots+\dfrac{\pi}{2^{n-1}}=\dfrac{\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=\pi\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$ 만큼 일차변환이고,

$Q_{n-1}Q_{n-2}\cdots Q_2Q_1$ 는 닮음비 $k=\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdots\dfrac{n}{n-1}=n$ 인 일차변환이다.

따라서 삼각형 $A_nB_nC_n$ 은 삼각형 $A_1B_1C_1$ 을 각 $\theta=\pi\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$ 만큼 일차변환한 후, 닮음비 $k=n$ 인 일차변환을 통하여 옮겨진 삼각형이다.
삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 넓이 $D_1=3$ 이고, 회전변환에 의해 삼각형의 넓이는 변하지 않으므로, 삼각형 $A_nB_nC_n$ 의 넓이는 닮음비 $k=n$ 인 일차변환을 통하여 옮겨진 삼각형의 넓이와 같으므로 $D_n=3n^2$ 이다.

그러므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{n^3(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3}{n^3(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=3$ 이다.

대학발표 예시답안

문제3-1

넓이는 회전변환에 대하여 변하지 않으므로 $D_n=\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^2D_{n-1}$ 인 점화식을 만족한다. 따라

서 $D_n=\left(\frac{n}{n-1}\right)^2\left(\frac{n-1}{n-2}\right)^2\cdots\left(\frac{2}{1}\right)^2 D_1=n^2D_1=3n^2$ 이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{n^3(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}=3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=3$ 이다.

문제3-2

(3-1)에 의해 $A_n(a_n,\, b_n)$은 $A_1(1,\, 2)$을 각 $\theta=\pi\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ 만큼 일차변환한 후, 닮음비 $k=n$ 인 일차변환을 통하여 옮겨진 점이다.
따라서 $a_n=n(\cos\theta-2\sin\theta)$, $b_n=n(\sin\theta+2\cos\theta)$ 이고, $n\to\infty$ 일 때, $\theta\to\pi$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(3\cos\theta-\sin\theta)}{n+1}=-3$ 이다.

대학발표 예시답안

문제3-2

회전변환을 $R(\theta)$로 닮음변환을 $S(k)$로 표기하면, 교환가능하다.
즉, $R(\theta)S(k)=S(k)R(\theta)$ 이다. 따라서,

$$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=S\left(\frac{n}{n-1}\right)\cdots S\left(\frac{2}{1}\right)R\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)\cdots R\left(\frac{\pi}{2}\right)\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=S(n)R\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}+\cdots+\frac{\pi}{2}\right)\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}$$

등비수열 합을 구하면 $\frac{\pi}{2}+\cdots+\frac{\pi}{2^n}+\cdots=\pi$ 이므로

$n\to\infty$ 이면 $\frac{1}{n}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}\to R(\pi)\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a_1\\-b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{n}\cdot\frac{n}{n+1}=-3$ 이 된다.

29 한양대학교 모의[29)]

1. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 다항함수 $P(x)=x^2-4$ 의 그래프 위의 점 $Q_0(3,P(3))$에서 그래프의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 a_1이라 하고, 점 $Q_1(a_1,P(a_1))$에서 그래프의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 a_2이라 하고, 점 $Q_2(a_2,P(a_2))$에서 그래프의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 a_3이라 하자. 이와 같은 방법으로, 자연수 n에 대하여, a_n이 주어졌을 때, 점 $Q_n(a_n,P(a_n))$에서 그래프의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 a_{n+1}이라 하자.

(나) 열린구간 $(a,b)\,(a<b)$의 모든 원소 x에서 $P'(x)>0$이 성립하는 다항함수 $P(x)$에 대하여, 원소 $y,z\in(a,b)$가 $y<z$를 만족하면 $P(y)<P(z)$가 성립한다.

(다) 모든 자연수 n에 대하여, $a_{n+1}<a_n$이 성립하고, 실수 K가 존재하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>K$이 성립하면 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

(라) 수렴하는 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$에 대하여

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 이 성립하며, $\lim\limits_{n>\infty}a_n\neq 0$인 경우 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$이 성립한다.

문제1-1

a_1을 구하고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=a_n-\dfrac{P(a_n)}{P'(a_n)}$ 이 성립함에 관하여 논하시오.

문제1-2

수학적 귀납법에 의하여, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>K$이 성립하는 실수 K가 존재함에 관하여 논하고, 모든 자연수 n에 대하여, $a_{n+1}<a_n$이 성립함에 관하여 논하시오.

문제1-3

열린구간 $(0,3)$에서 $P(x)=0$의 해는 하나만 존재함을 보이고, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 라 할 때, 그 해가 a임에 관하여 논하시오

29) 한양대학교 홈페이지

2. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 정의역의 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

① $x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) < f(x_2)$ 가 성립하면 $f(x)$는 증가함수라고 한다.

② $x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) > f(x_2)$ 가 성립하면 $f(x)$는 감소함수라고 한다.

(나) 함수 $f(x)$가 열린구간 (a,b)에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x) > 0$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x) < 0$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

(다) 함수 $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$는 증가함수이고, 다음 성질을 만족한다고 하자.

① $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$

② $\dfrac{g(x)}{x}$는 구간 $(0,\infty)$에서 감소함수이고, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x} = 0$.

문제2-1

열린구간 $(0,\infty)$에서 정의된 함수 $h(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$는 증가함수임을 보이시오.

문제2-2

제시문 (다)를 만족하는 함수 $g(x)$는 다음 부등식을 만족함을 보이시오.

임의의 실수 $s,t \in (0,\infty)$에 대하여, $g(s+t) \le g(s)+g(t)$이 성립한다.

문제2-3

양의 정수 $n, m \ge 2$에 대하여 함수 $f(x) = x^{\frac{1}{n}} + x^{\frac{1}{m}}$, $(x>0)$가 주어져 있을 때, $f(x)$는 제시문 (다)의 성질 ①과 ②를 만족하는지 논하고, 임의의 양의 실수 $s \in (0,\infty)$에 대하여 극한값 $\lim_{t\to\infty}(f(s+t)-f(t))$를 구하시오.

풀어보기 [문제1]

자연수 n에 대하여 점$(3n,\ 4n)$을 중심으로 하고 y축에 접하는 원 O_n이 있다. 원 O_n 위를 움직이는 점과 점 $(0,\ -1)$ 사이의 거리의 최댓값을 a_n, 최솟값을 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값을 구하시오. (2014년 9월 모평 A형)[4점]

풀어보기 [문제2]

점 P에서 곡선 $y=3^x$에서 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 A, 점 P에서 곡선 $y=a^{x-1}$에 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 $\mathrm{H}(k,0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AH}}=2\overline{\mathrm{BH}}$ 일 때, a의 값은? (2015년 대수능 B형)[4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

풀어보기 [문제3]

2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 $g(n)$이라 하자.
$1\le g(n)\le 8$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? (2016 대입 6월 모평 B형)[4점]

① 43 ② 46 ③ 49 ④ 52 ⑤ 55

예시답안

풀어보기 [문제1]

자연수 n 대하여 점 $(3n,\ 4n)$을 중심으로 하고 y축에 접하는 원 O_n의 방정식은 $(x-3n)^2+(y-4n)^2=(3n)^2$이다.

점 $(3n,\ 4n)$과 점 $(0,\ -1)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}=\sqrt{25n^2+8n+1}$ 이므로

$a_n=\sqrt{25n^2+8n+1}+3n,\ b_n=\sqrt{25n^2+8n+1}-3n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\sqrt{25n^2+8n+1}+3n}{\sqrt{25n^2+8n+1}-3n}$$

$$=\frac{\sqrt{25+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}+3}{\sqrt{25+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}-3}=\frac{5+3}{5-3}=4$$

풀어보기 [문제2]

P에서 $y=3^x$에 접하는 직선을 l_1,

P에서 $y=a^{x-1}$에 접하는 직선을 l_2라 하면

$$l_1 : y=3^k\ln3(x-k)+3^k$$

$$l_2 : y=a^{k-1}\ln a(x-k)+a^{k-1}$$

이므로 $\mathrm{A}\left(k-\frac{1}{\ln3},0\right)$, $\mathrm{B}\left(k-\frac{1}{\ln a},0\right)$이다.

$a>3$이므로 $\ln a>\ln3$가 되어 $k-\frac{1}{\ln3}<k-\frac{1}{\ln a}$이다. 또 $\overline{\mathrm{AH}}=2\overline{\mathrm{BH}}$ 이므로 B는 A와 H의 중점이다.

$$k-\frac{1}{\ln a}=\frac{k+k-\frac{1}{\ln3}}{2}$$

$$2k-\frac{2}{\ln a}=2k-\frac{1}{\ln3}$$

$$\ln a=2\ln3$$

$$a=9$$

풀어보기 [문제3]

함수 $f(x)$가 역함수를 갖기 위해서는 증가함수가 되어야 하므로 모든 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이어야 한다.

$$f'(x) = e^{x+1}(x^2+(n-2)x-n+3)+e^{x+1}(2x+n-2)+a = e^{x+1}(x^2+nx+1)+a \text{ 이다.}$$

함수 $h(x)$를 $h(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)$라 두고 $h(x)$의 최솟값을 구해보자.

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{x+1}(x^2+nx+1)+e^{x+1}(2x+n) \\ &= e^{x+1}(x^2+(n+2)x+n+1) \\ &= e^{x+1}(x+n+1)(x+1) \end{aligned}$$

이므로 함수의 증감을 조사하면 $h(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 $h(-1)=2-n$을 갖는다.
따라서 $f'(x)=h(x)+a \geq 0$이기 위해서는 최솟값인 $h(-1)+a$이 0보다 크거나 같아야 한다.
따라서 $a \geq -h(-1)$ 이므로 a의 최솟값은 $-h(-1)=n-2(=g(n))$이다.
$1 \leq g(n) \leq 8$이므로 $1 \leq n-2 \leq 8$ 이고 정리하면 $3 \leq n \leq 10$이다. 따라서 모든 n의 값의 합은 52이므로 정답은 ④이다.

문제1-1

① $P(3)=5$, $P'(x)=2x$이고, $Q_0(3, P(3))$에서 그래프의 접선의 방정식이
$y-P(3)=P'(3)(x-3)$이다. 따라서 $Q_0(3,P(3))$에서 그래프의 접선이 x축과 만나는 점 a_1을 구하면 $-5=6(a_1-3)$ 가 되어 $a_1=\dfrac{13}{6}$이다.

② $Q_n(a_n, P(a_n))$에서 그래프의 접선의 방정식은 $y-P(a_n)=P'(a_n)(x-a_n)$ 이다. 따라서
$Q_n(a_n, P(a_n))$에서 그래프의 접선이 x축과 만나는 점 a_{n+1}을 구하면
$-P(a_n)=P'(a_n)(a_{n+1}-a_n)$ 가 되어 $a_{n+1}=a_n-\dfrac{P(a_n)}{P'(a_n)}$ 이다.

문제1-2

$$a_{n+1}=a_n-\frac{P(a_n)}{P'(a_n)} = a_n-\frac{a_n^2-4}{2a_n} = \frac{a_n}{2}+\frac{2}{a_n}$$

① 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>2$ 임을 수학적 귀납법으로 보이자.

(a) $n=1$일 때, $a_1=\dfrac{13}{6}>2$ 가 성립한다.

(b) $n=k$일 때, $a_k>2$ 가 성립한다고 가정하자.

$n=k+1$일 때, $a_{k+1}=\dfrac{a_k}{2}+\dfrac{2}{a_k} \geq 2\sqrt{\dfrac{a_k}{2}\times\dfrac{2}{a_k}}$ (산술기하평균)

(등호가 성립할 때는 $\frac{a_k}{2}=\frac{2}{a_k}$, 즉 $a_k=2$ 일 때)가 되어 $a_{k+1}>2$ 가 성립한다.

따라서 (a),(b)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>2$ 가 성립한다.

② $a_n-a_{n+1}=\frac{a_n}{2}-\frac{2}{a_n}=\frac{a_n^{\ 2}-4}{2a_n}$ 이고 ①에 의해 $a_n>2$ 이므로 $a_n^{\ 2}>4$ 가 되어

$a_n-a_{n+1}>0$ 이다. 따라서 $a_{n+1}<a_n$이 성립한다.

문제1-3

① $P(x)$는 $[0,3]$에서 연속이고 $P(0)=-4, P(3)=5$이므로 중간값 정리에 의해 $P(c)=0$인 $c\in(0,3)$가 존재한다. 그런데 $P'(x)=2x$이므로 $P'(x)>0(x\in(0,3))$가 된다. 제시문 (나)에 의해 $y,z\in(0,3)$ $(y<z)$를 만족하면 $P(y)<P(z)$이다. 그러므로 c는 유일하다.

② (2)의 결과와 제시문 (다)에 의하여 $\{a_n\}$은 수렴한다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=a$라 두면 $2\le a<3$이다. 제시문 (라)와 함수의 연속성에 의하여

$a_{n+1}=a_n-\frac{P(a_n)}{P'(a_n)}$ 에 극한을 취하면 $a=a-\frac{P(a)}{P'(a)}$ 가 된다. 따라서 $P(a)=0$이다.

문제2-1

$\ln h(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$이고, 양변을 미분하면

$$\frac{h'(x)}{h(x)}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$$

이다. $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$ 라 두면

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{(1+x)^2}=-\frac{1}{(1+x)x}+\frac{1}{(1+x)^2}=-\frac{1}{(1+x)^2x}<0$$

이다. 그러므로 $f(x)$는 $(0,\infty)$에서 감소함수이고 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 $f(x)>0$이다.

따라서 $h'(x)>0$이므로 함수 $h(x)$는 증가함수이다.

문제2-2

$\frac{g(x)}{x}$는 구간 $(0,\infty)$에서 감소함수이고, 임의의 $s,t\in(0,\infty)$에 대하여 $t\le s+t$ 이므로 $\frac{g(s+t)}{s+t}\le\frac{g(t)}{t}\cdots$①이 된다.

$0<s\le t$ 라고 가정하면 $\frac{g(t)}{t}\le\frac{g(s)}{s}\cdots$②이 성립한다.

①의 양변에 $s+t$를 곱하면 $g(s+t)\le\frac{sg(t)}{t}+g(t)\cdots$③가 되고 ②에 의해 $\frac{sg(t)}{t}\le g(s)\cdots$④이다. 따라서 ③, ④에 의하여

$g(s+t)\le\frac{sg(t)}{t}g(s)+g(t)\le g(s)+g(t)$가 성립한다.

문제2-3

$f(x)=x^{\frac{1}{n}}+x^{\frac{1}{m}},\ (x>0)$일 때, n,m은 2보다 크거나 같은 양의 정수이므로 $\lim_{x\to\infty}\left(x^{\frac{1}{n}}+x^{\frac{1}{m}}\right)=\infty$이다. 임의의 양의 실수 $x,y\,(x<y)$와 양의 정수 $n,m\ge2$에 대하여 $\frac{1}{n}-1<0,\ \frac{1}{m}-1<0$가 된다.

$\frac{f(x)}{x}=x^{\frac{1}{n}-1}+x^{\frac{1}{m}-1}>y^{\frac{1}{n}-1}+y^{\frac{1}{m}-1}=\frac{f(y)}{y}$ 이므로 $\frac{f(x)}{x}$는 구간 $(0,\infty)$에서 감소함수이다.

그리고 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n}}+x^{\frac{1}{m}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(x^{\frac{1}{n}-1}+x^{\frac{1}{m}-1}\right)=0$이다.

임의의 양의 실수 $s\in(0,\infty)$에 대하여

$$\lim_{t\to\infty}(f(s+t)-f(t))$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left\{(s+t)^{\frac{1}{n}}+(s+t)^{\frac{1}{m}}-t^{\frac{1}{n}}-t^{\frac{1}{m}}\right\}=\lim_{t\to\infty}\left\{(s+t)^{\frac{1}{n}}-t^{\frac{1}{n}}+(s+t)^{\frac{1}{m}}-t^{\frac{1}{m}}\right\}\cdots①$$

우리는 임의의 양수 x,y에 대하여

$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$가 성립함을 알고 있다.

이제 $x=(s+t)^{\frac{1}{n}},\ y=t^{\frac{1}{n}}$의 형태로 보아 ①식의 분자를 유리화 하면

분자는 $x^n-y^n=\left((s+t)^{\frac{1}{n}}\right)^n-\left(t^{\frac{1}{n}}\right)^n=s+t-t=s$가 된다. 즉 아래의 등식이 성립한다.

$$\lim_{t\to\infty}(f(s+t)-f(t))$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{s}{(s+t)^{\frac{n-1}{n}}+(s+t)^{\frac{n-2}{n}}t^{\frac{1}{n}}+\cdots+(s+t)^{\frac{1}{n}}t^{\frac{n-2}{n}}+t^{\frac{n-1}{n}}}\right\}$$

$$+\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{s}{(s+t)^{\frac{m-1}{m}}+(s+t)^{\frac{m-2}{m}}t^{\frac{1}{m}}+\cdots+(s+t)^{\frac{1}{m}}t^{\frac{m-2}{m}}+t^{\frac{m-1}{m}}}\right\}=0$$

이다.

30 한양대학교 수시 자연계열(오전)30)

[문제1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.(50점)

좌표평면에서 정수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$인 두 직선을 $y=ax$와 $y=bx$라고 하자. (단, a, b는 서로 다른 실수이다.)

문제1-1

양의 정수 N에 대하여, $a+b \geq 0$이고, $-N \leq m \leq N$인 정수 m의 개수를 $f(N)$이라 하자. 이 때 극한값 $\lim_{N\to\infty}\frac{f(N)}{2N+1}$을 구하시오.

문제1-2

양의 정수 k에 대하여 부등식 $ab \geq k$를 만족시키는 정수 m을 모두 구하시오.

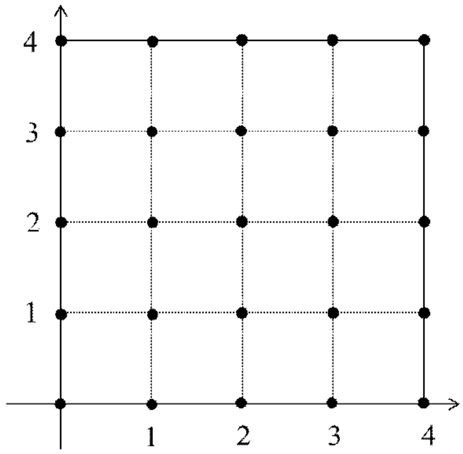
문제1-3

두 직선 $y=x$와 $y=mx$ $(m>1)$가 이루는 예각의 크기는 θ이고, 두 직선 $y=x$와 $y=cx$ $(0<c<1)$가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{3}-\theta$일 때, c를 m으로 나타내시오.

30) 한양대학교 홈페이지

[문제2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.(50점)

【가】 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 영역을 R이라 하자. 영역 R에 위치하며 좌표의 성분이 모두 정수인 점들은 25개가 있다.



【나】 연속확률변수 X는 구간 $[0,\ 2]$에서 값을 가지고, 그 확률밀도함수는

$f(x) = \frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 이다.

문제2-1

제시문 【가】의 25개의 점들 중에서 3개를 임의로 선택할 때, 그 세 점이 한 직선 위에 있지 않을 확률을 구하시오.

문제2-2

점 $(0,\ 0)$을 지나며 기울기가 X인 직선이 영역 R과 겹치는 부분의 길이를 Y라 하자. $Y \geq \frac{4\sqrt{10}}{3}$ 일 확률을 구하시오.

문제2-3

중심이 점 $(4,\ 4)$이고 반지름이 X인 원의 내부가 R과 겹치는 영역의 넓이를 Z라 하자. 이때 Z의 평균을 구하시오.

풀어보기 [문제1]

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\beta=\frac{5}{13}$일 때, $\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{q}{p}$ 라 하자. 이 때, $p+q$의 값을 구하시오.

$\left(\text{단, } 0\le\alpha\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\beta\le\frac{\pi}{2}\text{이고, } p,\ q\text{는 서로소인 자연수이다.}\right)$ (2011년 4월 전국연합)

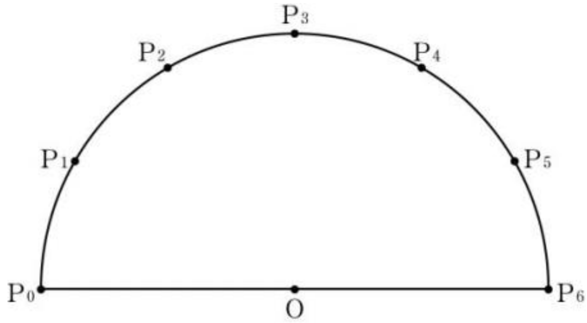
풀어보기 [문제2]

좌표평면에서 직선 $y=mx$ $(0<m<\sqrt{3})$가 x축과 이루는 예각의 크기를 θ_1, 직선 $y=mx$가 직선 $y=\sqrt{3}x$와 이루는 예각의 크기를 θ_2라 하자. $3\sin\theta_1+4\sin\theta_2$의 값이 최대가 되도록 하는 m의 값은? (2013년 대수능)

① $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{10}$

풀어보기 [문제3]

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 반원의 호를 6등분하여 양 끝점과 각 분점을 왼쪽부터 차례로 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6이라 하자. 이 7개의 점 중에서 임의로 선택한 서로 다른 두 점을 각각 P_i, $\mathrm{P}_j\,(0 \le i < j \le 6)$이라 하고, 선분 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_6$의 중점을 O라 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}_j}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{OP}_i} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_j}$의 값을 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X) = \dfrac{q\sqrt{3}}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)
(2015년 10월 전국연합)



풀어보기 [문제4]

닫힌 구간 $[-1,\ 3]$ 에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} a\left(1-x^2\right) & (-1 \leqq x < 0) \\ a\left(1-\dfrac{x}{3}\right) & (0 \leqq x \leqq 3) \end{cases}$$

일 때, $P(-1 \leqq X \leqq 0) = \dfrac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.(단, a 는 상수이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) (2014년 수능 예비시행)

예시답안

풀어보기 [문제1]

$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ 이고 $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{5}}=\dfrac{1}{9}$ 이므로 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$ $\cdots$㉠

$\cos\beta=\dfrac{12}{13}$ 이고 $\tan^2\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\frac{1}{13}}{\frac{25}{13}}=\dfrac{1}{25}$ 이므로 $\tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1}{5}\cdots$㉡

따라서, ㉠, ㉡에 의하여 $\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{15}}=\dfrac{8}{14}=\dfrac{4}{7}$ 이므로 $p+q=11$ 이다.

풀어보기 [문제2]

직선 $y=\sqrt{3}\,x$가 x축과 이루는 예각의 크기는 $\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ 에서 $\dfrac{\pi}{3}$ 이다. 직선 $y=mx\left(0<m<\sqrt{3}\right)$가 직선 $y=\sqrt{3}\,x$와 이루는 예각의 크기는 $\theta_2=\dfrac{\pi}{3}-\theta_1$

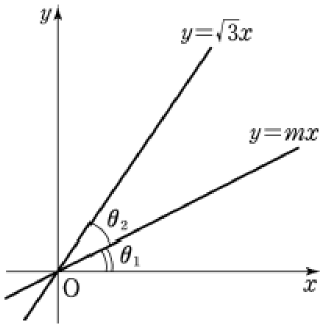
$$\begin{aligned}
\therefore\ 3\sin\theta_1+4\sin\theta_2&=3\sin\theta_1+4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)\\
&=3\sin\theta_1+4\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta_1-\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta_1\right)\\
&=3\sin\theta_1+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_1-\frac{1}{2}\sin\theta_1\right)=\sin\theta_1+2\sqrt{3}\cos\theta_1\\
&=\sqrt{13}\sin(\theta_1+\alpha)\ \left(\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sin\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right)
\end{aligned}$$

따라서 $\theta_1+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 일 때, $3\sin\theta_1+4\sin\theta_2$의 값이 최대가 되므로 최대가 되는 $\theta_1=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$이므로

$$m=\tan\theta_1=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

이다.

다른 풀이



$\tan(\theta_1+\theta_2)=\sqrt{3}$. $\therefore\ \theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{3}$

$\tan\theta_1=m$이므로

$$\therefore\ 3\sin\theta_1+4\sin\theta_2=3\sin\theta+4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)$$

$$=3\sin\theta_1+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_1-\frac{1}{2}\sin\theta_1\right)=\sin\theta_1+2\sqrt{3}\cos\theta_1$$

$$=\sqrt{13}\sin(\theta_1+\alpha)\left(\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sin\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right)$$

최대가 되는 $\theta_1=\frac{\pi}{2}-\alpha$이므로

$$m=\tan\theta_1=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

이다.

풀어보기 [문제3]

7개의 점 중 서로 다른 2개의 점을 선택하는 경우의 수는 ${}_7C_2=21$이다. 서로 다른 두 벡터 $\overrightarrow{OP_i}$, $\overrightarrow{OP_j}$가 이루는 각의 크기를 θ_k라 하면 $\theta_k=\frac{k}{6}\pi\ (k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$이다.

$|\overrightarrow{OP_i}|=|\overrightarrow{OP_j}|=1$이므로

$$X=\overrightarrow{OP_i}\cdot\overrightarrow{OP_j}=|\overrightarrow{OP_i}||\overrightarrow{OP_j}|\cos\theta_k=\cos\theta_k$$

가 되는 두 점의 순서쌍은

$$(P_0, P_k),\ (P_1, P_{k+1}),\ \cdots,\ (P_{6-k}, P_6)$$

으로 $7-k$가지이고, $\cos\theta_k$의 값은 차례로

$$\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1$$

이다. 따라서 확률변수 X의 확률분포를 나타내는 표는 다음과 같다.

X	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$	1

$$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{21}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{2}{21}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{21}+0\times\frac{4}{21}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{21}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{6}{21}=\frac{2\sqrt{3}}{21}$$

따라서 $p+q=21+2=\ 23$

풀어보기 [문제4]

확률밀도함수의 정의된 구간 내에서의 x축으로 둘러싸인 넓이가 1이므로

$$\int_{-1}^{0}a\left(1-x^2\right)dx+\int_{0}^{3}a\left(1-\frac{x}{3}\right)dx=a\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}+a\left[x-\frac{1}{6}x^2\right]_{0}^{3}$$

$$=\frac{2}{3}a+\frac{3}{2}a=\frac{13}{6}a=1$$

$$\therefore\ a=\frac{6}{13}$$

이다.

$$\therefore\ P(-1\leqq X\leqq 0)=\frac{2}{3}a=\frac{2}{3}\times\frac{6}{13}=\frac{4}{13}$$

$$\therefore\ p+q=17$$

이다.

문제1-1

직선 $y=mx$와 직선 $y=ax$가 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이므로

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\left|\frac{m-a}{1+am}\right|$$

$$|1+am|=\sqrt{3}\,|m-a|$$

$$1+2am+a^2m^2=3(m^2-2am+a^2)$$

$$(m^2-3)a^2+8am+1-3m^2=0$$

이다. 마찬가지로 $(m^2-3)b^2+8bm+1-3m^2=0$이다. 따라서 실수 a, b는 x에 대한 이차방정식 $(m^2-3)x^2+8mx+1-3m^2=0$의 두 근이다.

$$D/4=16m^2-(m^2-3)(1-3m^2)=3m^4+6m^2+3=3(m^2+1)>0$$

이므로 $a\neq b$이다. 문제의 조건에 의해 $a+b=-\frac{8m}{m^2-3}\geq 0$이므로

$0 \le m < \sqrt{3}$, $m < -\sqrt{3}$ 이다. 따라서 정수 m의 개수 $f(N) = N+1$ 이다. 그러므로 $\lim_{N\to\infty} \frac{f(N)}{2N+1} = \frac{1}{2}$ 이다.

문제1-2

실수 a, b는 x에 대한 이차방정식 $(m^2-3)x^2+8mx+1-3m^2=0$의 두 근이므로 양의 정수 k에 대하여

$$ab-k = \frac{1-3m^2}{m^2-3} - k = \frac{1-3m^2-km^2+3k}{m^2-3} = \frac{-(3+k)m^2+3k+1}{m^2-3} \ge 0$$

$$\frac{m^2 - \frac{3k+1}{k+3}}{m^2-3} = \frac{m^2 - \left(3 - \frac{8}{k+3}\right)}{m^2-3} \le 0$$

을 만족하는 정수 m을 구해야 한다. 양의 정수 k에 대하여 $3 - \frac{8}{k+3} < 3$이므로

$$\sqrt{3-\frac{8}{k+3}} \le m < \sqrt{3}, \quad -\sqrt{3} < m \le -\sqrt{3-\frac{8}{k+3}}$$

이다. 따라서 $k=1$이면 $m = \pm 1$이고 $k \ge 2$이면 만족하는 정수 m은 존재하지 않는다.

문제1-3

문제의 조건에서 $\tan\theta = \frac{m-1}{m+1}$ 이고

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right) = \frac{1-c}{1+c}, \quad c = \frac{1-\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)} \quad \cdots \text{①}$$

이다. 그리고

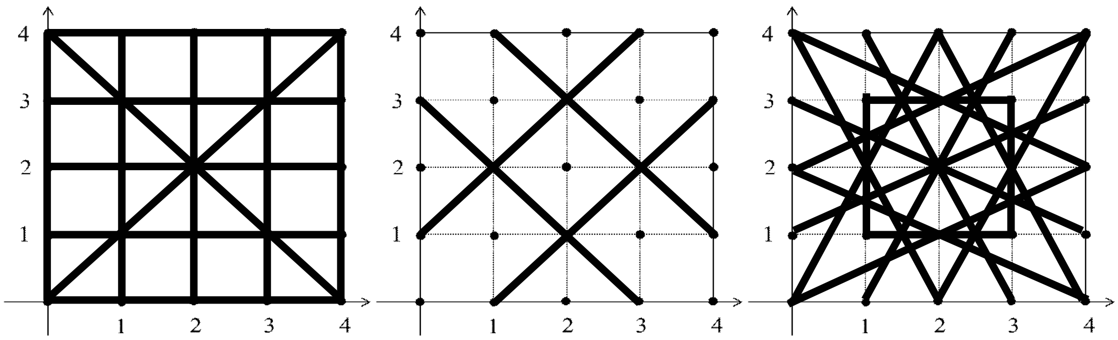
$$\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \tan\theta}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\theta} = \frac{1-\sqrt{3}\tan\theta}{\sqrt{3}+\tan\theta} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}(m-1)}{m+1}}{\sqrt{3}+\frac{m-1}{m+1}}$$
$$= \frac{(m+1)-\sqrt{3}(m-1)}{\sqrt{3}(m+1)+m-1} = \frac{(1-\sqrt{3})m+1+\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)m+\sqrt{3}-1}$$

이므로 ①에 대입하면

$$c = \frac{(\sqrt{3}+1)m+\sqrt{3}-1-(1-\sqrt{3})m-1-\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)m+\sqrt{3}-1+(1-\sqrt{3})m+1+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}m-2}{2m+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}m-1}{m+\sqrt{3}}$$

이다.

문제2-1

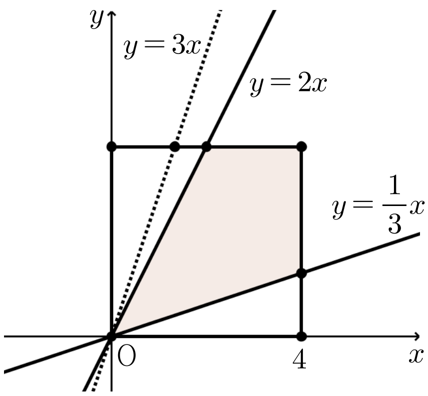


그림과 같이 여사건의 확률을 이용하면

$$1-\frac{12\times{}_5C_3+4\times{}_4C_3+16\times{}_3C_3}{{}_{25}C_3}=1-\frac{4(30+4+16)}{25\times4\times23}=1-\frac{2}{23}=\frac{21}{23}$$

이다.

문제2-2



영역 R의 한 변의 길이가 4이고 $\frac{4\sqrt{10}}{3}=\sqrt{\frac{160}{9}}=\sqrt{\frac{144+16}{9}}=\sqrt{4^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}$ 이므로 $Y\geq\frac{4}{3}\sqrt{10}$ 일 확률은 $\frac{1}{3}\leq X\leq 2$일 확률과 같다. 따라서

$$\int_{\frac{1}{3}}^{2}\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx=-\frac{\pi}{4}\times\frac{2}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{\frac{1}{3}}^{2}=-\frac{1}{2}\left[\cos\pi-\cos\frac{\pi}{6}\right]=\frac{3}{4}$$

이다.

문제2-3

문제에서 $Z=\frac{1}{4}\pi X^2$ 이고 $X^2=\frac{4}{\pi}Z$ 이다. 확률변수 X에 대하여

$$E(X^2)=\int_0^2 x^2 f(x)dx=\frac{\pi}{4}\int_0^2 x^2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

이고 $\frac{\pi}{2}x=t$ 로 치환하면

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} t^2\sin t dt=\frac{2}{\pi^2}\left[-t^2\cos t+2t\sin t+2\cos t\right]_0^{\pi}\\&=\frac{2}{\pi^2}\left[\pi^2-2-(2)\right]=\frac{2}{\pi^2}(\pi^2-4)\end{aligned}$$

이다. 따라서 $E(X^2)=E\left(\frac{4}{\pi}Z\right)=\frac{4}{\pi}E(Z)=\frac{2}{\pi^2}(\pi^2-4)$ 이므로 $E(Z)=\frac{1}{2\pi}(\pi^2-4)$ 이다.

31 한양대학교 수시 자연계열(오후1)[31]

[문제1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.(50점)

좌표평면에서 두 일차변환 f, g를 나타내는 행렬이 각각 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$이고, 원 C의 방정식이 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 이다.

【가】 원 C는 일차변환 f에 의하여 곡선 A_1로 옮겨지고, 자연수 n에 대하여 곡선 A_n은 일차변환 f에 의하여 곡선 A_{n+1}로 옮겨진다.

【나】 원 C는 일차변환 $f \circ g$에 의하여 곡선 B_1로 옮겨지고, 자연수 n에 대하여 곡선 B_n은 일차변환 $f \circ g$에 의하여 B_{n+1}로 옮겨진다.

【다】 타원 $\dfrac{(x-p)^2}{a^2}+\dfrac{(y-q)^2}{b^2}=1$ $(a,\ b>0,\ a \neq b)$의 넓이는 πab이다.

문제1-1

곡선 A_1의 방정식을 구하시오.

문제1-2

자연수 n에 대하여 곡선 A_n으로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_n이라고 할 때, 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{S_n}$의 값을 구하시오.

문제1-3

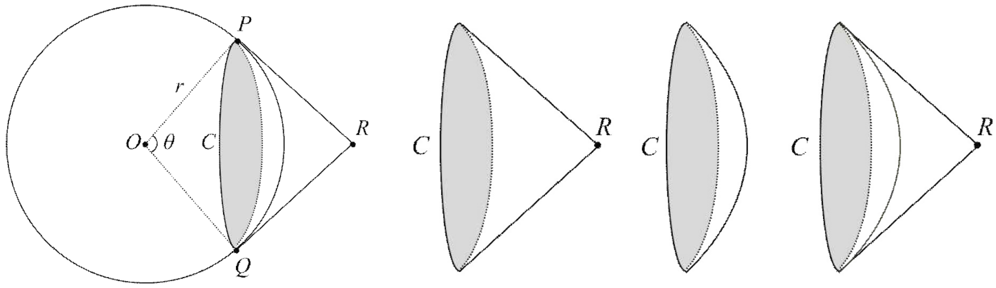
자연수 n에 대하여 곡선 B_n으로 둘러싸인 영역의 넓이를 T_n이라고 할 때, 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{T_n}$의 값을 구하시오.

---

31) 한양대학교 홈페이지

[문제2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.(50점)

중심이 점 O 이고 반지름이 r인 구 S와 S위에 원 C가 있다. 이들로부터 얻어지는 세 개의 입체 ㉮, ㉯, ㉰를 생각하자.



㉮ ㉯ ㉰

【가】 입체 ㉮는 원 C를 밑변으로 하고 점 R 을 꼭짓점으로 하는 직원뿔이다. 입체 ㉯는 원 C를 따라 구 S를 절단하여 얻어지고, 입체 ㉰는 ㉮로부터 ㉯를 제거하여 얻어진다.

【나】 점 P 와 Q 는 원 C의 지름의 양 끝점이고, 각 $\angle \mathrm{OPR}$ 과 각 $\angle \mathrm{OQR}$ 은 모두 직각이다.

【다】 각 $\angle \mathrm{POQ}$ 를 θ 라고 할 때, ㉯의 부피를 $A(\theta)$, ㉰의 부피를 $B(\theta)$ 라고 하자.

문제2-1

$A\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$를 구하시오.

문제2-2

$\displaystyle\lim_{\theta \to +0} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$ 를 구하시오.

문제2-3

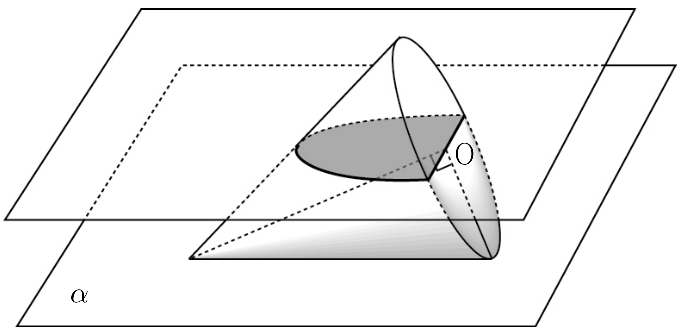
연속확률변수 X는 구간 $[0, \pi]$ 에서 값을 가지며 그 확률밀도함수는 $f(x) = \dfrac{\sin x}{2}$ 이다. 이때, $A(X)$ 의 평균을 구하시오.

풀어보기 [문제1]

좌표평면 위에 두 점 A$(-2,\ 0)$, B$(-2,\ 2\sqrt{3})$이 있다. 두 행렬 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ 로 나타내어지는 일차변환을 각각 f, g라 하고, 두 점 A, B가 합성변환 $g \circ f$에 의하여 옮겨진 점을 각각 A$'$, B$'$이라 하자. 선분 A$'$B$'$이 y축과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 OA$'$B$'$의 넓이는 삼각형 OA$'$C의 넓이의 k배이다. $4k^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) (2015년 4월 전국연합)

풀어보기 [문제2]

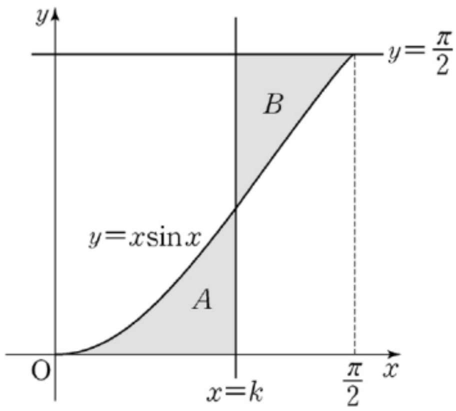
반지름의 길이가 1, 중심이 O인 원을 밑면으로 하고 높이가 $2\sqrt{2}$인 원뿔이 평면 α 위에 놓여있다.(단, 원뿔의 한 모선이 평면 α에 포함된다.)
그림과 같이 원뿔을 평면 α와 평행하고 원뿔의 밑면의 중심 O를 지나는 평면으로 자를 때 생기는 단면의 일부분은 포물선이다. 이때 단면의 넓이는? (2014년 7월 전국연합)



① $\frac{13}{8}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{15}{8}$ ④ 2 ⑤ $\frac{17}{8}$

풀어보기 [문제3]

그림과 같이 곡선 $y=x\sin x$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 이 곡선과 x축, 직선 $x=k$로 둘러싸인 영역을 A, 이 곡선과 직선 $x=k$, 직선 $y=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같을 때, 상수 k의 값은?(단, $0 \le k \le \frac{\pi}{2}$) (2012년 9월 평가원)

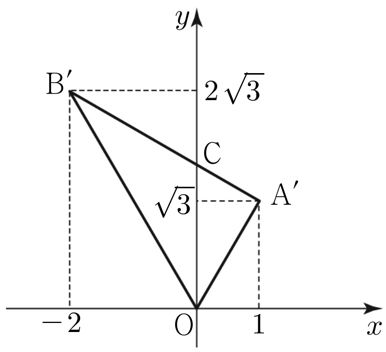


① $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}$ ④ $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\pi}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi}$

예시답안

풀어보기 [문제1]

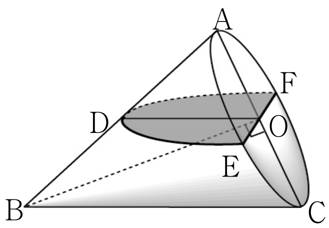
$g \circ f$에 의해 점 $\mathrm{A}(-2, 0)$은 점 $\mathrm{A}'(1, \sqrt{3})$으로, 점 $\mathrm{B}(-2, 2\sqrt{3})$은 점 $\mathrm{B}'(-2, 2\sqrt{3})$으로 옮겨진다.



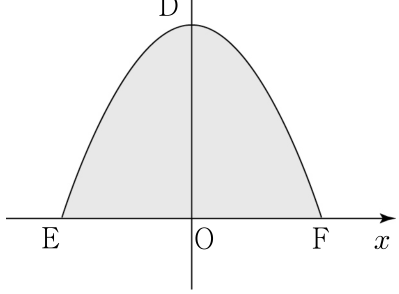
삼각형 $\mathrm{OA'B'}$에서 $\overline{\mathrm{OC}}$는 $\angle \mathrm{A'OB'}$의 이등분선이므로 $\overline{\mathrm{A'C}} : \overline{\mathrm{CB'}} = \overline{\mathrm{OA'}} : \overline{\mathrm{OB'}} = 1 : 2$

$\therefore$ 삼각형 $\mathrm{OA'B'}$의 넓이는 삼각형 $\mathrm{OA'C}$의 넓이의 3배이다. 따라서 $4k^2 = 36$

풀어보기 [문제2]



삼각형 ABC에 대하여 $\overline{\mathrm{BC}} = 3$이고 $\overline{\mathrm{BC}} \,/\!/\, \overline{\mathrm{DO}}$, $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OC}}$이므로 삼각형의 중점연결정리에 의하여 $\overline{\mathrm{DO}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}} = \frac{3}{2}$. 좌표평면에 포물선을 나타내면



이 포물선은 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$을 꼭짓점으로 하고 (1, 0)을 지나므로, 포물선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}$.

따라서 구하고자 하는 단면의 넓이는 $S=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)dx=2$

풀어보기 [문제3]

$$\int_0^k x\sin x dx=\int_k^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x\sin x dx)dx$$

$$\int_0^k x\sin x dx=\int_k^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}dx-\int_k^{\frac{\pi}{2}}x\sin x dx$$

$$\int_0^k x\sin x dx+\int_k^{\frac{\pi}{2}}x\sin x dx=\int_k^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x dx=\int_k^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}dx$$

이때, $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$라고 하면 $f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$ 이므로

$$(\text{좌변})=[-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$(\text{우변})=[\frac{\pi}{2}x]_k^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}k$$

따라서 $1=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}k$ 이므로 $\frac{\pi}{2}k=\frac{\pi^2}{4}-1$

$\therefore\ k=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}$

문제1-1

곡선 C위의 점 (x, y)에 대하여

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$

에서

$$x=\frac{1}{2}X,\ y=\frac{1}{3}Y$$

이므로 곡선 A_1의 방정식은

$$\left(\frac{1}{2}X-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}Y-2\right)^2=1$$

$$\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(y-6)^2}{3^2}=1$$

이다.

문제1-2

곡선 A_n 으로 둘러싸인 영역의 넓이 S_n 은 곡선 A_n 을 평행이동하더라도 변하지 않으므로 원 C를 원점을 중심으로 하는 원 $x^2+y^2=1$ 으로 평행이동하여 S_n 을 생각하자.

1-1에 의해 $S_1=6\pi$ 이고 $\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$에서 $x=\frac{1}{2^n}X,\ \ y=\frac{1}{3^n}Y$이므로 곡선 A_n 은

$\frac{X}{4^n}+\frac{Y}{9^n}=1$ 이고 제시문 (다)에 의해 $S_n=6^n\pi$ 이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}=\frac{1}{5}$ 이다.

문제1-3

곡선 B_n 으로 둘러싸인 영역의 넓이 T_n 은 곡선 B_n 을 평행이동하더라도 변하지 않으므로 원 C를 원점을 중심으로 하는 원 $x^2+y^2=1$ 으로 평행이동하여 T_n 을 생각하자.

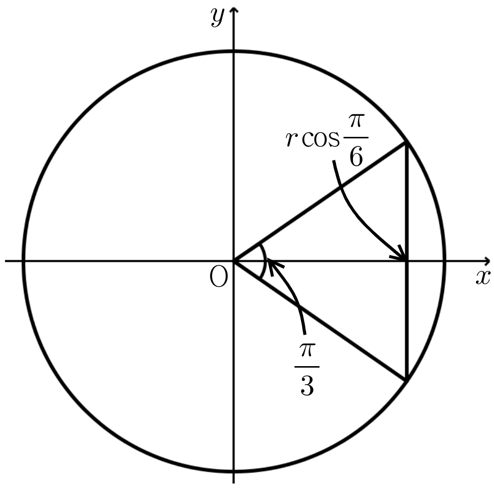
일차변환 $f\circ g$ 를 나타내는 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$에 의해

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$x=-\frac{1}{3}Y,\ y=\frac{1}{2}X$$

이므로 T_1 은 타원 $\left(-\frac{1}{3}y\right)^2+\left(\frac{1}{2}x\right)^2=1$ 의 넓이와 같아서 $T_1=6\pi$ 이다. 따라서 1-2에서와 같은 방법으로 $T_n=6^n\pi$ 이다. 그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}=\frac{1}{5}$ 이다.

문제2-1



그림과 같이

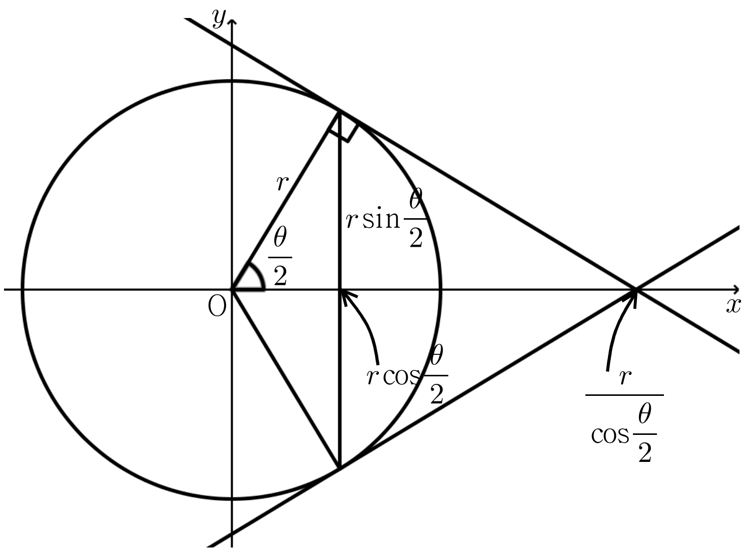
$$A\left(\frac{\pi}{3}\right)=\pi\int_{r\cos\frac{\pi}{6}}^{r}y^2\,dx=\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx=\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{r}$$

$$=\pi r^3\left\{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)\right\}=\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{8}\sqrt{3}\right)\pi r^3$$

이다.

문제2-2

제시문에 의해 $A(\theta)+B(\theta)=$(원뿔의 부피) ⋯ ㉠ 이고 그림에서



$$(\text{원뿔의 부피}) = \frac{1}{3}\pi \times r^2 \sin^2\frac{\theta}{2} \times r\left(\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}} - \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3 \times \left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \times \left(\frac{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3 \times \frac{\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

이다. 또한

$$A(\theta) = \pi\int_{r\cos\frac{\theta}{2}}^{r} r^2 - x^2\, dx = \pi\left\{r^3\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{3}r^3\left(1-\cos^3\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3\left\{3-3\cos\frac{\theta}{2} - 1 + \cos^3\frac{\theta}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\theta}{2}+2\right)$$

이다. $0<\theta<\pi$ 이므로 ㉠의 양변을 $A(\theta)$로 나누면

$$1+\frac{B(\theta)}{A(\theta)} = \frac{\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}{\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\theta}{2}+2\right)} = \frac{\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}{\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+2\right)}$$

이므로 $\lim_{\theta\to+0}\frac{B(\theta)}{A(\theta)} = \frac{1}{3}$ 이다. 따라서 $\lim_{\theta\to+0}\frac{A(\theta)}{B(\theta)} = 3$ 이다.

문제2-3

2-2에서 $A(X) = \frac{1}{3}\pi r^3\left(\cos\frac{X}{2}-1\right)^2\left(\cos\frac{X}{2}+2\right)$ 이다. 그러므로 $A(X)$의 평균

$$E(A(X)) = \int_0^{\pi} A(x)f(x)dx = \frac{1}{3}\pi r^3\int_0^{\pi}\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)^2\left(\cos\frac{x}{2}+2\right)\frac{\sin x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3\int_0^{\pi}\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)^2\left(\cos\frac{x}{2}+2\right)\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\, dx$$

이다. $\cos\frac{x}{2} = t$로 치환하면

$$E(A(X)) = \frac{1}{6}\pi r^3\int_0^1 t(t-1)^2(t+2)\, dt = \frac{1}{6}\pi r^3\int_0^1 (t^4-3t^2+2t)dt = \frac{\pi}{30}r^3$$

이다.

32 한양대학교 수시 자연계열(오후2)[32]

[문제1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.(50점)

좌표평면 위에 중심이 원점 O이고 반지름이 6인 원과 점 F(4, 0)이 있다. 이 원 위에 있는 임의의 점 P에 대해 선분 FP의 수직이등분선과 선분 OP의 교점을 X라고 하자. 점 P가 원 위에서 움직일 때, 점 X의 자취를 C라고 하자.

문제1-1

점 X의 자취 C는 어떤 곡선인지 구체적으로 설명하고, 이 곡선의 방정식을 구하시오.

문제1-2

점 $\mathrm{Q}(5, \sqrt{11})$에 대해 선분 FQ의 수직이등분선의 방정식을 $y=ax+b$라고 할 때, a, b의 값을 구하시오. 또한 이 수직이등분선이 곡선 C의 접선이 되는지를 설명하시오.

문제1-3

각 ∠OPF가 최대일 때, 삼각형 △OXF의 넓이를 구하시오.

32) 한양대학교 홈페이지

[문제2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.(50점)

> 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 다음과 같이 주어져 있다.
>
> $f(x)=\int_0^x \cos^2 t\,dt+\int_0^{2\pi-x}\sin^2 t\,dt$
>
> $g(x)=\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt+\int_0^{\cos x}\sqrt{1-t^2}\,dt$

문제2-1

닫힌구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 $f(x)$의 최댓값을 a, $g(x)$의 최댓값을 b라고 할 때, $a-b$의 값을 구하시오.

문제2-2

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)-\frac{\pi}{4}$와 두 직선 $x=0$, $x=\pi$로 둘러싸인 영역을 x축을 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피 V를 구하시오.

문제2-3

곡선 $y=g(x)$와 세 직선 $y=\frac{\pi}{4}$, $x=0$, $x=2\pi$로 둘러싸인 부분의 면적 A를 구하시오.

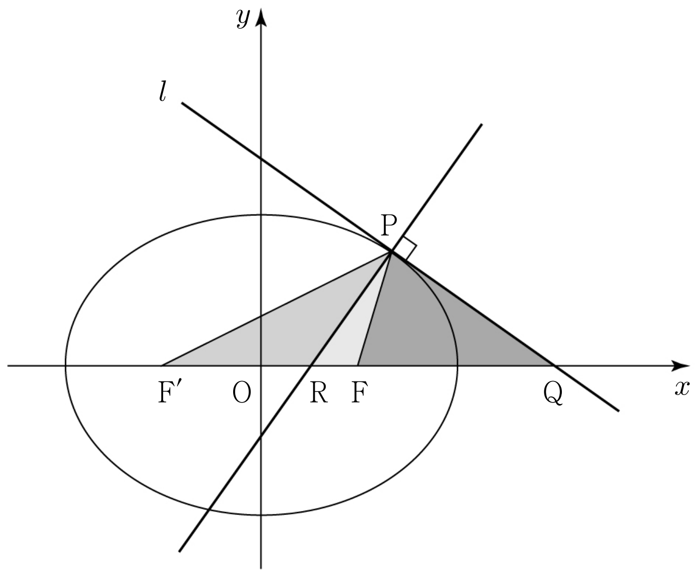
풀어보기 [문제1]

중심이 $(0,\ 3)$이고 반지름의 길이가 5인 원이 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 이 원과 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 이 만나는 점 중 한 점을 P라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BP}}$ 의 값은? (2015년 10월 전국연합)

① $\frac{41}{4}$ ② $\frac{21}{2}$ ③ $\frac{43}{4}$ ④ 11 ⑤ $\frac{45}{4}$

풀어보기 [문제2]

그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $3x^2+4y^2=12$ 위를 움직이는 제1사분면 위의 점 P에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 Q, 점 P에서 접선 l과 수직인 직선을 그어 x축과 만나는 점을 R라 하자. 세 삼각형 PRF, PF′R, PFQ의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 점 P의 x좌표는? (2015년 7월 전국연합)



① $\frac{13}{12}$ ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{17}{12}$

풀어보기 [문제3]

구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은?
(2011년 4월 전국연합)

(가) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = 1$
(나) $\cos x \int_0^x f(t)dt = \sin x \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt \left(단, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

풀어보기 [문제4]

함수 $f(x) = \begin{cases} 2x \ (0 \le x < 1) \\ 2 \ \ (x \ge 1) \end{cases}$ 에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x) = \int_0^x f(t)dt \quad (x \ge 0)$
이라 하자. 곡선 $y = g(x)$와 x축 및 직선 $x = 2$로 둘러싸인 부분을 x축 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $q-p$의 값을 구하시오(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)
(2011년 7월 전국연합)

예시답안

풀어보기 [문제1]

$x^2+(y-3)^2=5^2$에서 $y=0$일 때, $x=4$ 또는 $x=-4$이다. 따라서 원이 x축과 만나는 두 점의 좌표는 각각 A$(-4,0)$, B$(4,0)$으로 놓을 수 있다. 그런데 이 두 점은 타원의 초점이고 점 P는 타원 위의 점이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=10 \ \cdots \ ㉠$$

이다. 삼각형 APB에서 $\angle\mathrm{APB}=\theta$라 하면

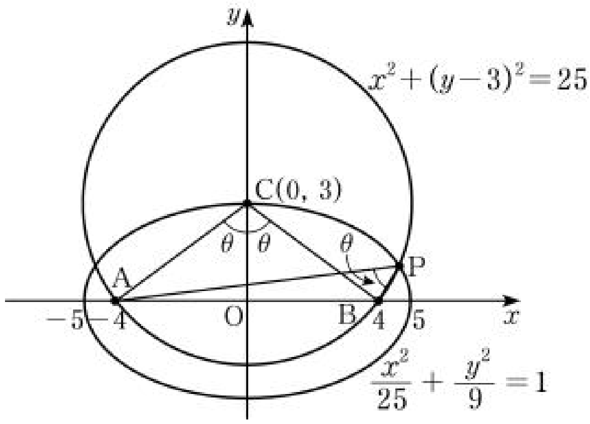
$$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2-2\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\cos\theta=8^2 \ \cdots \ ㉡$$

이다. 각 $\angle\mathrm{APB}$는 호 AB의 원주각이고, 원의 중심을 C$(0,3)$이라 하면 각 $\angle\mathrm{ACB}$는 호 AB의 중심각이다. 따라서 $\angle\mathrm{ACB}=2\theta$에서 $\angle\mathrm{OCA}=\angle\mathrm{APB}=\theta$이다.

이때 $\overline{\mathrm{AC}}=5$, $\overline{\mathrm{OC}}=3$이므로

$$\cos\theta=\frac{3}{5} \ \cdots \ ㉢$$

이다. ㉠, ㉡, ㉢에서 $\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BP}}=\dfrac{45}{4}$이다.



풀어보기 [문제2]

초점 F$(1,0)$, F$'(-1,0)$이고 P$(x_1,\ y_1)$에서 접선의 방정식은 $3x_1x+4y_1y=12$이다.

접선의 x절편은 $\dfrac{4}{x_1}$이다. P$(x_1,\ y_1)$에서 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y-y_1=\frac{4y_1}{3x_1}(x-x_1)$$

이다. 접선에 수직인 직선의 방정식의 x절편은 $\dfrac{x_1}{4}$ 이다. 세 삼각형의 높이는 모두 같으므로 세 삼각형의 밑변의 길이가 등차수열을 이룬다.

$$\overline{\mathrm{RF}}=1-\frac{x_1}{4},\ \overline{\mathrm{F'R}}=\frac{x_1}{4}+1,\ \overline{\mathrm{FQ}}=\frac{4}{x_1}-1$$

$$2\left(\frac{x_1}{4}+1\right)=\left(1-\frac{x_1}{4}\right)+\left(\frac{4}{x_1}-1\right)$$

양변에 $4x_1$ 을 곱하여 정리하면

$$3x_1^2+8x_1-16=(3x_1-4)(x_1+4)=0$$

따라서 $x_1=\dfrac{4}{3}$ 이다.

풀어보기 [문제3]

조건(나)에서 $\cos x\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=-\sin x\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)\,dt$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$-\sin x\int_0^x f(t)\,dt+\cos x\cdot f(x)\ =-\cos x\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)\,dt-\sin x\cdot f(x)$$

등식의 양변에 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt+\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)\ =-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt-\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2}\,f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt+\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt\ =\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1\ (\because\ \text{조건(가)})$$

$$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

풀어보기 [문제4]

$0\le x<1$ 일 때, $g(x)=\displaystyle\int_0^x 2t\,dt=x^2$ 이고

$x\ge 1$ 일 때, $g(x)=\displaystyle\int_0^1 2t\,dt+\int_1^x 2\,dt=2x-1$ 이므로

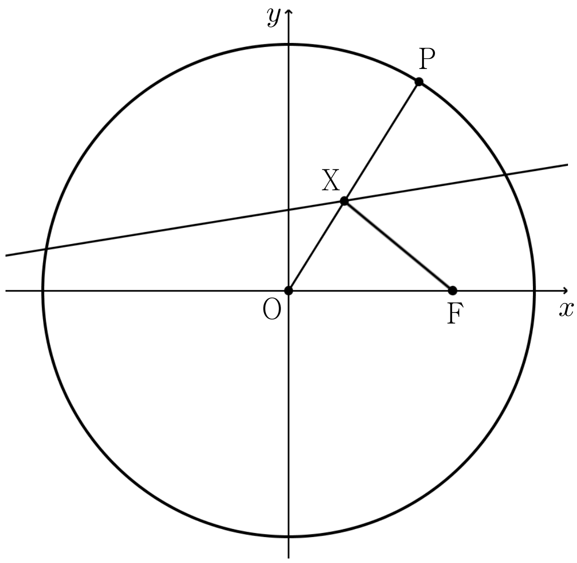
$$g(x)=\begin{cases} x^2 & (0 \le x < 1) \\ 2x-1 & (x \ge 1) \end{cases}$$

이다.

$$V=\pi\int_0^1 (x^2)^2\,dx+\pi\int_1^2 (2x-1)^2\,dx \; =\frac{68}{15}\pi$$

$\therefore\ q-p=53$

문제1-1



점 X 가 선분 FP 의 수직이등분선 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{FX}}=\overline{\mathrm{PX}}$ 이다. 또한

$$\overline{\mathrm{OX}}+\overline{\mathrm{FX}}=\overline{\mathrm{OX}}+\overline{\mathrm{PX}}=\overline{\mathrm{OP}}=6$$

이므로 점 X 의 자취는 두 점 O, F 를 초점으로 하고 장축의 길이가 6 인 타원이다.

따라서 곡선 C 의 방정식은 $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 이다.

문제1-2

두 점 $\mathrm{Q}\left(5,\ \sqrt{11}\right)$ 과 $\mathrm{F}(4,\ 0)$ 의 수직이등분선의 방정식은

$$y-\frac{\sqrt{11}}{2}=-\frac{5-4}{\sqrt{11}-0}\left(x-\frac{9}{2}\right)$$

$$y=-\frac{1}{\sqrt{11}}x+\frac{10}{\sqrt{11}}$$

이다.

또한 기울기가 $-\dfrac{1}{\sqrt{11}}$ 이면서 타원 $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 에 접하는 접선의 방정식은

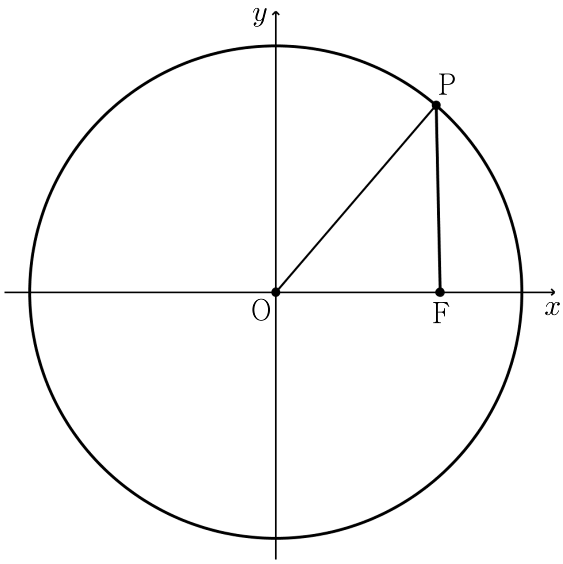
$$y = -\frac{1}{\sqrt{11}}(x-2) \pm \sqrt{9 \times \frac{1}{11} + 5}$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{11}}x + \frac{2}{\sqrt{11}} \pm \frac{8}{\sqrt{11}}$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{11}}x + \frac{10}{\sqrt{11}}, \quad y = -\frac{1}{\sqrt{11}}x - \frac{6}{\sqrt{11}}$$

이다. 따라서 두 점 $\mathrm{Q}(5, \sqrt{11})$과 $\mathrm{F}(4, 0)$의 수직이등분선의 방정식은 타원의 접선이다.

문제1-3



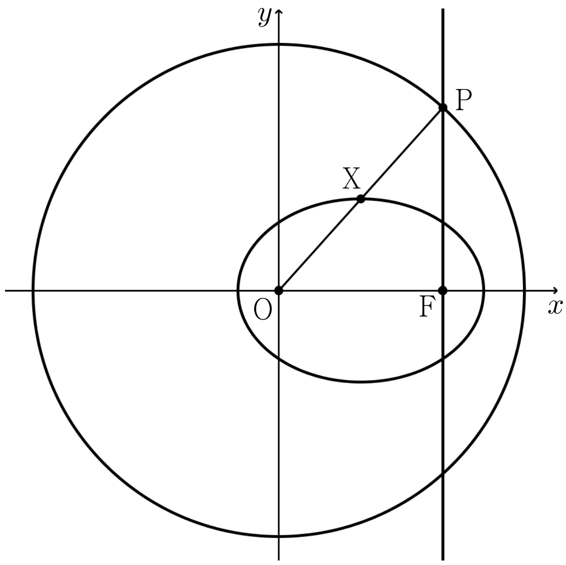
그림에서 선분 $\overline{\mathrm{PF}} = t$, $\angle \mathrm{OPF} = \theta$라 하면

$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{OP}}^2 + \overline{\mathrm{PF}}^2 - \overline{\mathrm{OF}}^2}{2 \times \overline{\mathrm{OP}} \times \overline{\mathrm{PF}}} = \frac{20 + t^2}{12t} = \frac{1}{12}\left(\frac{20}{t} + t\right) \geq \frac{1}{12} \times 2\sqrt{20} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

이고 등호는 $\frac{20}{t} = t$, $t = 2\sqrt{5}$ 일 때 성립한다. 또한 $t = 2\sqrt{5}$ 이면

$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = \overline{\mathrm{PF}}^2 + \overline{\mathrm{OF}}^2$$

이므로 삼각형 OPF는 $\angle \mathrm{F} = 90^\circ$인 직각삼각형이다.



그림에서 삼각형 $\triangle \mathrm{OXF}$의 높이는 타원 C의 단축의 길이의 절반이다. 따라서 삼각형 $\triangle \mathrm{OXF}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ 이다.

문제2-1

$$f(x)=\int_0^x \cos^2 t\,dt+\int_0^{2\pi-x}\sin^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^x(1+\cos 2t)\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi-x}(1-\cos 2t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^x+\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi-x}=\frac{1}{2}\sin 2x+\pi$$

이고 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$ 이다. 그리고 $f'(x)=\cos 2x$ 이므로 $y=f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{4}$ 에서 극댓값 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\pi+\frac{1}{2}$ 을 갖는다. 따라서 $a=\pi+\frac{1}{2}$ 이다.

또한 $g(x)=\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt+\int_0^{\cos x}\sqrt{1-t^2}\,dt$ 에서 $t=\sin\theta$ 로 치환하면

$$g(x)=\int_0^x \cos^2\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^x(1+\cos 2t)\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}(1+\cos 2t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^x+\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}-x}=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\pi}{4}$$

이고 $g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ 이다. 그리고 $g'(x)=\cos 2x$ 이므로 $y=g(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{4}$ 에서 극댓값 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ 을 갖는다. 그러므로 $b=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 $a-b=\frac{3}{4}\pi$ 이다.

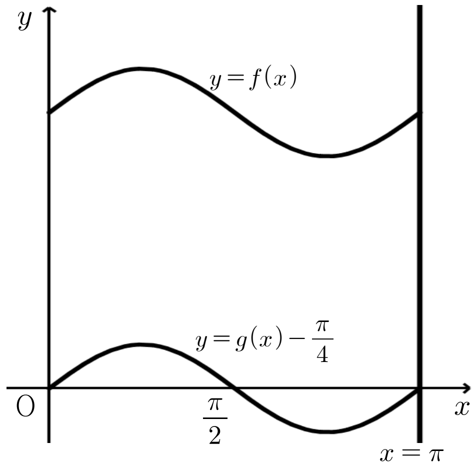
문제2-2

$f(x)$ 의 최솟값 $\pi-\frac{1}{2}$ 과 $g(x)-\frac{\pi}{4}$ 의 최댓값 $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ 의 크기를 비교하면

$$\pi-\frac{1}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\pi-1>0$$

$$\pi-\frac{1}{2}>\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

이고 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)-\frac{\pi}{4}$ 의 그래프는 그림과 같다.



그러므로 회전체의 부피

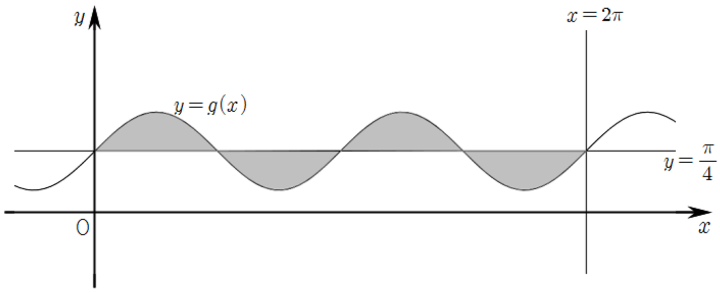
$$\begin{aligned} V&=\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\pi\right)^2dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2dx \\ &=\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{4}\sin^2 2x+\pi\sin 2x+\pi^2\right)dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2x dx \\ &=\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 4x}{8}+\pi\sin 2x+\pi^2\right)dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4x}{8}dx \end{aligned}$$

인데, $y=\cos 4x$ 와 $y=\sin 2x$ 의 주기가 각각 $\frac{\pi}{2}$ 와 π 이므로

$$\int_0^{\pi}\cos 4x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4x dx=\int_0^{\pi}\sin 2x dx=0$$

이다. 따라서 $V=\pi\left(\frac{1}{8}\pi+\pi^3\right)-\pi\left(\frac{1}{8}\times\frac{\pi}{2}\right)=\pi\left(\frac{\pi}{16}+\pi^3\right)=\left(\frac{1}{16}+\pi^2\right)\pi^2$ 이다.

문제2-3



그림에서 면적

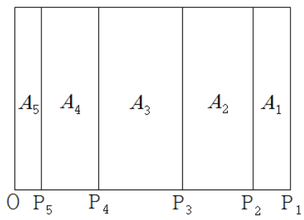
$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx = [-\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

이다.

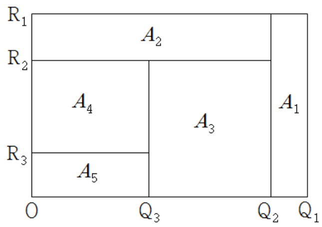
33 홍익대학교 수시33)

문제1

직사각형을 주어진 넓이의 비를 가지는 작은 직사각형들로 분할하여 보자. 예를 들어, 비 $A_1 : A_2 : A_3 : A_4 : A_5$ 가 주어졌을 때, 다음과 같이 두 가지 방법으로 직사각형을 분할하였다. 즉, 아래 그림에서 작은 직사각형들의 넓이의 비는 주어진 비와 같다.



<그림 1>



<그림 2>

<그림 1>의 분할 방법은 세로 방향으로만 분할한 단순한 방법임에 반하여, <그림 2>의 분할 방법은 복합적인 방법이다. 특히 <그림 2>의 분할에서 연속한 세 직사각형들 중(즉, A_k, A_{k+1}, A_{k+2} 로 표시된 직사각형들 중) 임의의 두 직사각형은 변의 일부를 공유한다.

(1) <그림 1>에서 선분의 비 $r_1 = \dfrac{\overline{\mathrm{OP}_2}}{\overline{\mathrm{OP}_1}}$, $r_2 = \dfrac{\overline{\mathrm{OP}_3}}{\overline{\mathrm{OP}_2}}$, $r_3 = \dfrac{\overline{\mathrm{OP}_4}}{\overline{\mathrm{OP}_3}}$, $r_4 = \dfrac{\overline{\mathrm{OP}_5}}{\overline{\mathrm{OP}_4}}$ 를 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 를 이용하여 나타내어라.

(2) 위 문항 (1)의 r_1, r_2, r_3, r_4 와 같은 값을 가지는 선분의 비를 <그림 2>에서 각각 찾고 그 이유를 설명하여라.

(3) 직사각형을 주어진 넓이의 비 $A_1 : A_2 : \cdots : A_n$ 을 가지는 작은 직사각형들로 분할하여 보자. 단, <그림 2>처럼 밑줄 친 제시문의 성질을 만족하여야 한다. 위 문항 (1)에서 구한 식을 일반화하여 $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$ 을 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 을 이용하여 정의하고, 이 값들을 이용하여 직사각형을 분할하는 과정을 설명하여라.

(4) 위 문항 (3)에서 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = 1$ 이라 하자. $A_1 : A_2 : \cdots : A_n$ 을 $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$ 로 나타내어라.

33) 홍익대학교 홈페이지

문제 2

홍익대학교 와우 공학관에는 1층부터 5층까지 운행하는 승강기[엘리베이터] 두 대가 나란히 설치되어 있다. A 승강기(고속)는 각 층마다 정차할 수 있고, B 승강기(저속)는 짝수 층에는 정차하지 않고 홀수 층에만 정차할 수 있다. A와 B 승강기는 중간층에 대기하는 이용자가 없을 경우 그 층에는 정차하지 않는다. 3층에서 승차하려는 이용자는 A와 B 승강기 중 먼저 도착하는 승강기에 탑승하고, 이때 뒤따르는 승강기는 3층에 정차하지 않는다.

A 승강기는 한 층을 이동하는 데 시간이 1초가 걸리고 B 승강기는 두 층을 이동하는 데 3초가 소요된다. A와 B 승강기가 한 층에 도착하여 문이 열린 후 닫히고 다시 출발할 때까지 12초가 소요되며, 이 시간을 이용자가 임의로 연장하거나 단축시킬 수 없고 이 시간 내에 모든 이용자가 승하차한다. 예를 들어, B 승강기가 1층을 출발하여 중간에 한 번 정차하고 5층에 도착하는 순간까지의 소요 시간은 $3+12+3=18$ 초이다.

두 승강기가 출발할 때, 2층에서 5층으로 이동하려는 이용자가 2층에서 대기하고 있을 확률은 $\frac{1}{3}$이고 3층에서 5층으로 이동하려는 이용자가 3층에서 대기하고 있을 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 이 두 사건은 서로 독립이며, 그 이외의 사건은 발생하지 않는다.

(1) A와 B 승강기가 1층에서 5층으로 동시에 출발할 때, A 승강기가 3층에 먼저 도착할 확률을 구하여라.

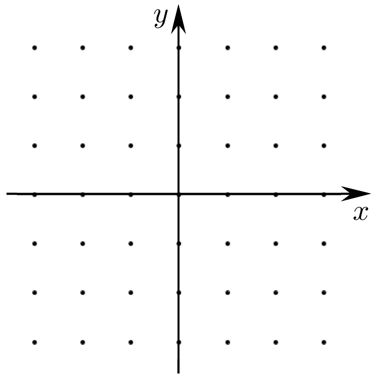
(2) A와 B 승강기가 1층에서 5층으로 동시에 출발할 때, A 승강기가 5층에 먼저 도착할 확률을 구하여라.

(3) A와 B 승강기가 1층에서 5층으로 동시에 출발할 때, 각 승강기가 1층에서 출발하는 순간부터 5층에 도착하는 순간까지의 소요 시간의 기댓값을 각각 구하여라.

(4) 두 명이 각각 다른 승강기를 타고 1층에서 동시에 출발하여 5층에 먼저 도착하는 시합을 할 때, A와 B 승강기 중 어느 승강기를 선택한 사람이 유리한지 설명하여라.

문제 3

좌표평면의 점 (a, b)에 대해 a와 b가 둘 다 정수인 점들을 생각하자.



양의 실수 x에 대해, 이러한 점들 중 원점 O에서의 거리가 x 이하인 점들의 개수를 $F(x)$라 하자. 예를 들어, $F(1)=5$, $F(\sqrt{3})=9$, $F(3)=29$ 이다.

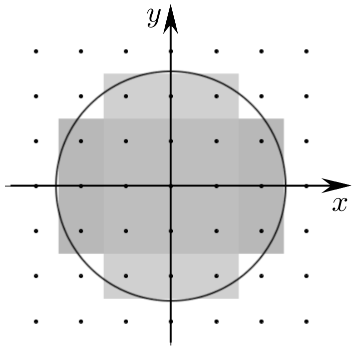
(1) 양의 실수 x에 대해, $F(x)$를 4로 나눈 나머지는 항상 1임을 설명하여라.

(2) $F(\sqrt{115})=357$ 이다. $F(\sqrt{116})$의 값을 구하여라.

(3) 아래 그림을 참고하여 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이상의 임의의 실수 x에 대해

$$\pi\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \leq F(x) \leq \pi\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

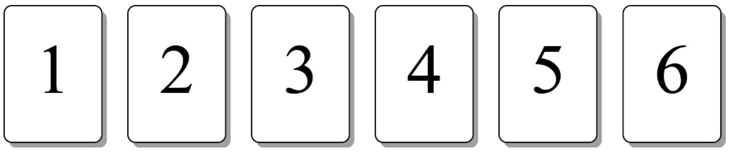
이 성립함을 설명하여라.



(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x^2}$의 값을 구하여라.

풀어보기 [문제1]

그림과 같이 1, 2, 3, 4, 5, 6 의 숫자가 한 면에만 각각 적혀 있는 6 장의 카드가 일렬로 놓여 있다. 주사위 한 개를 던져서 나온 눈의 수가 2 이하이면 가장 작은 숫자가 적혀 있는 카드 1 장을 뒤집고, 3 이상이면 가장 작은 숫자가 적혀 있는 카드부터 차례로 2 장의 카드를 뒤집는 시행을 한다. 3 번째 시행에서 4 가 적혀 있는 카드가 뒤집어질 확률을 구하시오. (단, 모든 카드는 한 번만 뒤집는다.)



풀어보기 [문제2]

검은 바둑돌 ●과 흰 바둑돌 ○을 일렬로 나열하였을 때 이웃한 두 개의 바둑돌의 색이 나타날 수 있는 유형은

●●	●○	○●	○○
<A 형>	<B 형>	<C 형>	<D 형>

으로 4가지이다.
예를 들어, 6개의 바둑돌을 <A형> 2번, <B형> 1번, <C형> 1번, <D형> 1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 아래와 같이 5이다.

●●○○●●
○●●●○○
○○●●●○
●●●○○●
●○○●●●

10개의 바둑돌을 <A형> 4번, <B형> 2번, <C형> 2번, <D형> 1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 검은 바둑돌과 흰 바둑돌은 각각 10 개 이상씩 있다.)

예시답안

풀어보기 [문제1]

주사위 한 개를 던져서 나오는 눈의 수가 2 이하일 사건을 A라 하면 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, 3 이상일 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$이다.

3번째 시행에서 4가 적혀 있는 카드가 뒤집어질 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) ABA 또는 ABB인 경우의 확률 : $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$

(ⅱ) AAB인 경우의 확률 : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$

(ⅲ) BAA 또는 BAB인 경우의 확률 : $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{9}=\frac{14}{27}$$

풀어보기 [문제2]

<B형>과 <C형>이 각각 2번 나타나도록 5개의 바둑돌을 나열한 경우는

●○●○● 또는 ●○●○●

(ⅰ) ●○●○●인 경우

1번의 <D형>을 만들기 위해서는 새로운 1개의 ○을 나열되어 있는 ○에 이웃하도록 나열하고, 4번의 <A형>을 만들기 위해서는 새로운 4개의 ●을 나열되어 있는 ●에 이웃하도록 나열하면 되므로

$${}_{2}\mathrm{C}_{1}\times{}_{3+4-1}\mathrm{C}_{4}={}_{2}\mathrm{C}_{1}\times{}_{6}\mathrm{C}_{4}=30$$

(ⅱ) ●○●○●인 경우

같은 방법으로

$${}_{3}\mathrm{C}_{1}\times{}_{2+4-1}\mathrm{C}_{4}={}_{3}\mathrm{C}_{1}\times{}_{5}\mathrm{C}_{4}=15$$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 경우의 수는 45이다.

문제1

(1) 세로의 길이가 같은 두 직사각형의 넓이의 비는 가로의 비와 같다. 따라서

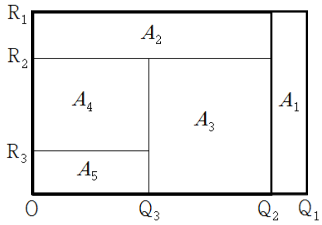
$$r_1=\frac{\overline{\mathrm{OP}_2}}{\overline{\mathrm{OP}_1}}=\frac{A_2+A_3+A_4+A_5}{A_1+A_2+A_3+A_4+A_5}\ ,\quad r_2=\frac{\overline{\mathrm{OP}_3}}{\overline{\mathrm{OP}_2}}=\frac{A_3+A_4+A_5}{A_2+A_3+A_4+A_5}\ ,$$

$$r_3=\frac{\overline{\mathrm{OP}_4}}{\overline{\mathrm{OP}_3}}=\frac{A_4+A_5}{A_3+A_4+A_5}\ ,\quad r_4=\frac{\overline{\mathrm{OP}_5}}{\overline{\mathrm{OP}_4}}=\frac{A_5}{A_4+A_5}$$

(2)

$$r_1=\frac{A_2+A_3+A_4+A_5}{A_1+A_2+A_3+A_4+A_5}=\frac{\overline{\mathrm{OQ}_2}}{\overline{\mathrm{OQ}_1}}$$

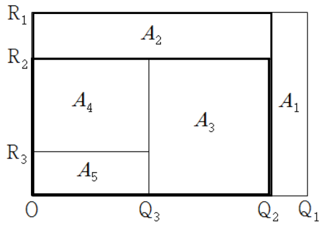
이다. 왜냐하면 <그림 2-1>에서 $A_1+A_2+A_3+A_4+A_5$ 로 이루어진 직사각형과 $A_2+A_3+A_4+A_5$ 로 이루어진 직사각형에서 세로의 길이가 같으므로 두 직사각형의 넓이의 비는 가로의 비와 같기 때문이다.



<그림 2-1>

$$r_2=\frac{A_3+A_4+A_5}{A_2+A_3+A_4+A_5}=\frac{\overline{\mathrm{OR}_2}}{\overline{\mathrm{OR}_1}}$$

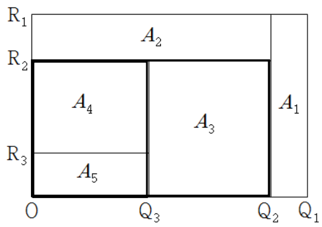
이다. 왜냐하면 <그림 2-2>에서 $A_2+A_3+A_4+A_5$ 로 이루어진 직사각형과 $A_3+A_4+A_5$ 로 이루어진 직사각형에서 가로의 길이가 같으므로 두 직사각형의 넓이의 비는 세로의 비와 같기 때문이다.



<그림 2-2>

$$r_3=\frac{A_4+A_5}{A_3+A_4+A_5}=\frac{\overline{\mathrm{OQ}_3}}{\overline{\mathrm{OQ}_2}}$$

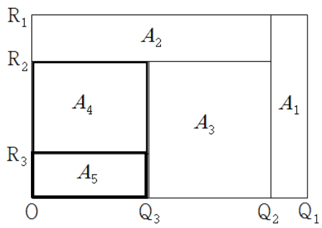
이다. 왜냐하면 <그림 2-3>에서 $A_3+A_4+A_5$ 로 이루어진 직사각형과 A_4+A_5 로 이루어진 직사각형에서 세로의 길이가 같으므로 두 직사각형의 넓이의 비는 가로의 비와 같기 때문이다.



<그림 2-3>

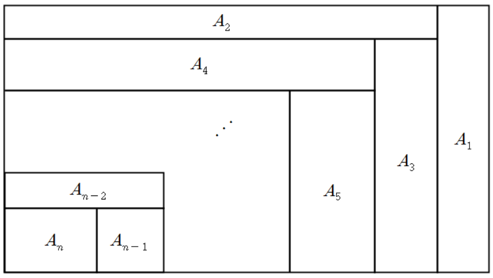
$$r_4=\frac{A_5}{A_4+A_5}=\frac{\overline{\mathrm{OR}_3}}{\overline{\mathrm{OR}_2}}$$

이다. 왜냐하면 <그림 2-4>에서 A_4+A_5 로 이루어진 직사각형과 A_5 로 이루어진 직사각형에서 가로의 길이가 같으므로 두 직사각형의 넓이의 비는 세로의 비와 같기 때문이다.

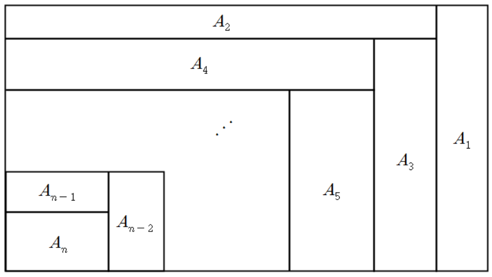


<그림 2-4>

(3) 주어진 조건에 맞게 다음 그림과 같이 작은 직사각형들로 분할할 수 있다.



n이 홀수일 때

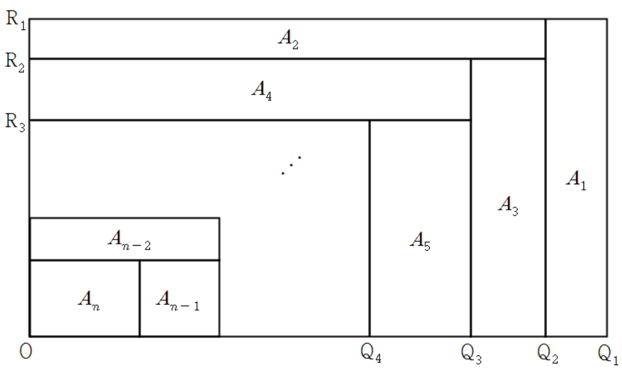


n이 짝수일 때

위 문항 (1)에서 구한 식을 일반화하여 $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$을 $A_1, A_2, \cdots, A_n$을 이용하여 정의하면 다음과 같다.

$$r_i = \frac{\sum_{k=i+1}^{n} A_k}{\sum_{k=i}^{n} A_k} \quad (i=1,\ 2, \cdots, n-1)$$

아래 그림을 참조하자. 주어진 직사각형에서 $\mathrm{OQ_1 : OQ_2}$ 의 비가 $1 : r_1$이 되는 점을 $\mathrm{Q_2}$라 하자. 점 $\mathrm{Q_2}$를 지나고 가로 $\mathrm{OQ_1}$에 수직인 선을 그어 직사각형을 분할하여 가로 $\mathrm{Q_1Q_2}$ 위의 작은 직사각형을 A_1이라 두자. 다시, 주어진 직사각형에서 작은 직사각형을 A_1을 제외한 직사각형에서 $\mathrm{OR_1 : OR_2}$ 의 비가 $1 : r_2$가 되는 점을 $\mathrm{R_2}$라 하자. 점 $\mathrm{R_2}$를 지나고 세로 $\mathrm{OR_1}$에 수직인 선을 그어 직사각형을 분할하여 세로 $\mathrm{R_1R_2}$ 위의 작은 직사각형을 A_2라고 두자. 또 다시, 주어진 직사각형에서 작은 직사각형을 A_1, A_2를 제외한 직사각형에서 가로 $\mathrm{OQ_2 : OQ_3}$의 비가 $1 : r_3$이 되는 점을 $\mathrm{Q_3}$이라 하자. 점 $\mathrm{Q_3}$을 지나고 가로 $\mathrm{OQ_2}$에 수직인 선을 그어 직사각형을 분할하여 가로 $\mathrm{Q_2Q_3}$ 위의 작은 직사각형을 A_3이라고 두자. 이러한 방식으로 계속하여 분할하여 주어진 조건에 맞게 직사각형을 분할할 수 있다.



(4) $\sum_{k=1}^{n} A_k = 1$, $\sum_{k=2}^{n} A_k = r_1$, $\sum_{k=3}^{n} A_k = r_1 r_2$, $\cdots$, $\sum_{k=n-1}^{n} A_k = r_1 r_2 \cdots r_{n-2}$,

$A_n = r_1 r_2 \cdots r_{n-2} r_{n-1}$ 이므로

$A_1 = 1 - r_1$,

$A_2 = r_1 - r_1 r_2 = r_1(1 - r_2)$,

$\cdots$

$A_{n-1} = r_1 r_2 \cdots r_{n-2} - r_1 r_2 \cdots r_{n-2} r_{n-1} = r_1 r_2 \cdots r_{n-2}(1 - r_{n-1})$,

$A_n = r_1 r_2 \cdots r_{n-2} r_{n-1}$

문제2

(1) A 승강기가 3층에 먼저 도착하려면 2층에 대기하는 사람이 없어야 한다. 따라서 그 확률은 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 이다.

(2) 2층 대기, 3층 대기 여부에 따른 각 경우의 확률과 두 승강기 A와 B의 소요 시간을 표로 나타내면 다음과 같다.

	2층 대기 여부	3층 대기 여부	확률	소요 시간(초)
i)	○	○	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$	$A: 1+12+3=16$ (2층 정차) $B: 3+12+3=18$ (3층 정차)
ii)	○	×	$\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$A: 1+12+3=16$ (2층 정차) $B: 3+3=6$
iii)	×	○	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$	$A: 2+12+2=16$ (3층 정차) $B: 3+3=6$
iv)	×	×	$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$	$A: 1+1+1+1=4$ $B: 3+3=6$

따라서 A 승강기가 5층에 먼저 도착할 확률은 $\frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$ 이다.

(3) 위 (2)의 표를 참조하자. 각 승강기의 소요 시간의 기댓값을 구해보면

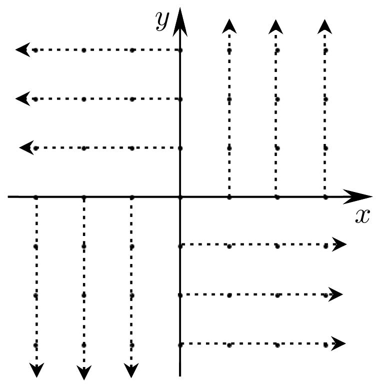
$$A: 16 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} = 10 \text{ (초)},\ B: 18 \times \frac{1}{12} + 6 \times \frac{11}{12} = 7 \text{ (초)}$$

이다.

(4) 승강기의 소요 시간의 기댓값은 승강기 A의 값이 크지만, 5층에 먼저 도착할 확률이 A 승강기가 $\frac{7}{12}$ 로 B 승강기가 먼저 도착할 확률 $\frac{5}{12}$ 보다 크므로 A 승강기를 선택한 사람이 유리하다.

문제3

(1) 1사분면과 x축의 x좌표가 양수인 부분을 1구역이라 하고 1구역을 원점을 중심으로 90° 회전한 구역을 2구역, 180° 회전한 구역을 3구역, 270° 회전한 구역을 4구역이라 하자. 그러면 원점을 제외한 좌표평면의 모든 점은 $1, 2, 3, 4$구역 중 어느 한 구역에만 포함된다. 또한 1구역에서 원점 O에서의 거리가 x 이하인 임의의 점 P에 대하여 이 점을 원점을 중심으로 90°, 180°, 270° 회전하여도 원점 O에서의 거리가 x 이하가 된다. 그러므로 1구역에서 원점 O에서의 거리가 x 이하인 점들의 개수를 a라고 두면 $F(x)=4a+1$ 이다. 따라서 $F(x)$를 4로 나눈 나머지는 항상 1이다.



대학 제시 예시 답안

$F(x)$는 좌표평면에서 중심이 원점이며 반지름이 x인 원 안에 포함된 정수 순서쌍의 개수와 같다. 원점을 제외한 임의의 한 점이 이러한 원 안에 포함되면, 90°씩 회전하여 나타나는 4개의 점들이 동시에 포함된다. 그러므로 원점을 제외하면 원 안에 포함된 점의 개수는 4의 배수이다. 원점은 항상 포함되므로 총 개수를 4로 나눈 나머지는 1이다.

별해1-대학 제시

중심이 원점이며 반지름이 x인 원 안에 원점 $(0, 0)$은 항상 포함된다. 원점이 아닌 x축 또는 y축 위의 점들은 원점에서의 거리가 같은 4개가 동시에 포함된다. 그 이외의 점 (m, n)이 포함되면 부호를 바꾼 순서쌍 4개 (m, n), $(m, -n)$, $(-m, n)$, $(-m, -n)$가 역시 모두 포함된다. 그러므로 이러한 정수 순서쌍들의 총 개수를 4로 나눈 나머지는 1이다.

별해2-대학 제시

정수 순서쌍 (m, n)이 중심이 원점이며 반지름이 x인 원 안에 포함되면 집합
$S=\{(m, n), (m, -n), (-m, n), (-m, -n), (n, m), (n, -m), (-n, m), (-n, -m)\}$
안의 모든 순서쌍들 역시 포함된다. 집합 S의 원소의 개수는 $(m, n)=(0, 0)$일 때 1개, 그 외 (m, n)이 x축, y축, 직선 $y=x$또는 $y=-x$ 위에 있는 경우 4개, 그 외의 경우 8개이

다. 원점을 제외하면 원 안에 포함된 점의 개수는 4의 배수이므로, 총 개수를 4로 나눈 나머지는 1이다.

(2) 1구역에서 원점 O에서의 거리가 $\sqrt{115}$ 초과하고 $\sqrt{116}$ 이하인 점들을 찾아보자.

$116 = 10^2 + 4^2$ 이므로 $(4, 10)$과 $(10, 4)$가 있다. 또한

$1^2+10^2=101,\ 1^2+11^2=122>116;\ 2^2+10^2=104,\ 2^2+11^2>116;$

$3^2+10^2=109,\ 3^2+11^2>116;\ 4^2+9^2=97,\ 4^2+10^2=116;$

$5^2+9^2=106,\ 5^2+10^2>116;\ 6^2+8^2=100,\ 6^2+9^2=117>116;$

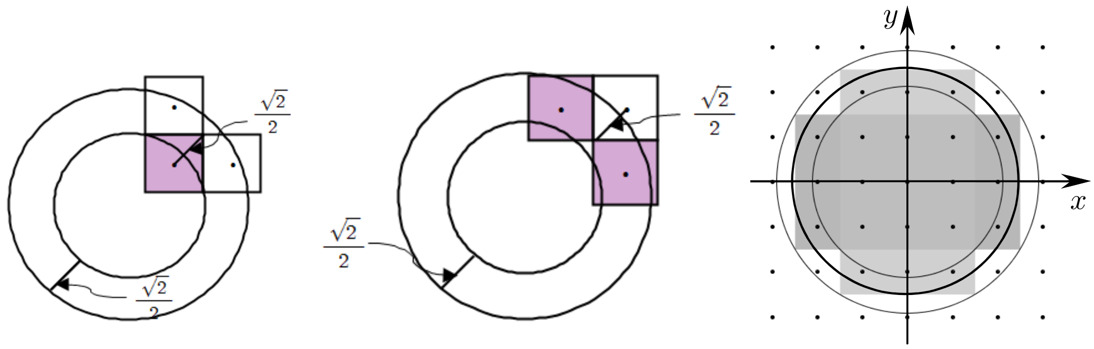
$7^2+8^2=113,\ 7^2+9^2>116;\ 8^2+7^2=113,\ 8^2+8^2=128>116;$

$9^2+5^2=106,\ 9^2+6^2=117>116;\ 10^2+3^2=109,\ 10^2+4^2=116;$

$11^2+0^2=121>116$

이다. 그러므로 1구역에는 원점 O에서의 거리가 $\sqrt{115}$ 초과하고 $\sqrt{116}$ 이하인 점들은 $(4, 10)$과 $(10, 4)$ 밖에 없다. 따라서 $F(\sqrt{116})=357+4\times2=365$ 이다.

(3) 원점 O에서의 거리가 x 이하이고 좌표를 이루는 두 수 모두 정수인 임의의 점 P에 대하여 그 점이 중심이고 한 변의 길이가 1인 정사각형을 R_{P} 라고 두자. 그러면 $F(x)$는 이러한 정사각형 R_{P} 들의 총합과 같다. 또한 그 넓이는 다음 그림에서 보듯이



중심이 원점이고 반지름이 $x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 인 원의 넓이보다 작고 반지름이 $x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 인 원의 넓이보다 크다. 따라서, $\pi\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \le F(x) \le \pi\left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ 이다.

대학 제시 예시 답안

주어진 그림과 같이 중심이 원점이며 반지름이 x인 원 안에 포함된 정수 순서쌍 (m, n)에 그 점을 중심으로 갖는 단위면적의 정사각형과의 일대일 대응을 고려하면, 색칠된 영역은 이 정사각형들의 합집합이므로 $F(x)$와 넓이가 같다. 색칠된 영역에 있는 임의의 점 (a, b)는

원점으로부터의 거리가 x 이하인 어떤 정수 순서쌍 (m, n)을 중심으로 갖는 단위 정사각형에 포함되므로 (m, n)과 (a, b) 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이하이다. 삼각형의 한 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합 이하이므로 (a, b)와 원점 사이의 거리는 $x+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이하이다. 즉, 색칠된 영역은 반지름 $x+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 원 안에 포함되므로, 두 넓이를 비교하면 $F(x) \le \pi\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ 를 얻는다. 비슷하게, 색칠된 영역에 포함되지 않은 임의의 점 (c, d)는 원점으로부터의 거리가 x 보다 큰 어떤 정수 순서쌍 (m, n)을 중심으로 갖는 단위 정사각형에 포함되고, 역시 (m, n)과 (c, d) 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이하이다. 그러므로 (c, d)와 원점 사이의 거리는 $x-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 보다 크다. 즉, 반지름 $x-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 원은 색칠된 영역에 포함되므로 $\pi\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \le F(x)$ 이다.

(4) 위의 (3)에 의해서 $x>0$일 때,

$$\pi\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \le F(x) \le \pi\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

$$\frac{\pi\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{x} \le \frac{F(x)}{x} \le \frac{\pi\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{x}$$

이다. 또한

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{x^2}=\pi\ ,\ \lim_{x\to\infty}\frac{\pi\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{x^2}=\pi$$

이다. 따라서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x^2}=\pi$$

이다.

발간을 도와주신 분

기 획

노민구 부산광역시교육청 교 육 국 장
김혁규 부산광역시교육청 중등교육과장
정대호 부산광역시교육청 중등교육과 장학관
민복기 부산광역시교육청 중등교육과 장학사

집 필

강진희 동래고등학교
김현미 부산진여자상업고등학교
박철호 금정고등학교
박윤효 부산국제고등학교
임재석 부산사대부설고등학교
위성미 부산사대부설고등학교
원태경 동래고등학교
전현수 부산국제외국어고등학교
정경영 부산고등학교
조준혁 동천고등학교
조동석 부산강서고등학교

2016학년도 수리논술 나침반Ⅷ

발행처 : 부산광역시교육청

발행일 : 2016. 6. 24.

인쇄처 : 고려문화사 051) 816-7988